République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilités**

Par

CHAGRA Oussama

Titre :

Mouvement Brownien et Integrale Stochastique

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**LABED Saloua**	UMKB	Président
Dr.	**KORICHI Fatiha**	UMKB	Encadreur
Dr.	**CHAOUCHKHOUANE Nassima**	UMKB	Examinateur

Juin 2018

Dédicace

A mes chers parents,

A mes amis proches : **I**driss **H**amani et **S**limani **A**icha ,

A mes frères et mes sœurs,

A toute ma grande famille et toutes mes connaissances,

A tous mes amis sans exception,

A tous ceux qui m'ont encouragé à poursuivre mes études,

A toutes les personnes qui m'ont soutenu à accomplir ce travail.

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je remercie **DIEU**, de m'avoir aidé et donné la volonté pour arriver à ce stade et réaliser ce modeste travail.

Mes vifs remerciements sont adressé à mon encadreur **KORICHI Fatiha** pour ces conseils, ses orientations, et la confiance qu'elle m'accorde.

Je tiens à exprimer toute ma profonde gratitude à madame : **LABED Saloua**

et madame : **CHAOUCHKHOUANE Nassima** qui ont accepté d'être dans le jury de ce mémoire.

Je remercie tous les enseignants qui ont contribués à ma formation, ainsi que tous les employés du département de Mathématiques.

Enfin, je tiens aussi à remercier tous ceux qui ont de près ou de loin aidé à rendre ce travail possible, que ce soit par des idées ou par des encouragements.

Je vous dis : Merci

CHAGRA Oussama

Table des matières

Introduction

Le calcule stochastique d'Itô est devenue un élément fondamental de la théorie moderne des la probabilités et trouvé une application importante dans d'autres disciplines par exemple, dans la finance mathématique ; le calcule d'Itô est un outil puissant pour traiter le comportement des prix des actions. Les équations différentielles stochastiques dirigées par semi-martingales, particulièrement le mouvement brownien, sont couramment utilisés pour modéliser la dynamique des prix du marché boursier.

L'objectif de cette étude est de présente le mouvement brownien et l'intégrale stochastique.

Pour cela, l'étude a été divisée en trois chapitre :

Le premier chapitre est consacré aux notions générales de processus stochastique,on a présenté des définitions de notion comme la filtration, temps d'arrêt, martingales,...etc.

Dans le deuxième chapitre, on s'intéresse à l'étude du mouvement brownien, et ces propriétés principales.

Et finalemènent, dans le troisième chapitre, on va présenter l'intégral stochastique en générale et leur types.

Chapitre 1

Généralités sur les processus stochastiques

Ce chapitre regroupe quelques définitions de base utilisées : processus stochastique, filtration, temps d'arrêt, martingales,...etc, qui sont indispensables pour la suite.

1.1 Processus stochastique

L'objet de la théorie des processus stochastiques (ou aléaroires) est l'étude des phénomènes aléatoires dépendant du temps.

Définition 1.1.1 *Un processus stochastique* $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *est une famille de variables aléatoires* X_t *indexée par un ensemble* $\mathbb{T}$*.*

En génerale $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{R}_+$ *et on considére que le processus est indexé par le temps* $\mathbb{T}$*.*

Un processus dépend de deux paramètres : $X_t(\omega)$ *dépend de* t *(en général le temps) et de l'aléatoire* $\omega \in \Omega$*.*

- *pour* $t \in \mathbb{T}$ *fixé,* $\omega \in \Omega \longmapsto X_t(\omega)$ *est une variable aléatoire sur l'éspace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

- *pour $\omega \in \Omega$ fixé, $t \in \mathbb{T} \longmapsto X_t(\omega)$ est une fonction à valeurs réelles appelée trajectoire du processus.*

Définition 1.1.2 *On dit que le processus est à trajectoires continues si les applications $t \longmapsto X_t(\omega)$ sont continues pour presque tout ω.*

Définition 1.1.3 *Un processus est dit càdlàg (continu à droite, limites à gauche) si ses trajectoires sont continues à droite, pourvues de limites gauche, et il est dit càglàd si ses trajectoires sont continues à gauche, pourvues de limites à droite.*

Définition 1.1.4 *Un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est dit mesurable si l'application suivante :*

$$\begin{aligned}(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}) &\longrightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))\\ (t,\omega) &\longmapsto X_t(\omega)\ ,\end{aligned}$$

est mesurable

Définition 1.1.5 *Un processus est dit continue si pour tout $\omega \in \Omega$, $X_t(\omega)$ est continue ($i.e$ les trajectoires sont continues).*

Définition 1.1.6 *Soient X et Y deux processus. on dit que X une modification de Y si :*

$$\forall t \geq 0,\ \mathbb{P}\{X_t = Y_t\} = 1\ ,$$

on dit que du'ils sont indistinguable si presque sûrement leurs trajectoires coincident :

$$\mathbb{P}\{X_t = Y_t, \forall t \geq 0\} = 1.$$

Remarque 1.1.1 *La deuxième notion est plus forte que la première.*

1.2 Filtration

Définition 1.2.1 *On appelle filtration* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *de* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*, une famille croissante de sous tribus de* $\mathcal{F}$*, c-à-d :* $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$, $\forall 0 \leq s \leq t$.

Remarque 1.2.1 *Si* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *est une filtration sur un espace de probabilité de* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. *On dit que de* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ *est un espace filtré.*

Définition 1.2.2 *On dit qu'une filtration* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *est continue à droite si :* $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+} = \cap_{s>t}\mathcal{F}_s$, $\forall 0 \leq s \leq t$.

On définit l'ensemble des négligeables $\mathcal{N}$ de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ par :

$$\mathcal{N} = \{N \subset \Omega, \exists A \in \mathcal{F}/N \subset A, \mathbb{P}(A) = 0\}.$$

Définition 1.2.3 *On dit qu'une filtration* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *est complète lorsque tout* $\mathcal{F}_t$ *contient l'ensemble des négligeables* $\mathcal{N}$ *(ce qui équivaux à* $\mathcal{N} \in \mathcal{F}_0$*).*

Définition 1.2.4 (***Filtration standard***) *Une filtration* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *satisfait les conditions usuelles si elle est continue à droite et si* $\mathcal{F}_0$ *contient l'ensemble des négligeables* $\mathcal{N}$.

Définition 1.2.5 *Un processus stochastique* $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *est dit adapté par rapport à la filtration* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *si pour tout* $t \in \mathbb{T}$, X_t *est* $\mathcal{F}_t$ *mesurable.*

Définition 1.2.6 *Un processus* $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *est progressivement mesurable par rapport à* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *si l'application :*

$$([0,t] \times \Omega, \mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}) \longrightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$$
$$(s, \omega) \longmapsto X_s(\omega),$$

est mesurable.

Proposition 1.2.1 *Si X est un processus mesurable adapté, il admet une modification progressivement mesurable.*

Proposition 1.2.2 *Si X est un processus mesurable adapté et admet des trajectoires càd ou càg, il est progressivement mesurable.*

1.3 Temps d'arrêt

On se donne un espace de probabilité muni d'une filtraion $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$.

Définition 1.3.1 *Un temps d'arrêt par rapport à une filtraion $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ est une variable aléatoire τ à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ telle que, pour tout $t \geq 0$:*

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \in \mathbb{R}_+ \ .$$

On associe à temps d'arrêt τ une tribus que l'on note $\mathcal{F}_\tau$, definie par :

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F},\ pour\ tout\ t \geq 0,\ A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \ .$$

Cette tribu représente les informations disponibles avant l'instant aléatoire τ.

Définition 1.3.2 (***Processus arrêt***) *Soit $X = (X_t)_{\ t\geq 0}$ un processus adapté d'une filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ et τ un temps d'arrêt relativement à la même filtration on appelle processus arrêt au temps τ le processus definie par $X^\tau = (X_{\tau\wedge t})_{t\geq 0.}$*

Remarque 1.3.1 *Le procssus arrêt est adapté à $\{\mathcal{F}_{\tau\wedge t}\}_{t\geq 0}$ et donc adapté à la $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$.*

Propriété 1.3.1

1) Si τ est un temps d'arrêt, alors τ est $\mathcal{F}_\tau-$mesurable.

2) Si S et τ sont deux temps, alors $S \wedge \tau$ est temps d'arrêt.

3) Si S et τ sont deux temps et si $S \leq \tau$, alors $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_\tau$.

Proposition 1.3.1 *Soient τ un temps d'arrêt et S une variable aléatoire $\mathcal{F}_\tau-$mesurable telle que $S \geq \tau$, alors S est aussi un temps d'arrêt.*

Proposition 1.3.2 *Si un processus X est continu et adapté, X_τ est $\mathcal{F}_t-$mesurable.*

1.4 Martingales à temps continu

Nous allons maintenant introduire à la notion de martingale en temps continu.

On se donne un espace de probabilité muni d'une filtraion $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$

Définition 1.4.1 *Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ à valeur réelles ; X_t est $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ adapté et intégrable (pour tour $t \geq 0$, $E\,[\mid X_t \mid] < \infty$).*

- *Une martingale si :*

$$\forall 0 < s < t \qquad \mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] = X_s.$$

- *Une sur-martingale si :*

$$\forall 0 < s < t \qquad \mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] \leq X_s.$$

- *Une sous-martingale si :*

$$\forall 0 < s < t \qquad \mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] \geq X_s.$$

Proposition 1.4.1 *Soit $(X_t)\ _{t\geq 0}$ une $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}-$martingale de carré intégrable ($i.e. E[X_t^2] < \infty$ pour tout $t \geq 0$). Alors pour $s \leq t$, on a :*

$$\mathbb{E}[(X_t - X_s)^2 \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[X_t^2 - X_s^2 \mid \mathcal{F}_s].$$

Preuve. Par un calcul direct, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(X_t - X_s)^2 \mid \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[X_t^2 \mid \mathcal{F}_s] - 2\mathbb{E}[X_t X_s \mid \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[X_s^2 \mid \mathcal{F}_s] \\
&= \mathbb{E}[X_t^2 \mid \mathcal{F}_s] - 2X_s\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] + X_s^2 \\
&= \mathbb{E}[X_t^2 \mid \mathcal{F}_s] - 2X_s^2 + X_s^2 \\
&= \mathbb{E}[X_t^2 \mid \mathcal{F}_s] - X_s^2 \\
&= \mathbb{E}[X_t^2 - X_s^2 \mid \mathcal{F}_s].
\end{aligned}$$

■

Définition 1.4.2 *Soit $(X)_{t\geq 0}$ un processus stochastique*

1) *On dit que $(X)_{t\geq 0}$ est uniformément integrable si :*

$$\lim_{\alpha \longrightarrow +\infty} \sup_{t\geq 0} \int_{|X_t|>\alpha} \mid X_t \mid dP = 0.$$

2) *Si $p \geq 1$, on dit que $(X)_{t\geq 0}$ est borné dans L^P si :*

$$\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}\left[\mid X_t \mid^p\right] < \infty.$$

Théorème 1.4.1 *Un processus $(X)_{t\geq 0}$ est uniformément intégrable si et seulement si :*

a. $(X)_{t\geq 0}$ est borné dans L^1.

b. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha_\varepsilon > 0$ tel que : si $A \in \mathcal{F}$ avec $P(A) < \alpha_\varepsilon$ alors :

$$\sup_{t\geq 0} \int_{|X_t|>\alpha} \mid X_t \mid dP < \varepsilon.$$

Proposition 1.4.2 (***Inégalité de jensen***) *Soit $(X_t)_{\ t\geq 0}$ une martingale (resp. une sous-martingale) et soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe (resp. convexe croissante). On suppose que $\varphi(X_t) \in L^1$pour tout $\ t \geq 0$.*

Alors $(\varphi(X_t))_{t\geq 0}$ est une sous-martingale.

Proposition 1.4.3 *Soit $(X_t)_{\ t>0}$ une sous-martingale ou sur-martingale .*

Alors pour tout $t > 0$,

$$\sup_{0 \le s \le t} \mathbb{E}[\mid X_s \mid] < \infty.$$

i) (***Inégalité maximale***) *Soit $(X_t)_{\ t \ge 0}$ une sur-martingale à trajectoires continues à droit. Alors pour tout $t > 0$ et tout $\lambda > 0$,*

$$\lambda \ P[\sup_{0 \le s \le t} \mid X_s \mid > \lambda] \le \mathbb{E}[\mid X_0 \mid] + 2\mathbb{E}[\mid X_t \mid].$$

ii) (***Inégalité de Doob dans*** L^p) *Soit $(X_t)_{\ t \ge 0}$ une martingale à trajectoires continues à droit. Alors pour tout $t > 0$ et tout $p > 0$,*

$$\mathbb{E}[\sup_{0 \le s \le t} \mid X_s \mid^p] \le (\frac{p}{p-1})^p \mathbb{E}[\mid X_t \mid].$$

Théorème 1.4.2 (***Théorème d'arrêt optionnel de Doob***) *Soient X une martingale continue par rapport à $\{\mathcal{F}_t\}_{t \ge 0}$ et τ, S deux temps d'arrêt bornés telle que $\tau \le S$. Alors on a :*

$$X_\tau = E[X_S \mid \mathcal{F}_\tau] \qquad p.s.$$

Si de plus la martingale X est uniformément intégrable, l'égalité reste vraie sans supposer que τ et S soient bornés.

Remarque 1.4.1 *Si $(X_t)_{\ t \ge 0}$ est une martingale ; alors pour tout $t \ge 0$*

$$\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_0].$$

1.5 Martingales locales et semi-martingales continues

1.5.1 Variation totale et Variation quadratique

Définition 1.5.1 *La variation infinitésimale d'ordre p d'un processus X_i défini sur $[0, T]$ associée à une subdivision $\Pi_n = (t_1^n, ..., t_n^n)$ est définie par :*

$$V_T^p(\Pi_n) = \sum_{i=1}^{n} \left| X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n} \right|^p .$$

Si $V_T^p(\Pi_n)$ a une limite dans un certain sens (convergence L^p, convergence p.s.) lorsque :

$$\Pi_n := \|\Pi_n\|_\infty = \max_{i \le n} \left| t_{i+1}^n - t_i^n \right| \to 0.$$

La limite ne dépend pas de la subdivision choisie et nous l'appellerons alors la variation d'ordre p de X_t sur $[0, T]$. En particulier,

- *si $p = 1$, la limite s'appelle la variation totale de X_t sur $[0, T]$*
- *si $p = 2$, la limite s'appelle la variation quadratique de X_t sur $[0, T]$ et est notée $\langle X \rangle_T$ (où $\langle X \rangle_T = \langle X, X \rangle_T$).*

Définition 1.5.2 *Un processus X est un processus à variation bornée sur $[0, T]$ s'il est à variation bornée trajectoire par trajectoire :*

$$\sup_{\Pi_n} \sum_{i=1}^{n} \left| X_{t_i} - X_{t_{i-1}} \right| < \infty \quad p.s.$$

Proposition 1.5.1 *Un processus est à variation bornée si et seulement s'il est la différence de deux processus croissants.*

Proposition 1.5.2 *Si X est un processus à variation bornée à trajectoires continues, sa variation quadratique est nulle presque sûrement :*

$$\langle X \rangle_T = 0.$$

Définition 1.5.3 *Soient X et Y deux processus tels que X, Y et $X+Y$ ont des variations quadratiques finies dans L^2. On définit alors la covariation quadratique entre les processus X et Y comme :*

$$\langle X, Y\rangle := \frac{1}{2}\left(\langle X+Y\rangle - \langle X\rangle - \langle Y\rangle\right).$$

Par construction, l'application $(X, Y) \mapsto \langle X, Y\rangle$ vérifie :

i) *Relation de bilinéarité : $\langle X+Y, X+Y\rangle := \langle X, X\rangle + 2\langle X, Y\rangle + \langle Y, Y\rangle$.*

ii) *Relation scalaire : $\langle \alpha X, \beta Y\rangle = \alpha\beta \langle X, Y\rangle$.*

Proposition 1.5.3 *Soit X un processus à variation bornée continu ayant une variation quadratique dans L^2(qui est donc nulle) et Y un processus à variation quadratique finie dans L^2, alors $X+Y$ est à variation finie dans L^2 et l'on a :*

$$\langle X+Y\rangle = \langle Y\rangle,$$

ce qui revient à dire que :

$$\langle X, Y\rangle = 0.$$

Théorème 1.5.1 ***Décomposition de Doob Meyer***

Si M est une martingale continue de carré intégrable ($\mathbb{E}\left(M_t^2\right) < \infty$ pour tout t), alors $\langle M\rangle$ est l'unique processus croissant continu nul en 0 tel que $M^2 - \langle M\rangle$ soit une martingale.

1.5.2 Martingales locales continues

Définition 1.5.4 *Soit M un processus défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ à valeurs réelles, continu. On dit que M est une martingale locale continue si :*

(i) *M_0 est intégrable.*

(ii) *Il existe une suite de temps d'arrêt $(T_n)_n$ telle que $T_n \uparrow +\infty$ p.s. et telle que M^{T_n} soit une martingale uniformément intégrable.*

Proposition 1.5.4

- *Si M est une martingale locale, pour tout temps d'arrêt T, M^T est une martingale locale.*
- *Une martingale locale positive M telle que $M_0 \in L_1$ est une surmartingale.*
- *Une martingale locale bornée est une martingale.*

Variation quadratique d'une martingale locale

Théorème 1.5.2 *Soit M une $\{\mathcal{F}\}_{t\geq 0}$ martingale locale continue. Alors M est à variation quadratique finie et sa variation quadratique $\langle M, M\rangle_t$ est l'unique processus croissant, adapté, continue nul en zéro tq : $M_t^2 - \langle M, M\rangle_t$ est une $\{\mathcal{F}\}_{t\geq 0}$ martingale.*

Théorème 1.5.3 *Soit M une martingale locale avec $M_0 = 0$.*

1. *Si M est une martingale bornée dans L^2, alors $\mathbb{E}[\langle M, M\rangle_\infty] < +\infty$, et $M_t^2 - \langle M, M\rangle_t$ est une martingale uniformement intégrable.*
2. *Réciproquement, si $\mathbb{E}[\langle M, M\rangle_\infty] < +\infty$, alors M est une martingale bornée dans L^2.*

Crochet de deux martingales locales

Si M et N sont deux martingales locales, on définit leur crochet par :

$$\langle M, N\rangle_t = \frac{1}{2}(\langle M+N, M+N\rangle_t - \langle M, M\rangle_t - \langle N, N\rangle_t).$$

Proposition 1.5.5

1. *$\langle M, N\rangle$ est l'unique processus à variation finie tel que $M_t N_t -$ $\langle M, N\rangle_t$ soit une martingale locale.*
2. *Si $0 = t_0^n < t_1^n < ... < t_{p_n}^n = t$ est une suite de subdivisions emboitées de $[0, t]$ de pas tendant vers 0, on a, (au sens de la convergence en probabilité) :*

$$\langle M, N\rangle_t \overset{p}{=} \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{p_n} (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})(N_{t_i^n} - N_{t_{i-1}^n}).$$

1.5.3 Semi-martingales continues

Définition 1.5.5 *Un processus $X = (X_t)_{t\geq 0}$est une semi-martingale continue s'il s'écrit sous la forme :*

$$X_t = M_t + A_t.$$

où M est une martingale locale et A est un processus à variation finie.
La décomposition ci-dessus est unique. Si $Y_t = M_t^{'} + A_t^{'}$ est une autre semi-martingale continue, on pose par définition :

$$\langle X, Y\rangle_t := \langle M, M^{'}\rangle_t.$$

en particulier, $\langle X, X\rangle_t := \langle M, M\rangle_t$.

Chapitre 2

Mouvement brownien

Le mouvement brownien est le nom donné aux trajectoires irrégulières du pollen en suspension dans l'eau. Il est en général noté $(W_t, t \geq 0)$ en référence a Wiener, ou $(B_t, t \geq 0)$ en référence a Brown. Nous allons maintenant présenter la description générale du mouvement brownien : d'éfinition, et leurs propriétés principales.

2.1 Processus gaussiens

2.1.1 Variables gaussiennes

Définition 2.1.1 *Une variable aléatoire X suit la loi normale standard $\mathcal{N}(0,1)$ si elle admet pour densité :*

$$t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{t^2}{2}).$$

De façon générale, une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ si elle admet pour densité :

$$t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}).$$

Si $\sigma^2 = 0$, la loi est dégénérée, la variable aléatoire X est constante égale à μ. Sa loi est une mesure de Dirac en μ : $\mathbb{P}_X = \delta_\mu$.

Proposition 2.1.1 *Une variable aléatoire X de loi $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ a pour :*

- ***Espérance :*** $\mathbb{E}[X]=\mu$.

- ***Variance :*** $Var(X)=\sigma^2$.

- ***Fonction caractéristique :*** $\varphi_X(t)=\exp(i\mu t-\frac{\sigma^2t^2}{2})$.

Si $X\sim\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ alors les moments de X sont donnée pas :

$$\mathbb{E}[X^{2n}]=\frac{(2n)!}{2^nn!}\sigma^{2n}\qquad et\qquad \mathbb{E}[X^{2n+1}]=0.$$

2.1.2 Vecteurs gaussiens

Définition 2.1.2 *Un vecteur aléatoire $X=(X_1,X_2,...,X_n)$ est un gaussien ssi toutes les combiniasons linéaires ses coordonnées $\langle\alpha,X\rangle=\alpha_1X_1+...+\alpha_nX_n$ suivant une loi gaussienne dans $\mathbb{R}$ (pour tout $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_2)\in\mathbb{R}^n$).*

Définition 2.1.3 *La matrice de covariance d'un vecteur gaussien $X=(X_1,X_2,...,X_n)$ est la matrice carée symétrique, positive :*

$$K=(Cov(X_i,X_j))_{1\leq i\leq j\leq n}.$$

L'espérance de $X=(X_1,X_2,...,X_n)$ est le vecteur des espérance de ses marginales :

$$\mathbb{E}[X]=(\mathbb{E}[X_1],...,\mathbb{E}[X_n]).$$

Si $\mathbb{E}[X]=0$, le vecteur X est dit centré.

Proposition 2.1.2 *Soient (X,Y) un couple gaussien. Alors X et Y sont indépendantes ssi $Cov(X,Y)=0$.*

2.1.3 Processus gaussiens

Définition 2.1.4 *Soit $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ un processus stochastique .Il est dit gaussien si toutes ses lois fini-dimensionnelles $L(X_{t_1}, ..., X_{t_n})$ sont gaussiennes $(\forall n \in \mathbb{N}, \forall\ t_1, ..., t_n \in \mathbb{T})$. Autrement dit $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est gaussien ssi toute combinaison linéaire de ses marginales $\alpha_1 X_{t_1} + ... + \alpha_n X_{t_n}$ suit une loi gaussienne (pour tout $n \in \mathbb{N}$,$t_1, ..., t_n \in \mathbb{T}$ et $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$).*

2.2 Définitions du mouvement brownien

On se donne un espace de probabilité muni d'une filtraion $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$.

Définition 2.2.1 *Un mouvement brownien standard (on dit aussi processus de wiener), $(B_t)_{t\geq 0}$ est un processus stochastique à valeurs réelles et à trajectoires continues qui verifie :*

a) $B_0 = 0\ \ \mathbb{P} - p.s.$ (le mouvement brownien est issu de l'origine).

b) $\forall\ 0 \leq s \leq t$, $B_t - B_s$ est indépendant de la tribu $\mathcal{F}_s = \sigma(B_u, u \leq s)$.

c) $\forall\ 0 \leq s \leq t$, $B_t - B_s$ est une variable réelle de loi gaussienne, centrée de variance $(t - s)$.

Proposition 2.2.1 *(B_t) est processus gaussien dont la fonction de covariance :*

$$Cov(B_t, B_s) = \min(t, s).$$

Preuve. La covariance est égale à $\mathbb{E}\,(B_t B_s)$ car le processus B_t est centré ($i.e$; $E[B_t] = 0$) si $s \leq t$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\,(B_t B_s) &= \mathbb{E}\left[(B_t - B_s)\, B_s + B_s^2\right] \\ &= \mathbb{E}\,(B_t - B_s)\,\mathbb{E}\,(B_s) + \mathbb{E}\left(B_s^2\right) \\ &= 0 + s = \min(t, s),\end{aligned}$$

car $(B_t - B_s)$ et B_s sont indépendant, de même pour $s \leq t$. ■

Définition 2.2.2 *On appelle mouvement brownien standard par rapport à une filtration* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, *un mouvement brownien standard* $(B_t)_{t\geq 0}$ *adapté à* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *et tel que :*

$$(B_t - B_s) \perp \mathcal{F}_s \forall 0 \leq s \leq t.$$

Définition 2.2.3 (***Mouvement brownien avec dérive***) *On appelle encore mouvement brownien issu de x et dérive (ou drift) μ et de coeffcient de diffusion σ, le processus :*

$$X_t = x + \sigma B_t + \mu t.$$

Proposition 2.2.2 *Le mouvement brownien (générale) X est encore un processus à accroissements indépendants stationnaires et gaussiens. Il est non centré et tel que $X_0 = 0$. De plus :*

$$X_t \sim N(x + \mu t, \sigma^2 t).$$

Définition 2.2.4 (***Mouvement brownien multidimensionnel***)

Soit $B_t = (B_t^{(1)}, B_t^{(2)}, B_t^{(3)}, ..., B_t^{(n)})^T$ *un processus n-dimensionnel (l'exposant* ^{T}*note la transposition d'un vecteur).*

On dit que B est un brownien multidimensionnel si le processus $(B^{(i)}, i \leq n)$ sont des brownien indépendants .

2.3 Propriétés du mouvement brownien

2.3.1 Propriétés de martingale

Proposition 2.3.1 *Si* $(B_t)_{t\geq 0}$ *est une* $\mathcal{F}_t$ *-mouvement brownien standard, alors :*

1. $(B_t)_{t\geq 0}$ *est une* $\mathcal{F}_t$ *-martingale .*

2. $(B_t^2 - t)_{t\geq 0}$ *est une* $\mathcal{F}_t$ *-martingale .*

3. $(\exp(\sigma B_t - (\frac{\sigma^2 t}{2}))_{t\geq 0}$ *(brownien exponentiel) est une $\mathcal{F}_t$-martingale .*

Preuve. Ces trois processu sont adaptés à $\mathcal{F}_t$. Il sont intégrables car $B_t \sim \mathcal{N}(0,t)$. Reste à vérifie la derniere condition Pour le premier point, notons que si $s \leq t$, on a comme $B_t - B_s$ est independante de la tribu $\mathcal{F}_s$:

$$\mathbb{E}[B_t \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[B_t - B_s + B_s \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[B_t - B_s \mid \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[B_s \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[B_t - B_s] + B_s = 0 + B_s = B_s \ .$$

Pour démontrer la deuxième point remarquons que :

$$\mathbb{E}[(B_t - B_s)^2 \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[B_t^2 + B_s^2 - 2B_tB_s \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[B_t^2 \mid \mathcal{F}_s] + B_s^2 - 2B_s\mathbb{E}[B_t \mid \mathcal{F}_s].$$

Comme B_s est une martingale, on a $\mathbb{E}[B_t \mid \mathcal{F}_s] = B_s$ et donc :

$$\mathbb{E}[(B_t - B_s)^2 \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[B_t^2 \mid \mathcal{F}_s] + B_s^2 - 2B_s^2 = \mathbb{E}[B_t^2 \mid \mathcal{F}_s] - B_s^2.$$

Notons, de plus que comme $B_t - B_s$ est independante de la tribu $\mathcal{F}_s$, on a :

$$\mathbb{E}[(B_t - B_s)^2 \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2] = Var[B_t - B_s] = t - s.$$

Donc :

$$\mathbb{E}[B_t^2 \mid \mathcal{F}_s] - B_s^2 = t - s.$$

On obtient alors :

$$\mathbb{E}[B_t^2 - t \mid \mathcal{F}_s] = B_s^2 - s.$$

Pour démontrer la troisième point notons, en utilisant l'indépenddance des accroissements, que :

$$\mathbb{E}[\exp(\sigma(B_t - B_s) \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\exp(\sigma(B_t - B_s)].$$

Mais la loi de $B_t - B_s$ est celle d'une gaussienne centrée de variance $t-s$ (dont on peut calculer la transformée de laplace) donc :

$$\mathbb{E}[\exp(\sigma(B_t - B_s)] = \exp(\frac{\sigma^2}{2}(t-s)).$$

On a donc :

$$\mathbb{E}[\exp(\sigma(B_t - B_s) \mid \mathcal{F}_s] = \exp(\frac{\sigma^2}{2}(t-s)).$$

La variance aléatoire B_s étant $\mathcal{F}_s-$mesurable on obtient donc :

$$\mathbb{E}[\exp(\sigma B_t - (\tfrac{\sigma^2 t}{2}) \mid \mathcal{F}_s] = \exp(\sigma B_s - (\tfrac{\sigma^2 s}{2})). \quad \blacksquare$$

Proposition 2.3.2

1. *Si X est un processus continue tel que X et $(X_t^2 - t)_{t\geq 0}$ sont des martingales, X est un mouvement brownien.*

2. *Si X est un processus continue tel que $(\exp(\sigma X_t - (\frac{\sigma^2 t}{2}))_{t\geq 0}$ est une martingale, pour tout σ réel, le processus X est un mouvement brownien.*

Proposition 2.3.3 *Soit B_1et B_2 deux mouvement brownien indépendants. Le produit $B_1 B_2$ est une martingale.*

Preuve. *On utilise que $\frac{1}{\sqrt{2}}(B_1 + B_2)$ est un mouvement brownien er par suite $\frac{1}{2}(B_1(t) + B_2(t))^2 - t$ est une martingale Comme :*

$$\frac{1}{2}(B_1(t) + B_2(t))^2 - t = \frac{1}{2}(B_1^2(t) - t) + \frac{1}{2}(B_2^2(t) - t) + B_1(t)B_2(t).$$

Alors :

$$B_1(t)B_2(t) = \frac{1}{2}(B_1(t) + B_2(t))^2 - t - \frac{1}{2}(B_1^2(t) - t) - \frac{1}{2}(B_2^2(t) - t).$$

Et pour $0 < s < t$ *On a :*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[B_1(t)B_2(t) \mid \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[\tfrac{1}{2}(B_1(t)+B_2(t))^2 - t \mid \mathcal{F}_s] - \mathbb{E}[\tfrac{1}{2}(B_1^2(t)-t) \mid \mathcal{F}_s] - \mathbb{E}[\tfrac{1}{2}(B_2^2(t)-t) \mid \mathcal{F}_s]. \\
&= (\tfrac{1}{2}(B_1(s)+B_2(s))^2) - s - \tfrac{1}{2}(B_1^2(s)-s) - \tfrac{1}{2}(B_2^2(s)-s) \\
&= B_1(s)B_2(s).
\end{aligned}$$

■

2.3.2 Propriétés en loi du mouvement brownien

1) Symétrie : Si B est un mouvement brownien, alors $(-B)$ est un encore un mouvement brownien.

2) Autosimlarité (**propriété d'échelle**) **:** Pour tout $c > 0$, $B_t^c = \frac{1}{\sqrt{c}} B_{ct}$ définit un mouvement brownien (standard).

3) Inversion du temps : Le processus $\widetilde{B}_t$ défini par $\widetilde{B}_t = tB_{\frac{1}{t}}$, si $t \neq 0$, et $\widetilde{B}_0 = 0$ est un mouvement brownien standard.

4) Retournement du temps : Le proccessus retourné à l'instant T, $\widehat{B}^{(T)} = B_T - B_{T-t}$ est encore un mouvement brownien sur $[0, T]$.

5) Propriété de Markov faible (**ou Invariance par translation**) **:** Le mouvement brownien translaté de $t_0 > 0$, $\overline{B}_t^{(t_0)} = B_{t+t0} - B_{t_0}$ est encore un mouvement brownien standard ; de plus il est indépendant du mouvement brownien arrêté en t_0 $(B_t)_{0 \leq t \leq t_0}$, i.e.$\overline{B}_t^{(t_0)} \perp \mathcal{F}_{t_0}^B$, tel que $\mathcal{F}_{t_0}^B = \sigma(B_t, t \leq t_0)$.

2.3.3 Propriétés trajectorielles du mouvement brownien

Proposition 2.3.4 *La filtration brownienne* $\{\mathcal{F}_t^B\}_{t \geq 0}$ *est continue à droite.*

Proposition 2.3.5 (*Sup* ***et*** inf ***browniens***)

1. On a ps pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\sup_{0\leq s\leq \varepsilon} B_s > 0 \quad , \inf_{0\leq s\leq \varepsilon} B_s < 0.$$

2. Pour tout $\eta > 0$, on a $P.s$:

$$\sup_{t\geq 0} B_t > \eta \quad , \inf_{t\geq 0} B_s < -\eta.$$

3. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, soit $T_\alpha = \inf\{t \geq 0 : B_t = \alpha\}$(avec $\inf \emptyset = +\infty$). Alors presque sûrement $T_\alpha < +\infty$.

4. Par conséquent, presque sûrement :

$$\lim_{t\longrightarrow +\infty} \sup B_t = +\infty \quad , \lim_{t\longrightarrow +\infty} \inf B_t = -\infty$$

Proposition 2.3.6 *En chaque $t \geq 0$, les trajectoires du mouvement brownien sont presque sûrement non dérivables.*

Preuve. *Par la propriété de translation (Markove simple), il suffit de montrer la non dérivabilité en 0, c'est à dire montrer que :*

$$\lim_{t\longrightarrow 0} \frac{B_t - B_0}{t-0} = \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{B_t}{B_0},$$

n'existe pas.

Or par inversion du temps $\frac{B_t}{t} = \widetilde{B}_{\frac{1}{t}}$ ou $\widetilde{B}$ est encore un mouvement brownien. D'aprés la proposition ***(****Sup* ***et*** inf ***browniens)*** *pour le mouvement brownine $\widetilde{B}$, on a :*

$$\lim_{s\longrightarrow +\infty} \sup \widetilde{B_s} = +\infty \quad , \lim_{s\longrightarrow +\infty} \inf \widetilde{B}_s = -\infty \ ,$$

avec $s = \frac{1}{t}$, ce qui montre que la limite cherchée n'existe pas. ■

2.3.4 Propriétés de Markove

Propriétés de Markove simple

Proposition 2.3.7 *Soit B un mouvement brownien. Pour toute fonction f borélienne bornée et pour tout $s \leq t$:*

$$\mathbb{E}[f(B_t) \mid \mathcal{F}_s^B] = \mathbb{E}[f(B_t) \mid B_s] \ \ p.s.$$

Preuve. *Cette preuve consiste à utilisé la propriété de l'espérence conditionnelle suivante : Si $X \perp \mathcal{G}$, Y est $\mathcal{G}-$mesurable et $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est bornée et telle que $E[\mid \phi(X,Y) \mid] < -\infty$. Alors :*

$$E[\phi(X,Y) \mid \mathcal{G}] = \varphi(Y) \ \text{où} \ \ \varphi(y) = E[\phi(x,y)).$$

Pour le premier espérance on a que : $(B_t - B_c) \perp \mathcal{F}_s^B$, B_S est $\mathcal{F}_s^B-$mesurable, alors :

$$\mathbb{E}[f(B_t) \mid \mathcal{F}_s^B] = \mathbb{E}[f(B_t - B_c + B_c) \mid \mathcal{F}_s^B] = \varphi(B_c) \ \ p.s.,$$

où $\varphi(y) = \mathbb{E}[f(B_t - B_c + y)]$.
Pour le deuxième espérance on a que : $(B_t - B_c) \perp B_s$, alors :

$$\mathbb{E}[f(B_t) \mid B_s] = \mathbb{E}[f(B_t - B_c + B_c) \mid B_c] = \varphi(B_c) \ \ p.s.$$

et donc la propriété de Markov est démontré. ■

Propriétés de Markove forte

Proposition 2.3.8 *Soit T un temps d'arrêt. Alors conditionnellement à $\{T < \infty\}$, le processus $B^{(T)}$ défini par :*

$$B^{(T)} = B_{T+t} - B_t \ ,$$

est un mouvement brownien indépendant de $\mathcal{F}_T$.

2.4 Variation quadratique du mouvement brownien

Proposition 2.4.1 *La variation quadratique sur $[0,T]$ du mouvement brownien existe dans $L^2(\Omega)$ (la variation infinitésimale converge en $\|.\|_2$) et vaut T. De plus, si la subdivision Π_n satisfait $\sum_{n=1}^{n}\pi_n < \infty$, on a la convergence au sens presque sûr. On a donc :*

$$\langle B\rangle_T = T.$$

Preuve. La variation infinitésimale d'ordre 2 du mouvement brownien est donnée par :

$$V_T^2(\Pi_n) = \sum_{i=1}^{n}\left|B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n}\right|^2.$$

On rappelle que si $X \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$ alors :

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = \sigma^2 \text{ et } Var\left[X^2\right] = 2\sigma^4,$$

on a donc :

$$\mathbb{E}\left[V_T^2(\Pi_n)\right] = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\left(B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n}\right)^2\right] = \sum_{i=1}^{n}\left(t_i^n - t_{i-1}^n\right) = T,$$

et en notant $\pi_n := \max_{i\leq n}\left|t_{i+1}^n - t_i^n\right|$, on obtient :

$$Var\left[V_T^2(\Pi_n)\right] = \sum_{i=1}^{n}Var\left[\left(B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n}\right)^2\right] = 2\sum_{i=1}^{n}\left(t_i^n - t_{i-1}^n\right)^2 \leq 2T\pi_n \underset{\pi_n\to 0}{\to} 0,$$

donc

$$\left\|V_T^2(\Pi_n) - T\right\|_2^2 = Var\left[V_T^2(\Pi_n)\right] \underset{\pi_n\to 0}{\to} 0.$$

Pour obtenir la convergence presque sûre, il faut utiliser l'inégalité de Tchebycheve qui donne pour tout ε :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\left[\left|V_T^2(\Pi_n) - T\right| > \varepsilon\right] < \infty,$$

ce qui par Borel-Cantelli entraîne la convergence presque sûre de $V_T^2(\Pi_n)$ vers T. ■

Proposition 2.4.2 *Pour toute subdivision* Π_n *satisfaisant* $\sum_{n=1}^{n} \pi_n < \infty$, *la variation infinitésimale d'ordre* 1 *sur* $[0,T]$ *du mouvement brownien associée à cette subdivision converge presque sûrement vers* $+\infty$. *Donc, la variation totale du mouvement brownien vaut* $+\infty$ *p.s. :*

$$V_T^1 = \sup_{\Pi_n} V_T^1(\Pi_n) = \infty \ p.s.$$

Preuve. Soit Π_n une suite de subdivision de $[0,T]$ satisfaisant $\sum_{n=1}^{n} \pi_n < \infty$. Alors, sur presque tout chemin ω, on a la relation :

$$V_T^2(\Pi_n)(\omega) \leq \sup_{|u-v| \leq \Pi_n} |B_u(\omega) - B_v(\omega)| \, V_T^1(\Pi_n)(\omega).$$

Le terme de gauche tend vers T car on a la convergence presque sûrement de la variation quadratique, le premier terme à droite tend vers 0 car le mouvement brownien a ses trajectoires continues sur $[0,T]$. Donc le deuxième terme de droite tend nécessairement vers l'infini. ■

Chapitre 3

Intégrale stochastique

Le but essentiel de ce chapitre est donner un sens à la notion l'intégrale stochastique par rapport à des martingales. On s'intéresse ensuite par l'intégration par rapport à Wiener et d'Itô.

3.1 Intégrale par rapport à une martingale bornée dans L^2

Définition 3.1.1 (***Espace*** H_c^2) *On note* H_c^2 *l'espace des martingales* M *continues bornées dans* L^2 *et telles que* $M_0 = 0$.

Remarque 3.1.1 *On définit un produit scalaire sur* H_c^2 *par :*

$$(M, N)_{H_c^2} := E[\langle M, N\rangle_\infty].$$

Dans la définition suivante, on désigne par Prog la tribu progerssive sur $(\mathbb{R}_+ \times \Omega, Prog)$ *sont appelés progressifs.*

Définition 3.1.2 (***Espace*** $L^2(M)$) *Pour* $M \in H_c^2$, *on note :*

$$L^2(M) = L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega, Prog, d\mathbb{P}d\langle M, M\rangle),$$

l'espace des processus progressifs $H = (H_s)_{s\geq 0}$ *tel que :*

$$\mathbb{E}[\int_0^{+\infty} H_s^2 d\langle M, M\rangle_s] < +\infty.$$

Remarque 3.1.2 *L'espace* $L^2(M)$ *est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :*

$$(H, K)_{L^2(M)} = \mathbb{E}[\int_0^{+\infty} H_s K_s d\langle M, M\rangle_s].$$

Définition 3.1.3 (*Processus élémentaire*) *Un processus* H *est dit élémentaire s'il s'écrit sous la forme :*

$$H_s(\omega) = \sum_{i=0}^{p-1} H_{(i)}(\omega)\, \mathbf{1}_{]t_i, t_{i+1}]}(s),$$

où $0 < t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_p$ *et pour chaque* $0 \leq i \leq p$, $H_{(i)}$ *est une variable aléatoire* $\mathcal{F}_{t_i}$*-mesurable et bornée.*

On note ε *le sous-espace vectoriel de* $L^2(M)$ *formé de ces processus élémentaires.*

Définition 3.1.4 *Soit* $M \in H_c^2$, *pour tout* $H \in \varepsilon$, *on définit* $H \cdot M$ *par :*

$$(H \cdot M)_t = \sum_{i=0}^{p-1} H_{(i)} \left(M_{t_{i+1}\wedge t} - M_{t_i \wedge t} \right).$$

Proposition 3.1.1 *Soient* $M \in H_c^2$ *et* $H \in \varepsilon$, *on a* $H \cdot M \in H_c^2$ *et pour tout* $N \in H_c^2$ *:*

$$\langle H \cdot M, N\rangle_t = \int_0^t H_s d\langle M, N\rangle_s = H \cdot \langle M, N\rangle_t.$$

Preuve. On écrit :

$$H \cdot M = \sum_{i=0}^{p} M_t^i \ ,$$

où

$$M_t^i := H_{(i)} \left(M_{t_{i+1} \wedge t} - M_{t_i \wedge t} \right).$$

On commence par observer que, pour chaque $0 \leq i \leq p$ $(M_t^i)_{t \geq 0}$ est martingale, en effet :

- Si $s \geq t_i$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[H_{(i)} \left(M_{t_{i+1} \wedge t} - M_{t_i \wedge t} \right) / \mathcal{F}_s \right] &= H_{(i)} \mathbb{E}\left[\left(M_{t_{i+1} \wedge t} - M_{t_i \wedge t} \right) / \mathcal{F}_s \right] \\ &= H_{(i)} \left(M_{t_{i+1} \wedge s} - M_{t_i \wedge s} \right) = M_s^i. \end{aligned}$$

- Si $s < t_i$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[H_{(i)} \left(M_{t_{i+1} \wedge t} - M_{t_i \wedge t} \right) / \mathcal{F}_s \right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[H_{(i)} \left(M_{t_{i+1} \wedge t} - M_{t_i \wedge t} \right) / \mathcal{F}_{t_i} \right] \mathcal{F}_s \right] \\ &= \mathbb{E}\left[H_{(i)} \mathbb{E}\left[\left(M_{t_{i+1} \wedge t} - M_{t_i \wedge t} \right) / \mathcal{F}_{t_i} \right] \mathcal{F}_s \right] \\ &= \mathbb{E}\left[H_{(i)} \left(M_{t_{i+1} \wedge t} - M_{t_i \wedge t} \right) / \mathcal{F}_s \right] = 0 = M_s^i. \end{aligned}$$

On a donc $\mathbb{E}\left[M_t^i / \mathcal{F}_s \right] = M_s^i$ pour tout $t \geq s$ et $H \cdot M = \sum_{i=0}^{p-1} M^i$ est bien une martingale.
De plus comme H est bornée et $M \in H_c^2$, on a aussi $H \cdot M \in H_c^2$.
Pour la deuxiéme partie, comme $MN - \langle M, N \rangle$ est une martingale (car martingale locale bornée dans L^2 d'aprés la Proposition (1.5.5), alors :

$$\left(M^{t_{i+1}} - M^{t_i} \right) N - \left(\langle M, N \rangle^{t_{i+1}} - \langle M, N \rangle^{t_i} \right),$$

est aussi une martingale. Comme cette martingale est nulle en $t \leq t_i$ et comme $H_{(i)} \in \mathcal{F}_{t_i}$:

$$H_{(i)} \left(M^{t_{i+1}} - M^{t_i} \right) .N - H_{(i)} \left(\langle M, N \rangle^{t_{i+1}} - \langle M, N \rangle^{t_i} \right),$$

est encore une martingale puis en sommant sur $1 \leq i \leq p$, $(H \cdot M) N = \int_0^t H_s d\langle M, N \rangle_s$ reste aussi une martingale.

D'aprés la proposition (1.5.5) on identifie le crochet de $(H \cdot M)$ et de N :

$$\langle (H \cdot M), N \rangle = H \cdot \langle M, N \rangle,$$

en particulier que $\langle H \cdot M, H \cdot M \rangle = H^2 \cdot \langle M, M \rangle$. ■

Remarque 3.1.3 *On utilise la notation intégrale :*

$$(H \cdot M)_t = \int_0^t H_s dM_s.$$

Théorème 3.1.1 (*Existence de l'intégrale stochastique* L^2) *Soit* $M \in H_c^2$*. L'application* $M \in \varepsilon \mapsto H \cdot M$ *s'étend en une isométrie de* $L^2(M)$ *dans* H_c^2*. De plus,*

1. *La martingale* $H \cdot M$ *est caractérisée par la relation :*

$$\langle H \cdot M, N \rangle = H \cdot \langle M, N \rangle, \ \forall \ M \in H_c^2.$$

2. *Si* T *est un temps d'arrêt, on a une propriété d'arrêt :*

$$\left(\mathbf{1}_{[0,T]} H \right) \cdot M = (H \cdot M)^T = H \cdot M^T.$$

Les notations intégrales de cette derniére propriété :

$$\int_0^t \mathbf{1}_{[0,T]} H dM = \int_0^{t \wedge T} H dM = \int_0^t H dM^T.$$

Propriété 3.1.1

1. $\left\langle \int_0^{\cdot} H_s dM_s, N \right\rangle_t = \int_0^{\cdot} H_s d \langle M, \ N \rangle_s$.
2. $\left\langle \int_0^{\cdot} H_s dM_s, \int_0^{\cdot} K_s dM_s \right\rangle_t = \int_0^t H_s K_s d \langle M, \ N \rangle_s$.
3. *Soient* $M \in H_c^2$*,* $N \in H_c^2$ *et* $H \in L^2(M)$*,* $K \in L^2(M)$*,*

comme $H \cdot M$ *et* $(H \cdot M)(K \cdot N) - \langle (H \cdot M), (K \cdot N) \rangle$ *sont des martingales, on a pour tout* $t \in \mathbb{R}_+$ *les moments suivants :*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t H_s dM_s\right] = 0$$

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t H_s dM_s\right)\left(\int_0^t k_s dM_s\right)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s k_s d\left\langle M,\ N\right\rangle_s\right].$$

3.2 Intégrale par rapport à une martingale locale

Définition 3.2.1 (*Espace* $L^2_{loc}(M)$) *Soit* M *une martingale locale continue, on note* $L^2_{loc}(M)$ *l'espace des processus progressifs* H *tels que pour tout* $t \geq 0$,

$$\int_0^t H_s^2 d\left\langle M,\ M\right\rangle_s < +\infty \quad p.s.$$

Théorème 3.2.1 (***Existence de l'intégrale stochastique générale***) *Soit* M *une martingale locale issue de* 0. *Pour tout* $H \in L^2_{loc}(M)$, *il existe une unique martingale locale issue de* 0, *notée* $H \cdot M$, *telle que pour toute martingale locale* N,

$$\left\langle H \cdot M,\ N\right\rangle = H \cdot \left\langle M,\ N\right\rangle.$$

De plus, si T *est un temps d'arrêt, on a :*

$$\left(\mathbf{1}_{[0,T]} H\right) \cdot M = (H \cdot M)^T = H \cdot M^T.$$

Propriété 3.2.1 *Soient* M *une martingale locale et* $H \in L^2_{loc}(M)$. *Alors on a :*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t H_s dM_s\right] = 0 \text{ et } \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t H_s dM_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2 d\left\langle M,\ N\right\rangle_s\right].$$

3.3 Intégrale par rapport à une semi-martingale

On s'intérèsse dans cette section de construire l'intégrale stochastique par rapport aux semi-martingales continues. Pour cela, on dit qu'un processus progressif H est localement borné si :

$$p.s \ \forall \ t \geq 0, \sup_{s \leq t} |H_s| < +\infty \ .$$

- Si H est localement borné, pour tout processus A à variation finie on a :

$$p.s \ \int_0^t |H_s| \, |dA_s| < +\infty \ .$$

Définition 3.3.1 (***Intégrale par rapport à une semimartingale***) *Soit X une semi-martingale continue, et soit H un processus progressif localement borné.*
L'intégrale stochastique $H \cdot X$ est alors définie par :

$$H \cdot X = H \cdot M + H \cdot A.$$

Proposition 3.3.1

1. *L'application $(H, X) \mapsto H \cdot X$ est bilinéaire.*
2. *Si H est un processus progressif élémentaire, alors :*

$$(H \cdot X)_t = \sum_{i=1}^{p-1} H_i \left(X_{t_{i+1} \wedge t} - X_{t_i \wedge t} \right) .$$

3. *Si X est une martingale locale (resp. si X est un processus à variation finie) alors il en est de même pour $H \cdot X$.*

3.4 Intégrale de Wiener

On veut définir :

$$\int_0^t f(s)\, dB_s.$$

Définition 3.4.1 *On note* $L^2(\mathbb{R}^+) = \left\{ f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \text{ borélienne tq } \int_0^{+\infty} |f(s)|^2 d_s < +\infty \right\}$.
C'est un espace de Hilbert pour la norme $||f||_2 = \left(\int_0^{+\infty} f(s)\, d_s \right)^{\frac{1}{2}}$.

a. Fonctions en escalier

Définition 3.4.2 **i)** *Pour* $f = \mathbf{1}_{|u,v|}$ *:*

$$\int_0^{+\infty} f(s)\, dB_s = B(v) - B(u).$$

ii) *Pour* f *une fonction en escalier, i.e. :* $f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_{i-1} \mathbf{1}_{]t_{i-1}, t_i]}$ *:*

$$\int_0^{+\infty} f(s)\, dB_s = \sum_{i=1}^{n} f_{i-1} \left(B(t_i) - B(t_{i-1}) \right).$$

Propriété 3.4.1 *On note* $I(f) \overset{déf}{=} \int_0^{+\infty} f(s)\, dB_s$.

i) *L'intégrale est linéaire :*

$$I(f+g) = I(f) + I(g).$$

ii) $I(f)$ *est une variable gaussienne vérifie :*

$$\mathbb{E}[I(f)] = 0 \text{ et } Var[I(f)] = \int_0^{+\infty} f^2(s)\, ds.$$

iii) *Si* f *et* g *sont des fonctions en escalier :*

$$\mathbb{E}[I(f)I(g)] = \int_0^{+\infty} f(s)\, g(s) ds.$$

Preuve.

i) La linéarité est immédiate.

ii) $I(f)$ est gaussienne car le processus B est gaussien, centrée car B est centrée. De plus :

$$Var\left[I(f)\right] = \sum_{i=1}^{i=n} f_{i-1}^2 Var\left(B\left(t_i\right) - B\left(t_{i-1}\right)\right) = \sum_{i=1}^{i=n} f_{i-1}^2 \left(t_i - t_{i-1}\right) = \int_0^{+\infty} f^2\left(s\right) ds.$$

iii) On a :

$$\begin{aligned} Var\left(I(f+g)\right) &= Var\left(I(f) + I(g)\right) = Var(I(f)) + Var\left(I(g)\right) + 2\mathbb{E}\left(I(f)I(g)\right) \\ &= \int_0^{+\infty} f^2\left(s\right) ds + \int_0^{+\infty} g^2\left(s\right) ds + 2\mathbb{E}\left(I(f)I(g)\right) \\ &= \int_0^{+\infty} \left(f+g\right)^2 (s) ds. \end{aligned}$$

Alors :

$$\mathbb{E}\left[I(f)I(g)\right] = \int_0^{+\infty} f\left(s\right) g(s) ds.$$

■

b. Cas général

Si $f \in L^2\left(\mathbb{R}^+\right)$, il existe une suite f_n de fonctions en escalier qui converge dans $L^2\left(\mathbb{R}^+\right)$ vers f, c'est-à-dire qui vérifie :

$$\int_0^{+\infty} \left|f_n - f\right|^2 (x) dx \underset{n \to +\infty}{\to} 0$$

Propriété 3.4.2 *La suite f_n est de Cauchy dans $L^2\left(\mathbb{R}^+\right)$. La suite de v.a :*

$$F_n = \int_0^{+\infty} f_n\left(s\right) dBs,$$

est une suite de Cauchy dans l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$, *en effet :*

$$||F_n - F_m||_2 = ||f_n - f_m||_2 \underset{n,m\to+\infty}{\to} 0,$$

donc elle est convergente, et on pose que :

$$I(f) \overset{déf}{=} \int_0^{+\infty} f(s)\, dB_s = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f(s)\, dB_s.$$

Propriété 3.4.3 *Soit* $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$ *et* $I(f) \in L^2(\Omega)$.

1. *L'application* $f \to I(f)$ *est linéaire et isométrique de* $L^2(\mathbb{R}^+)$ *dans* $L^2(\Omega)$.
2. $I(f)$ *est une variable gaussienne vérifie :*

$$\mathbb{E}[I(f)] = 0 \text{ et } Var[I(f)] = \int_0^{+\infty} f^2(s)\, ds.$$

3. $\mathbb{E}[I(f)I(g)] = \int_0^{+\infty} f(s)\, g(s) ds$.
4. $\mathbb{E}\left(B_t \int_{\mathbb{R}^+} f(s)\, dB_s\right) = \int_0^t f(s)\, ds$.

3.4.1 Processus lié à l'intégrale stochastique

On définit pour $f \in L^2_{loc}$:

$$\int_0^t f(s)\, dB_s = \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{[0,t]}(s) f(s) dB_s,$$

telle que L^2_{loc} représente la classe de fonctions f pour la quelle :

$$\int_0^T |f(s)|^2\, d_s < \infty, \forall T.$$

Théorème 3.4.1 *Soit* $f \in L^2_{loc}$ *et* $M_t = \int_0^t f(s)\, dB_s$.

1. *Le processus* M *est une martingale continue, la v.a.* M_t *est d'espérance* 0 *et de*

variance $\int_0^t f^2(s)\,ds$.

2. *Le processus* M *est un processus gaussien centré de covariance* $\int_0^{t\wedge s} f^2(u)\,du$.

3. *Le processus* $\left(M_t^2 - \int_0^t f^2(s)\,d_s, t \geq 0\right)$ *est une martingale.*

4. *Si* f *et* g *sont dans* L^2_{loc}, *on a :*

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t f(u)\,dB_u \int_0^s g(u)\,dB_u\right) = \int_0^{t\wedge s} f(u)\,g(u)du.$$

3.4.2 Intégration par parties

Théorème 3.4.2 *Si* f *est une fonction de classe* C^1, *Alors :*

$$\int_0^t f(s)ds = f(t)B_t - \int_0^t f(s)B_s ds.$$

On peut aussi écrire cette formule

$$d(B_t f(t)) = f(t)dB_t + B_t f'(t)dt.$$

3.5 Intégrale d'Itô

On se donne un espace (Ω, F, P) et un mouvement Brownien B sur cet espace. On désigne par $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$ la filtration naturelle du mouvement Brownien.

Définition 3.5.1 *On veut généraliser l'intégrale de Wiener et définir :*

$$\int_0^t H_s dB_s,$$

pour des processus stochastiques H.

a. Cas de processus étagés (élémentaires)

Pour H processus étagés (élémentaire) de la forme :

$$H_s(\omega) = \sum_{j=0}^{n-1} H_j(\omega) \mathbf{1}_{]t_j,t_{j+1}]}(s),$$

on définit :

$$\int_0^\infty H(s)\, dB_s = \sum_{j=0}^{n-1} H_j \left(B_{t_{j+1}} - B_{t_j} \right).$$

Alors, on a :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty H(s)\, dB_s\right] = 0 \text{ et } Var\left[\int_0^\infty H(s)\, dB_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty H_s^2 d_s\right],$$

et, on définit :

$$\int_0^t H(s)\, dB_s = \sum_{j=0}^{n-1} H_j \left(B_{t_{j+1\wedge t}} - B_{t_{j\wedge t}} \right).$$

b. Cas général

On définit l'ensemble $\Gamma = \{H$ adapté continu à gauche limité à droite tel que $\|H\|^2 = \mathbb{E}\left(\int_0^\infty H_t^2 dt\right) < \infty \}$.

Remarque 3.5.1 *- Les processus H càglàd de carré intégrable appartenant à $L^2(\Omega \times \mathbb{R}_+)$.*

- Les processus étagés appartiennent à Γ.

Si $H \in \Gamma$, $\exists\, (H_n)_n$ processus étagés tq : $\lim_{n\to+\infty} H_n = H$ dans $L^2(\Omega \times \mathbb{R}_+)$. Alors on définit pour tout $H \in \Gamma$:

$$\int_0^\infty H(s)\, dB_s = \lim_{n\to+\infty} \int_0^\infty H_s^n dB_s,$$

où

$$\mathbb{E}\left(\int_0^\infty H(s)\, dB_s\right) = 0 \ \textit{et}\ \mathbb{E}\left(\int_0^\infty H(s)\, dB_s\right)^2 = \mathbb{E}\left(\int_0^\infty H_s^2 d_s\right).$$

Propriété 3.5.1 *On note Λ l'ensemble $L^2(\Omega \times \mathbb{R}_+)$ des processus H adaptés càglàd vérifiant :*

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t H_s^2(\omega)\, ds\right) < \infty, \forall t.$$

i) *Linéarité : Soit a et b des constantes et $(H^i;\ i=1,2)$ deux processus de Λ. On a :*

$$\int_0^t \left(aH_s^1 + bH_s^2\right) dB_s = a\int_0^t H_s^1 dB_s + b\int_0^t H_s^2 dB_s.$$

ii) *Soit $M_t = \int_0^t H_s dB_s$, où $H \in \Gamma$, alors est une martingale à trajectoires continues.*

iii) *Soit $N_t = \left(\int_0^t H_s dB_s\right)^2 - \int_0^t H_s^2 d_s$, le processus $(N_t, t \geq 0)$ est une martingale.*

Corollaire 3.5.1 *Soit $M_t(H) = \int_0^t H_s dB_s$ et $M_t(K) = \int_0^t K_s dB_s$.*

1. $\mathbb{E}(M_t) = 0$ *et* $Var(M_t) = \int_0^t \mathbb{E}(H_s)^2 d_s$.
2. $\mathbb{E}\left(\int_0^t H_s dB_s \int_0^t K_s dB_s\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^t H_s K_s d_s\right)$.
3. $\left(M_t(H) M_t(K) - \int_0^t H_s K_s d_s\right)$ *est une martingale.*

3.5.1 Processus d'Itô

Définition 3.5.2 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(B_t)_{t\geq 0}$ un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ mouvement brownien. On appelle processus d'Itô, un processus $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ tq :*

$$\mathbb{P}-p.s.\ \forall t \leq T,\ X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s,$$

avec :

$$\begin{cases} X_0 \ est\ \mathcal{F}_0 - mesurable, \\ (K_t)_{0\leq t\leq T} \ \ et \ \ (H_t)_{0\leq t\leq T} \ \ des\ processus\ adaptés\ à\ \ (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \\ \int_0^T |K_s|\, ds < +\infty\ \mathbb{P}-p.s., \\ \int_0^T |H_s|^2\, ds < +\infty\ \mathbb{P}-p.s.. \end{cases}$$

Proposition 3.5.1 *Soit $(M_t)_{0\leq t\leq T}$ une martingale continue tq $M_t = \int_0^t K_s d_s$, avec $\mathbb{P}-p.s.$, $\int_0^T |K_s|\, ds < +\infty$ alors :*

$$\mathbb{P}-p.s.\ \forall t \leq T,\ M_t = 0.$$

Ceci entraîne que :

- La décomposition d'un processus d'Itô est unique. Ce qui signifie que si pour tout t,

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s = X_0^{'} + \int_0^t K_s^{'} ds + \int_0^t H_s^{'} dB_s,$$

alors

$$\begin{cases} X_0 & = X_0^{'} \qquad \mathbb{P} - p.s., \\ K_s & = K_s^{'} \qquad ds \otimes \mathbb{P} - p.p., \\ H_s & = H_s^{'} \qquad ds \otimes \mathbb{P} - p.p.. \end{cases}$$

- Si $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ *est une martingale de la forme* $X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s$ *alors :*

$$K_t \;= 0 \; dt \otimes \mathbb{P} - p.p..$$

3.5.2 Formules d'Itô

Formule d'Itô pour le processus d'Itô

Théorème 3.5.1 *Soit* $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ *un processus d'Itô sur* $[0, T]$,

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s.$$

Si f *une fonction deux foix continuiment différentiable sur* $\mathbb{R}$ $(i.e. f \in C^2)$*. Alors :*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f^{'}(X_s) \, dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) \, d\langle X, X \rangle_s$$

où par définition

$$\langle X, X \rangle_t = \int_0^t H_s^2 d_s$$

$$d\langle X, X \rangle_t = dX_t . dX_t = H_t^2 d_t$$

avec la table de multiplication :

	dt	dB_t
dt	0	0
dB_t	0	dt

et

$$\int_0^t f^{'}(X_s)\,dX_s = \int_0^t f^{'}(X_s)\,K_s ds + \int_0^t f^{'}(X_s)\,H_s dB_s.$$

Cette formule s'ecrit sous forme différentielle :

$$\begin{aligned} df(X_t) &= f^{'}(X_t)\,dX_t + \frac{1}{2} f"(X_t)\,d\langle X, X\rangle_t \\ &= f^{'}(X_t)\,dX_t + \frac{1}{2} f"(X_t)\,H_t^2 d_t. \end{aligned}$$

Proposition 3.5.2 *Supposons que :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K(X_s)ds + \int_0^t H(X_s)dB_s,$$

où K et H sont des fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ bornées.

Si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2 à dérivées bornées et vérifiant :

$$\forall\ x, \quad K(x)f'(x) + \frac{1}{2}H^2(x)f"(x) = 0.$$

Le processus $f(X)$ est une martingale .

Fonction dépendant du temps

Théorème 3.5.2 *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de classe C^1 par rapport à t, de classe C^2 par rapport à x, à dérivés bornées , on a :*

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f_t^{'}(s, X_s)\,ds + \int_0^t f_x^{'}(s, X_s)\,dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}^{"}(s, X_s)\,d\langle X, X\rangle_s$$

comme précédemment, on peut écrire cette formule sous forme différentielle :

$$\begin{aligned} df\left(t,X_t\right) &= f_t^{'}\left(t,X_t\right)dt + f_x^{'}\left(t,X_t\right)dX_t + \frac{1}{2}f_{xx}^{"}\left(t,X_t\right)d\left\langle X,X\right\rangle_t \\ &= f_t^{'}\left(t,X_t\right)dt + f_x^{'}\left(t,X_t\right)dX_t + \frac{1}{2}f_{xx}^{"}\left(t,X_s\right)H_t^2 d_t \\ &= [f_t^{'}\left(t,X_t\right) + \frac{1}{2}f_{xx}^{"}\left(t,X_t\right)H_t^2]dt + f_x^{'}\left(t,X_t\right)dX_t. \end{aligned}$$

Formule d'Itô dans le cas brownien

Théorème 3.5.3 *Soit B un mouvement brownien .*

Si $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ est à dérivée seconde continue et bornée (i.e.$f\in C_b^2(\mathbb{R})$). Alors :

$$f\left(B_t\right) = f\left(B_0\right) + \int_0^t f^{'}\left(B_s\right)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f^{"}\left(B_s\right)d\left\langle B,B\right\rangle_s \quad ,$$

où par définition

$$d\left\langle B,B\right\rangle_s = ds.$$

Cette formule s'ecrit sous forme différentielle

$$df\left(B_t\right) = f^{'}\left(B_t\right)dB_t + \frac{1}{2}f^{"}\left(B_t\right)dt.$$

Si f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$ de classe C^1 par rapport à t, de classe C^2 par rapport à x, à dérivés bornées (i.e.$f\in C_b^{(1.2)}$) :

$$f\left(t,B_t\right) = f(0,0) + \int_0^t f_t^{'}\left(s,B_s\right)ds + \int_0^t f_x^{'}\left(s,B_s\right)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}^{"}\left(s,B_s\right)d\left\langle B,B\right\rangle_s$$

comme précédemment, on peut écrire cette formule sous forme différentielle :

$$\begin{aligned} df\left(t,B_t\right) &= f_t^{'}\left(t,B_t\right)dt + f_x^{\prime}\left(t,B_t\right)dB_t + \frac{1}{2}f_{xx}^{"}\left(t,B_t\right)d\left\langle B,B\right\rangle_t \\ &= f_t^{'}\left(t,B_t\right)dt + f_x^{'}\left(t,B_t\right)dB_t + \frac{1}{2}f_{xx}^{"}\left(t,B_s\right)dt \\ &= (f_t^{'}\left(t,B_t\right) + \frac{1}{2}f_{xx}^{"}\left(t,B_s\right))dt + f_x^{'}\left(t,B_t\right)dB_t. \end{aligned}$$

Formule d'Itô multidimensionnelle

Théorème 3.5.4 *Soient* $(X_t^1, X_t^2, ..., X_t^n)$ *un processus d'Itô à valeurs dans* $\mathbb{R}$*, pour* $i = 1, ..., n$,

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t K_s^i ds + \sum_{j=1}^{p}\int_0^t H_s^{i,j} dB_s^j.$$

Théorème 3.5.5 *Alors si* f *est une fonction deux fois différentiable en* x *est une fois différentiable en* t*, ces dérivées étant continues en* (t,x)*, on a :*

$$\begin{aligned} f\left(t, X_t^1, X_t^2, ..., X_t^n\right) &= f\left(0, X_0^1, X_0^2, ..., X_0^n\right) + \int_0^t \sigma_s f\left(s, X_s^1, X_s^2, ..., X_s^n\right) ds \\ &+ \sum_{i=1}^{n}\int_0^t \sigma_{x_i} f\left(s, X_s^1, X_s^2, ..., X_s^n\right) dB_s^i \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\int_0^t \sigma_{x_i,x_j} f\left(s, X_s^1, X_s^2, ..., X_s^n\right) d\left\langle X^i, X^j\right\rangle_s \end{aligned}$$

avec

$$dB_s^i = K_s^i ds + \sum_{j=1}^{p} H_s^{i,j} dB_s^j$$

et

$$d\left\langle X^i, X^j\right\rangle_s = \sum_{m=1}^{p} H_s^{i,m} H_s^{j,m} ds.$$

Formule Intégration par parties

La formule d'intégration par parties décrite dans le résultat suivant est une conséquence de la formule d'Itô,

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f"(X_s)\, d\langle X, X\rangle_s .$$

Proposition 3.5.3 *Soient X_t et Y_t deux processus d'Itô :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s$$

et

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t K_s^{'} ds + \int_0^t H_s^{'} dB_s.$$

Alors

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y\rangle_t$$

avec la notation $\langle X, Y\rangle_t = \int_0^t H_s H_s' d_s$.

Preuve. On a d'aprés la formule d'Itô,

$$(X_t + Y_t)^2 = (X_0 + Y_0)^2 + 2\int_0^t (X_s + Y_s)\, d(X_s + Y_s) + \int_0^t (H_s + H_s')^2\, d_s.$$

$$X_t^2 = X_0^2 + 2\int_0^t X_s dX_s + \int_0^t H_s^2 d_s.$$

$$Y_t^2 = Y_0^2 + 2\int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t H_s'^2 d_s.$$

d'où en faison la différence entre la premiére ligne et les deux suivantes, on trouve :

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t H_s H_s' d_s.$$

■

3.5.3 Application de la formule d'Itô

calcul d'une intégrale stochastique

Considérons $f(x) = x^2$ et $X_t = B_t$, la formule d'Itô donne :

$$\begin{aligned} B_t^2 &= 0 + 2\int_0^t B_s dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t 2ds \\ &= 2\int_0^t B_s dB_s + t. \end{aligned}$$

D'où

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{B_t^2 - t}{2}.$$

Solution d'EDS (Modèle de Black-Sholes)

Nous allons maintenant nous intéresser aux solutions $(S_t)_{t\geq 0}$ de :

$$S_t = x_0 + \int_0^t S_s\left(\mu dt + \sigma dB_t\right),$$

où les coefficients $-\infty < \mu < +\infty$, $\sigma > 0$ sont constants.

On écrit souvent ce type d'équation sous la forme :

$$\begin{cases} S_t = x_0 + \int_0^t S_s\left(\mu dt + \sigma dB_t\right), \\ S_0 = x_0. \end{cases}$$

Cela signifie que l'on cherche un processus adapté $(S_t)_{t\geq 0}$ tel que les intégrales $\int_0^t S_s ds$ et $\int_0^t S_s dB_s$ aient un sens, et qui vérifie pour chaque t :

$$S_t = x_0 + \int_0^t \mu S_s ds + \int_0^t \sigma S_s dB_s \ \mathbb{P} - p.s.$$

Faisons tout d'abord un calcul formel, posons $Y_t = \log\left(S_t\right)$ où S_t est un processus d'Itô avec $K_s = \mu S_s$ et $H_s = \sigma S_s$.

Appliquons la formule d'Itô à $f(x) = \log(x)$ on obtien, en supposant que S_t est positif :

$$\begin{aligned}
\log(S_t) &= \log(S_0) + \int_0^t \frac{dS_s}{S_s} + \frac{1}{2}\int_0^t -\frac{1}{S_s^2}\sigma^2 S_s^2 ds \\
&= \log(S_0) + \int_0^t (\mu ds + \sigma dBs) - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2 ds \\
&= \log(S_0) + \int_0^t \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) ds + \int_0^t \sigma dB_s.
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$Y_t = \log(S_t) = \log(S_0) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma B_t.$$

Donc la solution de l'équation précédente

$$S_t = x_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma B_t\right).$$

Ce processus est appelé mouvement Brownien géométrique issu de x_0 de dérive μ et de volatilité σ, il est utilisé dans la célèbre modèle de Black et Scholes en mathématiques financière.

Conclusion

L'objectif de notre travail est l'étude du mouvement brownien et l'intégrale stochastique. Nous avons tout d'abord présenté les notions suivantes : quelques rappels de la processus stochastique, et ensuite la construction du mouvement brownien, qu'il s'agit d'un processus qui est à la fois une martingale, un processus gaussien,...etc. Et enfin on présente le calcul stochastique qui est établit par le mathématicien japonais Kiyoshi Itô qui décrit l'intégrale d'Itô et les formules associées.

Bibliographie

[1] Belqadhi, A. (2008). Etude du calcul stochastique : martingales, mouvement brownien et intégration d'Itô. Ecole Polytechnique Fédérale De Lausanne.

[2] Berglund, N. (2012). Martingales et calcul stochastique. Université d'Orléans.

[3] Bougerol, P. (2015). Calcul stochastique des martingales continues. Université de Pierre et Marie Curie, Paris 6.

[4] Breton, J-C. (2017). Processus stochastiques. Université de Rennes 1.

[5] Guillotin-Plantard, N. (2009). Introduction au calcul stochastique.

[6] Guiol, H. (2006). Calcul stochastique avancé.

[7] Laleuf, J-C. (2014). Processus et intégrales stochastiques (cours et exercices corrigés). Les editions Ellipes.

[8] Le gall, J-F. (2010). Calcul stochastique et processus de markov. Université Paris-Sud.

[9] Le gall, J-F. (2013). Mouvement brownien, martingales et calcul stochastique. Université Paris-Sud. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[10] Ndongo, CH-B. (2012). Processus aléatoires et applicatios en finance. Université du Québec.

[11] Popier, A. Calcul stochastique, applications en finance.

Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréVariations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	: Espace de probabilité.
$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$	: Filtration.
$\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$	: Latribu borélienne sur $\mathbb{R}_+$.
$\mathbb{P} - p.s.$	: Presque sûrement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.
$B = (B_t)_{t\geq 0}$	: Mouvement Brownien .
$s \wedge t$	: $\min(s,t)$.
$\perp$	: Indépendance.
M^{T_n}	: $M_{T_n \wedge t}$.
$L^2(\Omega)$	: L'espace des variables aléatoires de carré intégrable.
$L^2(\Omega \times \mathbb{R}_+)$	: L'ensemble des processus X tel que $\mathbb{E}\left[\int_0^\infty X_t^2 dt\right] < \infty$.
$L^2_{loc}(\Omega \times \mathbb{R}_+)$	: L'ensemble des processus X tel que $\mathbb{E}\left[\int_0^t X_s^2 ds\right] < \infty, \forall t$.
$ds \otimes \mathbb{P} - p.p.$	: Presque partout pour la mesure produit de la mesure de lebesgue et la mesure
$\mathbb{R}^n$	: L'espace réel euclidien de dimension n.
$\mathcal{M}_{n,d}(\mathbb{R})$	: L'ensemble des matrices réelles $n \times d$.
$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_{n,d}(\mathbb{R}))$	: L'espace des fonctions linéaires continues de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathcal{M}_{n,d}$.
EDS	: Equation différentielle stochastique.
$C_b^2(\mathbb{R})$	: L'ensemble des fonctions de classe C^2 telle que f, f' et $f"$ sont bornés.