

Université Mohamed khi der – Biskra

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de Génie Civil et d'Hydraulique

Référence :/ 2018

جامعة محمد خيضر - بسكرة

كلية العلوم و التكنولوجيا

قسم الهندسة المدنية و الري

المرجع:/ 2018



MEMOIRE DE MASTER
SPECIALITE : GENIE CIVIL
OPTION : STRUCTURE

Thème

**L'effet de l'anisotropie sur la fréquence naturelle des
plaques composites stratifiées et des sandwichs**

Etudiant :

Massa Omar

Encadreurs :

**Mohamed Ouejdi
BELARBI**

Promotion: Juin 2018

Résumé

Dans ce travail, un élément fini de forme rectangulaire, ayant cinq degré de liberté par nœud, est utilisé pour l'étude de la vibration libre des plaques isotropes, composites stratifiés et des sandwichs. La formulation de cet élément est basée sur la théorie du premier ordre de cisaillement transverse. Les résultats obtenus sont comparés avec des solutions analytiques et avec ceux obtenus via des modèles éléments finis disponible dans la littérature. Cette comparaison a montré la bonne performance de l'élément utilisé.

Nous résumons les objectifs de ce travail dans l'étude de l'effet de l'anisotropie, sous différentes paramètres tels que: les conditions aux limites, le rapport entre l'épaisseur de l'âme et l'épaisseur de la peau (h_c/h_f), le rapport d'épaisseur (a/h), le rapport d'aspect (a/b), le nombre de couches et l'orientation des fibres dans les peaux, sur la variation des fréquences propres.

Mots Clés: Plaque stratifiée, Sandwichs, Théorie du premier ordre, Eléments finis, Vibration libre.

ملخص

في هذا العمل ، يتم استخدام عنصر محدود مستطيل الشكل ، له خمس درجات من الحرية لكل عقدة ، لدراسة الاهتزاز الحر للأطباق المتناحية ، والمركبات المركبة والسندويش. وتستند صياغة هذا العنصر على نظرية الترتيب الأول للقص العرضي. تتم مقارنة النتائج التي تم الحصول عليها مع الحلول التحليلية ومع تلك التي تم الحصول عليها عن طريق نماذج العناصر المحدودة المتاحة في الدراسات. أظهرت هذه المقارنة الأداء الجيد للعنصر المستخدم.

نلخص أهداف هذا العمل في دراسة تأثير التباين ، تحت بارامترات مختلفة مثل: شروط الحدود ، النسبة بين سمك النفس وسماكة الجلد (h_c / h_f) ، ونسبة السمك (a / h) ، ونسبة العرض إلى الارتفاع (a / b) ، وعدد الطبقات واتجاه الألياف في الجلود ، على اختلاف الترددات.

كلمات مفتاحية: لوحة الطبقات ، السندويشات ، نظرية الدرجة الأولى ، العناصر المتناحية ، الاهتزاز الحر.

Abstract

In this work, a finite element of rectangular shape, having five degrees of freedom per node, is used for the study of the free vibration of isotropic plates, laminated composites and sandwiches. The formulation of this element is based on the first order theory of transverse shear. The results obtained are compared with analytical solutions and with those obtained via finite element models available in the literature. This comparison showed the good performance of the element used.

We summarize the objectives of this work in the study of the effect of anisotropy, under different parameters such as: the boundary conditions, the ratio between the thickness of the soul and the thickness of the skin (h_c / h_f), the thickness ratio (a / h), the aspect ratio (a / b), the number of layers and the orientation of the fibers in the skins, on the variation of the eigenfrequencies.

Key words: Layered plate, Sandwiches, First-order theory, Finite elements, Free vibration.

Sommaire

Résumé	I
ملخص.....	II
Abstract	III
sommaire	IV
Liste des figures	VII
Liste des tableaux.....	X
Introduction générale	1
1. Introduction :.....	1
2. Objectif de mémoire:.....	2
3. Plan de mémoire:	2
Chapitre 1.....	4
Généralités sur les matériaux composites sandwichs.....	4
1.1 Introduction.....	4
1.2 Définitions de base :	5
1.3 But d'utilisation des matériaux composites :.....	6
1.4 Eléments constituant d'un matériau composite	6
1.4.2. Matrice	7
1.5 Classification des matériaux composites :.....	7
1.5.1 Classification selon la forme des constituants :	7
1.6 Architecture des matériaux composites :.....	8
1.6.1 Monocouches :	8
1.6.2 Stratifiées	9
1.6.2.1 Angles positifs et négatifs	10
1.6.3 Sandwiches :.....	11

1.7 Modélisation du comportement mécanique des stratifiés	13
1.7.1 Approche monocouche équivalente (approximation globale) :	14
1.8 Revue des travaux antérieurs sur l'analyse dynamique des plaques multicouches et des sandwiches:	18
Chapitre 2:.....	21
Comportement mécanique des plaques stratifiées sandwiches selon la théorie du premier ordre	21
2.1.1 Introduction :	21
2.1.2 Définitions :.....	21
2.1.3 Loi de comportement des stratifiés:	22
2.2. 1 Caractéristiques mécaniques et module d'élasticité:	23
2.2. 1.1 Module de Young longitudinal E_L (E_1):.....	23
2.2.2.1Relation déplacements-déformations (Cinématique) :	25
2.2.3 Théorie de la déformation de cisaillement de premier ordre (FSDT).....	26
2.2.3.1 Relation déformations-déplacements (Cinématique) :.....	26
2.2.3.2.Champ des contraintes :	30
2.2.4 Types des matériaux:	31
2.4.1 Les efforts résultants dans le stratifié :	33
2.4.1.1 Résultantes en membrane :	33
2.4.1.2 Moments de flexion et de torsion :	35
2.5.1 Résultantes en cisaillement :	37
2.6.1 Facteurs de correction de cisaillement transverse pour des plaques stratifiées :	39
Chapitre 3.....	41
Formulation élément fini	41
3.1 Introduction :	41
3.3 Méthode des éléments finis :	42
3.3.1 Définition de la méthode d'élément fini :	42
3.4 Formulation de l'élément fini utilisé :	42
3.4.1 Cinématique de la théorie :.....	43

3.4.2 Approximation nodale des déplacements :	43
3.4.3 Loi de comportement :	46
3.5 Évaluation de la matrice de rigidité :	46
3. 5.1 Energie potentielle de déformation et travail des forces appliquées :	46
3. 5.3 Formulation de la matrice masse élémentaire :	49
3. 5 Présentation du programme :	51
3. 5.1 Introduction :	51
3. 5.2 Description les subroutines du programme :	51
3. 6.3 Présentation de l'organigramme du programme :	53
Chapitre 4.....	59
Validation de l'élément et étude paramétrique.....	59
4.1 Introduction:.....	59
4.2 Tests de validation	59
4.2.1 Conditions aux limites adoptées :	59
4.2.2 Plaque isotrope carrée avec différents types de conditions aux limites:	60
4.2.3 Plaques composites stratifiées carrées de trois, cinq et neuf couches (0/90/.../0).....	64
4.2.4 Plaque sandwich carrée simplement appuyée ayant des peaux composites	66
4.3 Etude paramétrique:.....	68
Conclusion	76
Références Bibliographiques.....	77

Liste des figures

Figure 1.1: Matériau composite.....	5
Figure 1.2. Classification schématique des types de composites.....	5
Figure 1.3 : Classification schématique des principaux matériaux de renfort.....	7
Figure 1.4 : Classification schématique des principaux matériaux de matrice.....	7
Figure 1-5: Pli à renforcement unidirectionnel.....	9
Figure 1.6 : Schématisation d'une monocouche.....	9
Figure 1-7: Pli à renforcement unidirectionnel: Constitution d'un stratifié.....	10
Figure 1.8 : Les constituants d'un composite stratifié.....	10
Figure 1.9 Angles positifs et négatifs.....	11
Figure 1.10 : Schématisation d'une plaque sandwich.....	11
Figure 1.11: Matériaux sandwichs à âmes pleines.....	12
Figure 1.12: Matériaux sandwichs a âmes creuses.....	13
Figure. 1.13 : Géométries déformées et non-déformées d'un bord d'une plaque sous l'hypothèse de Kirchhoff [22]......	15
Figure 1.14 : Géométries déformées et non déformées d'un bord d'une plaque sous l'hypothèse de Reissner-Mindlin [4]......	17
Figure 1.15 : Variation du déplacement et des contraintes transversales à travers l'épaisseur pour les deux théories: théorie classique (à droite) et la théorie du premier ordre (à gauche).18	
Figure.1.16. Approximations de la contrainte du CT: constante (théorie du premier ordre) et quadratique (ordre supérieur).....	18
Figure 2.1. Description d'une plaque.....	22
Figure 2.2: Élément plaque.....	22
Figure 2.3: Chargement longitudinal.....	24
Figure 2.4. État de contraintes longitudinales.....	25

Figure 2.5: illustration de la cinématique de déformation présentée par couche équivalente, en utilisant la théorie FSDT	27
Figure 2.6: Efforts agissant dans le plan de la plaque.....	33
Figure 2.7 : Schématisation des résultantes en membrane des actions exercées sur un élément de stratifié.....	34
Figure 2.8: Schématisation des moments de flexion et de torsion.....	36
Figure 2.9: Représentation schématique des résultantes de cisaillement.	37
Figure. 3.1 Variables nodales de l'élément utilisé.....	43
Figure 3.2. Organigramme du programme.	56
Figure. 4.1 Conditions aux limites.....	60
Figure 4.2 : Convergence de la fréquence propre fondamentale d'une plaque isotrope simplement appuyée (SSSS).	62
Figure 4.3 : Convergence de la fréquence propre fondamentale d'une plaque	62
Figure 4.4 : Convergence de la fréquence propre fondamentale d'une plaque isotrope simplement appuyée -encastrée (SESE).	63
Figure 4.5 : Convergence de la fréquence propre fondamentale d'une plaque isotrope encastrée –libre (EEEL).	63
Figure 4.6: Effet du nombre de couches et le rapport d'anisotropie sur la fréquence fondamentale d'une plaque stratifiée carrée simplement appuyée.	66
Figure 4.7 Plaque sandwich carrée simplement appuyée ayant des peaux composites.....	66
Figure. 4.8 Effet du rapport d'anisotropie sur la fréquence fondamentale non-dimensionnelle d'une plaque sandwich (0/90/C/0/90) simplement appuyée sous différents rapports d'épaisseur (a/h).....	69
Figure 4.9 Effet de l'anisotropie sur la fréquence fondamentale non-dimensionnelle d'une plaque sandwich (0/90/C/0/90) simplement appuyée sous différents rapports d'aspects (a/b).	70
Figure 4.10 Effet de l'anisotropie sur la fréquence fondamentale non-dimensionnelle d'une plaque sandwich carrée (0/90/C/0/90) simplement appuyée sous différents rapports (hc/hf). $a/h = 10$	71

Figure. 4.11 Effet de l'anisotropie et l'orientation des fibres dans les peaux sur la fréquence fondamentale non-dimensionnelle d'une plaque sandwich carrée. Cas Simplement appuyée73

Figure. 4.12 Effet de l'anisotropie et l'orientation des fibres dans les peaux sur la fréquence fondamentale non-dimensionnelle d'une plaque sandwich carrée. Cas encastrée.73

Figure. 4.12 Effet de l'anisotropie et le nombre de couches dans les peaux sur la fréquence fondamentale non-dimensionnelle d'une plaque sandwich carrée simplement appuyée.....75

Liste des tableaux

Chapitre 3

Tableau 3. 1. Fonction des sous-routines	51
--	----

Chapitre 4

Tableau 4. 1. Fréquences propres d'une plaque carrée isotrope avec différents types de conditions aux limites	61
Tableau 4. 2. Effet de l'anisotropie (E_{11}/E_{22}) sur la fréquence fondamentale de plaque stratifiée carrées (0/90/.../0) simplement appuyée	65
Tableau 4. 3. Propriétés mécaniques des matériaux utilisés dans l'exemple	67
Tableau 4. 4. Fréquence fondamentale non-dimensionnelle d'une plaque sandwich carrée simplement appuyée ayant des peaux composites stratifiées non-symétriques 0/90 / C / 0 / 90. $a/h=10$	67
Tableau 4.5 .Effet de l'anisotropie sur la fréquence fondamentale non-dimensionnelle ($\bar{\omega}$) d'une plaque sandwich (0/90/C/0/90) simplement appuyée sous différents rapports d'épaisseur (a/h).	69
Tableau 4.6 .Effet de l'anisotropie sur la fréquence fondamentale non-dimensionnelle ($\bar{\omega}$) d'une plaque sandwich (0/90/C/0/90) simplement appuyée sous différents rapports d'aspects (a/b). et $h_c/h_f = 10$	70
Tableau 4.7 .Effet de l'anisotropie sur la fréquence fondamentale non-dimensionnelle ($\bar{\omega}$) d'une plaque sandwich carrée (0/90/C/0/90) simplement appuyée sous différents rapports (h_c/h_f). $a/h = 10$	71
Tableau 4. 8. Effet de l'anisotropie et l'orientation des fibres dans les peaux sur la fréquence fondamentale non-dimensionnelle d'une plaque sandwich carrée. Cas Simplement appuyée.	72
Tableau 4. 9. Effet de l'anisotropie et l'orientation des fibres dans les peaux sur la fréquence fondamentale non-dimensionnelle d'une plaque sandwich carrée. Cas encadrée (EEEE).	73
Tableau 4.10 .Effet de l'anisotropie et le nombre de couches dans les peaux sur la fréquence fondamentale non-dimensionnelle d'une plaque sandwich carrée simplement appuyée.	75

Introduction générale

1. Introduction :

Au cours des dernières décennies, le développement rapide des technologies modernes requiert que l'on utilise des matériaux ayant des caractéristiques spécifiques élevées (bons rapports rigidité-poids et résistance-poids, faible coût d'entretien, excellente durabilité et bien d'autres qualités). Les matériaux composites sont des matériaux qui répondent à ces exigences. Ils deviennent de plus en plus incontournables dans de nombreuses composantes structurales comme la marine, le transport, la navigation, les sports, les applications aérospatiales et ils ont été utilisés récemment dans les structures de génie civil comme des compléments aux matériaux classiques (acier, bois et béton). Ces derniers temps, les ingénieurs civils ont exploité les avantages d'utilisation des matériaux composites et spécialement les plastiques renforcés par des fibres de verre dans la réparation du béton.

Parmi les composites les plus convoités, on peut distinguer deux grandes catégories de matériaux composites structuraux: les stratifiés et les sandwichs. Les stratifiés sont des matériaux couramment rencontrés dans les éléments structuraux. Ces derniers sont constitués par l'empilement de plusieurs couches où chaque couche peut avoir une orientation différente, i.e. les caractéristiques mécaniques varient selon les directions considérées. Les sandwichs sont des structures composites dont l'utilisation connaît un essor important. Ces structures se composent de trois couches principales dont les caractéristiques mécaniques sont différentes: deux peaux fines, généralement stratifiées, possédant de très bonnes caractéristiques mécaniques (module d'élasticité élevé ainsi qu'une grande résistance à la compression et à la traction), collées sur une âme épaisse, légère et de faibles caractéristiques mécaniques (mousse, bois) dont le rôle principal est de résister aux efforts de cisaillement. Ces différentes couches sont liées entre elles par collage ou par soudure.

Malgré les nombreux avantages que présentent ces matériaux (leurs rapports rigidité-poids, résistance-poids), il reste toujours des questions sur la complexité du comportement de

ces derniers (statique, dynamique, etc.), à cause des problèmes liés principalement à leur hétérogénéité et leur anisotropie.

Pour les besoins de la technologie moderne, une bonne connaissance du comportement dynamique de ces structures est indispensable dans la conception ou la vérification de tout système déformable dans un environnement dynamique. L'étude de ce comportement est un paramètre important dont il faut tenir compte lors de la conception des structures. En effet, les mouvements vibratoires sont à l'origine de nombreux problèmes typiques pouvant conduire à la ruine de la structure, tels que la résonance et la fatigue, à une limitation d'exploitation en raison d'un niveau de bruit élevé ou d'une perturbation des performances de la structure par la présence de vibrations indésirables. Par conséquent, l'analyse vibratoire est une importante, tant d'un point de vue académique qu'industrielle.

2. Objectif de mémoire:

Dans ce travail, nous procéderons à l'étude du comportement de la vibration libre des plaques composites stratifiées et sandwichs en utilisant un élément fini de forme quadrilatère. Ainsi, nous résumons les objectifs de ce travail dans l'étude de l'effet de l'anisotropie sous différents paramètres tels que: les conditions aux limites, le rapport entre l'épaisseur de l'âme et l'épaisseur de la peau (h_c/h_f), le rapport d'épaisseur (a/h), le rapport d'aspect (a/b), le nombre de couches et l'orientation des fibres dans les peaux, sur la variation des fréquences propres des plaques composites sandwichs.

3. Plan de mémoire:

Le travail de cette mémoire est divisé en quatre chapitres :

Le **premier chapitre** est dédié à l'acquisition des connaissances théoriques nécessaires pour l'élaboration de la problématique de ce mémoire. Nous avons présenté quelques notions générales concernant les matériaux sandwichs composites, ainsi qu'une synthèse sur les approches, les théories qui servent à analyser le comportement des structures composites multicouches et des structures sandwichs.

Dans le **deuxième chapitre**, nous allons faire premièrement un rappel sur la théorie du premier ordre de cisaillement transversal, ainsi que l'écriture de la loi de comportement d'un stratifié. Puis, nous allons décrire les efforts résultants dans le stratifié.

Le troisième chapitre, est consacré pour la formulation d'un élément fini de forme rectangulaire en utilisant la théorie du premier ordre (FSDT). Le principe de l'énergie potentielle totale a été adopté pour établir la relation entre les forces et les déplacements. Ainsi, nous allons présenter l'organigramme du programme de l'élément utilisé.

Après la formulation de l'élément fini rectangulaire, **le quatrième chapitre** est consacré, dans la première partie, à la validation de l'élément utilisé en termes de précision, de convergence et de stabilité, à travers une série de tests. Des plaques isotropes, composites stratifiées et sandwichs ont été considérés. Les résultats obtenues seront comparés avec les solutions obtenus analytiquement et ceux obtenus par d'autres modèles d'éléments finis disponibles dans la littérature. Après la validation de l'élément utilisé, on a procédé à une étude paramétrique afin de montrer l'effet de certains paramètres sur la fréquence naturelle.

Chapitre 1

Généralités sur les matériaux composites sandwichs

1.1 Introduction

Les matériaux composites ne sont pas une nouveauté, car ils étaient utilisés depuis l'antiquité comme le bois. Le matériau composite est un assemblage d'au moins deux matériaux non miscibles (mais ayant une forte capacité d'adhésion), se complétant et permettant d'aboutir à un matériau dont l'ensemble de ses performances est supérieurs à celui de ses composants pris séparément (Fig.1.1).

L'importance des matériaux composites est maintenant notoire, et les prévisions portent à penser que cette importance va aller croissant dans les années qui viennent. L'utilisation des matériaux composites est très répandue dans divers domaines tels que l'aérospatiale, l'aéronautique, l'industrie automobile, l'industrie navale, de même que dans l'industrie sportive et le génie civil. Ces matériaux sont connus par leurs grands rapports rigidité – poids et résistance-poids, ainsi que pour d'autres propriétés mécaniques intéressantes telles que la résistance à la corrosion.

En outre, l'utilisation des matériaux composites dans le domaine de génie civil peut être avantageuse par rapport aux matériaux traditionnels comme l'acier, car ils permettent la conception de structures aux propriétés globales qui répondent mieux aux exigences particulières d'une situation donnée. Parmi ces propriétés globales, on retrouve la rigidité.

Pour avoir plus d'informations et de détails sur ces matériaux et leurs applications, le lecteur pourra consulter les ouvrages de Reddy [1, 2]

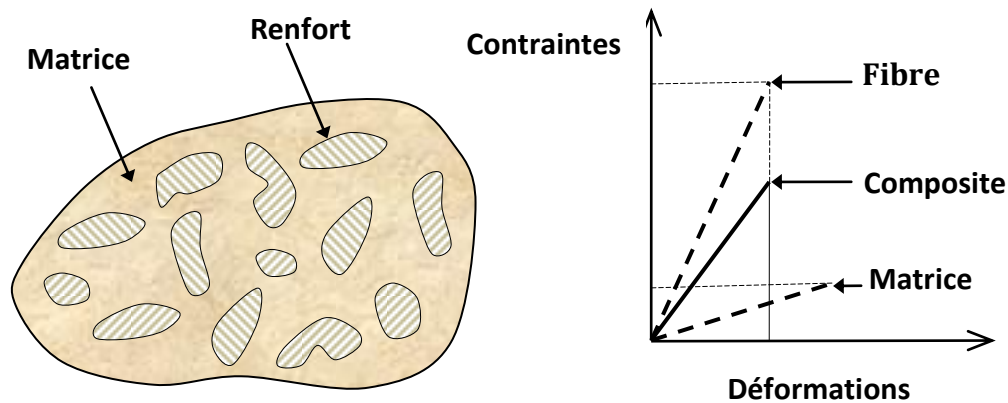


Figure 1.1: Matériau composite

La Figure (1.2) présente une classification schématique des matériaux composites. Nous y distinguons trois catégories principales : les composites renforcés par des particules, les composites renforcés par des fibres et les composites structuraux. . Dans le présent chapitre, on va se contenter que des deux dernières catégories.

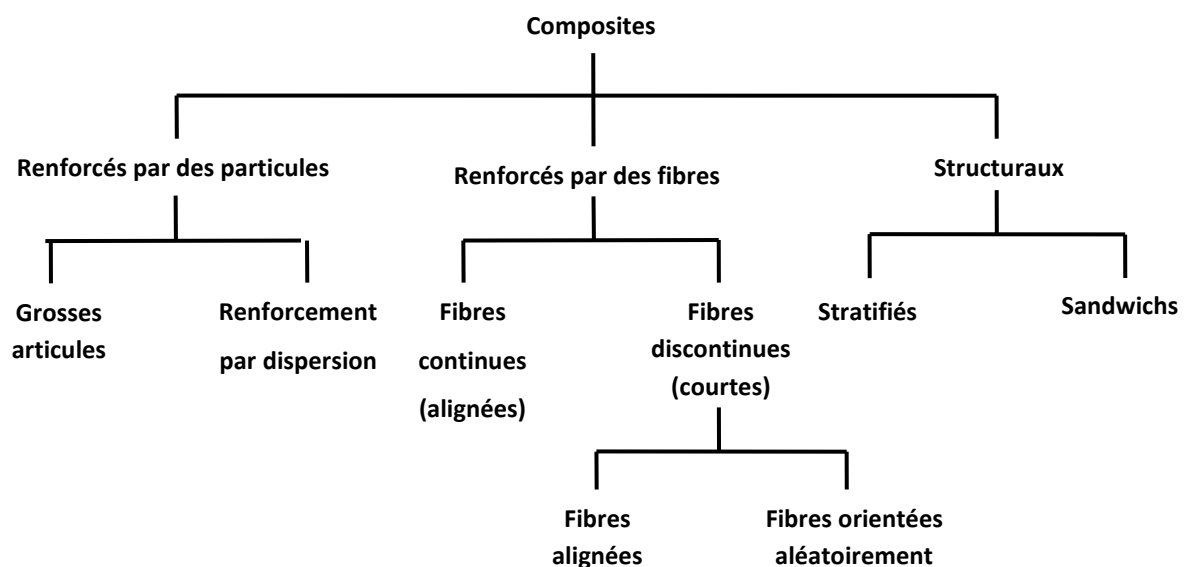


Figure 1.2.Classification schématique des types de composites

1.2 Définitions de base :

- **Homogène:** mêmes propriétés physiques en tout point du matériau.
- **Hétérogène:** propriétés physiques différentes d'un point à un autre.
- **Isotrope:** mêmes propriétés mécaniques dans toutes les directions.

- **Orthotrope:** propriétés mécaniques symétriques par rapport à 2 plans de symétrie.
- **Anisotrope:** l'anisotropie (contraire d'isotropie) est la propriété mécanique d'être dépendant de la direction. Quelque chose d'anisotrope pourra présenter différentes caractéristiques selon son orientation.

Un matériau composite est la plupart du temps *Hétérogène et Anisotrope*.

1.3 But d'utilisation des matériaux composites :

Les avantages des matériaux composites se présenter en:

- ❖ Possibilité de dimensionner les structures « au juste besoin » avec des propriétés élevées uniquement dans les axes de chargement.
- ❖ Possibilité de fabriquer des matériaux avec des propriétés particulières (coefficient de Poisson négatif, dilatation quasi-nulle...).
- ❖ Possibilité de réaliser des structures de formes complexes réduisant ainsi les coûts d'assemblages.
- ❖ Importantes rigidités et résistances spécifiques afin de concevoir des structures hautes performances tout en réalisant des gains de masse par rapport aux solutions métalliques précédentes.
- ❖ Faible sensibilité à la fatigue.
- ❖ Faible sensibilité à la corrosion.

1.4 Eléments constituant d'un matériau composite : Un matériau composite plastique association de deux constituants :

1.4.1 Renforts:

Les renforts contribuent à améliorer la résistance mécanique et la rigidité des matériaux composites, se présentent sous forme filamentaire, allant de la particule de forme allongée à la fibre continue qui donne au matériau un effet directif [3].

La classification des principaux matériaux de renfort couramment rencontrés est indiquée sur la **figure 1.3**

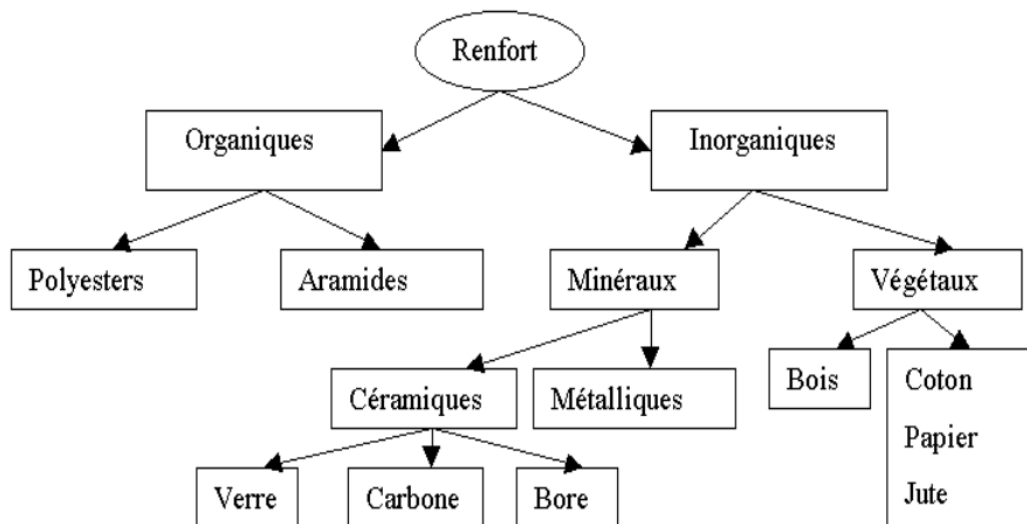


Figure I.3 : Classification schématique des principaux matériaux de renfort

1.4.2. Matrice :

La matrice permet de lier les fibres du renfort fibreux entre elles, ainsi que de répartir les efforts (résistance à la compression ou à la flexion). La matrice est facilement déformable et assure la protection chimique des fibres. Généralement, c'est un polymère ou une résine organique.

La classification des principaux matériaux de matrice couramment rencontrés est indiquée sur la **Figure. I.4** suivante.

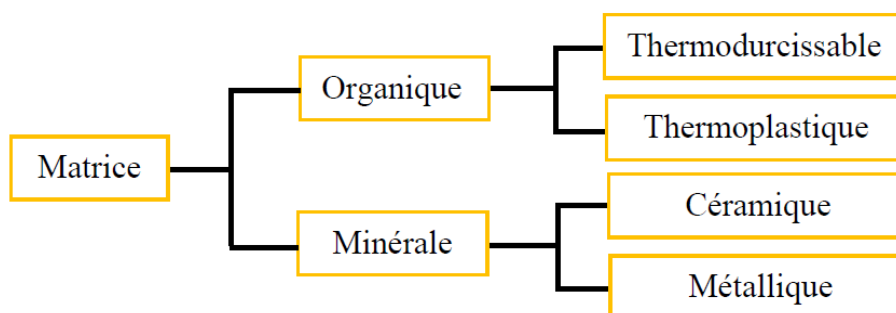


Figure 1.4 : Classification schématique des principaux matériaux de matrice.

1.5 Classification des matériaux composites :

1.5.1 Classification selon la forme des constituants :

En fonction de la forme des constituants, les composites sont classés en deux grandes classes : les matériaux composites à particules et les matériaux composites à fibres.

➤ **Composites à particules** :

Un matériau composite est un composite à particules lorsque le renfort se trouve sous forme de particules.

Les particules sont généralement utilisées pour améliorer certaines propriétés des matériaux ou des matrices, comme la rigidité, la tenue à la température, la résistance à l'abrasion, la dimension de retrait... etc.

➤ **Composite à fibres** :

Un matériau composite est un composite à fibres si le renfort se trouve sous forme de fibres.

Les fibres utilisées se présentent soit sous forme de fibres continues, soit sous forme de fibres discontinues : fibres coupées, fibres courtes, etc.

I.6 Architecture des matériaux composites :

L'ensemble des procédés de mise en œuvre montre la prépondérance d'une conception pièces en matériaux composites :

- Par stratification de couches successives.
- . Par surface : plaque, coques

1.6.1 Monocouches :

Les monocouches comme il est indiqué sur la (*Figure.1-5 et 1-6*) représentent l'élément de base de la structure composite, les différents types de monocouches sont caractérisés par la disposition du renfort dans la matrice, fibres unidirectionnelles, fibres tissées et fibres courtes.

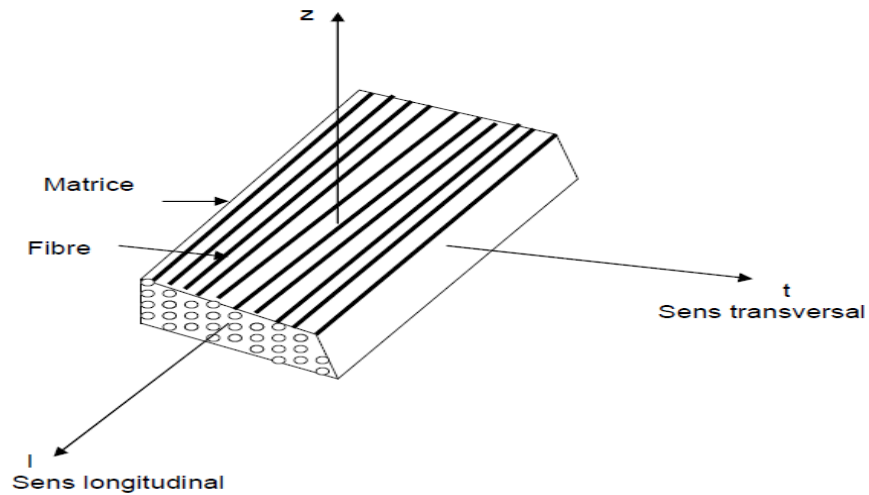


Figure 1-5: Pli à renforcement unidirectionnel

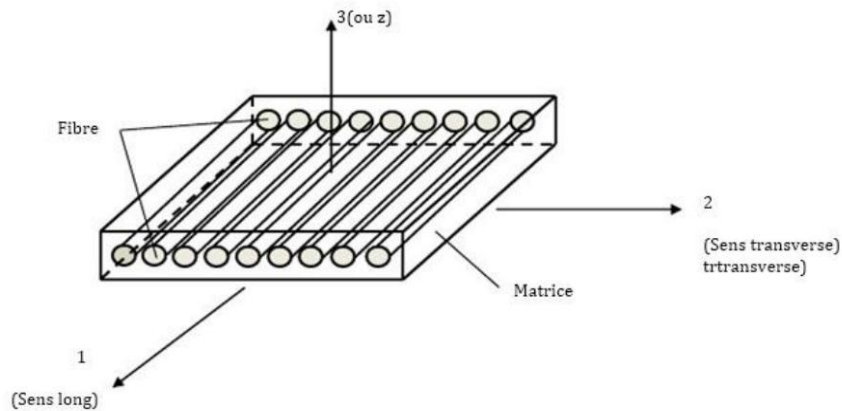


Figure 1.6 : Schématisation d'une monocouche

1.6.2 Stratifiées :

Un stratifié est constitué d'un empilement de monocouches ayant chacune une orientation propre par rapport à un référentiel commun aux couches (*Figure.1-7*), et désigné comme le repère des axes de symétrie du matériau.

Selon la disposition des couches par rapport au plan moyen, on distingue les stratifiés symétriques et antisymétriques.

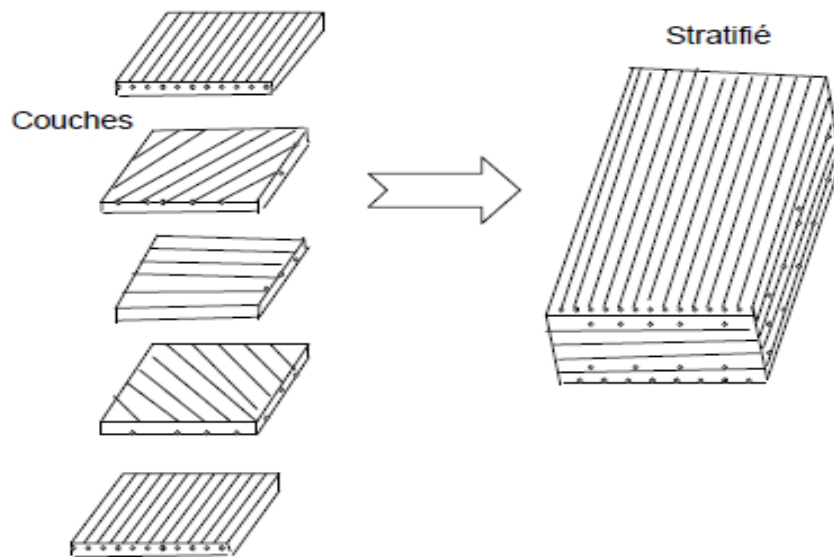


Figure 1-7: Pli à renforcement unidirectionnel: Constitution d'un stratifié.

Désignation des structures stratifiées: Chaque couche est désignée par un nombre indiquant la valeur en degré de l'angle que fait la direction des fibres avec l'axe de référence x . Sur les figures 1.9(a) et 1.9(b), les couches sont représentées décalées les unes par rapport aux autres. La structure stratifiée est décrite de bas en haut

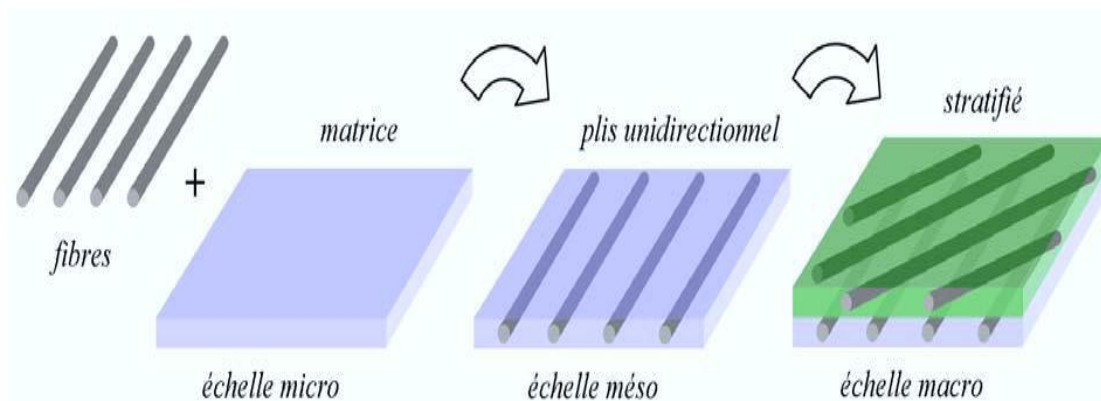


Figure 1.8 : Les constituants d'un composite stratifié

1.6.2.1 Angles positifs et négatifs :

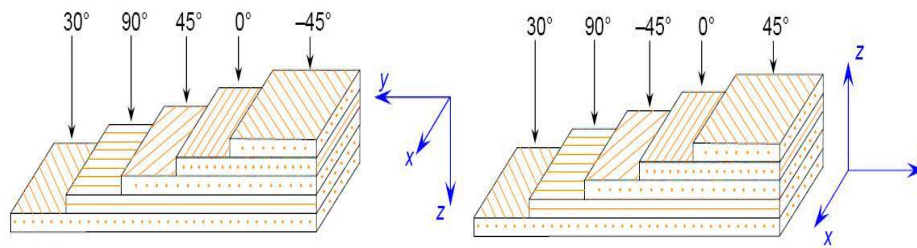


Figure 1.9 Angles positifs et négatifs

1.6.3 Sandwiches :

Parmi les composites les plus convoités, on notera les structures sandwichs dont l'utilisation prend une allure ascendante depuis un demi-siècle. Ces structures se composent de trois couches principales dont les caractéristiques mécaniques sont différentes. Deux peaux fines, très rigides (métal, composite stratifié, contreplaqué, etc.), qui ont un module d'élasticité élevé ainsi qu'une grande résistance à la compression et à la traction. Entre ces deux peaux, il y a une couche épaisse (bois, mousses organiques, nid d'abeilles, balsas, etc.) dite âme (ou cœur) ayant une faible masse volumique et de faibles caractéristiques mécaniques. Son rôle principal est de résister aux efforts de cisaillement ainsi que de maintenir l'écartement entre les peaux, ce qui permet d'augmenter les moments quadratiques de flexion. Ces différentes couches sont liées entre elles par collage ou par soudure (Fig.1.10). Cette configuration donne à la structure sandwich une résistance et une rigidité spécifique avec une faible densité. [4].

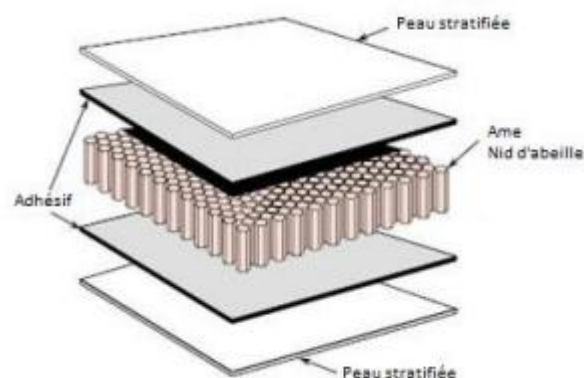


Figure 1.10 : Schématisation d'une plaque sandwich.

Le matériau sandwich est constitué de :

- ❖ **Âme** : Elle peut être réalisée avec les matériaux suivants :

- ✚ **Mousses** : Ces matériaux légers peu onéreux, facilement usinables et ont cependant de très faibles caractéristiques mécaniques.
- ✚ **Balsa** : Est un bois bien connu pour ces différentes utilisations et de leurs principales qualités que la légèreté, le haut pouvoir d'isolation thermique et acoustique et la non déformation aux variations thermiques.
- ✚ **Nid d'abeille** : Cette structure est réalisée généralement à partir de matériau en plaques minces (alliage d'aluminium, papier polyamide). Des raies de colle sont disposées en bande régulières sur les plaques qui sont collées entre elles pour former un bloc, ce dernier est coupé en tranches qui seront, transformées à leur tour en planche de nida ' **nid d'abeille** ' par expansion. Généralement, Il existe deux types d'âmes:

a) **Les âmes pleines:** Les âmes les plus couramment utilisées sont (Figure 1.11):

- ✚ Le balsa ou bois cellulaire
- ✚ Diverses mousses cellulaires
- ✚ Des résines chargées de microsphères creuses de verre, appelées mousses syntactiques.

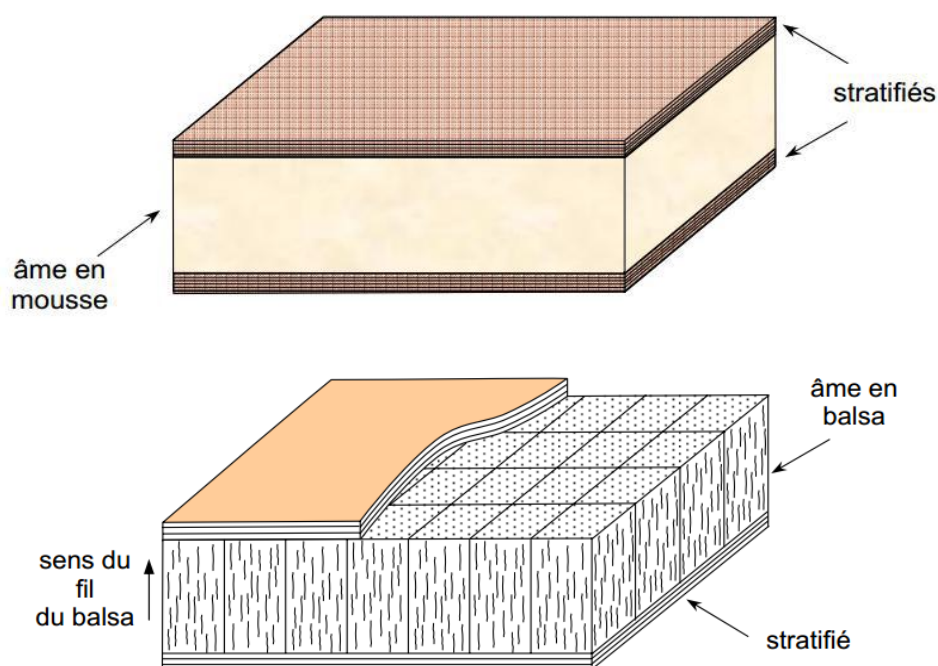


Figure 1.11: Matériaux sandwichs à âmes pleines

b) Les âmes creuses : Elles se présentent essentiellement en nid d'abeilles et profilés (Figure 1.12). Elles sont :

- ✚ Des alliages métalliques légers;
- ✚ Des papiers kraft (enduit ou non de résine);
- ✚ Du papier polyamide, type papier Nomex;

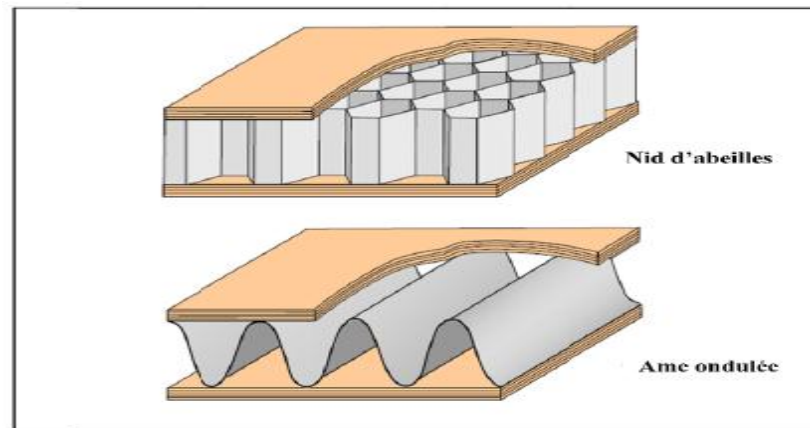


Figure 1.12: Matériaux sandwichs à âmes creuses.

1.7 Modélisation du comportement mécanique des stratifiés :

Un stratifié ou une structure multicouche, est considérée comme un corps hétérogène constitué d'un nombre fini de couches homogènes anisotropes collées les unes aux autres. La modélisation des structures multicouches épaisse, nécessite des théories raffinées prenant en compte une bonne description du cisaillement transverse. De nombreux modèles bidimensionnels ont été développés pour modéliser les structures multicouches, en tenant compte du cisaillement transverses. Ces modèles peuvent être regroupés selon l'approche adoptée:

- Approche monocouche équivalente(ESL)¹
- Approche par couche(LW)²

Dans ce qui suit, on ne cite que l'approche monocouche équivalente qui sera à la base de ce travail.

¹ Equivalent Single Layer Approach

² Layer-Wise Approach

1.7.1 Approche monocouche équivalente (approximation globale) :

Dans l'approche monocouche équivalente, qui est la plus adoptée par les chercheurs, la plaque multicouche hétérogène est traitée comme une seule couche homogène équivalente via la technique d'homogénéisation. Les variables de cette approche sont introduites pour toute la plaque. Cela va conduire à un nombre de degrés de libertés indépendant par rapport au nombre de couches. Selon Reddy [1], les théories du modèle ESL fournissent une description suffisamment précise de la réponse globale de stratifié (i.e. la flèche transversale, la fréquence fondamentale de vibration, la charge critique du flambement et le moment résultant). Les principaux avantages des modèles ESL sont leur simplicité inhérente et leur faible coût de calcul, dû au petit nombre des variables dépendantes.

Dans cette approche, on peut distinguer deux théories bien connues, à savoir:

- Théorie classique des plaques (CLPT)³
- Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)⁴

1.7.1.1 Théorie classique des stratifiés (CLT) :

La théorie classique de plaque est la plus simple et la plus ancienne parmi les autres théories. Elle est initiée par Kirchhoff [5] en 1850, puis elle a été poursuivie par Love [6] au début du XXe siècle. Cette théorie est applicable uniquement pour les plaques/coques, minces. Cependant, elle a donné des résultats erronés quand elle a été utilisée dans l'analyse des plaques épaisses. L'hypothèse principale de la théorie CLPT est que les lignes normales au plan médian avant déformation restent droites et perpendiculaires à la surface moyenne après déformation (Figure.1.13). Cette hypothèse implique la négligence des déformations dues au cisaillement transverse (CT)⁵. ($\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$) et les déformations/contraintes normales ($\varepsilon_z = \sigma_z = 0$)

³ Classical Lamination Plate Theory

⁴ First order Shear Deformation Theory

⁵ Cisaillement Transverse

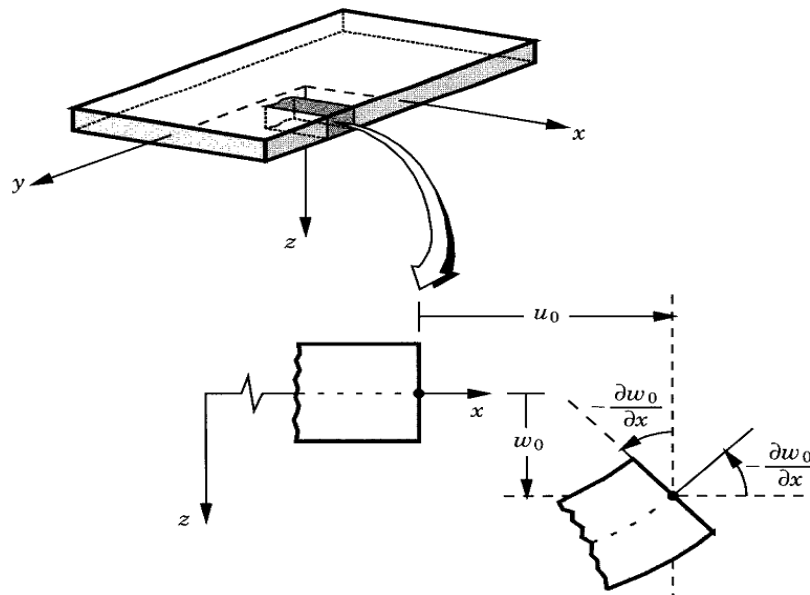


Figure. 1.13 : Géométries déformées et non-déformées d'un bord d'une plaque sous l'hypothèse de Kirchhoff [22].

L'hypothèse Kirchhoff exige que les déplacements (u, v, w) soient tels que :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Où

u_0, v_0 et w_0 sont les composantes des déplacements dans le plan moyen.

w_x, w_y sont les rotations dues à la flexion (sans cisaillement) dans les deux directions.

$$\varphi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x} \quad , \quad \varphi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y}$$

Cependant, cette théorie n'est pas adéquate pour l'analyse des composites multicouches et notamment les structures sandwichs (inadaptée pour la modélisation du cœur), à cause de l'effet du cisaillement transverse.

Cet effet joue un rôle très important sur le comportement de ces structures, puisque les rapports entre les modules de Young et les modules de cisaillement sont compris entre 20 et 50 dans les matériaux composites modernes et entre 2,5 et 3,0 dans les matériaux isotropes [7]. En plus, l'effet du cisaillement est la cause de différents modes de rupture comme le délaminage au niveau des interfaces, fissure transverse, etc., alors que, une prédiction précise

des contraintes de cisaillement interlaminaires est nécessaire dans l'analyse des défaillances des composites sandwichs.

Étant donné l'importance de la question, Libove et Batdorf [8], Yang et al. [9] et Whitney [10], ont étendu la théorie de Reissner [11], Mindlin [12], dans le cas de plaques isotropes épaisses, pour introduire l'effet de cisaillement dans les plaques sandwichs et les plaques stratifiées anisotropes. Cela est devenu ce qu'on appelle "théorie de déformation en cisaillement du premier ordre" (FSDT) ou la théorie de la plaque de déformation en cisaillement uniforme (USDPT).

I.7.1.2 Théorie de la déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) :

La théorie du premier ordre (FSDT) peut être considérée comme une amélioration par rapport à la théorie classique (CLPT). Cette théorie est basée essentiellement sur l'hypothèse suivante de Reissner-Mindlin: les lignes normales au plan médian avant déformation restent droites mais pas forcément perpendiculaires à la surface moyenne après déformation (à cause de l'effet du cisaillement transverse), (Figure 1.13). Ils ont également supposé que la contrainte normale (σ_z) est négligeable par rapport aux autres composantes du tenseur de contraintes (l'hypothèse de déformation plane). Le champ de déplacement de la théorie du premier ordre est de la forme :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\varphi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\varphi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (1.2)$$

φ_x et φ_y sont les rotations de la normale autour des axes (x, y) , respectivement.

$$\varphi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x} + \gamma_{xz} \quad , \quad \varphi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y} + \gamma_{yz}$$

À partir de l'équation (1.2), nous remarquons que les composantes de déplacements plans (u, v) varient d'une manière linéaire suivant l'axe z , tandis que la composante de déplacement transversal (w) est constante. Cela va conduire à un état de contrainte/déformation de cisaillement transverse constant sur toute l'épaisseur de la plaque (Fig. 1.14), alors que, selon la théorie de l'élasticité tridimensionnelle (3D), les contraintes de cisaillement transversal sont plutôt quadratiques à travers l'épaisseur [13]. Cette déficience est corrigée par l'introduction de ce qu'on appelle les facteurs de correction de cisaillement transverse.

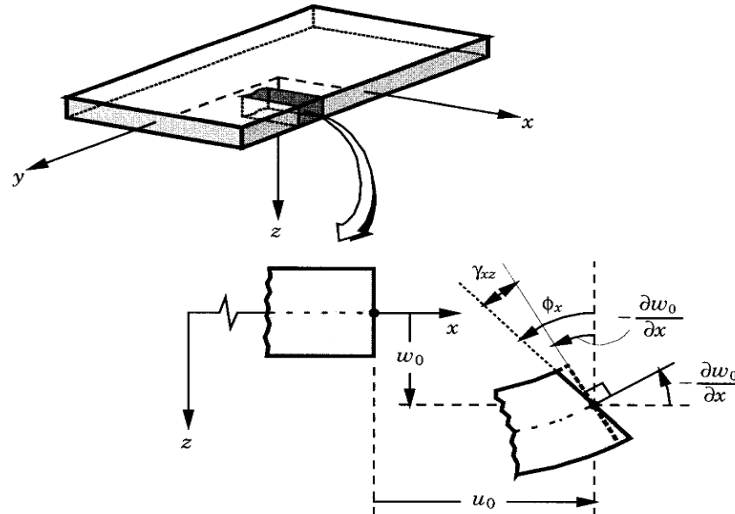


Figure 1.14 : Géométries déformées et non déformées d'un bord d'une plaque sous l'hypothèse de Reissner-Mindlin [4].

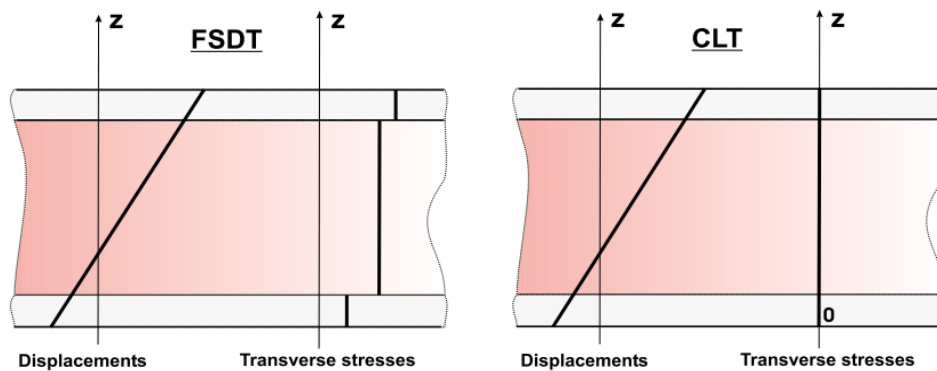


Figure 1.15 : Variation du déplacement et des contraintes transversales à travers l'épaisseur pour les deux théories: théorie classique (à droite) et la théorie du premier ordre (à gauche).

1.7.1.2.1 Facteurs de correction du CT:

Les facteurs de correction du CT (FC), notés k , sont ajoutés pour corriger le décalage entre la répartition des contraintes de cisaillement transversal réelles (3D) et celles supposées dans la théorie du premier ordre. Ces facteurs sont introduits comme des paramètres dans les relations constitutives entre les forces de cisaillement transversal et les déformations de cisaillement transversal. Pour les matériaux isotropes homogènes, le premier concept de FC a été présenté par Reissner [14]. Il a proposé une valeur de $5/6$ qui est largement utilisée, en employant une méthode de calcul basée sur des considérations d'équilibre statique et d'équivalence énergétique. Puis, Mindlin a proposé une valeur de $K = \pi^2/12$, en utilisant la méthode d'analyse dynamique pour la première fois

(équivalence de fréquence propre associée au mode de vibration en CT ou de vitesse de propagation d'ondes de flexion

Une autre méthode a été présentée par Ayad [15] pour calculer les facteurs de correction. Il les évalue par une comparaison entre l'énergie de cisaillement obtenue via les équations d'équilibre et celle obtenue par la théorie du premier ordre.

Par ailleurs, les facteurs de correction pour les composites stratifiés et les sandwichs dépendent essentiellement des propriétés matérielles du matériau (module de Young, coefficient de poisson, etc.), du rapport d'aspect, de la forme des fibres ainsi que leurs orientations, de la géométrie du stratifiée, du nombre de stratification et les conditions aux limites, ce qui rend ces facteurs difficiles à déterminer.

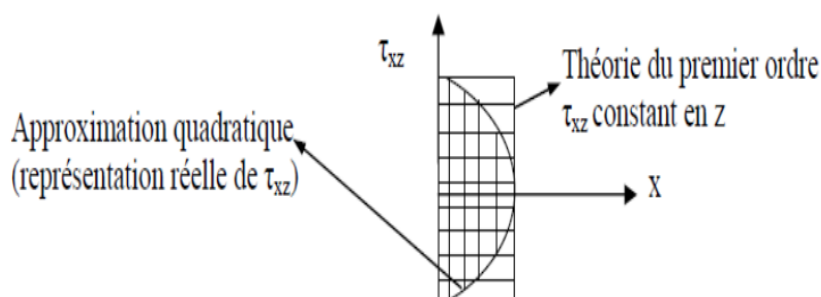


Figure.1.16. Approximations de la contrainte du CT: constante (théorie du premier ordre) et quadratique (ordre supérieur).

1.8 Revue des travaux antérieurs sur l'analyse dynamique des plaques multicouches et des sandwichs:

D'après la littérature scientifique, on remarque qu'une quantité importante de travaux a été faite sur l'analyse statique de plaques composites stratifiées et sandwichs. Alors que les travaux concernant l'analyse dynamique des plaques stratifiées et notamment les plaques sandwichs sont plutôt rares. Les premières études sur le comportement dynamique de plaques stratifiées ont été entreprises vers les années 1960 par Yu [16,17], puis d'autres chercheurs, dont Srinivas et Rao [18], Chan et Cheung [19], Noor [20], Reddy et Kuppusamy [21] et Wang et al. [22], qui ont effectué une analyse dynamique sur des plaques multicouches/sandwichs, en proposant des solutions analytiques, basées sur les équations d'élasticité tridimensionnelle.

En 1988, Kanematsu et al. [23] ont utilisé la méthode analytique de Rayleigh-Ritz pour étudier le comportement en vibration et en flexion des plaques sandwichs rectangulaires avec des peaux stratifiées. Ils ont également mené des expériences grâce à des techniques

holographiques pour obtenir la flèche et les modes de vibration. Meunier et Shenoï [24] ont étudié la faisabilité de l'utilisation de méthodes analytiques, basées, soit sur la théorie du premier ordre, soit sur la théorie d'ordre supérieur de Reddy, pour analyser le comportement dynamique en vibration libre des plaques sandwichs simplement appuyées avec des peaux stratifiées de type FRP. De plus, les auteurs ont effectué une étude paramétrique, afin de montrer l'effet de certains paramètres, tels que les propriétés géométriques et mécaniques du matériau sur les fréquences naturelles.

Chapitre 2

Comportement mécanique des plaques stratifiées sandwichs selon la théorie du premier ordre

Chapitre 2:

Comportement mécanique des plaques stratifiées sandwichs selon la théorie du premier ordre

2.1.1 Introduction :

Les technologies modernes ont besoin de matériaux qui allient à la fois une rigidité, une résistance mécanique, une ténacité élevée et une grande légèreté. Pour atteindre cet objectif il faut nécessairement utiliser un matériau composite, dans ce domaine, les matériaux composites à base de fibres jouent un rôle de plus en plus important dans les techniques avancées. Les propriétés mécaniques des composites fibreux dépendent de la quantité, de la taille et surtout de l'orientation des fibres. Le comportement mécanique d'un matériau composite varie fortement avec l'orientation des fibres. Pour obtenir une résistance élevée, il faut orienter les fibres parallèlement à la direction des contraintes les plus élevées. Dans le cas des matériaux composites, l'élaboration du matériau et la fabrication du composant sont dans un grand nombre de cas simultanés et indissociables.

Dans ce chapitre, nous allons faire premièrement un rappel sur la théorie du premier ordre de cisaillement transversal. Ainsi que l'écriture de la loi de comportement d'une plaques stratifiées.

2.1.2 Définitions :

- **Un matériau** est une matière d'origine naturelle ou artificielle que l'homme façonne pour en faire des objets, l'expérience à montrer que les matériaux ont en général un comportement élastique linéaire.
- **Une plaque** est un solide défini par une surface de référence plane (plan $x y$) et par une épaisseur (notée $h(x, y)$) petite par rapport aux autres dimensions (longueur et largeur (figure 2.1)). Elle peut être constituée d'un matériau homogène ou peut être obtenue par l'empilement de différentes couches de matériaux orthotropes.

Elle est considérée un milieu continu ayant une dimension très petite par rapport aux deux autres.

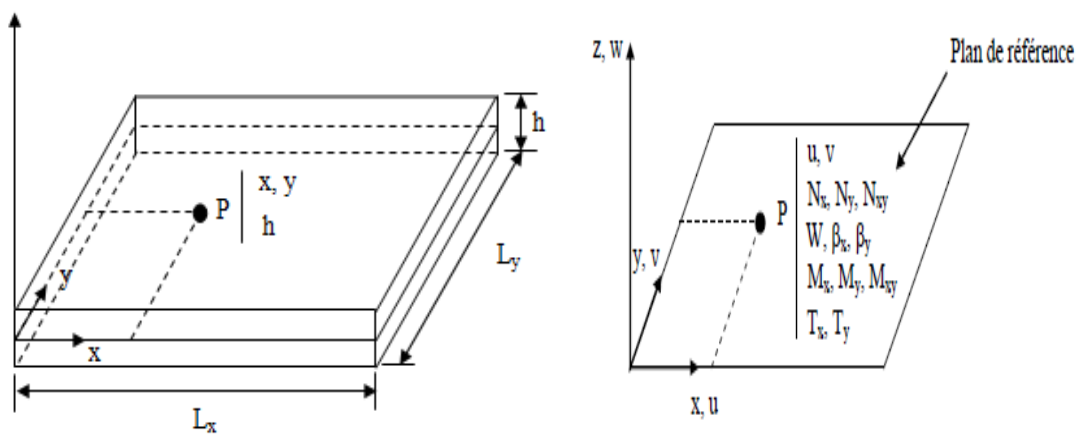


Figure 2.1. Description d'une plaque

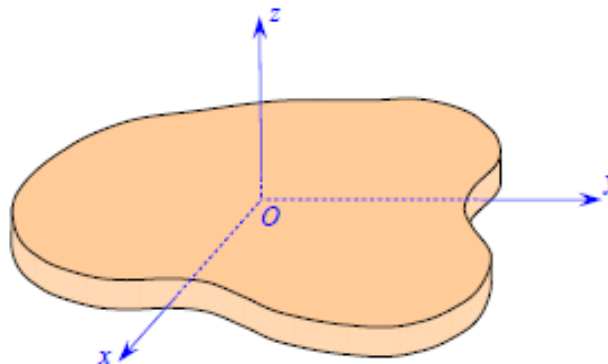


Figure 2.2: Élément plaque

2.1.3 Loi de comportement des stratifiés:

Les matériaux composites sont souvent schématisés par un milieu continu *homogène équivalent anisotrope*. L'étude de leur comportement consiste à passer des propriétés des composantes et de la géométrie du composite. Cette étude comportera deux phases:

- l'étude du comportement mécanique de chaque pli,
- l'étude du comportement globale du matériau constitué de plusieurs plis, et désigné généralement par *le comportement du stratifiés*

2.2. 1 Caractéristiques mécaniques et module d'élasticité:

Les propriétés mécaniques et géométriques des fibres et de la matrice seront caractérisées par leurs modules d'élasticité, coefficients de Poisson et des fractions volumiques notés respectivement E_f , E_m , ν_f , ν_m , V_f et V_m .

La résolution du problème est plutôt complexe à cause des possibilités multiples et variées d'arrangements des fibres dans le composite. Dans ce qui suit on donne quelques expressions simplifiées des modules élastiques du composite unidirectionnel en fonction des caractéristiques des constituants.

Pour déterminer les caractéristiques mécaniques d'un composite, nous étudions un assemblage de géométrie donnée de deux phases (fibre et matrice) de caractéristiques mécaniques différentes, soumis à des sollicitations simples.

➤ Composition du composite (fibre, matrice, vide) :

La teneur en volume des fibres est définie comme :

$$\vartheta_m = \frac{V_f}{S_c} = \frac{\text{Volume de fibre}}{\text{Volume total du composite}} \quad (2.1)$$

De la même façon, la teneur en volume de la matrice est :

$$\vartheta_m = \frac{V_m}{S_c} = \frac{\text{Volume de matrice}}{\text{Volume total du composite}} \quad (2.2)$$

2.2. 1.1 Module de Young longitudinal E_L (E_1):

Considérons un chargement F parallèle au plan de séparation de la fibre et de la matrice (**fig.2.3**). Les deux matériaux étant considérés parfaitement collés par hypothèse, **la matrice (m)** et **la fibre (f)** possèdent la même déformation longitudinale ϵ_L que le matériau composite

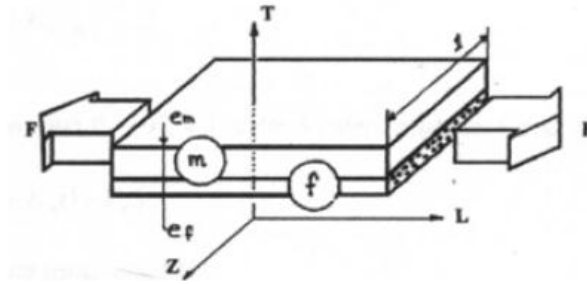


Figure 2.3: Chargement longitudinal.

L'état de contraintes dans chaque matériau est un état de traction pure, et les contraintes de traction sont données par :

$$\sigma_m = E_m \cdot \varepsilon_L \Rightarrow \text{dans la matrice;} \quad (2.3)$$

$$\sigma_f = E_f \cdot \varepsilon_L \Rightarrow \text{dans la fibre.}$$

La charge totale appliquée est :

$$F = \delta_f S_f + \delta_m S_m \quad (2.4)$$

Où : S_f et S_m sont respectivement les aires de la section droite de la fibre et de la matrice.

En reportant les expressions des contraintes dans cette dernière relation nous obtenons :

$$F = (E_f S_f + E_m S_m) \varepsilon_L \quad (2.5)$$

La contrainte de traction dans le composite est définie par :

$$\sigma = \frac{F}{S} = E_L \varepsilon_L \quad (2.6)$$

En remplaçant F par son expression on obtient :

$$E_L = \frac{E_f S_f}{S} + \frac{E_m S_m}{S} \quad (2.7)$$

Avec :

E_L : Module d'élasticité longitudinal du composite ;

$S = S_f + S_m$: Section droite du composite.

Pour un composite de largeur et de longueur égales à l'unité, les fractions volumiques de la fibre (V_f), et de la matrice (V_m) sont données par :

$$V_f = \frac{S_f \times 1}{S \times 1} = \frac{\epsilon_f}{\epsilon_f + \epsilon_m} \tag{2.8}$$

$$V_m = \frac{S_m \times 1}{S \times 1} = \frac{\epsilon_m}{\epsilon_f + \epsilon_m}$$

Le module d'élasticité du composite s'écrit alors :

$$E_L = E_f V_f + E_m V \tag{2.9}$$

Finalement, en notons que $V_f + V_m = 1$, cette dernière expression peut s'écrire :

$$E_L = E_f V_f + E_m (1 - V_f) \tag{2.10}$$

La figure suivante représente l'état de contraintes longitudinales:

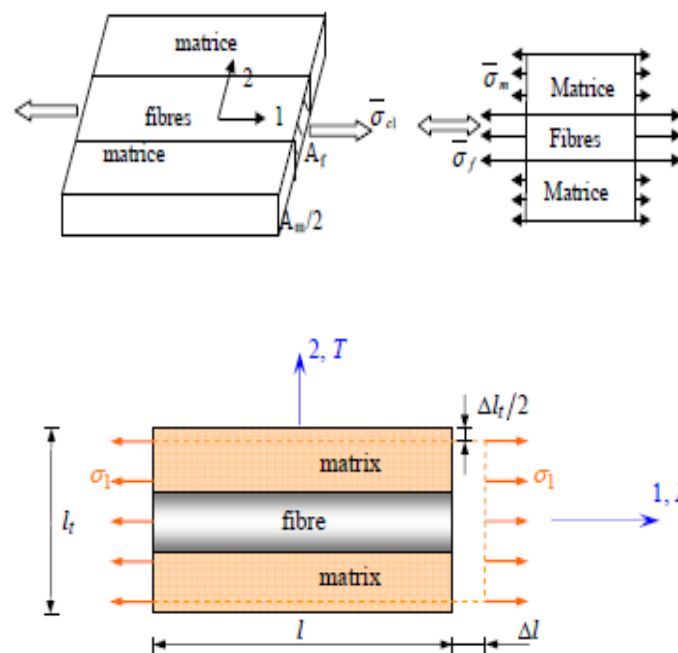


Figure 2.4. État de contraintes longitudinales.

2.2.2.1 Relation déplacements-déformations (Cinématique) :

Les relations déplacements-déformations suivantes sont établies aux niveaux des plis du stratifié. Pour l'obtention des relations entre les composantes des déplacements et des

déformations, nous considérons dans ce mémoire que ces quantités sont petites et que l'on reste dans le domaine de l'élasticité linéaire. Ainsi, la relation entre les déformations et déplacements est définie en fonctions des dérivées des déplacements (u, v, w) par rapport aux coordonnées (x, y, z).

2.2.3 Théorie de la déformation de cisaillement de premier ordre (FSDT)

Les modèles élaborés selon la théorie de la déformation de cisaillement de premier ordre (FSDT), sont basés sur les hypothèses adoptées dans la théorie des plaques de Reissner-Mindlin, selon lesquelles une ligne droite et perpendiculaire au plan moyen d'une couche quelconque, reste droite avant la déformation toutefois elle ne reste pas nécessairement normale à ce plan de référence après la déformation de la structure

2.2.3.1 Relation déformations-déplacements (Cinématique) :

2.2.3.1.1 Champ des déplacements :

Nous considérons ici l'analyse par éléments finis dans le cas où le comportement mécanique est décrit par la théorie des stratifiés du premier ordre, prenant en compte le cisaillement transverse.

Selon *la théorie du premier ordre* (figure 2.1), le champ de déplacement s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} U(x, y, z, t) &= U_0(x, y, t) + z\varphi_x(x, y, t), \\ V(x, y, z, t) &= V_0(x, y, t) + z\varphi_y(x, y, t), \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$W(x, y, z, t) = W_0(x, y, t)$$

Où φ_x et φ_y indiquent respectivement les rotations autour des axes y et x , et sont représentés sur la figure suivante :

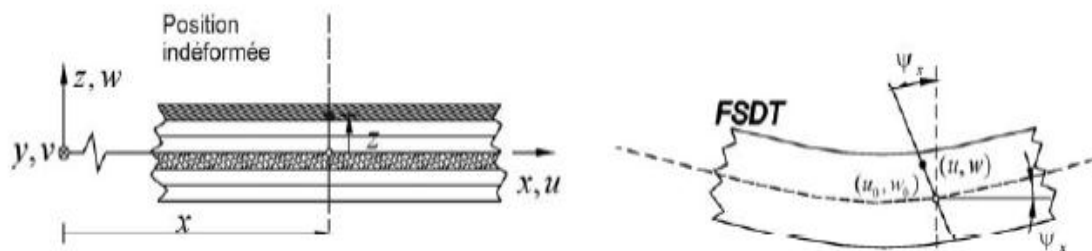


Figure 2.5: illustration de la cinématique de déformation présentée par couche équivalente, en utilisant la théorie FSDT

Avec:

$$\begin{aligned}
 U_0(x, y, t) &= U(x, y, 0, t) \\
 V_0(x, y, t) &= V(x, y, 0, t) \\
 W_0(x, y, t) &= W(x, y, 0, t) .
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Il se fait nécessaire l'introduction de facteurs de correction de cisaillement.

2.2.3.1.2 Champ des déformations :

Le champ des déformations est déduit du champ des déplacements. Il s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\
 \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0 \\
 \gamma_{xz} &= 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\
 \gamma_{xy} &= 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + z \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right)
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Ces expressions montrent que la troncature utilisée dans les expressions du déplacement est consistante, dans le sens que les déformations en cisaillement transverse résultant des

déplacements dans le plan sont du même ordre en z que les déformations déterminées par le déplacement transverse w .

- Le tenseur des déformations en un point M du stratifié est donc :

$$\varepsilon(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

- Et la matrice des déformations comporte cinq composantes non nulles :

$$\varepsilon(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

- Le champ des déformations peut être sous-divisé en deux champs :

Le champ des déformations en membrane-flexion :

$$\varepsilon_{mf}(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Le champ des déformations en cisaillement transverse :

$$\gamma_c(M) = \begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi x \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Le champ des déformations en cisaillement varie a priori d'une couche à l'autre. Dans la théorie des stratifiés avec cisaillement transverse, on admet toutefois que le champ est identique dans toutes les couches. La première approche consiste à admettre que les déformations en cisaillement sont égales aux déformations moyennes γ_{yz}^0 et γ_{xz}^0 du stratifié, soit :

$$\gamma_c(M) = \begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Le champ des déformations en membrane-flexion est la superposition :

- Des déformations en membrane :

$$\varepsilon_m(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

En exprimant exclusivement en fonction des déplacements (u_0, v_0) dans le plan moyen (Oxy) des points de ce plan ;

➤ des déformations en flexion et torsion :

$$\varepsilon_f(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^f \\ \varepsilon_{yy}^f \\ \gamma_{xy}^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Les déformations en flexion et torsion s'expriment en fonction de la matrice des courbures suivant la relation :

$$\varepsilon_f(M) = zk(x, y) \quad (2.21)$$

Avec:

$$k(x, y) = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

k_x , k_y et k_{xy} Sont les courbures de la plaque sollicitée en flexion.

Finalement, le champ $\varepsilon_{mf}(M)$ s'écrit :

$$\varepsilon_m(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

$$\text{Avec } \varepsilon_{xx}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} , \quad \varepsilon_{yy}^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y} , \quad \gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \quad (2.24)$$

$$k_x = \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} , \quad k_y = \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} , \quad k_{xy} = \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \quad (2.25)$$

Le champ des déformations s'écrit donc sous une forme analogue à la relation de la théorie classique des stratifiés :

$$\varepsilon(M) = \varepsilon_m(x, y, z) = \varepsilon_m(x, y) + zk(x, y) \tag{2.26}$$

Seules les expressions des courbures sont modifiées.

2.2.3.2.Champ des contraintes :

Les contraintes dans la couche k s'expriment suivant la relation, soit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \tag{2.27}$$

Les contraintes dans la couche k s'expriment suivant la relation, soit :

Les paramètres \bar{Q}_{ij} et \bar{C}_{ij} de la couche k sont rapportés aux axes de référence du stratifié. Le champ des contraintes est constitué des contraintes en membrane : σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} et des contraintes en cisaillement transverse : σ_{yz} , σ_{xz} . L'expression (2.46) montre que ces deux champs sont découplés.

Avec

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_{11} &= Q_{11}c^4 + Q_{22}s^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 \\
\bar{Q}_{22} &= Q_{11}s^4 + Q_{22}c^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 \\
\bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})s^2c^2 + Q_{12}(s^4 + c^4) \\
\bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})s^2c^2 + Q_{66}(s^4 + c^4) \\
\bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})sc^3 - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})s^3c \\
\bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})s^3c - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})sc^3 \\
\bar{C}_{44} &= C_{44}c^2 + C_{55}s^2 \\
\bar{C}_{45} &= (C_{55} - C_{44})sc \\
\bar{C}_{55} &= C_{44}s^2 + C_{55}c^2
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Les contraintes en *membrane* dans la couche K s'expriment suivant :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ sym & & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ sym & & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \tag{2.29}$$

Ou sous forme contractée :

$$\sigma_k(M) = \bar{Q}_k \varepsilon_m(x, y) + z \bar{Q}_k \kappa(x, y). \tag{2.30}$$

Les contraintes en *cisaillement transverse* dans la couche K s'expriment suivant :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix} \tag{2.31}$$

Représente la matrices de contrainte dans la couche k : $h_{k-1} \leq z \leq h_k$ la matrice de rigidité \bar{Q}_k réduite varie d'une couche à l'autre .il en résulte donc *une discontinuité* du champ des contraintes dans les couches successives.

2.2.4 Types des matériaux:

Dans le premier chapitre, nous avons parlé des types de matériaux. Dans ce chapitre, nous détaillerons plus sur ces types :

2.2.4.1 Matériaux anisotropes:

La loi de Hooke peut être exprimée par:

$$\delta_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \quad ij = 1, 2, \dots \dots .6 \quad (2.32)$$

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}$$

C_{ijkl} : La matrice de rigidité du matériau (Tenseur d'élasticité),

S_{ijkl} : Tenseur de souplesse,

ε_{kl} : Tenseur de déformation,

σ_{ij} : tenseur de contrainte.

Le tenseur de rigidité a 81 coefficients de même pour le tenseur de souplesse, pour raison de la symétrie des contraintes δ_{ij} et de déformation ε_{kl} il y a une réduction des coefficients à 3 parmi ces derniers, 21 sont indépendants. Les distorsions angulaires sont exprimées en fonction des déplacements :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \quad \text{et} \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \Rightarrow \quad C_{ijkl} = C_{jikl}$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk} \quad \Rightarrow \quad C_{ijkl} = C_{jilk}$$

$$\gamma_{23} = 2\varepsilon_{23}$$

$$\gamma_{13} = 2\varepsilon_{13}$$

$$\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} \quad (2.29)$$

On écrit (2) sous la forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \delta_{11} \\ \delta_{22} \\ \delta_{33} \\ \tau_{44} \\ \tau_{55} \\ \tau_{66} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & sym & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{44} \\ \gamma_{55} \\ \gamma_{66} \end{Bmatrix} \quad (2.30)$$

En inversant (3), on obtient :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{44} \\ \gamma_{55} \\ \gamma_{66} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & C_{16} \\ & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & C_{26} \\ & & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ & sym & & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ & & & & S_{55} & S_{56} \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta_{11} \\ \delta_{22} \\ \delta_{33} \\ \tau_{44} \\ \tau_{55} \\ \tau_{66} \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

2.4.1 Les efforts résultants dans le stratifié :

2.4.1.1 Résultantes en membrane :

Le vecteur des résultantes en membrane noté $N(x,y)$, d'une couche k , est défini par:

$$N(x, y) = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz \quad (2.32)$$

N_x, N_y et N_{xy} sont les résultantes par unité de longueur; des contraintes suivant x, y et des contraintes de cisaillement respectivement.

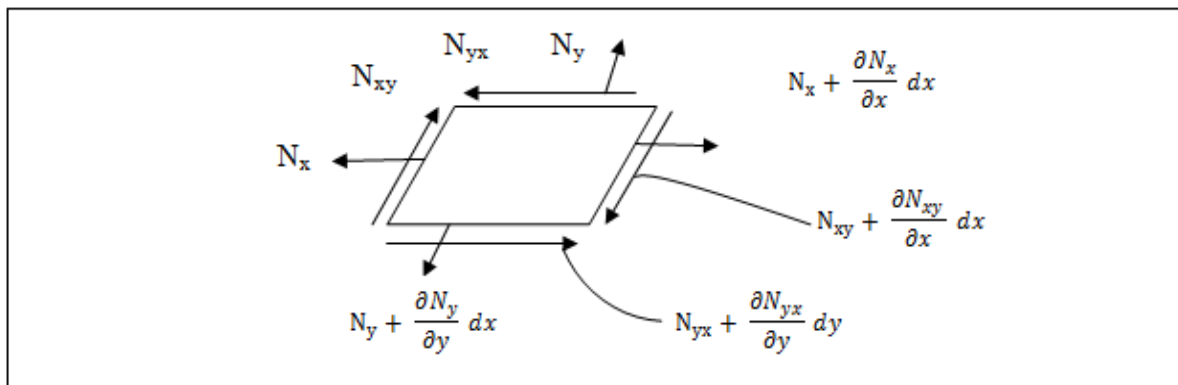


Figure 2.6: Efforts agissant dans le plan de la plaque.

Les composantes N_x , N_y , N_{xy} sont les résultantes, par unité de longueur de plaque, respectivement des contraintes normales (suivant x et suivant y) et des contraintes de cisaillement, dans le plan (x, y) . Elles sont schématisées symboliquement sur la figure suivante :

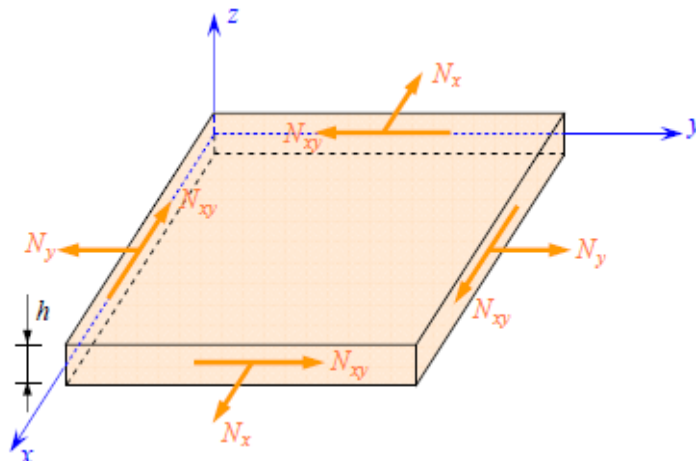


Figure 2.7 : Schématisation des résultantes en membrane des actions exercées sur un élément de stratifié.

La discontinuité des contraintes d'une couche à l'autre conduit à la relation précédente sous la forme

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_k dz \quad (2.33)$$

L'expression (2.29) conduit à l'expression des résultantes en membrane :

$$\begin{aligned} N(x, y) &= \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left[\bar{Q}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \bar{Q}_k \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \right] dz \\ N(x, y) &= \sum_{k=1}^N \left[\bar{Q}_k \varepsilon_m(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz \right] + \sum_{k=1}^N \bar{Q}_k \kappa(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \\ N(x, y) &= \left[\sum_{k=1}^N (h_k - h_{k-1}) \bar{Q}_k \right] \varepsilon_m(x, y) + \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (h_k^2 - h_{k-1}^2) \bar{Q}_k \right] \kappa(x, y) \end{aligned} \quad (2.34)$$

Finalement, l'expression des efforts résultants membranaires s'écrit comme suit

$$N(x, y) = A\varepsilon_m(x, y) + B\kappa(x, y) \quad (2.35)$$

Les matrices, A et B s'écrivent:

$$A = \sum_{k=1}^N (h_k - h_{k-1}) \bar{Q}_k$$

Avec $A = [A_{ij}]$

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N (h_k - h_{k-1}) (\bar{Q}_{ij})_k$$

$$B = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (h_k^2 - h_{k-1}^2) \bar{Q}_k$$

Avec $B = [B_{ij}]$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (h_k^2 - h_{k-1}^2) (\bar{Q}_{ij})_k \quad (2.36)$$

Les expressions développées des résultantes s'écrivent:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.37)$$

2.4.1.2 Moments de flexion et de torsion :

Les moments de flexion et de torsion sont définis par:

$$M(x, y) = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z dz \quad (2.38)$$

Les composantes M_x et M_y sont les moments de flexion suivant les directions x et y , respectivement, et la composante M_{xy} est le moment de torsion. Ces composantes sont schématisées sur la figure 2.8

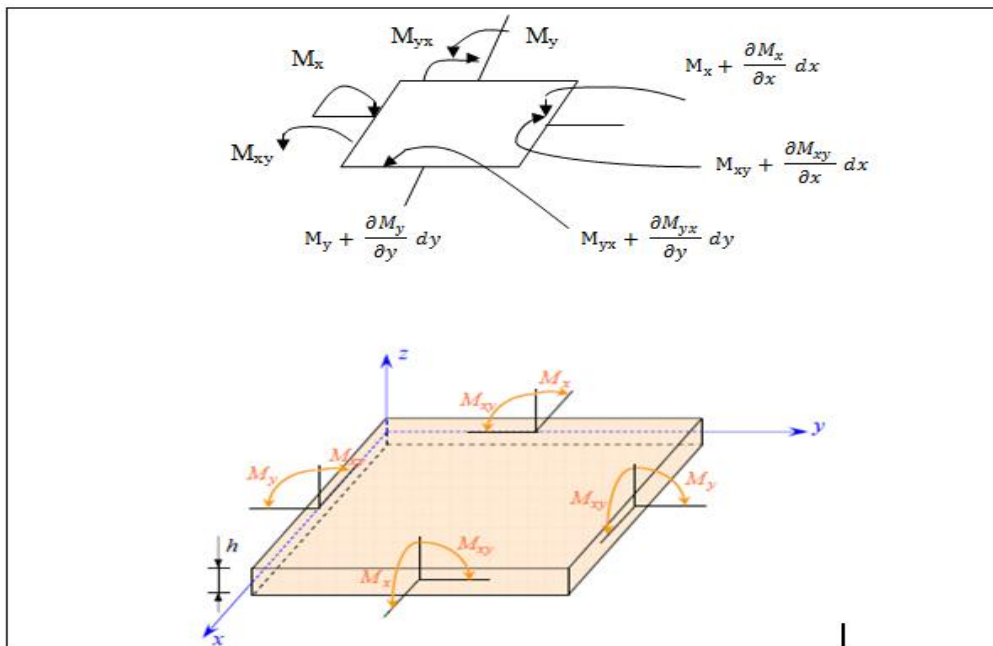


Figure 2.8: Schématisation des moments de flexion et de torsion.

L'expression (2.38) conduit à l'expression des moments de flexion et de torsion:

$$M(x, y) = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left[z [\bar{Q}]_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z^2 [\bar{Q}]_k \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \right] dz$$

$$M(x, y) = \sum_{k=1}^N \left[\bar{Q}_k \varepsilon_m(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \right] + \sum_{k=1}^N \bar{Q}_k \kappa(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} z^2 dz$$

$$M(x, y) = \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (h_k^2 - h_{k-1}^2) \bar{Q}_k \right] \varepsilon_m(x, y) + \left[\frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (h_k^3 - h_{k-1}^3) \bar{Q}_k \right] \kappa(x, y) \tag{2.39}$$

Soit :

$$M(x, y) = B \varepsilon_m(x, y) + D \kappa(x, y)$$

Où, L'expression de la matrice D

$$D = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (h_k^3 - h_{k-1}^3) \bar{Q}_k \tag{2.40}$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (h_k^3 - h_{k-1}^3) (\bar{Q}_{ij})_k \quad (2.41)$$

L'expression développée des moments s'écrit sous la forme:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.42)$$

2.5.1 Résultantes en cisaillement :

Les résultantes en cisaillement sont définies de la même manière par :

$$V(x, y) = \begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \delta_{xz} \\ \delta_{yz} \end{Bmatrix}_k dz \quad (2.43)$$

Comme les résultantes en membrane, les résultantes en cisaillement sont définies par unité de longueur du stratifié. Elles sont schématisées sur la figure suivante :

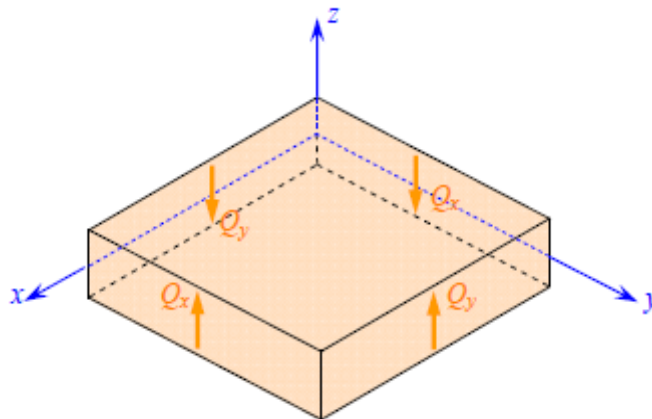


Figure 2.9: Représentation schématique des résultantes de cisaillement.

$$V(x, y) = \begin{Bmatrix} V_y \\ V_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{44} & F_{45} \\ F_{54} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}$$

$$F_{ij} = \sum_{k=1}^N (h_k - h_{k-1}) (\bar{C}_{ij})_k \quad (2.44)$$

Les coefficients F_{ij} ont même forme que les coefficients A_{ij} . Ils en diffèrent par l'utilisation des coefficients \bar{C}_{ij} de rigidité en cisaillement transverse au lieu des coefficients \bar{Q}_{ij} de rigidité réduit.

L'équation constitutive des stratifiés avec cisaillement transverse s'écrit en rassemblant les résultantes et les moments sous la forme:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ V_y \\ V_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{44} & F_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{54} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (2.45)$$

Où

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^N (h_k - h_{k-1}) (\bar{Q}_{ij})_k \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (h_k^2 - h_{k-1}^2) (\bar{Q}_{ij})_k \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (h_k^3 - h_{k-1}^3) (\bar{Q}_{ij})_k \\ F_{ij} &= \sum_{k=1}^N (h_k - h_{k-1}) (\bar{C}_{ij})_k \end{aligned} \quad (2.46)$$

Avec

L'équation constitutive peut également être écrite sous forme contractée suivant :

$$\begin{bmatrix} N \\ M_f \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ B & D & 0 \\ 0 & 0 & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_m \\ \kappa \\ \gamma_c \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Sous cette écriture, l'analyse de la matrice de rigidité assemblée du stratifié (la matrice $ABDF$) permet de mettre en évidence certains comportements élastiques caractéristiques des stratifiés :

- ❖ La matrice **A** correspond au comportement de *membrane*,
- ❖ La matrice **D** correspond au comportement de *flexion*,
- ❖ La matrice **B** correspond aux termes de *couplage* entre les phénomènes de *membrane* et de *flexion*,
- ❖ La matrice **F** correspond au comportement de *cisaillement transverse*,

Ainsi, si **B** n'est pas *nul*, un effort de *traction* dans le plan moyen entraîne une *flexion* du stratifié. Toutefois d'autres couplages existent à l'intérieur même des comportements de membrane et de plaque :

* Les termes A_{16} et A_{26} correspondent aux couplages plans entre *traction* et *cisaillement*.

* Les termes D_{16} et D_{26} quantifient les couplages entre *flexion* et *torsion* de la plaque stratifiée. Le plus souvent ces couplages constituent une difficulté supplémentaire de la conception composite.

2.6.1 Facteurs de correction de cisaillement transverse pour des plaques stratifiées :

Un premier choix du champ de déplacement est basé sur la théorie du premier ordre. En optant pour ce choix, les auteurs considèrent que les contraintes et les déformations de cisaillement sont constantes à travers l'épaisseur d'une structure composite. Dans le cas réel, ceci n'est pas vrai, En effet, les contraintes de cisaillement sont quadratiques à travers l'épaisseur (Fig.II.21).

Pour corriger les contraintes de cisaillement transversal, dont l'expression est issue de la théorie du premier ordre, des facteurs de corrections doivent être introduits, comme cela a été souligné précédemment.

Les résultats de *Reissner-Mindlin* qui supposent une variation parabolique de la distribution des contraintes de cisaillement, donnent : $k = \frac{5}{6}$

Chapitre 3

Formulation élément fini

Chapitre 3

Formulation élément fini

3.1 Introduction :

Dans ce chapitre, nous allons présenter la formulation d'un élément fini rectangulaire (R4) basés sur la théorie du premier ordre, destiné à la modélisation des plaques stratifiées et des sandwichs. Dans cette formulation, on utilise le principe de travail Virtual, qui nous permettra de trouver le vecteur force F et la matrice de rigidité globale. Suite à cette formulation, nous avons adopté un programme en langage FORTRAN 77 qui sera utilisé pour calculer la matrice de rigidité et la matrice de masse, et un autre programme en langage Matlab qui permet d'obtenir les valeurs propres de vibration.

3.2 Historique sur MEF:

La MEF (Méthode des Eléments Finis) est mise au point en 1953 chez Boeing (Seattle, USA, calcul des structures d'aile d'avion) ; on y développe le premier élément fini, sa matrice de rigidité, l'assemblage et la résolution par la méthode des déplacements (publié par Turner, Clough, Martin et Topp en 1956 seulement). Quant aux bases théoriques générales, mariant l'analyse des structures en barres et poutres avec celle des solides, elles sont données de 1954 à 1960 (Argyris, Kelsey). Certaines idées apparurent auparavant, en particulier chez les mathématiciens pour résoudre divers problèmes aux limites, par exemple celui de la torsion de Saint-Venant en divisant la section en triangles (Courant, 1943) ; mais elles restèrent sans suite. L'expression élément fini date de 1960 (Clough). Les années 60 ont vu la MEF s'attaquer à tous les domaines du calcul des solides et structures, avant de déborder dans d'autres domaines : écoulements souterrains, transfert de chaleur, fluides, etc. (Zienkiewicz, Cheung, 1965). En fait, les ingénieurs (aéronautique, génie civil et mécanique surtout) développent la MEF pour l'appliquer à leurs problèmes pratiques, avant que les bases théoriques ne soient bien établies. Dès 1970, la méthode envahit tous les créneaux de l'ingénierie et des mathématiques appliquées. Il faut ajouter que son essor est, dès le début et aujourd'hui encore, indissociable de celui des ordinateurs.

3.3 Méthode des éléments finis :

3.3.1 Définition de la méthode d'élément fini :

La méthode des éléments finis c'est une méthode très générale qui s'applique à la majorité des problèmes rencontrés dans la pratique : problèmes stationnaires ou non stationnaires, linéaires ou non linéaires, définis dans un domaine géométrique quelconque à une, deux ou trois dimensions. De plus, elle s'adapte très bien aux milieux hétérogènes souvent rencontrés dans la pratique par l'ingénieur .La résolution d'un problème par la méthode des éléments finis consiste à trouver les déplacements (par exemple les translations et les rotations) de ces nœuds. Le champ de déplacement en tout point est déterminé par interpolation entre les valeurs déterminées aux nœuds. L'interpolation est basée sur l'utilisation de fonctions de formes .Cette méthode est une technique d'analyse numérique qui permet d'obtenir des solutions approchées dans une large variété de problèmes d'ingénieries. Tout au début cette méthode était développée pour étudier les structures complexes .et a été initialement développée pour les matériaux isotropes et majorité des éléments disponibles dans tout logiciel serait pour ces matériaux. Pour appliquer la technique aux composites nécessite différentes formulations d'éléments qui représentent adéquatement leur anisotrope, ou orthotrope, rigidité et résistance, ainsi que la forme stratifiée de construction souvent utilisé.

3.4 Formulation de l'élément fini utilisé :

L'élément utilisé est un élément rectangulaire à 4 nœuds avec cinq degré de liberté $(u, v, w, \varphi_x, \varphi_y)$ par nœud (**Figure 3.1**). Les longueurs a et b sont les dimensions de l'élément dans les directions x et y dans cet ordre.

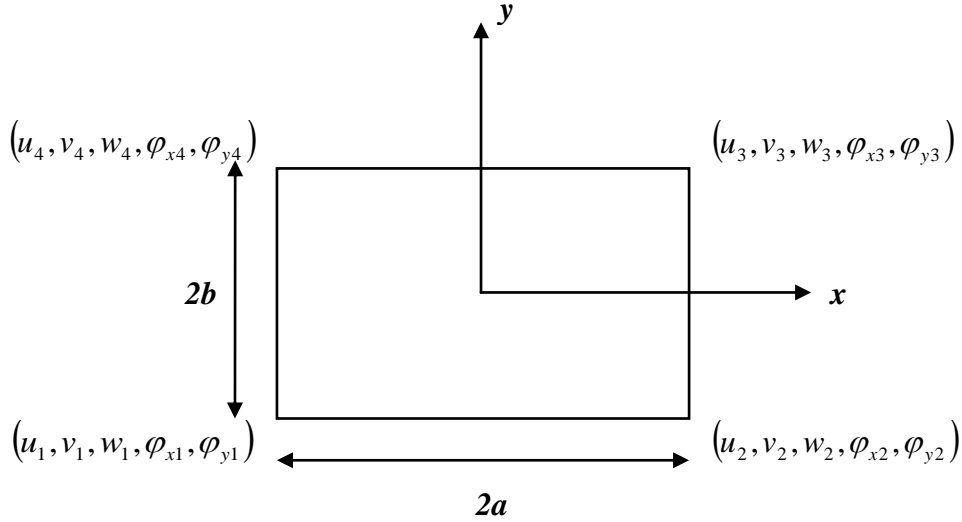


Figure. 3.1 Variables nodales de l'élément utilisé

La formulation de l'élément utilisé est basée sur la théorie du premier ordre (FSDT). Par conséquent, les déplacements dans le plan et hors plan sont donnés comme suit:

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\varphi_x(x, y) \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\varphi_y(x, y) \\ w(x, y, z) = w_0(x, y, z) \end{cases} \quad (3.1)$$

Les variables des déplacements sont:

$$u_0(x, y, t), v_0(x, y, t), w_0(x, y, t), \varphi_x(x, y, t), \varphi_y(x, y, t)$$

3.4.2 Approximation nodale des déplacements :

La formulation de l'élément nécessite uniquement une approximation C^0 . Le vecteur déplacement en tous points de coordonnées (x, y) de la plaque peut être exprimé par :

$$\delta(x, y) = \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) \cdot \delta_i \quad (3.2)$$

Où: $\delta_i = \{u_i, v_i, w_i, \varphi_{x_i}, \varphi_{y_i}\}^T$ est le vecteur des déplacements nodaux de l'élément, i étant le numéro du nœud considéré ($i = 1, 2, 3, 4$).

Les fonctions d'interpolation N_i de type Lagrange ont les expressions suivantes :

$$\begin{cases} N_1 = \frac{1}{4ab}(a-x)(b-y) \\ N_2 = \frac{1}{4ab}(a+x)(b-y) \\ N_3 = \frac{1}{4ab}(a+x)(b+y) \\ N_4 = \frac{1}{4ab}(a-x)(b+y) \end{cases} \quad (3.3)$$

L'approximation des variables cinématiques peut être exprimée comme suit :

$$\begin{cases} u(x, y) = \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) \cdot u_i \\ v(x, y) = \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) \cdot v_i \\ w(x, y) = \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) \cdot w_i \quad i = 1, 4 \\ \varphi_x(x, y) = \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) \cdot \varphi_{xi} \\ \varphi_y(x, y) = \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) \cdot \varphi_{yi} \end{cases} \quad (3.4)$$

Où $u_i, v_i, w_i, \varphi_{xi}, \varphi_{yi}$ sont les déplacements d'un nœud i .

Et le vecteur des déplacements nodaux de l'élément, étant le numéro du nœud considéré i .

$$\delta(x, y) = \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) \cdot \delta_i \quad (3.5)$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \phi_{x1} \\ \phi_{y1} \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \phi_{x2} \\ \phi_{y2} \\ u_3 \\ v_3 \\ w_3 \\ \phi_{x3} \\ \phi_{y3} \\ u_4 \\ v_4 \\ w_4 \\ \phi_{x4} \\ \phi_{y4} \end{Bmatrix} \tag{3.6}$$

L'approximation nodale du vecteur de déformation en un point quelconque de coordonnée (x, y) pourra être exprimée par les dérivées des déplacements nodaux comme suit :

$$\begin{aligned}
 \{\epsilon_m\} &= [B_m] \{\delta_i\} \\
 \{k\} &= [B_f] \{\delta_i\} \\
 \{\gamma\} &= [B_c] \{\delta_i\}
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Où les matrices $[B_m]$, $[B_f]$, $[B_c]$ peuvent être obtenues à partir de la dérivation des fonctions de forme comme ci-dessous :

$$\begin{aligned}
[B_m] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
[B_f] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \\
[B_c] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & N_1 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & N_2 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & N_3 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & N_1 & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & N_2 & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & N_3 & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 & N_4 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Avec, les exposants m , f et c désignent respectivement, membranaire, flexionnelle et cisaillement transversal.

3.4.3 Loi de comportement :

Les expressions des résultantes et des moments sont :

$$\begin{aligned}
\{N\} &= \int \{\sigma\} dz = [A]\{\varepsilon_m\} + [B]\{\kappa\} \\
\{M\} &= \int \{\sigma\} z dz = [B]\{\varepsilon_m\} + [D]\{\kappa\} \\
\{V\} &= \int \{\tau\} dz = [F]\{\gamma\}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

3.5 Évaluation de la matrice de rigidité :

3.5.1 Energie potentielle de déformation et travail des forces appliquées :

Pour établir la relation entre les forces et les déplacements, on a utilisé le principe de travail virtuel, soit :

$$\partial U - \partial W = 0 \tag{3.10}$$

Où,

U indique l'énergie potentielle de déformation dans la plaque stratifié.

W présente le travail effectué par les forces extérieures.

Dans le modèle proposé, le travail virtuel des efforts interne (∂U) de la plaque sandwich peut être écrit comme suit :

$$\partial U = \int_{\nu} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dv \quad (3.11)$$

L'énergie potentielle de déformation d'une plaque est donnée par :

$$U = \frac{1}{2} \int_{\nu} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dv \quad (3.12)$$

Où, ν est le volume de la plaque.

En utilisant les relations contraintes-déformations et les relations constitutives des stratifiés, l'énergie potentielle de déformation peut

$$U = \frac{1}{2} \int_A \left(\{\varepsilon_m\}^T \{N\} + \{\kappa\}^T \{M\} + \{\gamma\}^T \{V\} \right) dA$$

s'écrire:
$$U = \frac{1}{2} \int_A \left(\{\varepsilon_m\}^T [A] \{\varepsilon_m\} + \{\varepsilon_m\}^T [B] \{\kappa\} + \{\kappa\}^T [B] \{\varepsilon_m\} + \{\kappa\}^T [D] \{\kappa\} + \{\gamma\}^T [F] \{\gamma\} \right) dA$$

$$U = \frac{1}{2} \int_A \left([B_m]^T \{\delta\}^T [A] [B_m] \{\delta\} + [B_m]^T \{\delta\}^T [B] [B_f] \{\delta\} + [B_f]^T \{\delta\}^T [B] [B_m] \{\delta\} + \right.$$

$$\left. [B_f]^T \{\delta\}^T [D] [B_f] \{\delta\} + \{\delta\}^T [B_c]^T [F] \{\delta\} [B_c] \right) dA \quad (3.13)$$

Donc :

$$U = \frac{1}{2} \{\delta\}^T \int_A \left([B_m]^T [A] [B_m] + [B_m]^T [B] [B_f] + [B_f]^T [B] [B_m] \right.$$

$$\left. + [B_f]^T [D] [B_f] + [B_c]^T [F] [B_c] \right) \{\delta\} dA \quad (3.14)$$

3. 5.2.1 Problème de flexion :

L'énergie potentielle totale de déformation d'une plaque soumise à un chargement transversal répartie à travers sa surface est donnée par :

$$\Pi = U + W \quad (3.15)$$

La configuration d'équilibre est définie par la minimisation de l'énergie potentielle totale qui signifie l'annulation de sa première variation, soit :

$$\begin{aligned} \delta\Pi = \delta U - \delta W = 0 \\ \int_A \left\{ \delta\delta \right\}^T \left([B_m]^T [A][B_m] + [B_m]^T [B][B_f] + [B_f]^T [B][B_m] \right. \\ \left. + [B_f]^T [D][B_f] + [B_c]^T [F][B_c] \right) \delta\delta dA - \delta\delta \{F_e\} = 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Qui permet d'obtenir l'équation d'équilibre suivante :

$$[K_e] \cdot \{\delta\} = \{F_e\} \quad (3.16)$$

Où la matrice de rigidité élémentaire :

$$\begin{aligned} [K_e] = \int_A \left(\underbrace{[B_m]^T [A][B_m]}_{\text{membranaire}}, \underbrace{[B_m]^T [B][B_f]}_{\text{couplage membrane-flexion}}, \underbrace{[B_f]^T [B][B_m]}_{\text{couplage flexion-membrane}} \right. \\ \left. + \underbrace{[B_f]^T [D][B_f]}_{\text{flexionnelle}}, \underbrace{[B_c]^T [F][B_c]}_{\text{cisaillement}} \right) dA \end{aligned} \quad (3.17)$$

La matrice $[K_e]$ peut être écrite sous la forme :

$$[K_e] = [K_e]^1 + [K_e]^2 + [K_e]^3 + [K_e]^4 + [K_e]^5 \quad (3.18)$$

Où :

$$\begin{aligned} [K_e]^1 &= \int_A [B_m]^T [A][B_m] dA \\ [K_e]^2 &= \int_A [B_m]^T [B][B_f] dA \\ [K_e]^3 &= \int_A [B_f]^T [B][B_m] dA \\ [K_e]^4 &= \int_A [B_f]^T [D][B_f] dA \\ [K_e]^5 &= \int_A [B_c]^T [F][B_c] dA \end{aligned} \quad (3.19)$$

L'assemblage des matrices de rigidité et des vecteurs forces élémentaires permet d'obtenir l'équation suivante :

$$[K] \cdot \{\delta\} = \{F\} \quad (3.20)$$

Avec $[K]$ est la matrice de rigidité globale, $\{F\}$ est le vecteur de force global et $\{\delta\}$ est le vecteur des déplacements global de la plaque.

3. 5.3 Formulation de la matrice masse élémentaire :

La formulation de la matrice masse élémentaire est nécessaire pour évaluer le comportement des plaques multicouches en vibrations libres. Nous l'avons développée à partir de l'expression suivante de l'énergie cinétique T .

$$T = \frac{1}{2} \int_v \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial t} dv$$

$$\delta T = \int_v \rho (\ddot{u} \delta u + \ddot{v} \delta v + \ddot{w} \delta w) dv \quad (3.20)$$

Où :

ρ désigne la masse volumique représentative du volume V .

u, v et w , sont les composantes du vecteur de déplacement.

En remplaçant les vecteurs de déplacement dans l'expression de l'énergie cinétique

1- L'énergie cinétique en fonction de déplacement :

1- L'énergie cinétique en fonction de déplacement :

$$\delta E_c = \int_v \rho (u \delta \ddot{u} + \ddot{v} \delta v + \ddot{w} \delta w) dv$$

$$\delta E_c = \int_v \rho \left[(\ddot{u}_0 + z \ddot{\varphi}_x) (\delta u_0 + z \delta \varphi_x) + (\ddot{v}_0 + z \ddot{\varphi}_y) (\delta v_0 + z \delta \varphi_y) + \ddot{w}_0 \delta w_0 \right] dv$$

$$\delta E_c = \int_v \rho \left[(\ddot{u}_0 \delta u + \ddot{u}_0 z \ddot{\varphi}_x + z \ddot{\varphi}_x \delta \varphi_x) (\ddot{v}_0 \delta u_0 + \ddot{v}_0 z \delta \varphi_x + z \ddot{\varphi}_x \delta \varphi_x) + (\ddot{v}_0 \delta v_0 + \ddot{v}_0 z \delta \varphi_y + z \ddot{\varphi}_y \delta v_0 + z^2 \ddot{\varphi}_y \delta \varphi_y) + \ddot{w}_0 \delta w_0 \right] dv$$

$$\delta E_c = \int_v \rho \left[\ddot{u}_0 (\delta u_0 + z \delta \varphi_x) + \ddot{\varphi}_x (z \delta u_0 + z^2 \delta \varphi_x) + \ddot{v}_0 (\delta v_0 + z \delta \varphi_x) + \ddot{\varphi}_y (z \delta u_0 + \right.$$

$$z^2 \delta \varphi_x) + \ddot{w}_0 \delta w_0] dv \quad (3.31)$$

Donc :

$$\ddot{q} = -w^2 \dot{q} \quad (3.32)$$

La matrice de masse globale est obtenue par assemblage des matrices de masses élémentaire $[M_e]$ s'écrit comme suit:

$$[M_e] = \iint [N]^T [m][N] dx dy \quad (3.33)$$

où la matrice de fonction de forme:

$$[N] = \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_i \end{bmatrix}$$

$$[m] = \begin{bmatrix} I_0 & 0 & 0 & I_1 & 0 \\ 0 & I_0 & 0 & 0 & I_1 \\ 0 & 0 & I_0 & 0 & 0 \\ I_1 & 0 & 0 & I_2 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Où les moments d'inerties $I_i = (0,1,2)$ de sandwich sont définis par:

$$(I_0, I_1, I_2) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(1, z, z^2) dz \quad (3.35)$$

L'équation dynamique de la structure sandwich, en l'absence de charges extérieures, est obtenue en utilisant le principe de Hamilton (Eq. 3.36), que l'on peut exprimer entre deux instants t_1 et t_2 , le mouvement d'un système conservatif s'effectue de telle sorte que :

$$\partial \int_{t_1}^{t_2} (U - W - T) dt = 0 \quad (3.36)$$

L'équation générale de mouvement et pour système non forcé (vibrations libres non amorties) est :

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = 0 \quad (3.37)$$

Où $[M]$ et $[k]$ sont respectivement les matrices globales de masse et de rigidité de la plaque, $\{\delta\}$ et $\{\ddot{\delta}\}$ sont respectivement le vecteur des variables nodales et le vecteur d'accélération nodale du système défini au temps t .

Après avoir évalué la matrice de rigidité et la matrice de masse pour tous les éléments, les équations du mouvement, pour l'analyse de la vibration libre, peuvent être établies sous la forme de problème aux valeurs propres généralisées comme suit: :

$$[K]\{\chi\} - \omega^2 [M]\{\chi\} = 0 \quad (3.38)$$

Où :

ω est la fréquence naturelle de vibration de la plaque (rd/s).

$\{\chi\}$ sont les modes de vibration.

3. 5 Présentation du programme :

3. 5.1 Introduction :

Dans cette étude, on utilise programme en langage **FORTRAN77** et un autre programme en langage **MATLAB**. Le premier programme permet de résoudre l'équation $F = K \cdot \delta$ et calculer la matrice de rigidité $[K]$ et la matrice de masse $[M]$, le deuxième programme destiné pour trouver les fréquences propres à partir de résoudre l'équation suivante :

$$\det([K] - \omega^2 [M]) = 0 \quad (3.39)$$

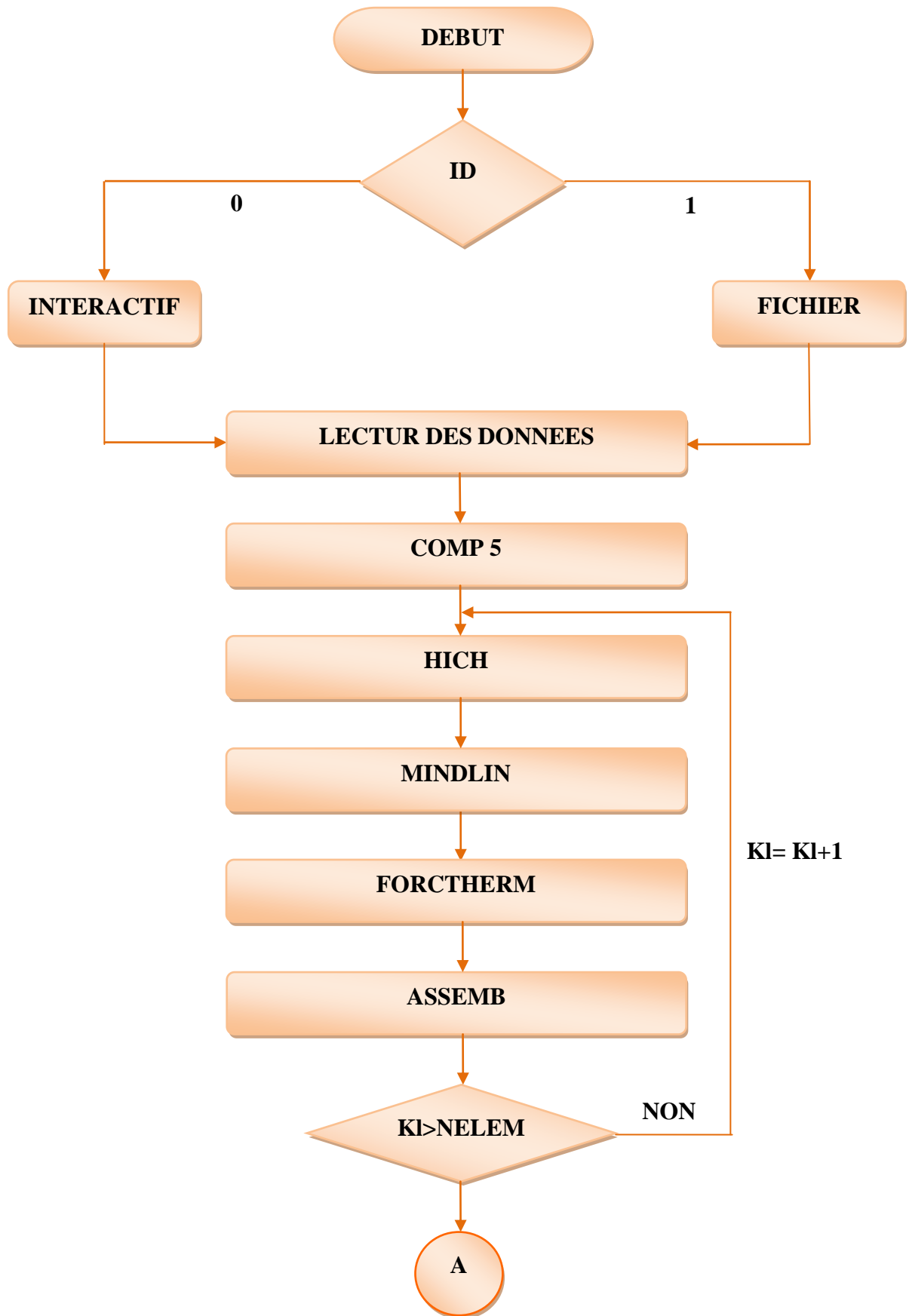
3. 5.2 Description les sousroutines du programme :

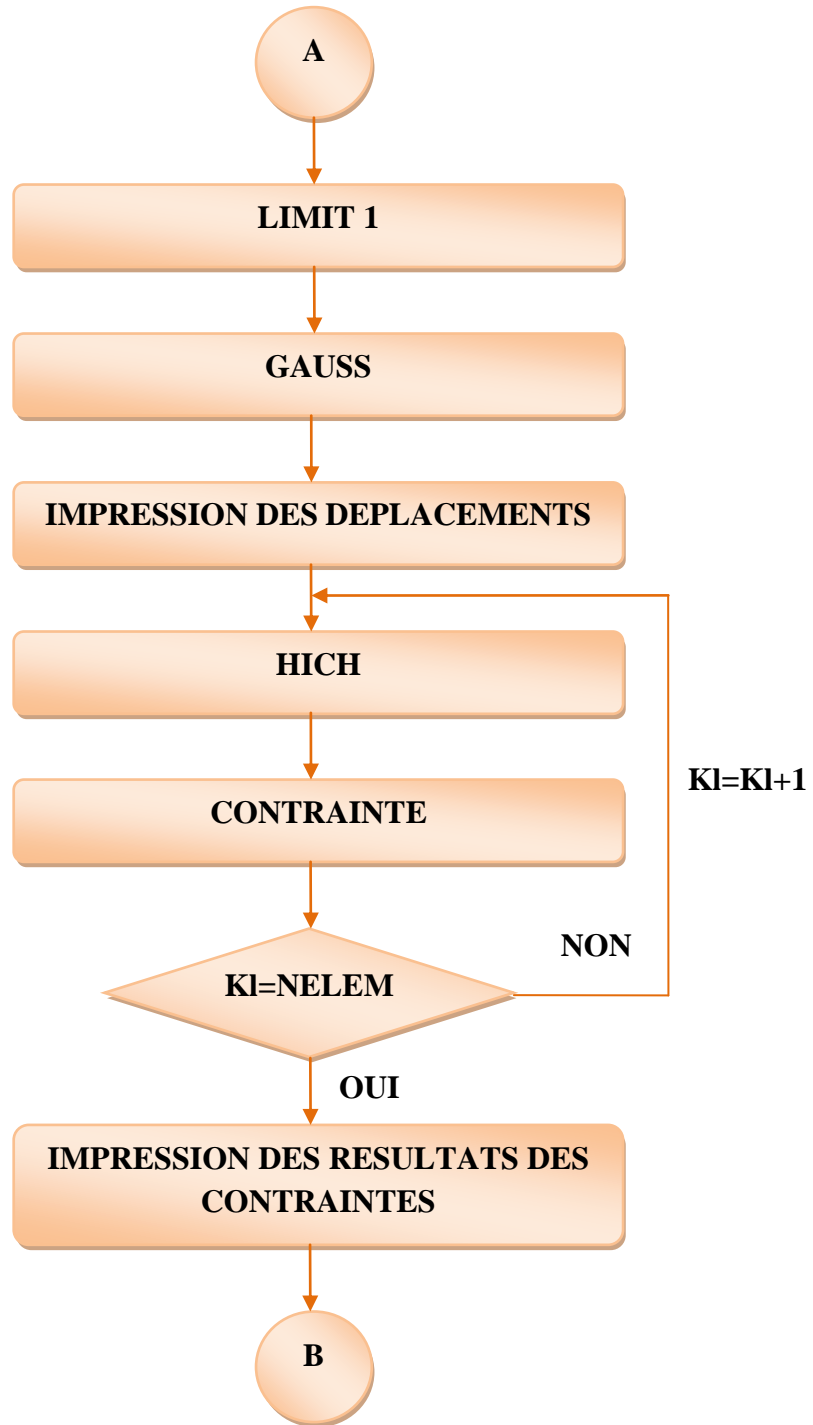
Tableau 3. 1. Fonction des sousroutines

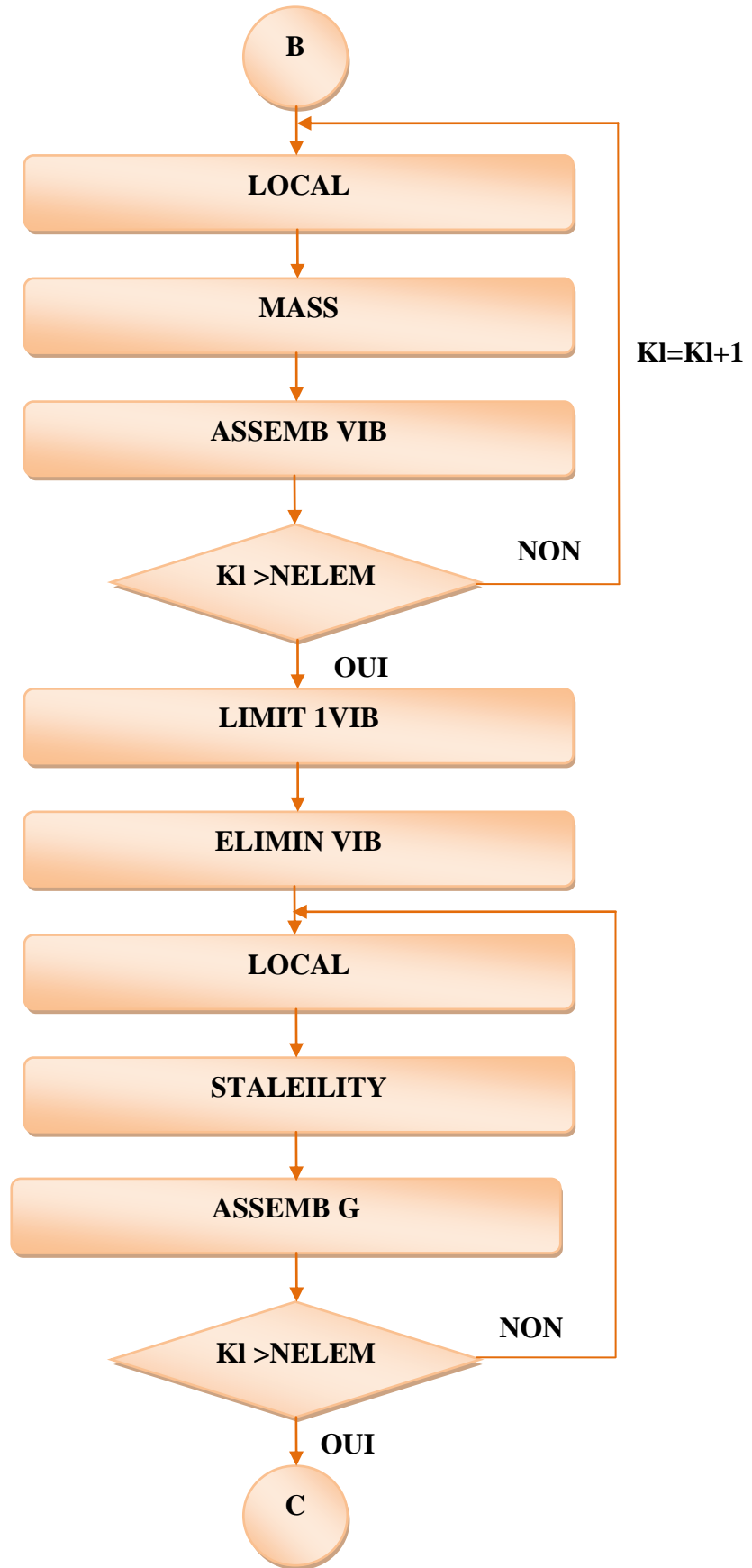
Les sous-routines	La fonction
<i>Comp5</i>	Permet de calculer les caractéristiques mécaniques du stratifié ($[A]$, $[B]$, $[D]$ et $[H]$)
<i>Hich</i>	Construction du tableau de localisation.
<i>Mindlin</i>	Construction des matrices de rigidité élémentaires.
<i>Force</i>	Création du vecteur forces élémentaire.
<i>Assemb</i>	A pour rôle d'assembler les matrices de rigidité élémentaires et le vecteur force élémentaire dans la matrice de rigidité et le vecteur force, globaux respectivement.
<i>Limite1</i>	Permet d'introduire les conditions aux limites pour calculer le déplacement en utilisant la procédure suivante : Annule tous les termes non diagonaux et égalise le terme diagonal à l'unité dans la matrice de rigidité et égalise le terme correspondant dans le vecteur force pour tous les degrés de liberté bloquée.
<i>Gauss</i>	Cette sous-routine résout le système d'équation linéaire et calcule les déplacements à partir de l'équation $F = K\delta$.
<i>Local</i>	Localiser les matrices réduites dans la matrice globale.
<i>Xelem</i>	Réduire la matrice de rigidité élémentaire de 20×20 à 12×12 .
<i>Assemb k</i>	Assembler les matrices de rigidité élémentaires réduites
<i>Limit1 K</i>	Introduire les conditions aux limites dans la matrice de rigidité réduite.
<i>Elimin K</i>	Éliminer les lignes et les colonnes de matrice de rigidité réduite dans les éléments sont nulles.
<i>Masse</i>	Création de la matrice de masse élémentaire.
<i>Assemb vib</i>	Assembler les matrices de masse.
<i>Limit1 vib</i>	Introduire les conditions aux limites dans la matrice de masse.
<i>Elimin vib</i>	Éliminer les lignes et les colonnes de matrice masse correspondant aux déplacements fixés.

3. 6.3 Présentation de l'organigramme du programme :

On peut dire que l'organigramme du programme graphique d'une suite logique d'opération, et est un outil adapté à la construction d'un programme.







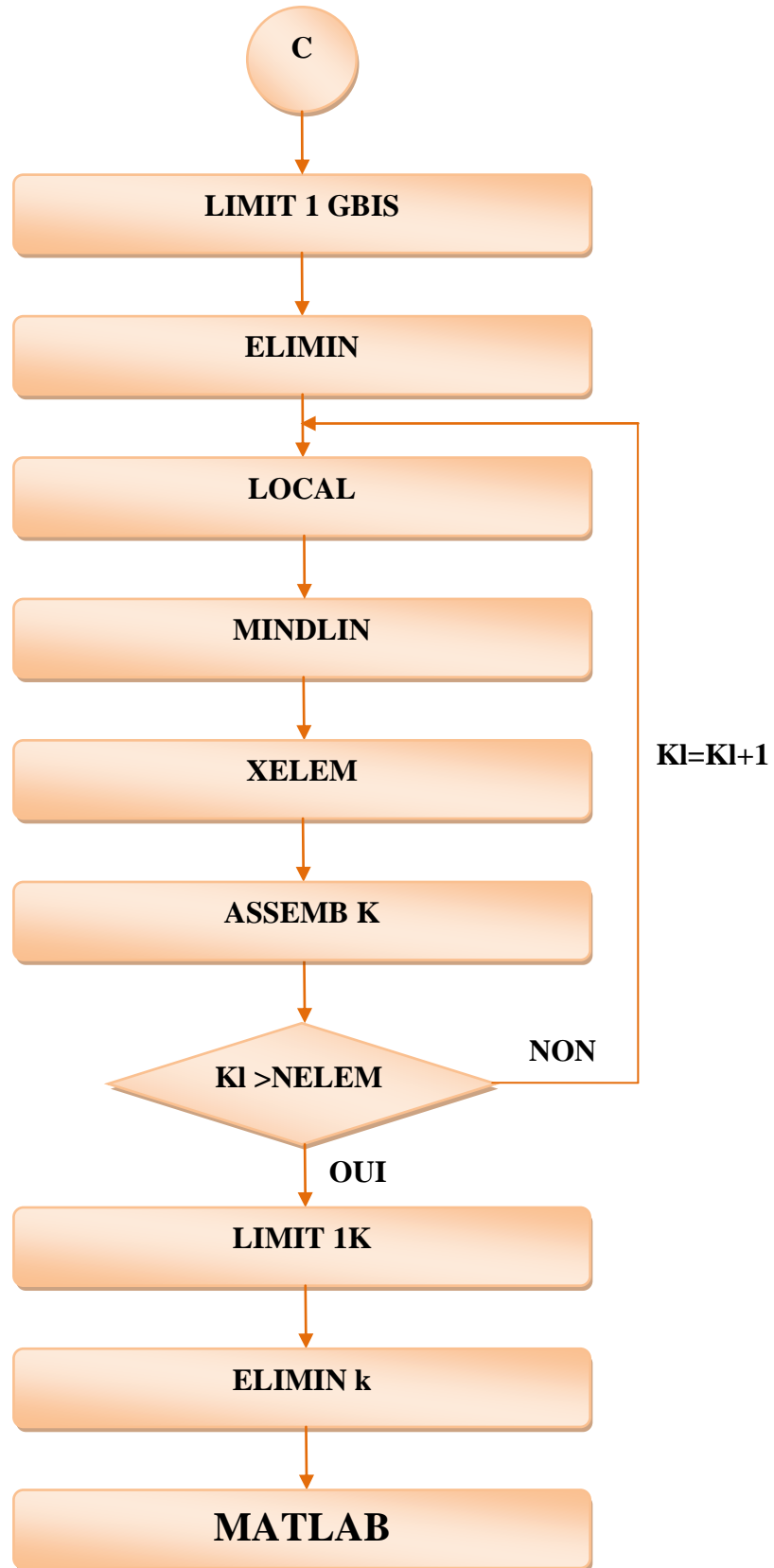


Figure 3.2. Organigramme du programme.

Chapitre 4

Validation de l'élément et étude paramétrique

Chapitre 4

Validation de l'élément et étude paramétrique

4.1 Introduction:

Après la formulation de l'élément fini rectangulaire, ce chapitre est consacré, dans la première partie, à la validation de l'élément utilisé en termes de précision, de convergence et de stabilité, à travers une série de tests. Des plaques isotropes, composites stratifiées et sandwichs ainsi que différents cas de conditions aux limites ont été considérés. Les résultats obtenus seront comparés avec les solutions obtenus analytiquement et ceux obtenus par d'autres modèles d'éléments finis disponibles dans la littérature.

Après la validation de l'élément utilisé, une étude paramétrique a été effectuée afin de montrer l'effet de certains paramètres sur la fréquence naturelle.

4.2 Tests de validation

4.2.1 Conditions aux limites adoptées :

Les conditions aux limites considérées pour une plaque.

SSSS: Plaque simplement appuyée sur les quatre bords.

EEEE: Plaque encastree sur les quatre bords.

ESES: Deux bords opposés encastrés et deux autres bords simplement appuyés.

ELEL: Deux bords opposés encastrés et deux autres bords libres.

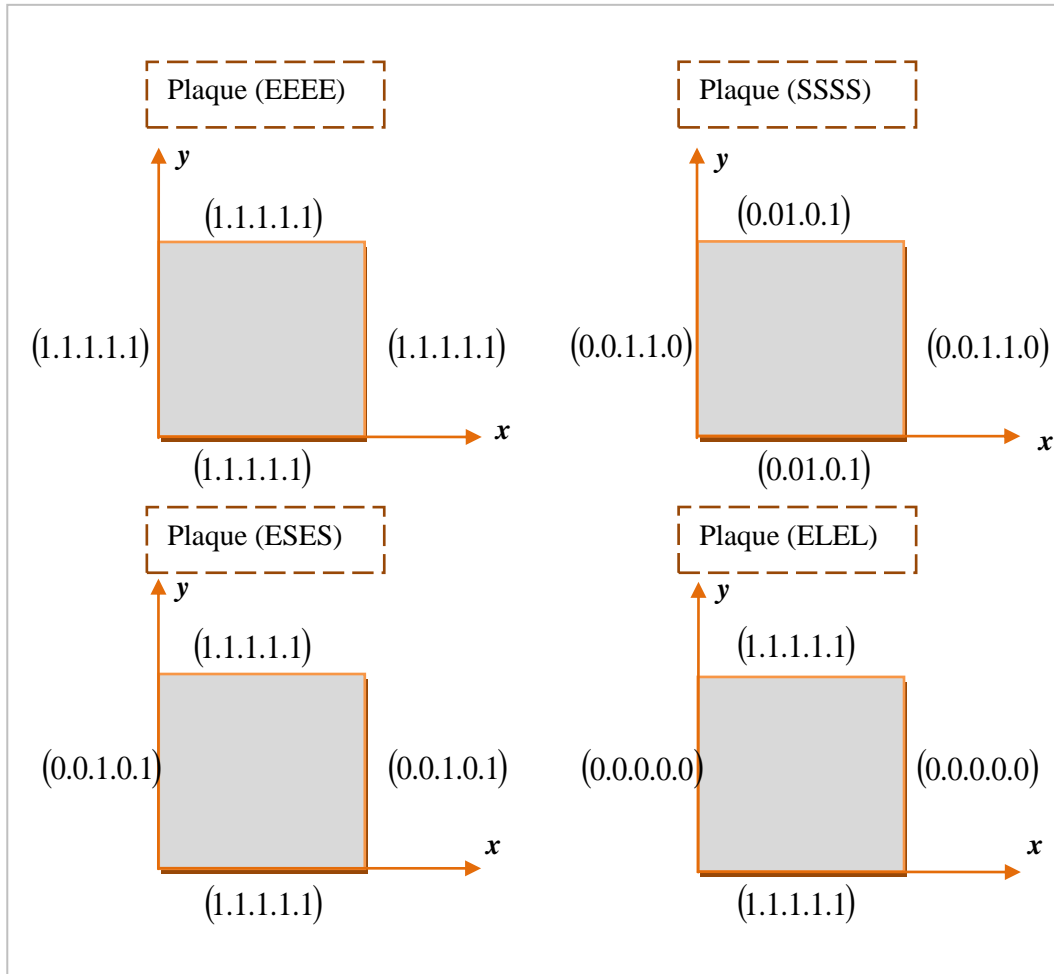


Figure. 4.1 Conditions aux limites

4.2.2 Plaque isotrope carrée avec différents types de conditions aux limites:

Dans le premier exemple, une plaque isotrope carrée avec un rapport d'épaisseur $a/h=10$ a été considérée. Les propriétés mécaniques du matériau sont: $E = 10.92$, $\nu = 0.3$ et $\rho = 1$. Dans cet étude, différents types de maillage de 12×12 ont été utilisés. Les résultats de la fréquence naturelle ($\bar{\omega}$), normalisés par la formule (4.1), sont Présentés dans les tableaux (4.1) avec différents types de conditions aux limites.

$$\bar{\omega} = \omega a \sqrt{\frac{\rho}{G}} \quad (4.1)$$

Tableau 4. 1. Fréquences propres d'une plaque carrée isotrope avec différents types de conditions aux limites

Conditions aux limites	Références	Modèles	$\bar{\omega}$	Erreurs(%)
SSSS	Présent élément (2×2)	FEM-R4-FSDT	1. 2257	31. 513
	Présent élément (4×4)	FEM-R4-FSDT	0.9880	6. 0008
	Présent élément (8×8)	FEM-R4-FSDT	0.9423	1. 1105
	Présent élément (10×10)	FEM-R4-FSDT	0.9373	0.5686
	Présent élément (12×12)	FEM-R4-FSDT	0.9348	0.30042
	Présent élément (14×14)	FEM-R4-FSDT	0.9333	0.16094
	Présent élément (16×16)	FEM-R4-FSDT	0.9322	0.0107
	Ferreira [25]	FEM-Q4-FSDT	0.9346	-
	Noor [20]	3D-Elasticity	0.932	-
Mindlin [12]	FSDT-Anlyt	0.930	-	
EEEE	Présent élément (2×2)	FEM-R4-FSDT	4. 4721	-
	Présent élément (4×4)	FEM-R4-FSDT	1.8522	15. 791
	Présent élément (8×8)	FEM-R4-FSDT	1.6458	2. 8882
	Présent élément (10×10)	FEM-R4-FSDT	1.6242	1. 5378
	Présent élément (12×12)	FEM-R4-FSDT	1.6124	0.8002
	Présent élément (14×14)	FEM-R4-FSDT	1.6058	0.3876
	Présent élément (16×16)	FEM-R4-FSDT	1.6057	0.1125
	Ferreira [25]	FEM-Q4-FSDT	1.5996	-
SESE	Présent élément (2×2)	FEM-R4-FSDT	3. 2333	1. 2945
	Présent élément (4×4)	FEM-R4-FSDT	1.4864	0.1283
	Présent élément (8×8)	FEM-R4-FSDT	1.3413	0.0365
	Présent élément (10×10)	FEM-R4-FSDT	1.3262	0.0 248
	Présent élément (12×12)	FEM-R4-FSDT	1.3192	0.0196
	Présent élément (14×14)	FEM-R4-FSDT	1. 3147	0.0153
	Présent élément (16×16)	FEM-R4-FSDT	1.3111	0.0132
	Ferreira [25]	FEM-Q4-FSDT	1.2940	-
	Mindlin [12]	FSDT-Anal	1.302	-
EEEL	Présent élément (2×2)	FEM-R4-FSDT	0.5627	0.4249
	Présent élément (4×4)	FEM-R4-FSDT	0.9050	0.1717
	Présent élément (8×8)	FEM-R4-FSDT	1.0408	0.0292
	Présent élément (10×10)	FEM-R4-FSDT	1.0522	0.0135
	Présent élément (12×12)	FEM-R4-FSDT	1.0578	0.0060
	Présent élément (14×14)	FEM-R4-FSDT	1. 0623	0.0274
	Présent élément (16×16)	FEM-R4-FSDT	1.0645	0.0020
	Ferreira [25]	FEM-Q4-FSDT	1.0923	-
	Mindlin [12]	FSDT-Anal	1.089	-

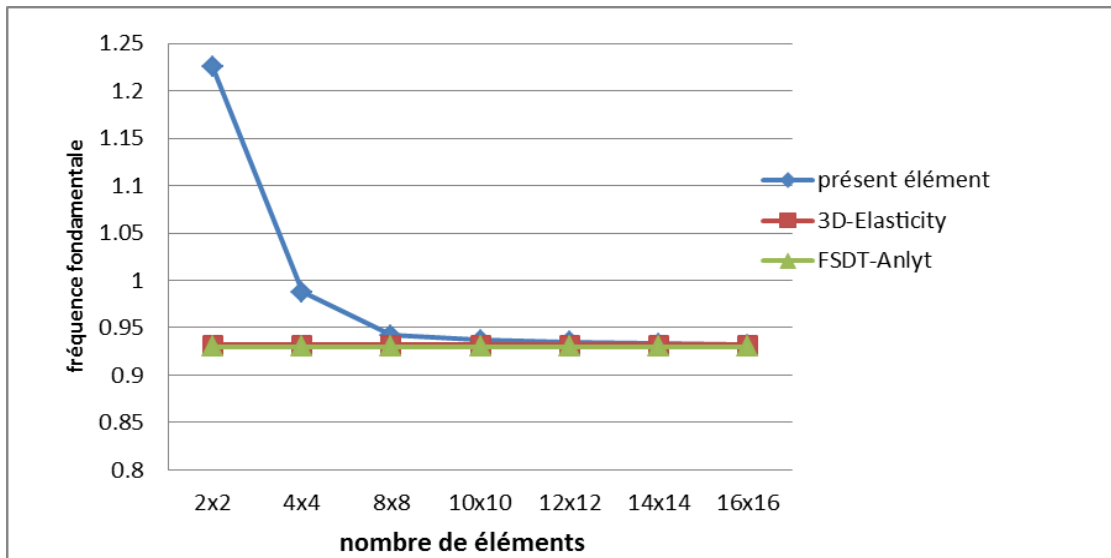


Figure 4.2 : Convergence de la fréquence propre fondamentale d'une plaque isotrope simplement appuyée (SSSS).

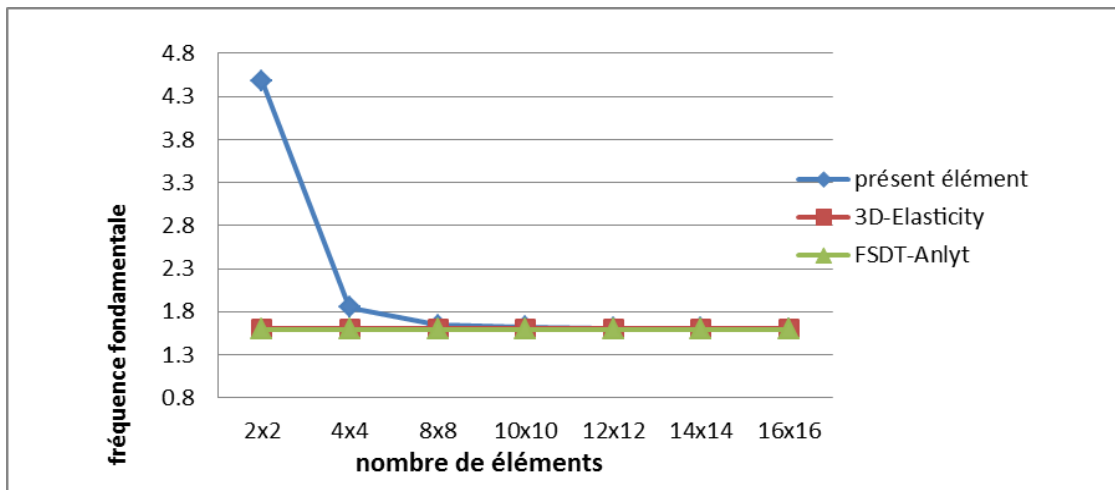


Figure 4.3 : Convergence de la fréquence propre fondamentale d'une plaque

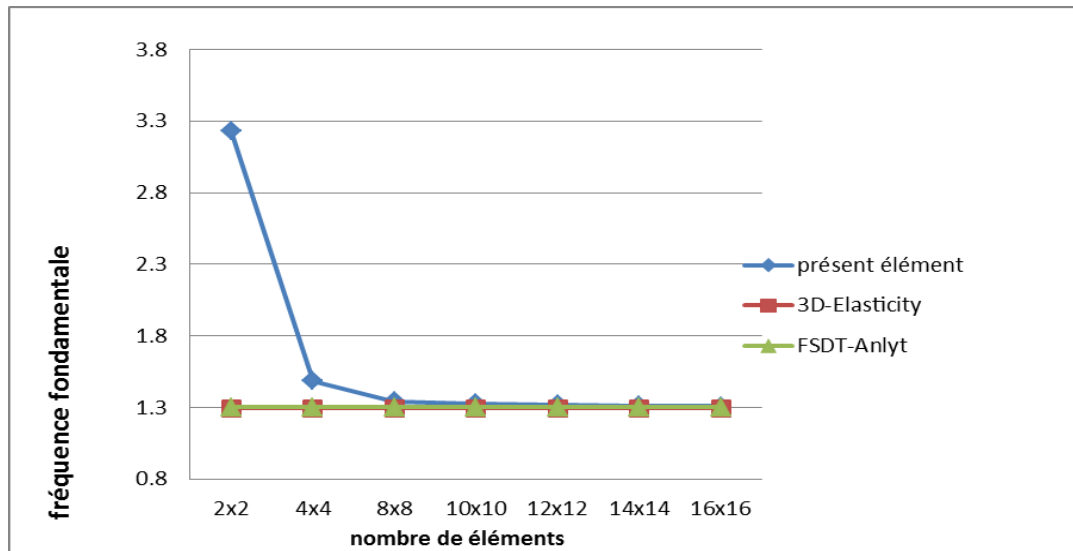


Figure 4.4 : Convergence de la fréquence propre fondamentale d'une plaque isotrope simplement appuyée-encastree (SESE).

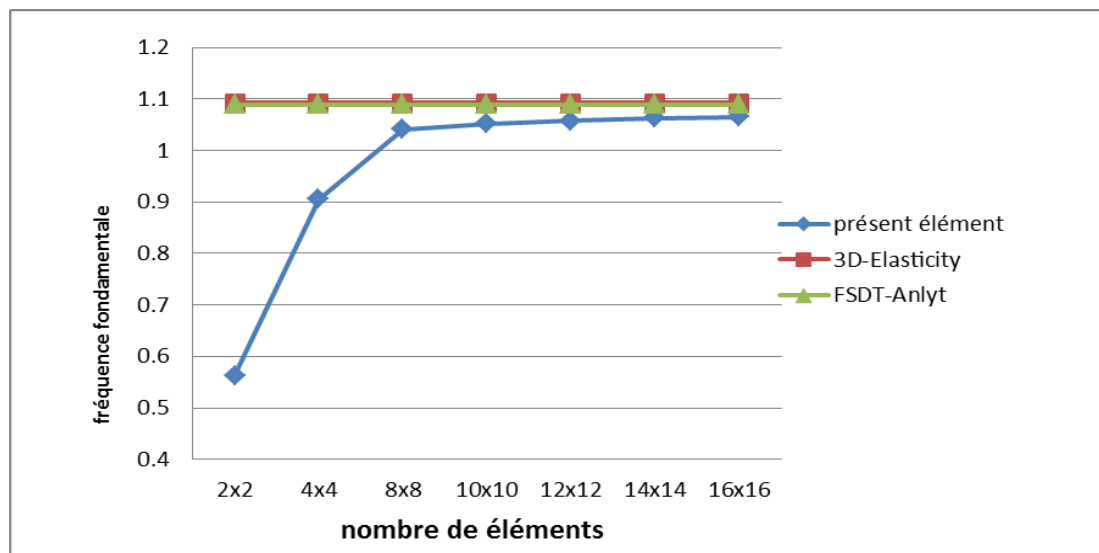


Figure 4.5 : Convergence de la fréquence propre fondamentale d'une plaque isotrope encastree-libre (EEEL).

Les courbes des figures 4.2-3-4-5, montrent la convergence de l'élément utilisé d'une plaque carrée isotrope avec différents types de conditions aux limites (SSSS, EEEE, SESE, EEEL). On peut remarquer que les résultats obtenus par le Présent élément utilisé sont en bon accord avec ceux obtenus par Ferreira [25] qui a utilisé un élément quadrilatère à quatre nœuds formulé sur la base de la théorie du premier ordre.

4.2.3 Plaques composites stratifiées carrées de trois, cinq et neuf couches (0/90/.../0)

Dans cet exemple, l'effet du nombre de couches (n) ainsi que l'effet de l'anisotropie (E_{11}/E_{22}) sur la fréquence fondamentale ($\bar{\omega}_1$) d'une plaque stratifiée carrée simplement appuyée sont étudiées. Trois types de stratifications croisées de trois (0 / 90 / 0), cinq (0 / 90 / 0 / 90 / 0) et neuf (0 / 90 / 0 / 90 / 0 / 90 / 0 / 90 / 0) couches, en gardant la même épaisseur totale, sont analysés pour un rapport d'épaisseur $a/h = 5$. Les caractéristiques mécaniques de chaque couche sont les suivantes:

$$\frac{G_{12}}{E_{22}} = \frac{G_{13}}{E_{22}} = 0.6, \quad \frac{G_{23}}{E_{22}} = 0.5, \quad \nu_{12} = 0.25, \quad \rho = 1.0$$

Les valeurs des fréquences propres sont normalisées par la relation suivante:

$$\bar{\omega} = \omega \cdot h \sqrt{\frac{\rho}{E_{22}}} \quad (4.2)$$

Les résultats de la fréquence fondamentale obtenus pour différents cas de maillage sont rapportés dans le tableau 4.2 pour les trois types de stratifications. D'après ce tableau, on observe une excellente corrélation entre les résultats obtenus par l'élément utilisé et les résultats obtenus par la solution d'élasticité-3D, donnée par Noor [20], ainsi que ceux obtenus par des modèles d'éléments finis basés sur différentes théories [26]

* FEM-Q9-HSDT: Élément fini quadrilatère à neuf nœuds, basé sur la théorie d'ordre supérieur de Reddy, Présenté par Nayak et *al.* [27].

Afin de mettre en évidence l'effet de l'anisotropie (E_{11}/E_{22}) sur la fréquence fondamentale ($\bar{\omega}_1$) d'une plaque stratifiée carrée simplement appuyée, nous avons illustré les résultats réunis dans le tableau 4.2 sur la figure 4.6. D'après cette dernière, on remarque que les trois courbes ont pratiquement la même allure et que les valeurs des fréquences fondamentales augmentent avec l'augmentation du rapport d'anisotropie quelle que soit le nombre de couche.

Tableau 4. 2. Effet de l'anisotropie (E_{11}/E_{22}) sur la fréquence fondamentale de plaque stratifiée carrées (0/90/.../0) simplement appuyée

Références	Modèles	Nbr de couches	$\frac{E_{11}}{E_{22}}$					
			3	10	20	30	40	50
Présent élément (4×4)	FEM-R4-FSDT	[0/90/0]	0.2740	0.3136	0.3879	0.4125	0.4287	0.4407
Présent élément (8×8)	FEM-R4-FSDT		0.2645	0.3021	0.3749	0.3993	0.4156	0.4276
Présent élément (10×10)	FEM-R4-FSDT		0.2638	0.3295	0.3734	0.3979	0.4141	0.4261
Présent élément (12×12)	FEM-R4-FSDT		0.2632	0.3287	0.3728	0.3997	0.4132	0.4253
Présent élément (16×16)	FEM-R4-FSDT		0.2628	0.3281	0.3720	0.3963	0.4125	0.4244
Noor [20]	3D-Elasticity		0.2647	0.3284	0.4109	0.4109	0.4300	
Vuksanović [26]	CPLT		0.2920	0.4126	0.6434	0.6434	0.7319	
Vuksanović [26]	HSDT		0.2673	0.3318	0.4015	0.4015	-	
Présent élément (4×4)	FEM-R4-FSDT	[0/90/0/90/0]	0.2758	0.3546	0.4132	0.4477	0.4715	0.4888
Présent élément (8×8)	FEM-R4-FSDT		0.2657	0.3410	0.3979	0.4322	0.4557	0.4732
Présent élément (10×10)	FEM-R4-FSDT		0.2647	0.3394	0.3961	0.4303	0.4539	0.4713
Présent élément (12×12)	FEM-R4-FSDT		0.2641	0.3386	0.3952	0.4294	0.4529	0.4704
Présent élément (16×16)	FEM-R4-FSDT		0.2638	0.3377	0.3942	0.4283	0.4520	0.4694
Noor [20]	3D-Elasticity		0.2659	0.3409	0.3979	0.4314	0.4537	
Vuksanović [26]	CPLT		0.2920	0.4126	0.5404	0.6434	0.7319	
Vuksanović [26]	HSDT		0.2684	0.3442	0.3939	0.4269	-	
Présent élément (4×4)	FEM-R4-FSDT	[0/90/0/90/0/90/0/90/0]	0.2765	0.3596	0.4225	0.4596	0.4845	0.5024
Présent élément (8×8)	FEM-R4-FSDT		0.2662	0.3452	0.4064	0.4434	0.4684	0.4865
Présent élément (10×10)	FEM-R4-FSDT		0.2653	0.3428	0.4047	0.4413	0.4664	0.4846
Présent élément (12×12)	FEM-R4-FSDT		0.2647	0.3429	0.4037	0.4404	0.4655	0.4836
Présent élément (16×16)	FEM-R4-FSDT		0.2642	0.3419	0.4027	0.4394	0.4644	0.4827
Noor [20]	3D-Elasticity		0.2664	0.3443	0.4054	0.4421	0.4667	
Nyak et al [27]	FEM-Q4-HSDT		0.2641	0.3378	0.3935	0.4263	-	

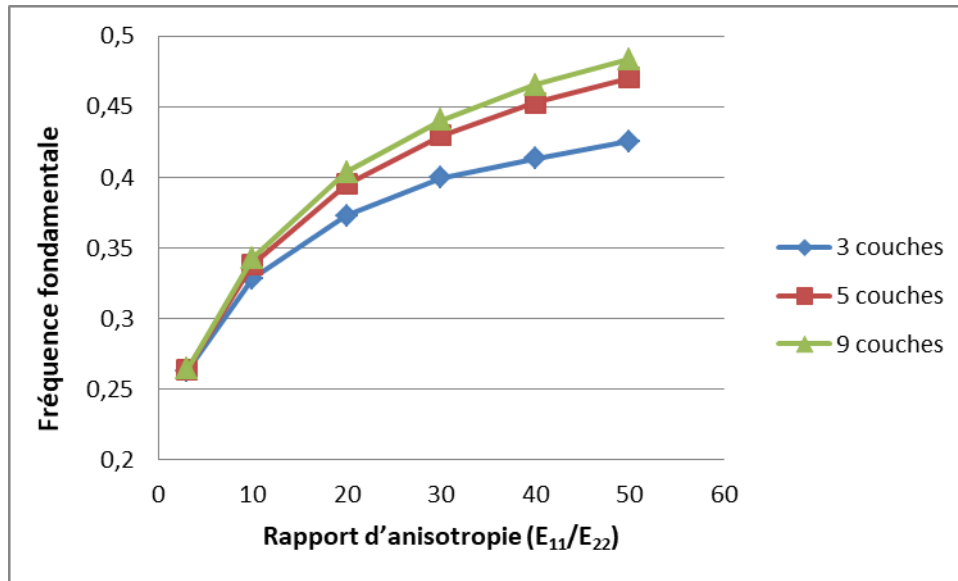


Figure 4.6: Effet du nombre de couches et le rapport d'anisotropie sur la fréquence fondamentale d'une plaque stratifiée carrée simplement appuyée.

4.2.4 Plaque sandwich carrée simplement appuyée ayant des peaux composites stratifiées non-symétriques (0 / 90 / C / 0 / 90)

Dans cet exemple, une plaque sandwich carrée simplement appuyée ayant des peaux composites stratifiées non-symétriques (0 / 90 / C / 0 / 90) et une âme isotrope a été considérée. Les propriétés mécaniques des matériaux utilisés pour l'âme et les deux peaux sont résumées dans le tableau 4.3. Le rapport de l'épaisseur de l'âme à l'épaisseur de la peau a été fixé à 10. Un maillage de 12×12 a été adopté.

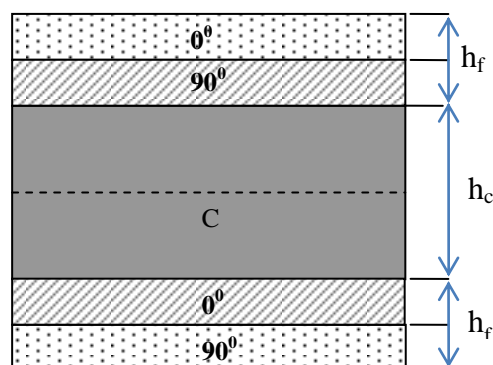


Figure 4.7 Plaque sandwich carrée simplement appuyée ayant des peaux composites

Tableau 4. 3. Propriétés mécaniques des matériaux utilisés dans l'exemple

Matériaux	Propriétés mécaniques en GPa						ρ (Kg/m ³)
	E_{11}	E_{22}	G_{12}	G_{13}	G_{23}	$\nu_{12} = \nu_{13}$	
Peaux	131	10.34	6.9	6.9	6.9	0.22	1627
Âme	0.0069	0.0069	0.0034	0.0034	0.0034	10 ⁻⁵	97

Les résultats des fréquences propres sont normalisés par la formule 4.3

$$\bar{\omega} = \omega \cdot \frac{b^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_f}{E_{22f}}} \quad (4.3)$$

Les résultats des fréquences propres obtenues par le présent élément sont présentés dans le tableau 5.14. La comparaison a été faite avec des solutions analytiques basées sur la théorie du premier ordre (FSDT), présentées par Whitney-Pagano [28], Thai and Choi [30] et ceux basées sur la théorie d'ordre supérieur donnée par Reddy [29]. On peut remarquer que les résultats obtenus par le présent élément (FEM-R4-FSDT) montrent que les valeurs des fréquences propres sont comparables avec ceux obtenus via la littérature.

Tableau 4. 4. Fréquence fondamentale non-dimensionnelle d'une plaque sandwich carrée simplement appuyée ayant des peaux composites stratifiées non-symétriques 0/90 / C / 0 / 90. a/h=10.

Références	Modèles	$\bar{\omega}$
Présent élément (4×4)	FEM-R4-FSDT	13. 049
Présent élément (8×8)	FEM-R4-FSDT	12. 456
Présent élément (10×10)	FEM-R4-FSDT	12, 391
Présent élément (12×12)	FEM-R4-FSDT	12. 353
Présent élément (16×16)	FEM-R4-FSDT	12. 318
Whitney-Pagano [28]	FSDT-Anal	13.869
Reddy [29]	HSDT-Anlyt	7.0473
Thai and Choi [30]	FSDT-Anlyt	14.145

4.3 Etude paramétrique:

Après avoir validé l'élément en termes de précision, de convergence et de stabilité, nous allons passer à une étude paramétrique afin de montrer l'effet du rapport d'anisotropie de la peau $(E_{11}/E_{22})_f$, sous différents paramètres liés au matériau constituant la structure sandwich sur la fréquence fondamentale.

Dans cette étude, on considère les paramètres suivants:

- ✚ Le rapport entre l'épaisseur de l'âme et l'épaisseur de la peau (h_c/h_f)
- ✚ Le rapport d'épaisseur (a/h)
- ✚ Le rapport d'aspect (a/b)
- ✚ Les conditions aux limites
- ✚ Le nombre de couches
- ✚ L'orientation des fibres dans les peaux.

L'analyse est effectuée pour une plaque sandwich ayant des peaux composites stratifiées non-symétrique (0/90/C/0/90). On va reprendre les mêmes propriétés mécaniques des matériaux sandwich de l'exemple 4.2.4. Dans la présente étude, un maillage de (10*10) a été adopté. Les valeurs des fréquences propres sont normalisées par la formule 4.2.

Le tableau 4.5 et la figure 4.8 représentent l'effet du rapport d'anisotropie des peaux $(E_{11}/E_{22})_p$ sur la fréquence fondamentale d'une plaque sandwich carrée simplement appuyée ayant des peaux composites stratifiées non-symétriques pour différents rapports d'épaisseur (a/h). On constate que les cinq courbes ont la même allure et que les valeurs de la fréquence fondamentale augmentent avec l'augmentation du rapport d'anisotropie des peaux quel que soit le rapport d'épaisseur. D'autre part, les valeurs de la fréquence diminuent avec l'augmentation du rapport (a/h). On peut noter que, pour une plaque épaisse ($a/h=5$), les valeurs de la fréquence fondamentale sont plus grandes par rapport des cas minces. Cela revient à l'augmentation de la rigidité flexionnelle.

Tableau 4.5 .Effet de l'anisotropie sur la fréquence fondamentale non-dimensionnelle ($\bar{\omega}$) d'une plaque sandwich (0/90/C/0/90) simplement appuyée sous différents rapports d'épaisseur (a/h).

E ₁	E ₂	E ₁ /E ₂	$\bar{\omega}$				
			a/h=5	a/h=10	a/h=20	a/h=50	a/h=100
131	10.34	12.669	38.176	12.391	3.415	0.564	0.141
100	10.34	9.6711	36.284	11.450	3.114	0.512	0.128
70	10.34	6.769	33.90	10.378	2.783	0.455	0.114
40	10.34	3.868	30.67	9.070	2.399	0.391	0.098
10.34	10.34	1	26.609	7.429	1.941	0.315	0.079
5	10.34	0.4835	25.180	7.130	1.860	0.302	0.075

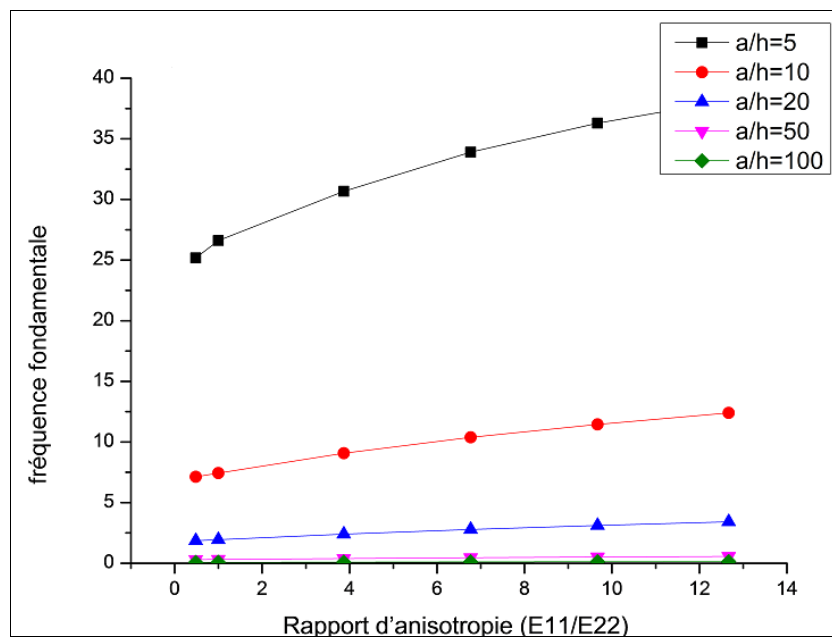


Figure. 4.8 Effet du rapport d'anisotropie sur la fréquence fondamentale non-dimensionnelle d'une plaque sandwich (0/90/C/0/90) simplement appuyée sous différents rapports d'épaisseur (a/h).

La variation de la fréquence fondamentale non-dimensionnelle, en fonction du rapport d'anisotropie de la peau, d'une plaque sandwich simplement appuyée (0/90/C/0/90) est montrée sur la figure 4.9 et le tableau 4.6 pour différents rapports d'aspects (a/b). À partir de cette figure, on remarque, pour différentes valeurs du

rapport d'aspect, que les valeurs de la fréquence fondamentale non-dimensionnelle augmentent avec l'augmentation du rapport d'anisotropie de la peau.

Tableau 4.6 .Effet de l'anisotropie sur la fréquence fondamentale non-dimensionnelle ($\bar{\omega}$) d'une plaque sandwich (0/90/C/0/90) simplement appuyée sous différents rapports d'aspects (a/b). et $h_c/h_f = 10$.

E_1	E_2	E_1/E_2	$\bar{\omega}$			
			a/b=1	a/b=2	a/b=3	a/b=4
131	10.34	12.669	12.391	7.005	5.214	4.323
100	10.34	9.6711	11.450	6.593	5.025	4.239
70	10.34	6.769	10.378	6.067	4.828	3.977
40	10.34	3.868	9.070	5.333	4.255	3.692
10.34	10.34	1	7.429	4.223	3.354	2.937
5	10.34	0.4835	7.130	3.984	3.126	2.681

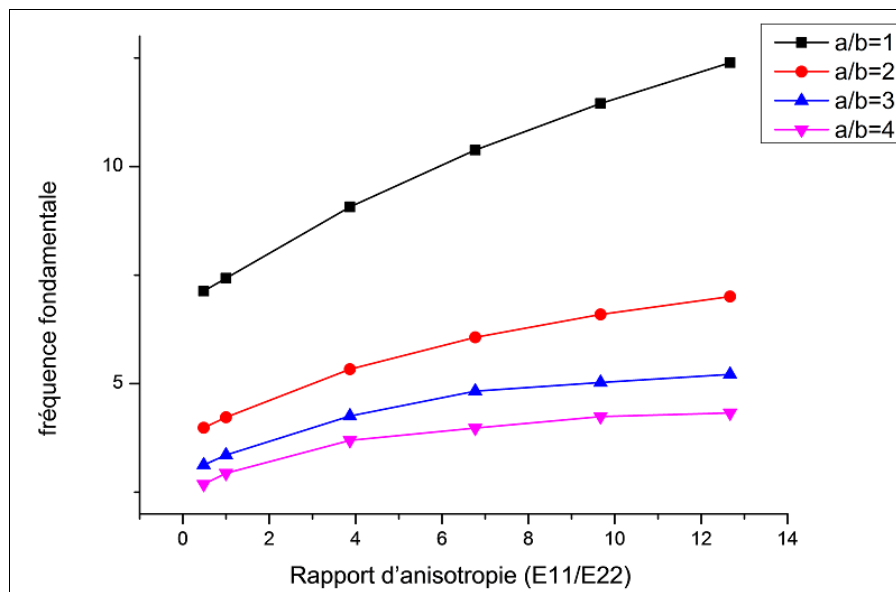


Figure 4.9 Effet de l'anisotropie sur la fréquence fondamentale non-dimensionnelle d'une plaque sandwich (0/90/C/0/90) simplement appuyée sous différents rapports d'aspects (a/b).

L'influence du rapport d'anisotropie de la peau sur la fréquence fondamentale non-dimensionnelle d'une plaque sandwich (0/90/C/0/90) simplement appuyée est montrée dans la figure 4.10 et le tableau 4.5 pour différents rapport de l'épaisseur de l'âme et l'épaisseur de la peau (h_c/h_f). On constate que la variation la fréquence fondamentale non-dimensionnelle augmente avec l'augmentation du rapport d'anisotropie quel que soit le rapport (h_c/h_f).

Tableau 4.7 .Effet de l'anisotropie sur la fréquence fondamentale non-dimensionnelle ($\bar{\omega}$) d'une plaque sandwich carrée (0/90/C/0/90) simplement appuyée sous différents rapports (h_c/h_f). $a/h = 10$.

E_1	E_2	E_1/E_2	$\bar{\omega}$			
			$h_c/h_f=10$	$h_c/h_f=8$	$h_c/h_f=5$	$h_c/h_f=2$
131	10.34	12.669	12.391	14.363	14.387	13.620
100	10.34	9.6711	11.450	13.286	13.289	12.540
70	10.34	6.769	10.378	12.045	12.035	11.317
40	10.34	3.868	9.070	10.540	10.510	9.847
10.34	10.34	1	7.429	8.640	8.602	8.032
5	10.34	0.4835	7.130	8.292	8.253	7.704

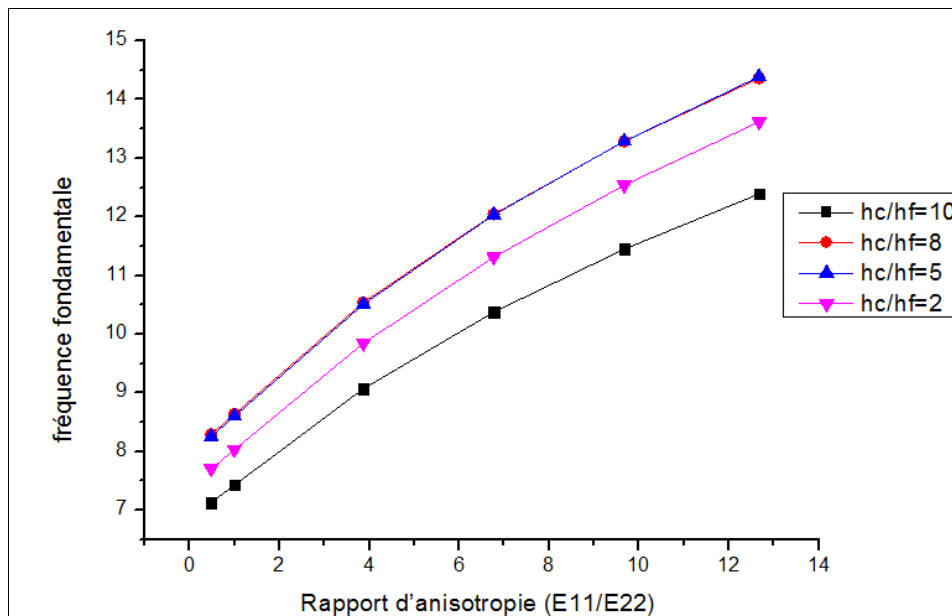


Figure 4.10 Effet de l'anisotropie sur la fréquence fondamentale non-dimensionnelle d'une plaque sandwich carrée (0/90/C/0/90) simplement appuyée sous différents rapports (h_c/h_f). $a/h = 10$

Afin de mettre en évidence l'effet du rapport d'anisotropie avec l'orientation des fibres dans les peaux sur la fréquence fondamentale, une plaque sandwich carrée ayant des peaux stratifiées (0/θ/C/0/θ), en gardant $h_c/h_f = 10$ et $a/h = 10$ est considérée. Dans cette étude, deux types de conditions aux limites; simplement appuyée et encastree ont été adoptés.

On constate, d'après les figures 4. 11, 4.12 et les tableaux 4.6, 4.7, que les courbes ont pratiquement la même allure et que les valeurs de la fréquence fondamentale augmentent avec l'augmentation du rapport d'anisotropies. On peut conclure, pour les deux cas, que l'effet de l'angle d'orientation des fibres dans les peaux pratiquement aucun influence sur la valeur de la fréquence fondamentale.

Tableau 4. 8. Effet de l'anisotropie et l'orientation des fibres dans les peaux sur la fréquence fondamentale non-dimensionnelle d'une plaque sandwich carrée. Cas Simplement appuyée.

E ₂	I _E	E ₁ /E ₂	$\bar{\omega}$					
			0/90/c/0/90	0/60/c/0/60	0/45/c/0/45	0/30/c/0/30	0/15/c/0/15	0/0/c/0/0
10.34	131	12.669	12.391	12.656	12.764	12.522	12.197	11.785
10.34	100	9.6711	11.45	11.738	11.848	11.648	11.379	11.043
10.34	70	6.769	10.378	10.645	10.74	10.59	10.294	10.146
10.34	40	3.868	9.07	9.226	9.278	9.198	9.056	8.985
10.34	10.34	1	7.429	7.184	7.102	7.184	7.113	7.431
10.34	5	0.483	7.13	6.724	6.593	6.724	6.995	7.136

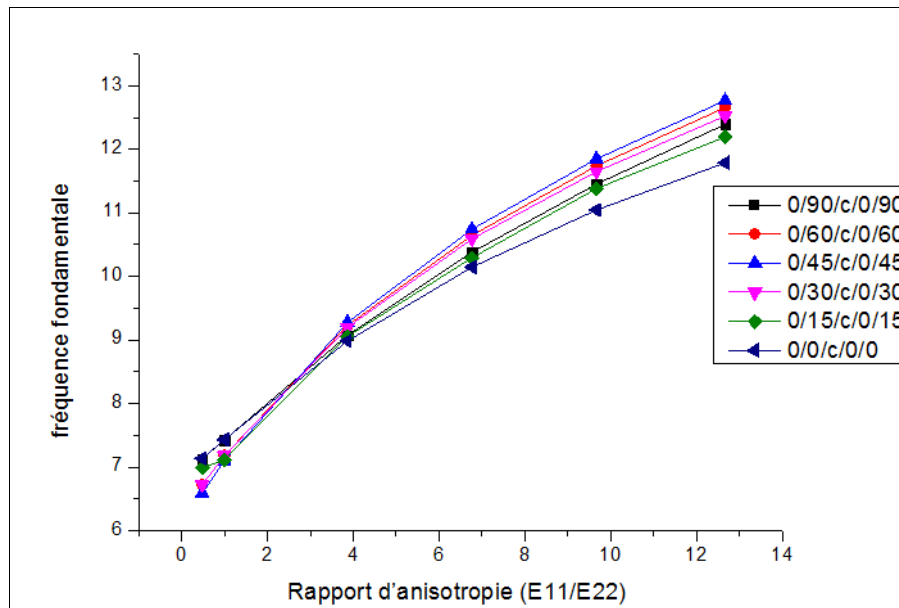


Figure. 4.11 Effet de l'anisotropie et l'orientation des fibres dans les peaux sur la fréquence fondamentale non-dimensionnelle d'une plaque sandwich carrée. Cas Simply appuyée

Tableau 4. 9. Effet de l'anisotropie et l'orientation des fibres dans les peaux sur la fréquence fondamentale non-dimensionnelle d'une plaque sandwich carrée. Cas encastrée (EEEE).

			$\bar{\omega}$					
E_2	E_1	E_1/E_2	0/90/c/0/90	0/60/c/0/60	0/45/c/0/45	0/30/c/0/30	0/15/c/0/15	0/0/c/0/0
10.34	131	12.669	19.918	19.080	18.377	17.871	17.647	17.597
10.34	100	9.6711	18.869	18.163	17.604	17.228	17.081	17.054
10.34	70	6.769	17.146	16.940	16.555	16.323	16.252	16.248
10.34	40	3.868	15.372	15.119	14.948	14.861	14.851	14.859
10.34	10.34	1	11.941	12.042	12.076	11.984	11.975	11.942
10.34	5	0.4835	11.145	11.296	11.335	11.269	11.151	11.092

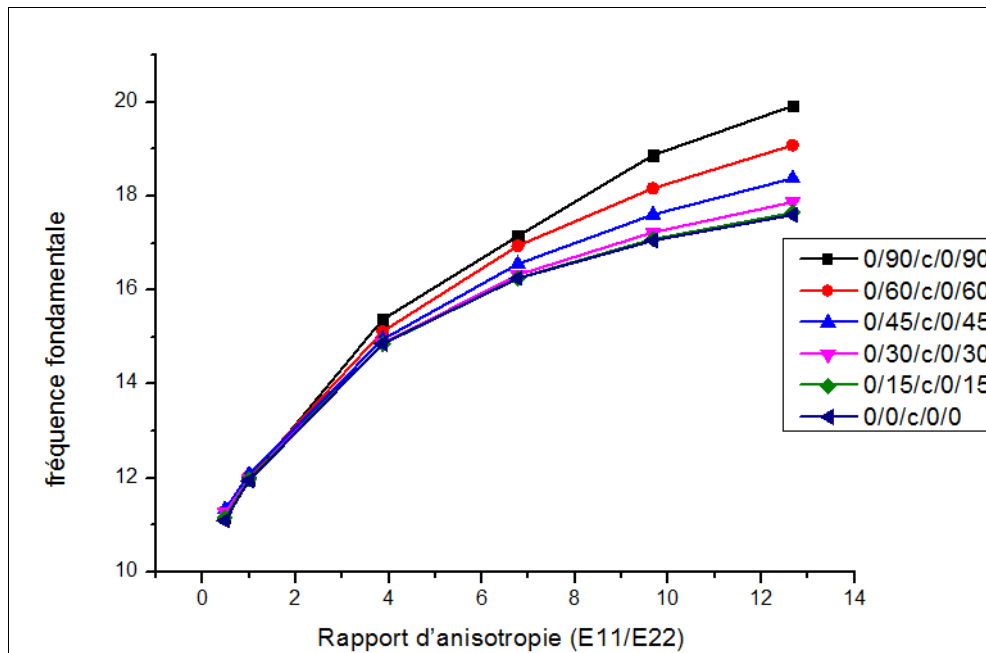


Figure. 4.12 Effet de l'anisotropie et l'orientation des fibres dans les peaux sur la fréquence fondamentale non-dimensionnelle d'une plaque sandwich carrée. Cas encastree.

Dans la dernière étude, l'effet du rapport d'anisotropie avec le nombre de couches (stratification), dans les peaux, sur la fréquence fondamentale d'une plaque sandwich carrée simplement appuyée est considérée. Dans cette étude, en gardant les rapports $h_c/h_f = 10$ et $a/h = 10$.

Les résultats obtenus sont réunis et illustrés dans le tableau 4.9 et sur la figure 4.13. D'après ces derniers, on remarque que la valeur de la fréquence fondamentale augmente légèrement avec l'augmentation du nombre de couches.

Tableau 4.10 .Effet de l'anisotropie et le nombre de couches dans les peaux sur la fréquence fondamentale non-dimensionnelle d'une plaque sandwich carrée simplement appuyée.

E_1	E_2	E_1/E_2	$\bar{\omega}$		
			0/90/c/0/90	0/90/0/c/90/0/90	0/90/0/90/c/0/90/0/90
131	10.34	12.669	14.110	14.142	14.460
100	10.34	9.671	11.450	13.107	13.387
70	10.34	6.769	10.378	11.912	12.153
40	10.34	3.868	9.070	10.441	10.640
10.34	10.34	1	7.429	8.576	8.730
5	10.34	0.483	7.130	8.234	8.379

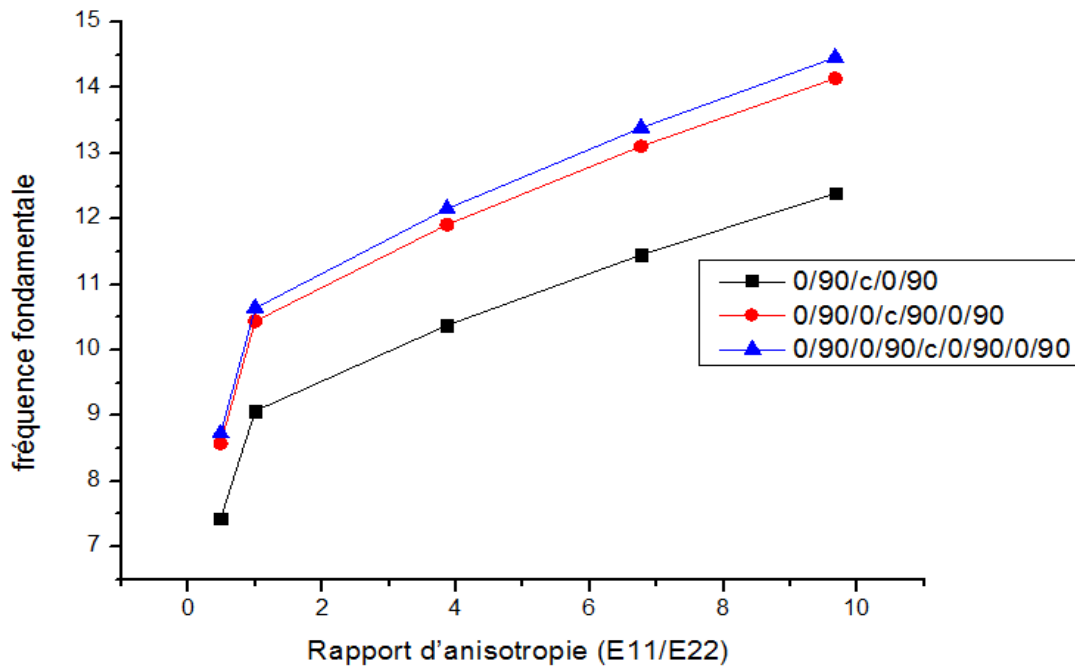


Figure. 4.13 Effet de l'anisotropie et le nombre de couches dans les peaux sur la fréquence fondamentale non-dimensionnelle d'une plaque sandwich carrée simplement appuyée.

Conclusion

Dans ce travail, une étude numérique sur la vibration libre des plaques stratifiées et des sandwichs a été présentée en utilisant un élément fini de forme rectangulaire, ayant cinq degré de liberté par nœud. La formulation de cet élément est basée sur la théorie du premier ordre de cisaillement transverse. Les résultats obtenus sont comparés avec des solutions analytiques et avec ceux obtenus via des modèles éléments finis disponible dans la littérature. La performance et l'efficacité de l'élément utilisé sont démontrés à travers une série d'applications en vibration libre de plaques isotropes, composites multicouches et sandwichs. L'effet de l'anisotropie, sous différentes paramètres tels que: les conditions aux limites, le rapport entre l'épaisseur de l'âme et l'épaisseur de la peau (h_c/h_f), le rapport d'épaisseur (a/h), le rapport d'aspect (a/b), le nombre de couches et l'orientation des fibres dans les peaux, sur la variation des fréquences propres; est étudié. Finalement; on peut conclure que l'effet d'anisotropies a un influence importante sur la fréquence propre des plaques composites sandwich.

Références Bibliographiques

- [1] Reddy, J.N., (1997) Mechanics of laminated composite plates: theory and analysis. Vol. 1. CRC press Boca Raton.
- [2] Reddy, J.N., (2003), Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis. CRC press.
- [3] Berthelot J. M. (2010), Matériaux composites: Comportement mécanique et analyse des structures. 4^{ème} édition,
- [4] Belarbi, M. O. (2015), Éléments finis pour l'analyse des structures sandwichs. Thèse de Doctorat, Département de Génie Civil, Université de Biskra.
- [5] Kirchhoff, G.,(1850), Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 40, 51-88.
- [6] Love, A.E.H., 1934, A treatise on the mathematical theory of elasticity 1934: Cambridge University Press.
- [7] Pai, P.F.,(1995), A new look at shear correction factors and warping functions of anisotropic laminates, International Journal of Solids and Structures, 32 (16) 2295-2313.
- [8] Libove, C. and S. Batdorf, (1948), A general small-deflection theory for flat sandwich plates, , DTIC Document.
- [9] Yang, P.C., C.H. Norris, and Y. Stavsky,(1966), Elastic wave propagation in heterogeneous plates, International Journal of Solids and Structures, 2 (4) 665-684.
- [10] Whitney, J.,(1969), The effect of transverse shear deformation on the bending laminated plates, Journal of composite materials, 3 (3) 534-547.
- [11] Reissner, E.,(1945), The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, J. appl. Mech, 12 (2) 69-77.

- [12] Mindlin, R.,(1951), Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates, *J. of Appl. Mech.*, 18 31-38.
- [13] Pagano, N.,(1970), Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates, *Journal of composite materials*, 4 (1) 20-34.
- [14] Reissner, E.,(1985), Reflections on the Theory of Elastic Plates, *Applied Mechanics Reviews*, 38 (11) 1453-1464.
- [15] Ayad, R., Eléments finis de plaque et coque en formulation mixte avec projection en cisaillement. Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne, France.
1993.
- [16] Yu, Y.-Y.,(1960), Flexural vibrations of elastic sandwich plates, *Journal of Aerospace Sciences*, (27) 272–282.
- [17] Yu, Y.-Y.,(1960), Simplified Vibration Analysis of Elastic Sandwich Plates, *Journal of the Aerospace Sciences*, 27 (12) 894-900.
- [18] Srinivas, S. and A.K. Rao,(1970), Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates, *International Journal of Solids and Structures*, 6 (11) 1463-1481.
- [19] Chan, H.C. and Y.K. Cheung, (1972), Static and dynamic analysis of multi-layered sandwich plates, *International Journal of Mechanical Sciences*, 14 (6) 399-406.
- [20] Noor, A.K.,(1973), Free vibrations of multilayered composite plates, *AIAA Journal*, 11 (7) 1038-1039.
- [21] Reddy, J.N. and T. Kuppusamy,(1984), Natural vibrations of laminated anisotropic plates, *Journal of sound and vibration*, 94 (1) 63-69.
- [22] Wang, C., et al.,(2000), Free vibration of skew sandwich plates with laminated facings, *Journal of sound and vibration*, 235 (2) 317-340.

- [23] Kanematsu, H.H., Y. Hirano, and H. Iyama,(1988), Bending and vibration of CFRP-faced rectangular sandwich plates, *Composite Structures*, 10 (2) 145-163.
- [24] Meunier, M. and R. Shenoi,(1999), Free vibration analysis of composite sandwich plates, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 213 (7) 715-727.
- [25] Ferreira, A.J., *MATLAB codes for finite element analysis: solids and structures*. Vol. 157. 2008: Springer.
- [26] Vuksanović, D.,(2000), Linear analysis of laminated composite plates using single layer higher-order discrete models, *Composite Structures*, 48 (1-3) 205-211.
- [27] Nayak, A., S. Moy, and R. Shenoi,(2002), Free vibration analysis of composite sandwich plates based on Reddy's higher-order theory, *Composites Part B: Engineering*, 33 (7) 505-519.
- [28] Whitney JM, Pagano NJ. Shear Deformation in Heterogeneous Anisotropic Plates. *J Appl Mech, Trans ASME* 1970;37(4):1031-6.
- [29] Kant T, Swaminathan K. Analytical solutions for free vibration of laminate composite and sandwich plates based on a higher-order refined theory. *Compo Struct* 2001;53(1):73-85.
- [30] Thai HT, Choi DH. A simple first-order shear deformation theory for laminated composite plates. *Compos Struct* 2013;106:754-763.