

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilité**

Par

CHERGUI Amina

Titre :

Processus de Poisson et leurs propriétés

Membres du Comité d'Examen :

Dr. YEKHLEF Samia	UMKB	Président
Dr. MANSOURI Badreddine	UMKB	Encadreur
Dr. TABET Moufida	UMKB	Examineur

Juin 2018

DÉDICACE

Ce travail est dédié

A ceux qui m'ont appris le respect et le sens du devoir;

Ceux qui ne cessent de se sacrifier pour mon bien être;

Ceux qui m'ont protégés,

A mes chers parents Mohamed et Goudjila;

A mes frères : Hakim, Zohir et Samir;

A mes sœurs : Amel, Nadia, seghira, Saida, Asma, Narimen, Khalida;

A la personne qui m'a toujours encouragé mon fiancé : Youcef;

A mes neveux : Wassila, Wissal, Islam, Abed enour, Salsabil, Meriem, Chahine, Racim,

Mohamed, Takki, Amine, Wided et Touka;

A mes chères amies : Nouhad, Sabah, Sara, Rayen, Aicha, Sabrine, wissem, Amina et...

A mes collègues de la promotion 2018 particulièrement ceux de la spécialité

Mathématiques

REMERCIEMENTS

*D'abord nous remercions **DIEU** de nous avoir venu en aide pour que nous puissions aboutir à la réussite.*

*Tout le respect et les mots de remerciement à mon encadreur **Dr.MANSOURI Badreddine**, pour son soutien, son aide, et ses conseils et ses directives du début jusqu'à la fin de ce travail.*

*Je tiens aussi à remercier notre chef du département de mathématique **Dr.HAFAYE Mokhtar**, et les enseignant qui*

ont participés à notre formation, et tous les enseignants du département de mathématiques de l'université Mohamed Kheider.

Mes remerciements aussi aux membres de jurés qui nous honorent à accepter de juger ce modeste travail.

Dr. YEKHLEF Samia et Dr.TABET Moufida

je remercie aussi infiniment ma chère amie Sara qui m'a encouragé et aidé.

J'exprime aussi mes gratitudes à toutes les personnes qui ont contribués de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

merci à tous.

Table des matières

Remerciements	ii
Table des matières	ii
Introduction	1
1 Processus de Markov	3
1.1 Variable aléatoire discrète :	3
1.2 Chaîne de Markov à temps discret :	3
1.3 Matrice de transition :	4
1.4 Matrice de transition en n pas :	4
1.5 Processus stochastique :	7
1.5.1 Processus de Markov :	8
2 Processus de poisson	9
2.1 Processus de comptage :	9
2.2 Processus de Poisson homogènes :	10
2.2.1 Une construction des processus de Poisson homogènes	10
2.3 Processus de poisson composé	21
2.4 Processus de poisson non homogène	22
3 Application	23

3.1	Processus de naissances	23
3.1.1	Exemple de la division cellulaire	23
3.1.2	Loi de la taille de la population	24
3.1.3	Loi de la durée entre deux événements successifs	29
3.1.4	Autres formes de l'intensité	30
3.2	Processus de morts	31
	Bibliographie	34
	Annexe A : Résultats Utiles	35
	Annexe B : Abréviations et Notations	37

Introduction

Les études de phénomènes aléatoires au cours du temps sont aujourd'hui légions, que ce soit dans le domaine de la physique nucléaire, de la biologie cellulaire ou bien encore dans des situations concrètes de la vie courante, comme pour l'étude du congestionnement d'une centrale téléphonique (dépendant du processus des appels téléphoniques qui se produisent à des instants aléatoires). L'interprétation de ces phénomènes est tend vers toujours a des fonctions dépendes de deux variables temps et aléatoire qui sont les processus stochastiques, surtout les processus de Poisson.

Un processus de Poisson, nommé d'après le mathématicien français Siméon Denis Poisson et la loi du même nom, est un processus de comptage classique dont l'équivalent discret est la somme d'un processus de Bernoulli. C'est le plus simple et le plus utilisé des processus modélisant une file d'attente. C'est un processus de Markov, et même le plus simple des processus de naissance et de mort (ici un processus de naissance pur). Les moments de sauts d'un processus de Poisson forment un processus ponctuel qui est déterminantal pour la mesure de Lebesgue avec un noyau $K(x, y) = \lambda 1_{\{x=y\}}$.

Ce mémoire s'articule autour de trois chapitres.

Le premier chapitre : dans le premier chapitre nous présentons un rappel sur les variables aléatoires, chaîne de Markov, les processus stochastique et processus de Markov.

Le deuxième chapitre : dans ce chapitre nous faisons une synthèse sur les processus de Poisson. En premier temps, nous abordons les processus de comptages, puis nous étudions les processus de Poisson homogène et non homogène et les processus composé.

Le troisième chapitre : Enfin, le dernier chapitre contient quelque exemple de processus de Poisson, comme processus de naissances pur, nous adapterons ce processus au cas de la croissance d'une population pour lequel il semble raisonnable de tenir compte de la taille de la population pour modéliser la fréquence des naissances, et exemple sur la division cellulaire. Le processus de morts au sein d'une population sera traité dans le même mouvement.

Chapitre 1

Processus de Markov

1.1 Variable aléatoire discrète :

Définition 1.1.1 (Ω, F, P) est un espace de probabilité et E un ensemble.

On appelle variable aléatoire discrète une application X de Ω dans E telle que $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable et pour tout $x \in E, X^{-1}(\{x\}) \in F$.

On dit que X est une variable aléatoire discrète réelle si $E = \mathbb{R}$

Définition 1.1.2 Soit X une v-a discrète $X(\Omega) = \{X_n; n \in I\}$ ou I est fini ou dénombrable. La loi de probabilité de X est la suite $(P_n)_{n \in I}$. où pour tout $n \in I$,

$$P_n = P(X = x_n).$$

1.2 Chaîne de Markov à temps discret :

Définition 1.2.1 Une chaîne de Markov à temps discret est une suite de variables aléatoires $\{X_n\}_{n \geq 0}$ à valeurs dans un espace d'états (fini ou infini) dénombrable telle que :

$$P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n)$$

pour tous les états i_{n+1}, i_n, \dots, i_0 et tout entier $n \geq 0$, c'est la propriété markovienne.

L'indice n représente habituellement le temps. Lorsque les probabilités de transition ci-dessus sont stationnaire (c'est-à-dire les mêmes pour tout entier $n \geq 0$), la chaîne est dite homogène.

1.3 Matrice de transition :

La matrice $\mathbb{P} = (\mathbb{P}_{ij})$ dont l'entrée sur la rangée i et dans la colonne j est donnée par :

$$\mathbb{P}_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

notée aussi parfois \mathbb{P}_{ij} , pour tous les états i et j , est appelée la matrice de transition.

1.4 Matrice de transition en n pas :

La matrice de transition en n pas pour tout $n \geq 1$ est la matrice $\mathbb{P}^{(n)}$ dont l'entrée sur la rangée i et dans la colonne j est donnée par :

$$\mathbb{P}_{ij}^{(n)} = P(X_n = j | X_0 = i)$$

pour tous les états i et j . par stationnarité, on a :

$$\mathbb{P}_{ij}^{(n)} = P(X_{n+k} = j | X_k = j)$$

pour tout $k \geq 0$. De plus, on a les propriétés ci-dessous.

1 $0 \leq \mathbb{P}_{ij}^{(n)} \leq 1$ pour tous i, j

2 $\sum_j \mathbb{P}_{ij}^{(n)} = 1$ pour tout i .

3 $\mathbb{P}_{ij}^{(n)} = \sum_l \mathbb{P}_{il}^{(k)} \mathbb{P}_{lj}^{(n-k)}$ pour tous i, j et pour tout $0 \leq k \leq n$ avec :

$$\mathbb{P}_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j. \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En notation matricielle, on a $\mathbb{P}^{(n)} = \mathbb{P}^{(k)} \mathbb{P}^{(n-k)}$ pour tout $0 \leq k \leq n$, avec $\mathbb{P}^{(0)} = I$, où I désigne la matrice identité.

4 $\mathbb{P}^{(n)} = \mathbb{P}^n$ pour tout $n \geq 0$

Les propriétés 1 et 2 sont immédiates car $\mathbb{P}_{ij}^{(n)}$ est une probabilité et la somme sur j pour tout i fixé donne la probabilité de l'ensemble de toutes les transitions possibles à partir de i . Ces deux propriétés signifient que la matrice de transition en n pas est une matrice stochastique.

La propriété 3 appelée l'équation de Chapman-Kolmogorov, est obtenue en conditionnant sur l'état à un instant intermédiaire k entre 0 et n en utilisant la stationnarité. Cela donne :

$$\begin{aligned} P(X_n = j | X_0 = i) &= \sum_l P(X_n = j, X_k = l | X_0 = i) \\ &= \sum_l P(X_n = j | X_k = l, X_0 = i) P(X_k = l | X_0 = i) \\ &= \sum_l P(X_n = j | X_k = l) P(X_k = l | X_0 = i) \\ &= \sum_l P(X_{n-k} = j | X_0 = l) P(X_k = l | X_0 = i) \end{aligned}$$

pour tous i, j et pour tout $0 \leq k \leq n$, tel qu'illustré dans la figure 1.

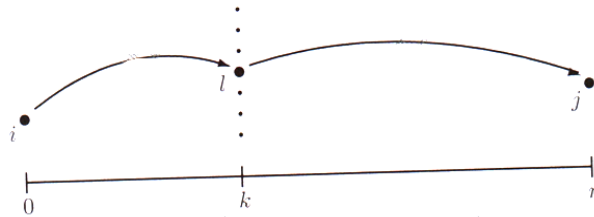


FIG. 1.1 – Représentation de l'équation de Chapman-Kolmogorov.

Enfin la propriété 4 découle de l'équation de Chapman-kolmogorov et du fait que la matrice de transition en un pas est la matrice de transition elle-même, c'est à dire $\mathbb{P}^{(1)} = \mathbb{P}$. La propriété 4 est donc vraie pour $n = 1$ et si elle est vraie pour $n - 1 \geq 1$, alors :

$$\mathbb{P}^{(n)} = \mathbb{P}^{(n-1)}\mathbb{P}^{(1)} = \mathbb{P}^{n-1}\mathbb{P} = \mathbb{P}^n.$$

Le cas $n = 0$ est trivial par définition. La matrice de transition en n pas est donc donnée par la $n - ième$ itération de la matrice de transition, d'où l'importance de pouvoir calculer la puissance d'une matrice.

Exemple 1.4.1 *Le temps d'un jour au suivant* : On suppose que le temps qu'il fera demain, ou bien S pour ensoleillé ou bien N pour nuageux, étant donné le temps qu'il fait aujourd'hui ne dépend pas du temps qu'il faisait les jours précédents. On désigne par S_n l'événement que le jour $n \geq 0$ est ensoleillé et par N_n celui qu'il est nuageux. Les probabilités conditionnelles suivantes sont données.

$$P(S_{n+1}|S_n) = 0,2;$$

$$P(S_{n+1}|N_n) = 0,4.$$

On a alors :

$$P(N_{n+1}|S_n) = 1 - P(S_{n+1}|S_n) = 0,8;$$

$$P(N_{n+1}|N_n) = 1 - P(S_{n+1}|N_n) = 0,6.$$

On définit la variable aléatoire X_n par $X_n = 0$ si S_n se réalise, et $X_n = 1$ si N_n se réalise. La suite $\{X_n\}_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov à temps discret sur les états 0 et 1 dont la

matrice de transition \mathbb{P} est donnée par :

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$$

On est lundi et c'est ensoleillé. On veut connaître la probabilité que le vendredi suivant soit un jour ensoleillé. Or, vendredi est dans quatre jours. On doit donc calculer :

$$P(X_4 = 0 | X_0 = 0) = \mathbb{P}_{00}^{(4)},$$

Soit l'entrée $(0,0)$ de la matrice de transition en 4 pas. On obtient pour cette matrice :

$$\mathbb{P}^{(4)} = \mathbb{P}^4 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 0,36 & 0,64 \\ 0,32 & 0,68 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0,3344 & 0,6656 \\ 0,3328 & 0,6672 \end{pmatrix}.$$

On conclut que $\mathbb{P}_{00}^{(4)} = 0,3344$. On remarque que cette probabilité est très près de $\mathbb{P}_{10}^{(4)} = 0,3328$. En fait, les deux lignes de la matrice de transition en 4 pas sont pratiquement identiques, ce qui signifie que l'état de départ ne fait pratiquement plus de différence après seulement 4 pas.

1.5 Processus stochastique :

Définition 1.5.1 Un processus stochastique est une famille $X = (X_t)_{t \in I}$ de variables aléatoires à valeur dans un espace mesurable (Ω, F) est indexée par le temps t . Le paramètre de temps t variant dans I .

- 1) si t fixe : X_t est une variable aléatoire définie sur (Ω, F) à valeur dans $(\mathbb{R}^d, B(\mathbb{R}^d))$.
- 2) si ω fixe : X_t appelé la trajectoire de $(X_t)_{t \in T}$ associée à ω .

Remarque 1.5.1 Un processus stochastique $(X_t)_{t \in T}$ est dit à temps discret si T est un ensemble infini dénombrable.

Définition 1.5.2 Filtration soit (Ω, F) un espace mesurable.

1- Si F_t est une sous-tribu de F pour tout $t \in T$, et si $F_s \subset F_t$, pour tous $s < t$, alors $F = (F_t)_{t \in T}$ est appelée filtration de (Ω, F) .

En particulier, si $X = (X_t)_{t \in T}$ est un processus stochastique, la filtration $F = (\sigma(X_s; s < t))_{t \in T}$ est appelée filtration naturelle X .

2- Un processus stochastique X est dit adapté à une filtration $(F_t)_{t \in T}$ si pour tout $t \geq 0$, la variable aléatoire X_t est F_t -mesurable.

Définition 1.5.3 (Processus à trajectoire continue) Un processus (X_t) est à trajectoire continue ou simplement processus continue si :

$$P(\{\omega \in \Omega; t \rightarrow X_t(\omega) \text{ est continue}\}) = 1$$

Définition 1.5.4 (Processus progressivement mesurable) : Un processus $(X_t)_{t \in I}$ est dit progressivement mesurable par rapport à F si pour tout $t \in T$ l'application $(s, \omega) \rightarrow X_s(\omega)$ est mesurable sur $[0, t] \times \Omega$ muni de la tribu produit $B([0, t]) \otimes F_t$.

Remarque 1.5.2 Un processus progressivement mesurable est mesurable et adapté.

Proposition 1.5.1 Si X est un processus stochastique dont les trajectoires sont continué à droite (ou à gauche), alors X est mesurable et progressivement mesurable s'il est de plus adapté.

1.5.1 Processus de Markov :

Définition 1.5.5 Un processus $\{X(t), t \in T\}$ est appelé processus de Markov (ou markovien) si :

$$P[X(t_n) \leq x_n \mid X(t), t \leq t_{n-1}] = P[X(t_n) \leq x_n \mid X(t_{n-1})]$$

où $t_{n-1} < t_n$.

Chapitre 2

Processus de poisson

2.1 Processus de comptage :

Définition 2.1.1 Soit $N(t)$ le nombre total d'évènements qui se sont produits dans l'intervalle $[0, t]$, le processus stochastique $\{N(t), t \geq 0\}$ est appelé **processus de comptage**. Les processus de comptage possèdent les propriétés suivantes qui découlent directement de leur définition.

Propriété 2.1.1 i) $N(t)$ est une variable aléatoire dont les valeurs possibles sont $0, 1, 2, \dots$

ii) La fonction $N(t)$ est non décroissante : $N(t_2) - N(t_1) \geq 0$ si $t_2 > t_1 \geq 0$.

De plus, $N(t_2) - N(t_1)$ est le nombre total d'évènements qui se sont produits dans l'intervalle $[t_1, t_2]$.

Définition 2.1.2 Un processus de comptage est dit à accroissements indépendants si les nombres de tops se produisant dans des intervalles de temps disjoints sont indépendants.

Définition 2.1.3 Un processus de comptage est dit à accroissements stationnaires si la loi de probabilité du nombre de tops se produisant dans un intervalle de temps donné ne dépend que de la longueur de celui-ci.

2.2 Processus de Poisson homogènes :

Définition 2.2.1 *Un processus de comptage $\{N(t); t \geq 0\}$ est appelé processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$ si :*

- a) $N(0) = 0$;
- b) le processus est à accroissements indépendants ;
- c) le nombre de tops se produisant dans un intervalle de temps de longueur $t \geq 0$ suit une loi de Poisson de paramètre λt

$$\forall s \geq 0, \forall t \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, P(N(s+t) - N(s) = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

Définition 2.2.2 *Un processus de comptage $\{N(t); t \geq 0\}$ est appelé processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$ si :*

- i) $N(0) = 0$;
- ii) le processus est à accroissements indépendants, et stationnaires ;
- iii) $P(N(h) = 1) = \lambda h + o(h)$ pour $h \rightarrow 0$;
- iv) $P(N(h) \geq 2) = o(h)$ pour $h \rightarrow 0$.

Remarque 2.2.1 *Les définitions 2.2.1 et 2.2.2 sont équivalentes.*

2.2.1 Une construction des processus de Poisson homogènes

Définition 2.2.3 *Soit $(T_n)_{n \geq 0}$ une suite croissante de variables aléatoires réelles positives telles que $(T_1, T_2 - T_1, \dots, T_n - T_{n-1}, \dots)$ soit une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On lui associe le processus de comptage $\{N(t); t \geq 0\}$, avec $N(t) = \sum_{n \geq 1} 1_{\{T_n \leq t\}}$.*

Remarque 2.2.2 *On peut vérifier que c'est bien un processus de comptage. On a alors :*

$$N(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < T_1 \\ n & \text{si } T_n \leq t < T_{n+1} \end{cases}$$

Théorème 2.2.1 *Un processus de comptage défini par la définition 2.2.3 est un processus de Poisson au sens de la définition 2.2.1.*

Commençons d'abord par montrer quelques lemmes utiles.

Lemme 2.2.1 $\forall t \geq 0, \forall n \geq 1,$

$$\int_{\mathbb{R}^n} 1_{\{0 < t_1 < \dots < t_n \leq t\}} dt_1 \dots dt_n = \frac{t^n}{n!}$$

Preuve. soit $n \geq 1$ et soit $t \geq 0$. Alors :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} 1_{\{0 < t_1 < \dots < t_n \leq t\}} dt_1 \dots dt_n &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} 1_{\{0 < t_2 < \dots < t_n \leq t\}} \left[\int_0^{t_2} dt_1 \right] dt_2 \dots dt_n && \text{(Fubini-Tonelli)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} 1_{\{0 < t_2 < \dots < t_n \leq t\}} t_2 dt_2 \dots dt_n \end{aligned}$$

⋮ (par récurrence. pour $2 \leq k \leq n - 1$)

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}^{n-k+1}} 1_{\{0 < t_k < t_{k+1} < \dots < t_n \leq t\}} \frac{1}{(k-1)!} (t_k)^{k-1} dt_k \dots dt_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-k}} 1_{\{0 < t_{k+1} < \dots < t_n \leq t\}} \left[\int_0^{t_{k+1}} \frac{(t_k)^{k-1}}{(k-1)!} dt_k \right] dt_{k+1} \dots dt_n \text{ (Fubini-Tonelli)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-k}} 1_{\{0 < t_{k+1} < \dots < t_n \leq t\}} \frac{1}{k!} (t_{k+1})^k dt_{k+1} \dots dt_n \end{aligned}$$

⋮ (par récurrence. pour $k = n - 1$)

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}} 1_{\{0 < t_n \leq t\}} \frac{1}{(n-1)!} (t_n)^{n-1} dt_n \\ &= \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

■

Lemme 2.2.2 *Soit $\{N(t); t \geq 0\}$ un processus de comptage défini par la définition 2.2.3. Alors $N(t)$ suit une loi de Poisson de paramètre λt . En outre, sachant que $N(t) = n$, $\{T_i\}_{1 \leq i \leq n}$ est un n -échantillon de loi uniforme sur le segment $[0, t]$, de densité*

$$(t_1, \dots, t_n) \rightarrow \frac{n!}{t^n} 1_{\{0 < t_1 < \dots < t_n \leq t\}}$$

Preuve. Commençons par calculer la loi de $N(t)$. Tout d'abord, le n -uplet (T_1, T_2, \dots, T_n) a pour densité (par rapport à la mesure de Lebesgue)

$$(t_1, \dots, t_n) \rightarrow 1_{\{0 < t_1 < \dots < t_n \leq t\}} \lambda^n e^{-\lambda t_n}$$

En effet, soit f une fonction mesurable, positive. Posons $f(T_1, \dots, T_n) = g(T_1, T_2 - T_1, \dots, T_n - T_{n-1})$.

$$\begin{aligned} E[f(T_1, \dots, T_n)] &= E[g(t_1, t_2 - t_1, \dots, t_n - t_{n-1})] \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(t_1, t_2 - t_1, \dots, t_n - t_{n-1}) 1_{\{0 < t_1 < \dots < t_n\}} \lambda e^{-\lambda t_1} \lambda e^{-\lambda(t_2 - t_1)} \dots \lambda e^{-\lambda(t_n - t_{n-1})} dt_1 \dots dt_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(t_1, \dots, t_n) 1_{\{0 < t_1 < \dots < t_n\}} \lambda^n e^{-\lambda t_n} dt_1 \dots dt_n \end{aligned}$$

Ainsi on obtient, $\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} P(N(t) = n) &= P(T_n \leq t \leq T_{n+1}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} 1_{\{t_n < t < t_{n+1}\}} d(t_1, \dots, t_{n+1}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} 1_{\{0 < t_1 < \dots < t_n \leq t \leq t_{n+1}\}} \lambda^{n+1} e^{-\lambda t_{n+1}} dt_1 \dots dt_{n+1} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} 1_{\{0 < t_1 < \dots < t_n \leq t\}} \lambda^{n+1} \left[\int_t^\infty e^{-\lambda t_{n+1}} dt_{n+1} \right] dt_1 \dots dt_n \quad (\text{par Fubini - Tonelli}) \\ &= e^{-\lambda t} \lambda^n \int_{\mathbb{R}^n} 1_{\{0 < t_1 < \dots < t_n \leq t\}} dt_1 \dots dt_n \\ &= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \quad (\text{par le lemme 2.2.1}) \end{aligned}$$

On obtient donc la première partie du lemme :

$$P(N(t) = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

Calculons la loi de (T_1, \dots, T_n) sachant $N(t) = n$:

$\forall \Gamma \subset \mathbb{R}^n$ mesurable, on a, comme $\forall t > 0, \forall n \in \mathbb{N}, P(N(t) = n) \neq 0$,

$$\begin{aligned}
 P((T_1, \dots, T_n) \in \Gamma \mid N(t) = n) &= \frac{P(N(t) = n, (T_1, \dots, T_n) \in \Gamma)}{P(N(t) = n)} \\
 &= \frac{n!}{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n} \int_{\Gamma \times \mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{0 < t_1 < \dots < t_n \leq t < t_{n+1}\}} \lambda^{n+1} e^{-\lambda t_{n+1}} dt_1 \dots dt_{n+1} \\
 &= \frac{n!}{e^{-\lambda t} t^n} \int_{\Gamma} \mathbf{1}_{\{0 < t_1 < \dots < t_n \leq t\}} \left[\int_t^\infty \lambda e^{-\lambda t_{n+1}} dt_{n+1} \right] dt_1 \dots dt_n \text{ (Fubini-Tonelli)} \\
 &= \frac{n!}{t^n} \int_{\Gamma} \mathbf{1}_{\{0 < t_1 < \dots < t_n \leq t\}} dt_1 \dots dt_n
 \end{aligned}$$

Ainsi $\{(T_1, \dots, T_n) \mid N(t) = n\}$ a pour densité $(t_1, \dots, t_n) \rightarrow \frac{n!}{t^n} \mathbf{1}_{\{0 < t_1 < \dots < t_n \leq t\}}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n . Soient S_1, \dots, S_n des variables aléatoires indépendantes, de loi uniforme sur le segment $[0, t]$, (ie de densité $x \rightarrow \frac{1}{t} \mathbf{1}_{\{0 \leq x \leq t\}}(x) dx$). Si on note $\{S'_1, \dots, S'_n\}$ les variables aléatoires obtenues en réordonnant $\{S_1, \dots, S_n\}$ dans l'ordre croissant, alors le n-uplet (S'_1, \dots, S'_n) a pour densité : $(s'_1, \dots, s'_n) \rightarrow \frac{n!}{t^n} ds'_1 \dots ds'_n$. On reconnaît la densité de $\{(T_1, \dots, T_n) \mid N(t) = n\}$, d'où le lemme 2. ■

Lemme 2.2.3 Soit $\{N(t); t \geq 0\}$ un processus de comptage défini par la définition 2.2.3.

$\forall 0 = r_0 < r_1 < \dots < r_k = t$ subdivision de $[0, t]$ et $\forall (n_j)_{1 \leq j \leq k} / \sum_{j=1}^k n_j = n$, on a :

$$P(N(r_j) - N(r_{j-1}) = n_j ; j \in \{1, 2, \dots, k\}) = \prod_{j=1}^k \frac{e^{-\lambda(r_j - r_{j-1})} [\lambda(r_j - r_{j-1})]^{n_j}}{n_j!}$$

Preuve. soit $0 = r_0 < r_1 < \dots < r_k = t$ une subdivision quelconque de $[0, t]$. Avec les mêmes notations que dans la preuve du lemme 2.2.2, si on note $(N'_b - N'_a)$ le nombre de variables aléatoires S_k dans l'intervalle $]a, b]$ (ce qui est également le nombre de S'_k dans $]a, b]$ car on ne fait que reprendre les mêmes variables aléatoires mais dans un ordre différent), on a :

$$P(N'_{r_j} - N'_{r_{j-1}} = n_j; j \in [1, k]) = n! \prod_{i=1}^k \frac{1}{n_j!} \left(\frac{r_j - r_{j-1}}{t} \right)^{n_j}.$$

En effet, puisque $S_1, \dots, S_n \text{ iid} \sim U([0, t])$, alors (N'_1, \dots, N'_k) forme un vecteur de loi multinomiale de paramètres :

- * n (nombre de tirages indépendants) avec $\sum_{i=1}^k n_i = n$;
- * $p_j = \frac{r_j - r_{j-1}}{t}$ ($1 \leq j \leq k$) (probabilité de la j^{eme} issue n_j).

Ainsi, $\{(T_1, \dots, T_n) \mid N(t) = n\}$ ayant même loi que $\{S'_1, \dots, S'_n\}$, on obtient donc :

$$P(\underbrace{N(r_j) - N(r_{j-1}) = n_j; j \in [1, k]}_{n_j \text{ tops dans }]r_{j-1}, r_j] \mid N(t) = n) = n! \prod_{i=1}^k \frac{1}{n_i!} \left(\frac{r_j - r_{j-1}}{t} \right)^{n_j}$$

(avec $n = \sum_{j=1}^k n_j$, sinon cette probabilité est nulle).

Pour se débarrasser du conditionnement, on multiplie par $P(N(t) = n)$. Rappelons que

$$P(N(t) = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \text{ (cf. lemme 2.2.2).}$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} P(N(r_j) - N(r_{j-1}) = n_j; j \in [1, k]) &= P(N(t) = \sum_{j=1}^k n_j) \\ &\times P(N(r_j) - N(r_{j-1}) = n_j; j \in [1, k] \mid N(t) = n) \\ &= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{\sum_{j=1}^k n_j}}{n!} \cdot n! \prod_{j=1}^k \frac{1}{n_j!} \left(\frac{r_j - r_{j-1}}{t} \right)^{n_j} \\ &= e^{-\lambda \left[\sum_{j=1}^k (r_j - r_{j-1}) \right]} \prod_{j=1}^k \frac{(\lambda t)^{n_j}}{n_j!} \frac{(r_j - r_{j-1})^{n_j}}{t^{n_j}} \\ &= \prod_{j=1}^k \frac{e^{-\lambda(r_j - r_{j-1})} [\lambda(r_j - r_{j-1})]^{n_j}}{n_j!} \end{aligned}$$

et ce $\forall 0 = r_0 < r_1 < \dots < r_k = t$ subdivision de $[0, t]$, d'où le lemme 2.2.3. ■

Preuve à présent le théorème 2.2.1.

Preuve. Soit $\{N(t); t \geq 0\}$ un processus de comptage défini par la définition 2.2.3.

a) $N(0) = 0$ car $T_1 > 0$ presque sûrement.

Montrons que $\{N(t); t \geq 0\}$ est à accroissements indépendants. et que le nombre de tops dans l'intervalle $[s, s + t]$, $N(s + t) - N(s)$ suit une loi e poisson de paramètre λt , ie

$$P(N(s + t) - N(s) = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

D'après le lemme 2.2.3. on a $\forall 0 = r_0 < r_1 < \dots < r_k = t$ subdivision de $[0, t]$ et $\forall (n_j)_{1 \leq j \leq k}$ tel que $\sum_{j=1}^k n_j = n$,

$$P(N(r_j) - N(r_{j-1}) = n_j ; j \in \{1, 2, \dots, k\}) = \prod_{j=1}^k \frac{e^{-\lambda(r_j - r_{j-1})} [\lambda(r_j - r_{j-1})]^{n_j}}{n_j!}$$

Ainsi, $\forall s, t > 0$, (pour $r_0 = 0, r_1 = s, r_2 = s + t$), on a :

$$P(N(s) = k, N(s + t) - N(s) = n) = e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^k}{k!} . e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

et en sommant sur les k , on obtient :

$$\begin{aligned} P(N(s + t) - N(s) = n) &= \sum_{k \in \mathbb{N}} P(N(s) = k, N(s + t) - N(s) = n) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \left[e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^k}{k!} \right] . e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \end{aligned}$$

Finalement, $\forall s, t > 0$, $N(s + t) - N(s)$ suit une loi de poisson, d'où c).

Et de plus, on obtient que :

$$P(\cap_{1 \leq j \leq k} \{N(r_j) - N(r_{j-1}) = n_j\}) = \prod_{j=1}^k P(\{N(r_j) - N(r_{j-1}) = n_j\}).$$

On en déduit donc que le processus est bien à accroissements indépendants, d'où b).

Cela conclut donc la démonstration du théorème 2.2.1. ■

Théorème 2.2.2 Soit $\{N(t); t \geq 0\}$ défini par la définition 2.2.1. Notions $(X_n)_{n \geq 1}$ les sauts (X_n représente l'instant du $n^{\text{ème}}$ top). Alors la suite (X_n) ainsi définie vérifie la définition 2.2.3.

Preuve. Reprenons les même notation que dans le théorème 2.2.2, et considérons $(T_n)_{n \geq 1}$ vérifiant la définition 2.2.3. On peut alors définir un processus $\{N'(t); t \geq 0\}$ au sens de la définition 2.2.3. Montrons que $\forall n \geq 1$, $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ et $(T_k)_{1 \leq k \leq n}$ ont même loi.

1. **étape1** : Montrons que $\forall n \geq 1, \forall \Gamma \subset \mathbb{R}^n$ mesurable, on a :

$$P((X_1, \dots, X_n) \in \Gamma \mid N(t) = n) = P((T_1, \dots, T_n) \in \Gamma \mid N'(t) = n)$$

Par le lemme 2.2.2, on sait que $N'(t)$ suit une loi de poisson, et que $\forall \Gamma \subset \mathbb{R}^n$ mesurable,

$$P((T_1, \dots, T_n) \in \Gamma \mid N'(t) = n) = \frac{n!}{t^n} \int_{\Gamma} 1_{\{0 < t_1 < \dots < t_n \leq t\}} dt_1 \dots dt_n$$

(a) **sous-étape1** : Cas particulier des pavés rangés.

Soit $0 = r_0 < r_1 < \dots < r_k = t$ une subdivision de l'intervalle $[0, t]$, soit

$$(n_j)_{1 \leq j \leq k} / \sum_{j=1}^k n_j = n.$$

Considérons $\Gamma = \otimes_{j=1}^k]r_{j-1}, r_j]^{n_j}$. Montrons que

$$P((X_1, \dots, X_n) \in \Gamma \mid N(t) = n) = \frac{n!}{t^n} \int_{\Gamma} 1_{\{0 < t_1 < \dots < t_n \leq t\}} dt_1 \dots dt_n$$

Posons $P = P((X_1, \dots, X_n) \in \Gamma \mid N(t) = n)$.

On a :

$$\begin{aligned} \{N(r_j) - N(r_{j-1}) = n_j\} &= \{X_{(\sum_{i=1}^{j-1} n_i) + m} \in]r_{j-1}, r_j], m \in [1, n_j]\} \\ &= \{(X_{(\sum_{i=1}^{j-1} n_i) + m})_{1 \leq m \leq n_j} \in]r_{j-1}, r_j]^{n_j}\} \end{aligned}$$

D'où on obtient :

$$\begin{aligned} P &= \frac{P(\{N(r_j) - N(r_{j-1}) = n_j, j \in [1, k]\}, N(t) = n)}{P(N(t) = n)} \\ &= \frac{P(\{N(r_j) - N(r_{j-1}) = n_j, j \in [1, k]\})}{P(N(t) = n)} \end{aligned}$$

Or, d'après la définition 2.2.1, on sait que $\forall t \geq 0, N(t)$ suit la loi de Poisson de paramètre λt , et que le processus est à accroissements indépendants. Les intervalles $]r_{j-1}, r_j]$ étant disjoints, on obtient :

$$\begin{aligned} P(\{N(r_j) - N(r_{j-1}) = n_j, j \in [1, k]\}) &= \prod_{j=1}^k \frac{e^{-\lambda(r_j - r_{j-1})} [\lambda(r_j - r_{j-1})]^{n_j}}{n_j!} \\ &= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} n! \prod_{j=1}^k \frac{1}{n_j!} \left(\frac{r_j - r_{j-1}}{t} \right)^{n_j} \end{aligned}$$

D'où $P = \frac{n!}{t^n} \prod_{j=1}^k \left(\frac{(r_j - r_{j-1})^{n_j}}{n_j!} \right)$.

En outre, d'après le lemme 2.2.1,

$$\forall j \in [1, k], \frac{(r_j - r_{j-1})^{n_j}}{n_j!} = \int_{\mathbb{R}^{n_j}} \mathbf{1}_{\{0 < t_{j_1} < \dots < t_{j_{n_j}} \leq r_j - r_{j-1}\}} dt_{j_1} \dots dt_{j_{n_j}}$$

d'où :

$$\begin{aligned} P &= \frac{n!}{t^n} \prod_{j=1}^k \left[\int_{\mathbb{R}^{n_j}} \mathbf{1}_{\{0 < t_{j_1} < \dots < t_{j_{n_j}} \leq r_j - r_{j-1}\}} dt_{j_1} \dots dt_{j_{n_j}} \right] \\ &= \frac{n!}{t^n} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^k \mathbf{1}_{\{0 < t_{j_1} < \dots < t_{j_{n_j}} \leq r_j - r_{j-1}\}} dt_{1_1} \dots dt_{1_{n_1}} dt_{2_1} \dots dt_{2_{n_2}} \dots dt_{k_1} \dots dt_{k_{n_k}} \end{aligned}$$

$\forall j \in [1, k], \forall i \in [1, n_j]$, posons $x_{j_i} = t_{j_i} + r_{j-1}$.

La mesure de Lebesgue étant invariante par translation, on obtient :

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{n!}{t^n} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^k 1_{\{r_{j-1} < x_{j_1} < \dots < x_{j_{n_j}} \leq r_j\}} dx_{1_1} \dots dx_{k_{n_k}} \\
 &= \frac{n!}{t^n} \int_{\mathbb{R}^n} 1_{\{0 < x_{1_1} < \dots < x_{1_{n_1}} \leq r_1 < x_{2_1} < \dots < x_{2_{n_2}} \leq r_2 < \dots < r_{k-1} < x_{k_1} < \dots < x_{k_{n_k}} \leq r_k\}} dx_{1_1} \dots dx_{k_{n_k}} \\
 &= \frac{n!}{t^n} \int_{\otimes_{j=1}^k]r_{j-1}, r_j]^{n_j}} 1_{\{0 < x_{1_1} < \dots < x_{1_{n_1}} < x_{2_1} < \dots < x_{k_{n_k}} \leq t\}} dx_{1_1} \dots dx_{k_{n_k}}
 \end{aligned}$$

ie

$$P((X_1, \dots, X_n) \in \Gamma \mid N(t) = n) = \frac{n!}{t^n} \int_{\Gamma} 1_{\{0 < x_1 < \dots < x_n \leq t\}} dx_1 \dots dx_n \quad (2.1)$$

et ce pour tout Γ de la forme $\otimes_{j=1}^k]r_{j-1}, r_j]^{n_j}$, avec $(r_j)_{1 \leq j \leq k}$ subdivision de $[0, t]$.

(b) **sous-étape 2 : Cas des pavés quelconques.**

Montrons que pour tout pavé $\Gamma = \otimes_{i=1}^n]\alpha_i, \beta_i]$, on a :

$$P((X_1, \dots, X_n) \in \Gamma \mid N(t) = n) = \frac{n!}{t^n} \int_{\Gamma} 1_{\{0 < t_1 < \dots < t_n \leq t\}} dt_1 \dots dt_n$$

Considérons $(\alpha_i, \beta_i)_{1 \leq i \leq n}$ des réels tels que $\forall i \in [1, n], \alpha_i < \beta_i$.

On a bien sûr, $\Gamma = \otimes_{i=1}^n]\alpha_i, \beta_i]$ mesurable dans \mathbb{R}^n muni de la mesure de lebesgue.

Calculons $\int_{\Gamma} 1_{\{0 < t_1 < \dots < t_n \leq t\}} dt_1 \dots dt_n$ et $P((X_1, \dots, X_n) \in \Gamma \mid N(t) = n)$.

Considérons à présent $(r_j)_{\{1 \leq j \leq k\}}$ le réordonnement dans l'ordre croissant et sans répétition des α_i, β_j .

Alors, $\forall i \in [1, n], \exists j_i \in [1, k] /]\alpha_i, \beta_i] =]r_{j_i}, r_{j_i+m_i}] = \cup_{l_i=0}^{m_i-1}]r_{j_i+l_i}, r_{j_i+l_i+1}]$.

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
 \Gamma &= \otimes_{i=1}^n [\alpha_i, \beta_i] \\
 &= \otimes_{i=1}^n \cup_{l_i=0}^{m_i-1} [r_{j_i+l_i}, r_{j_i+l_i+1}] \\
 &= \cup_{l_1=0}^{m_1-1} \dots \cup_{l_n=0}^{m_n-1} \{ \otimes_{i=1}^n [r_{j_i+l_i}, r_{j_i+l_i+1}] \} \text{ (on développe)}
 \end{aligned}$$

Les $\otimes_{i=1}^n [r_{j_i+l_i}, r_{j_i+l_i+1}]$ sont tous disjoints car le produit d'une partition est une partition du produit.

Posons maintenant $\Delta_0 = \{(p_1, \dots, p_n) / \forall i \in [1, n], j_i \leq p_i < j_i + m_i\}$. Ainsi, pour $p_i = j_i + l_i$, on obtient $\Gamma = \cup_{p_1=j_1}^{j_1+m_1-1} \dots \cup_{p_n=j_n}^{j_n+m_n-1} \{ \otimes_{i=1}^n [r_{p_i}, r_{p_i+1}] \}$.

$$\Gamma = \cup_{(p_1, \dots, p_n) \in \Delta_0} \bigotimes_{i=1}^n [r_{p_i}, r_{p_i+1}]$$

Ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \int_{\Gamma} \mathbf{1}_{\{0 < t_1 < \dots < t_n < t\}} dt_1 \dots dt_n = \sum_{(p_1, \dots, p_n) \in \Delta_0} \int_{\otimes_{i=1}^n [r_{p_i}, r_{p_i+1}]} \mathbf{1}_{\{0 < t_1 < \dots < t_n < t\}} dt_1 \dots dt_n \\
 P((X_1, \dots, X_n) \in \Gamma \mid N(t) = n) = \sum_{(p_1, \dots, p_n) \in \Delta_0} P((X_1, \dots, X_n) \in \otimes_{i=1}^n [r_{p_i}, r_{p_i+1}] \mid N(t) = n)
 \end{array} \right.$$

En outre, pour tous $1 \leq i_0 \leq j_0 \leq n$ tels que $p_{i_0} > p_{j_0}$, (ie $p_{i_0} \geq p_{j_0+1}$ et $r_{p_{i_0}} \geq r_{p_{i_0+1}}$), quelque soit $(p_1, \dots, p_{i_0}, \dots, p_{j_0}, \dots, p_n) \in \Delta_0$ fixé, on a :

$$* \forall (t_1, \dots, t_n) \in \otimes_{i=1}^n [r_{p_i}, r_{p_i+1}], t_{j_0} \leq r_{p_{j_0+1}} \leq r_{p_{i_0}} \leq t_{i_0} \text{ d'où } \mathbf{1}_{\{0 < t_1 < \dots < t_n < t\}}(t_1, \dots, t_n) = 0.$$

$$\text{Et donc } \int_{\otimes_{i=1}^n [r_{p_i}, r_{p_i+1}]} \mathbf{1}_{\{0 < t_1 < \dots < t_n < t\}} dt_1 \dots dt_n = 0.$$

* De même, par croissance des X_i , on a :

$$P((X_1, \dots, X_n) \in \otimes_{i=1}^n [r_{p_i}, r_{p_i+1}] \mid N(t) = n) = 0.$$

Ce qui nous amène donc à poser :

$$\Delta = \{(p_1, \dots, p_n) \in \Delta_0 / p_1 \leq \dots \leq p_n\},$$

et

$$D = \cup_{(p_1, \dots, p_n) \in \Delta} \otimes_{i=1}^n]r_{p_i}, r_{p_i+1}[.$$

On vient de montrer que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Gamma} 1_{\{0 < t_1 < \dots < t_n < t\}} dt_1 \dots dt_n = \int_D 1_{\{0 < t_1 < \dots < t_n < t\}} dt_1 \dots dt_n \\ P((X_1, \dots, X_n) \in \Gamma \mid N(t) = n) = P((X_1, \dots, X_n) \in D \mid N(t) = n) \end{array} \right.$$

Or $\forall (p_1, \dots, p_n) \in \Delta$, $\otimes_{i=1}^n]r_{p_i}, r_{p_i+1}[$ est de la forme $\otimes_{j=1}^k]r_{j-1}, r_j]^{n_j}$ avec $0 = r_0 < r_1 < \dots < r_k = t$, les n_j pouvant être nuls, et $\sum_{j=1}^k n_j = n$ par construction donc, d'après l'équation 2.1 de la première sous-étape, on a :

$$P((X_1, \dots, X_n) \in \otimes_{i=1}^n]r_{p_i}, r_{p_i+1}[\mid N(t) = n) = \frac{n!}{t^n} \int_{\otimes_{i=1}^n]r_{p_i}, r_{p_i+1}[} 1_{\{0 < t_1 < \dots < t_n < t\}} dt_1 \dots dt_n$$

Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned} P((X_1, \dots, X_n) \in \Gamma \mid N(t) = n) &= P((X_1, \dots, X_n) \in D \mid N(t) = n) \\ &= \sum_{(p_1, \dots, p_n) \in \Delta} P((X_1, \dots, X_n) \in \otimes_{i=1}^n]r_{p_i}, r_{p_i+1}[\mid N(t) = n) \\ &= \sum_{(p_1, \dots, p_n) \in \Delta_0} \frac{n!}{t^n} \int_{\otimes_{i=1}^n]r_{p_i}, r_{p_i+1}[} 1_{\{0 < t_1 < \dots < t_n < t\}} dt_1 \dots dt_n \\ &= \frac{n!}{t^n} \int_D 1_{\{0 < t_1 < \dots < t_n < t\}} dt_1 \dots dt_n \\ &= \frac{n!}{t^n} \int_{\Gamma} 1_{\{0 < t_1 < \dots < t_n < t\}} dt_1 \dots dt_n \\ &= P((T_1, \dots, T_n) \in \Gamma \mid N'(t) = n) \end{aligned}$$

et ce quelque soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ pavé mesurable.

(c) **sous-étape 3 : Cas des boréliens.**

L'ensemble des pavés forme une famille σ -fini qui engendre les boréliens de \mathbb{R}^n .

D'où $\forall \Gamma$ borélien, on a :

$$P((X_1, \dots, X_n) \in \Gamma \mid N(t) = n) = P((T_1, \dots, T_n) \in \Gamma \mid N'(t) = n).$$

2. étape 2 : Déconditionnement

Ainsi $\forall n \geq 1, \forall \Gamma \subset \mathbb{R}^n$, on a :

$$\begin{aligned} P((X_1, \dots, X_n) \in \Gamma) &= P((X_1, \dots, X_n) \in \Gamma, N(t) = n) \\ &= P((X_1, \dots, X_n) \in \Gamma \mid N(t) = n) \times P(N(t) = n) \\ &= P((T_1, \dots, T_n) \in \Gamma \mid N'(t) = n) \times P(N'(t) = n) \\ &= P((T_1, \dots, T_n) \in \Gamma, N'(t) = n) \\ &= P((T_1, \dots, T_n) \in \Gamma) \end{aligned}$$

On en déduit que $\forall n \in N, (X_1, \dots, X_n)$ et (T_1, \dots, T_n) ont même loi, ie $\{N(t); t \geq 0\}$ vérifie les propriétés de la définition 2.2.3.

Ceci termine donc la démonstration du théorème 2.2.2.

■

2.3 Processus de poisson composé

Définition 2.3.1 Soit $\{N(t); t \geq 0\}$ un processus de Poisson de taux λ , et soit X_1, X_2, \dots des variables aléatoire i.i.d. et indépendantes du processus $\{N(t); t \geq 0\}$. Le processus

stochastique $\{Y(t); t \geq 0\}$ définit par :

$$Y(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} X_k \quad \forall t \geq 0 \quad (\text{et } Y(t) = 0 \text{ si } N(t) = 0)$$

est appelé **Processus de poisson composé**.

2.4 Processus de poisson non homogène

Définition 2.4.1 Soit $\{N(t); t \geq 0\}$ un processus de comptage à accroissements indépendantes. Ce processus est appelé **Processus de poisson non homogène** (ou **non stationnaire**) de fonction d'intensité $\lambda(t) \geq 0$, pour $t \geq 0$, si $N(0) = 0$ et

- i) $P[N(t + \delta) - N(t) = 1] = \lambda(t)\delta + o(\delta)$;
- ii) $P[N(t + \delta) - N(t) \geq 2] = o(\delta)$.

Chapitre 3

Application

3.1 Processus de naissances

3.1.1 Exemple de la division cellulaire

On s'intéresse au nombre $N(t)$ de cellules dans une culture à la date t . On suppose que chaque cellule a la même probabilité $\lambda\Delta t$ de se diviser durant un intervalle de durée Δt ce qui analogue aux hypothèses initiales du processus de Poisson. Une fois qu'une cellule est divisée, on considère qu'on a affaire à deux cellules "neuves" susceptibles de se diviser à leur tour.

Il faut bien noter qu'on s'intéresse ici seulement à la naissance de nouveaux individus et non à leur mort et qu'on obtient donc une modélisation nécessairement croissante de la taille de la population.

Equation de récurrence. Pour une cellule donnée, on a :

$$P\{0 \text{ division durant } [t; t + \Delta t]\} = 1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t),$$

$$P\{1 \text{ division durant } [t; t + \Delta t]\} = \lambda\Delta t + o(\Delta t),$$

$$P\{2 \text{ divisions ou plus durant } [t; t + \Delta t]\} = o(\Delta t).$$

Si on considère l'ensemble de la population, la probabilité pour que 2 cellules se divisent dans un même intervalle de temps Δt assez courts est négligeable. On a donc :

$$\begin{aligned}P\{N(t + \Delta t) = N(t)\} &= P\{0 \text{ division durant } [t; t + \Delta t]\}, \\P\{N(t + \Delta t) = N(t) + 1\} &= P\{1 \text{ division durant } [t; t + \Delta t]\}, \\P\{N(t + \Delta t) = N(t) + k, k \geq 2\} &= 0(\Delta t); \end{aligned}$$

et si on tient compte de l'effectif au début de l'intervalle $[t; t + \Delta t]$, il vient :

$$\begin{aligned}P\{N(t + \Delta t) = N(t)\} &= 1 - \lambda N(t)\Delta t + 0(\Delta t), \\P\{N(t + \Delta t) = N(t) + 1\} &= \lambda N(t)\Delta t + 0(\Delta t), \\P\{N(t + \Delta t) = N(t) + k, k \geq 2\} &= 0(\Delta t). \end{aligned}$$

On retrouve des équations semblables à celle obtenues pour un processus poissonnien mais elles ne sont plus homogènes dans le temps puisqu'elles dépendent de l'effectif $N(t)$.

3.1.2 Loi de la taille de la population

Equations différentielles. Si on note maintenant $p_n(t)$ la probabilité que l'effectif de la population soit égal à n à la date t :

$$p_n(t) = P\{N(t) = n\}$$

On obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
 p_n(t + \Delta t) &= p_n(t) \times P \{ \text{aucune division durant } [t; t + \Delta t] \} \\
 &+ p_{n-1}(t) \times P \{ \text{une division durant } [t; t + \Delta t] \} \\
 &+ 0(\Delta t) \\
 &= p_n(t) \{ 1 - \lambda n \Delta t \} + p_{n-1}(t) \lambda (n-1) \Delta t + 0(\Delta t)
 \end{aligned}$$

qui s'écrit également :

$$\frac{p_n(t + \Delta t) - p_n(t)}{\Delta t} = -\lambda n p_n(t) + \lambda (n-1) p_{n-1}(t) + \frac{0(\Delta t)}{\Delta t}.$$

Par passage à la limite, on obtient l'équation différentielle (récurrente)

$$p'_n(t) = -\lambda n p_n(t) + \lambda (n-1) p_{n-1}(t). \tag{3.1}$$

Loi de $\mathbf{N}(t)$. On note n_0 l'effectif initial de la population ($N(0) = n_0$). Comme les cellules sont supposées se diviser indépendamment les unes des autres, on peut considérer que la croissance d'une population de taille initiale n_0 est équivalente à la croissance de n_0 populations de tailles initiales 1. $N(t)$, qui est la taille de la population au temps t , s'écrit comme la somme de la taille des n_0 populations : si on note $N_i(t)$ la taille de la i ème population au temps t , on a :

$$N(t) = \sum_{i=1}^{n_0} N_i(t).$$

Ainsi pour obtenir la loi de $N(t)$, on va s'intéresser à la loi de $N_i(t)$. Comme elles suivent toutes le même processus, il suffit de regarder la loi de $N(t)$ pour le cas $n_0 = 1$.

Cas $\mathbf{n_0=1}$. Les fonctions $p_n(t)$ vérifient l'équation différentiel donné par (3.1) avec en plus que $p_0(t) = 0$ puisque la taille de la population i initiale est 1 et que l'on s'intéresse ici à un processus de naissance pur. Pour obtenir $p_n(t)$, on utilise la même méthode que

pour le processus de Poisson.

1. On a :

$$p_1'(t) = -\lambda p_1(t) \Leftrightarrow p_1(t) = C_1 e^{-\lambda t}$$

or

$$p_1(0) = 1$$

donc :

$$p_1(t) = e^{-\lambda t}.$$

2. On a :

$$p_2'(t) = \lambda p_1(t) - 2\lambda p_2(t) = \lambda e^{-\lambda t} - \lambda p_2(t).$$

on résout tout d'abord :

$$p_2'(t) = -2\lambda p_2(t) \Leftrightarrow p_2(t) = C_2 e^{-2\lambda t}$$

puis on fait varier la constante $C_2 = C_2(t)$ ce qui donne :

$$p_2'(t) = e^{-2\lambda t} [C_2'(t) - 2\lambda C_2(t)].$$

Par analogie avec l'équation de départ, on a que :

$$C_2'(t) = \lambda e^{\lambda t},$$

$$\Rightarrow C_2(t) = e^{\lambda t} + c_2,$$

d'où

$$p_2(t) = (e^{\lambda t} + c_2) e^{-2\lambda t}$$

or

$$p_2(0) = 0$$

donc :

$$p_2(t) = e^{-\lambda t}(1 - e^{\lambda t}).$$

3. On peut montrer par récurrence que :

$$p_n(t) = e^{-\lambda t}(1 - e^{\lambda t})^{n-1}.$$

On résout tout d'abord

$$p'_{n+1}(t) = -\lambda(n+1)p_{n+1}(t) \Leftrightarrow p_{n+1}(t) = C_{n+1}(t)e^{-\lambda(n+1)t}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} C'_{n+1}(t) &= \lambda n e^{\lambda(n+1)t} p_n(t), \\ &= \lambda n e^{\lambda n t} (1 - e^{-\lambda t})^{n-1}, \\ &= \lambda n e^{\lambda t} (e^{\lambda t} - 1)^{n-1}. \end{aligned}$$

En intégrant, on obtient :

$$C_{n+1}(t) = (e^{\lambda t} - 1)^n + c_n.$$

D'où

$$p_{n+1}(t) = ((e^{\lambda t} - 1)^n + c_n)e^{-\lambda(n+1)t},$$

or

$$p_{n+1}(0) = 0,$$

donc :

$$p_{n+1}(t) = e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^n.$$

On reconnaît la distribution géométrique :

$$N(t) \sim \mathcal{G} [e^{-\lambda t}].$$

Cas général $N(0) = n_0$. $N(t)$ est donc une somme de n_0 variables aléatoires indépendantes qui suivent chacune une distribution géométriques de paramètre $e^{-\lambda t}$. La distribution d'une telle somme est la loi binomiale négative de paramètre n_0 et $e^{-\lambda t}$:

$$N(t) \sim \mathcal{BN}(n_0, e^{-\lambda t}).$$

On a que :

$$p_n(t) = \binom{n-1}{n_0-1} (e^{-\lambda t})^{n_0} (1 - e^{-\lambda t})^{n-n_0}.$$

Proposition 3.1.1 *En utilisant les définitions de l'espérance et de la variance d'une la loi binomiale négative, il vient :*

$$\mathbb{E}[N(t)] = n_0 e^{\lambda t},$$

c'est à dire qu'avec ce modèle, la croissance de la population est exponentielle en espérance.

D'autre part :

$$\mathbb{V}[N(t)] = n_0 e^{\lambda t} (e^{\lambda t} - 1).$$

On peut ainsi noter que le coefficient de variation vaut :

$$C.V.[N(t)] = \frac{\mathbb{E}[N(t)]}{\sqrt{\mathbb{V}[N(t)]}} = \frac{n_0 e^{\lambda t}}{\sqrt{n_0 e^{\lambda t} (e^{\lambda t} - 1)}} \rightarrow_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n_0}},$$

ce qui signifie que la variabilité relative autour de l'espérance tend à devenir constante et d'autant plus faible que la population initiale est grand.

3.1.3 Loi de la durée entre deux événements successifs

Comme pour le processus de Poisson, on s'intéresse à la loi de la durée séparant deux événements successifs. On note par X_k la variable aléatoire représentant la durée entre le k ème et le $k + 1$ ème événement. On a que :

$$X_k = T_{k+1} - T_k,$$

si T_k représente le temps où le k ème événement se produit.

Prenons tout d'abord $k = 0$. X_0 représente le temps d'attente jusqu'à la division d'une cellule sachant qu'il y a n_0 cellules. Si on note X_0^i le temps d'attente jusqu'à que la cellule i se divise, le temps d'attente jusqu'au premier événement pour toute la population correspond au premier temps d'attente des n_0 cellules, donc X_0 est :

$$X_0 = \inf\{X_0^i, i = 1, \dots, n_0\}$$

Par analogie avec le processus de Poisson, on a que X_0^i suit une loi exponentielle de paramètre λ . De plus, on a supposé que les n_0 cellules se comporter indépendamment les unes des autres, ce qui implique que les variables X_0^i sont indépendantes. En utilisant la loi de l'inf d'exponentielle, on montre que X_0 suit une loi exponentielle de paramètre la somme des paramètres des n_0 exponentielles, donc :

$$X_0 \sim \mathbb{E}(\lambda n_0)$$

De la même façon, on peut montrer que :

$$X_k \sim \mathbb{E}(\lambda n_k)$$

où n_k est le nombre de cellules à l'instant T_k , i.e. soit $n_0 + k$.

3.1.4 Autres formes de l'intensité

Le modèle présenté ci-dessus débouche sur une croissance exponentielle de la population qui n'est évidemment pas toujours réaliste. Pour mieux rendre compte de l'expansion on peut utiliser des modèles hétérogènes avec une intensité λ dépendant de l'effectif

$$\lambda = \lambda(n).$$

Modèle logistique (ou de densité-dépendance)

On peut introduire une limite supérieure n_{\max} pour l'effectif avec une fonction de freinage de la forme :

$$\lambda(n) = \lambda \left(1 - \frac{n}{n_{\max}} \right).$$

Quand l'effectif $N(t)$ s'approche de la borne n_{\max} , l'intensité des naissances tend vers 0 et la population cesse de croître.

Le modèle déterministe équivalent est gouverné par l'équation différentielle

$$n'(t) = \lambda n(t) \left(1 - \frac{n(t)}{n_{\max}} \right).$$

dont la solution est :

$$n(t) = \frac{n_{\max} n_0}{n_0 + (n_{\max} - n_0) e^{-\lambda t}},$$

on reconnaît la forme de la fonction logistique.

Intensité quadratique.

On peut également envisager des modèle de croissance encore plus rapide que l'exponentielle. C'est ce qu'on obtient si on suppose que l'intensité des naissances est proportionnelle à la taille de la population

$$\lambda(n) = \lambda n,$$

ce qui revient à prendre en compte le nombre de rencontres possibles entre tous les in-

dividus. Ce modèle est dit quadratique puisque $\lambda(n)\Delta t$ est la probabilité qu'un individu donne naissance à un autre dans un intervalle de temps Δt ; quand il y a n individus, cette probabilité vaut $n \times \lambda(n) = \lambda n^2$.

L'espérance vaut alors :

$$\mathbb{E}[N(t)] = \frac{n_0}{1 - \lambda n_0 t},$$

et n'est pas définie au-delà de $t = (\lambda n_0)^{-1}$. On montre qu'avec une telle intensité, la taille de la population explose (tend vers l'infini) en un temps fini : les naissances ont lieu de plus en plus fréquemment, à une vitesse telle qu'elles deviennent infiniment fréquentes.

3.2 Processus de morts

On peut facilement construire un modèle analogue pour la décroissance d'une population en supposant qu'à chaque instant t , toutes les cellules vivantes ont une probabilité $\mu\Delta t$ de mourir dans un intervalle de temps $[t; t + \Delta t]$. Cela revient à supposer que la durée de vie des individus est distribuée exponentiellement avec un paramètre μ .

On obtiendra ainsi une décroissance aléatoire de l'effectif $N(t)$ depuis une valeur initiale n_0 jusqu'à 0.

Loi de $N(t)$.

Si on considère que les durées de vie des individus sont exponentielles et indépendantes, on a :

$$P\{\text{un individu donné est encore vivant en } t\} = e^{-\mu t} = p(t)$$

D'après la fonction de répartition de la loi exponentielle $F(t) = 1 - e^{-\mu t}$. Le nombre d'individu encore vivant à la date t parmi le n_0 initiaux suit donc une loi binomiale :

$$N(t) \sim B[n_0, p(t)]$$

et donc :

$$\begin{aligned}
 p_n(t) &= P\{\text{il ya encore } n \text{ individu vivants en } t\} \\
 &= \binom{n_0}{n} p(t)^n [1 - p(t)]^{n_0-n} \\
 &= \binom{n_0}{n} e^{-n\mu t} (1 - e^{-\mu t})^{n_0-n} \quad (\text{pour } 0 \leq n \leq n_0)
 \end{aligned}$$

Propriétés et interprétations. On en déduit immédiatement que :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[N(t)] &= n_0 p(t) = n_0 e^{-\mu t}, \\
 \mathbb{V}[N(t)] &= n_0 p(t) [1 - p(t)] = n_0 e^{-\mu t} (1 - e^{-\mu t}),
 \end{aligned}$$

C'est à dire que la taille de la population décroît, en espérance, à vitesse exponentielle et que sa variance diminue également à vitesse exponentielle.

Ce modèle présente les mêmes défauts que le processus de naissances vu plus haut : sa rusticité le rend peu réaliste et on utilise le plus souvent des fonctions $\mu(n)$ hétérogènes pour compenser ces défauts.

On peut remarquer que l'espérance $n(t) = n_0 e^{-\mu t}$ est solution de l'équation différentielle déterministe

$$n'(t) = -\mu n(t)$$

Loi de la durée entre deux événements.

Comme pour le processus de naissances, la loi de la durée entre deux événements est une loi exponentielle qui dépend de la taille de la population. Si on note $X_k = T_{k+1} - T_k$ la durée entre le k ème et le $k + 1$ ème événement et si $N(0) = n_0$,

$$X_k \sim \xi(\mu(n_0 - k))$$

Date d'extinction. Loi de la date d'extinction :

On déduit la probabilité d'extinction de la population de la loi de $N(t)$. Si on note T^* la date d'extinction : $T^* = \inf\{t : N(t) = 0\}$, on a :

$$P\{T^* \leq t\} = P\{N(t) = 0\} = p_0(t),$$

donc :

$$P\{T^* \leq t\} = (1 - e^{-\mu t})^{n_0}.$$

Temps moyen d'extinction : La date d'extinction s'exprime en fonction des durées entre deux événements successifs :

$$T^* = X_0 + X_1 + \dots + X_{n_0-1}.$$

D'après la loi de la durée entre deux événements, on en déduit que le temps moyen d'extinction vaut :

$$E[T^*] = \sum_{i=0}^{n_0-1} X_i = \sum_{i=1}^{n_0} \frac{1}{\mu i} \approx \frac{1}{\mu} [0.577 + \log n_0].$$

Bibliographie

- [1] Girardin, V., & Limmios, N. (2014). Probabilités : processus stochastiques et applications : cours et exercices corrigés : Master, Écoles d'ingénieurs, Agrégation mathématiques.
- [2] Lebarbier, E., & Robin, S. (2007). Processus de Poisson Processus de Naissances et Morts.
- [3] Lefebvre, M. (2005). Processus stochastiques appliqués. Presses inter Polytechnique.
- [4] Lessard, S. (2014). Processus stochastiques : cours et exercices corrigés. Ellipses.
- [5] OGOREK, M. A. N. Processus de Poisson homogènes Application à des données génomiques

Annexe A : Résultats utiles

Lois des variables aléatoires discrètes importantes :

Nom et Symbole	Support	Loi	Espérance	Variance
Bernoulli $B(p)$	$\{0, 1\}$	$P_x(x) = p^x(1-p)^{1-x}$	p	$p(1-p)$
Binomiale $B(n, p)$	$\{0, \dots, n\}$	$P_X(x) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x}$	np	$np(1-p)$
Poisson $P(\lambda)$	\mathbb{N}	$P_X(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$	λ	λ
Géométrique $\mathcal{G}(p)$	\mathbb{N}^*	$P_X(x) = (1-p)^{x-1} p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Binomiale négative $BN(n, p)$	$\{n, n+1, \dots\}$	$P_X(x) = C_{x-1}^{n-1} p^n (1-p)^{x-n}$	$\frac{n}{p}$	$n \frac{1-p}{p^2}$

Propriétés de la loi exponentielle

Loi conditionnelle : On peut remarquer que :

$$\begin{aligned}
 P(T > s+t \mid T > s) &= \frac{P(T > s+t, T > s)}{P(T > s)} = \frac{P(T > s+t)}{P(T > s)} \\
 &= \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = P(T > t).
 \end{aligned}$$

Conséquence. La propriété précédente est à l'origine du paradoxe suivant : si un usager attend un bus d'une ligne sur laquelle les passages sont poissonniens, la loi (et donc notamment l'espérance) du temps d'attente reste constante au cours du temps. En d'autres termes, si les bus passent en moyenne toutes les 10 minutes et que cet usager a déjà attendu

7 minutes, l'espérance du temps qui lui reste à attendre est de ... 10 minutes !

$$\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(T - t \mid T > t) \equiv \frac{1}{\lambda}.$$

Loi de l'inf de deux variables exponentielles. Soient X et Y deux variables exponentielles indépendantes de paramètres respectifs λ et μ :

$$X \sim \xi(\lambda), \quad Y \sim \xi(\mu), \quad (X, Y) \text{ indépendants};$$

soit Z la plus petite de ces deux variables

$$Z = \inf(X, Y),$$

On a :

$$(i) \quad Z \sim \xi(\lambda + \mu);$$
$$(ii) \quad P(Z = X) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}, \quad P(Z = Y) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}.$$

Preuve. (i) On a $P(Z > z) = P(X > z, Y > z) = P(X > z)P(Y > z) = e^{-\lambda z}e^{-\mu z} = e^{-(\lambda + \mu)z}$.

(ii) On a $P(Z = X) = P(X < Y) = \int_0^{+\infty} f_X(x)P(Y > x)dx = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}e^{-\mu x}dx = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-(\lambda + \mu)x}dx = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$; l'autre résultat s'obtient par symétrie. ■

Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

(X_1, \dots, X_n)	échantillon de taille n de v.a's.
(Ω, F, \mathbb{P})	Espace de probabilité.
$\{X_n\}_{n \geq 0}$	Suite e variable aléatoire
\mathbb{P}	Matrice de transition
(Ω, F)	Espace mesurable
\mathbb{R}^d	Espace réel euclidien de dimension d .
$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$	Tribu Borélienne sur \mathbb{R}^d .
\mathbb{E}	Espérance par rapport à la probabilité \mathbb{P} .
\mathbb{V}	Variance par rapport à la probabilité \mathbb{P} .
<i>iid</i>	Indépendant identiquement distribué
inf	Inférieur.
max	Maximum
$N(t)$	Processus de comptage