République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

GAANI KHERKHACHE Salsabil

Titre :

Problème de transport

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**LAIADI Abedelkader**	UMKB	Président
Dr.	**RAHMANI Nacer**	UMKB	Encadreur
Dr.	**GUIDAD Daradji**	UMKB	Examinateur

Juin 2019

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

Ma tendre mère qui m'encourager par sa présence, ses paroles,et m'a enseigné la patience.

Mon chère père qui m'a inculqué la discipline, les valeurs de la réussite et du respect d'autrui.

À le symbole de douceur, de tendresse, d'amour : ma grand mère ***Hafsa****.*

À mes chères soeurs ***Fifi*** *,****Hadil*** *et* ***Zahra*** *pour lesquelles je souhaite de brillantes études et un avenir prometteur.*

*Ma chère soeur "****Daya****", je te souhaite la succés et du bonheur.*

À mes frères ***Marouan, Mostapha, Samo****,* ***Nasro*** *et* ***Bahi****, qui sont toujours derrière moi.*

Mes tantes ***Madjda, Hassina, Hanen*** *et mon oncle* ***Abdelrahman*** *pour leurs soutien moral et financier.*

À mes chers amis et camarades.

À vous tous je dis merci.

REMERCIEMENTS

Je remercie d'abord et avant tout mon dieu qui m'a donné la vie, la force et le courage, ainsi que la patience pour réaliser ce travail.

Je tiens à remercier sincèrement mon encadreur : ***Dr.RAHMANI Nacer*** *pour sa disponibilité, sa patience, et ses judicieuses orientations, qui ont contribué à alimenter mon réflexion.*

Je tiens également à remercier les membres du jury ***Dr.LAIADI Abedelkader*** *et* ***Dr.GUIDAD Daradji*** *qui ont accepté de juger ce travail, et d'avoir consacrer leurs temps pour sa lecture.*

Je tiens également à remercier l'ensemble des enseignants du département de mathématiques, qui a contribué à ma formation et surtout au ***Dr.MOKHTARI Zohir***

Enfin, je tiens à remercier toutes les personnes qui m'on encouragés pendant la réalisation de ce travail, famille, collègues et amis, sans exception.

Merci à tous.

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Introduction

Depuis le début 1980,HERBERT Simon affirmait que :«dans la socité post-industrielle, le problème central n'est plus de savoir comment organiser efficacement la production, mais de savoir comment d'organiser pour prendre des décisions, c'est à dire traiter l'information».
L'optimisation est un outil dans la science de décision et dans l'analyse des systèmes physiques. Afin de l'utiliser, nous devons d'abord identifier un objectif. Ceci est une mesure quantitative de la performance du système. Cet objectif pouvvant être : bénéfice, temps, énergie potentielle. L'objectif dépend de certains caractéristique du système appelées des variables ou des inconnes.
Le but est de trouver des valeurs de variables qui optimisent l'objectif. Souvent les variables sont restreintes, ou contraintes, d'une certaine manière la densité l'énergie ou le taux d'intérêt ne pouvent pas être négatifs.
On appelle programmation, le problème mathématique qui consiste à optimise (maximise ou minimise) une fonction linéaire de plusieurs variables qui sont relieés par des relations appelleés contraintes.
La programmation linéaire a un champ d'application trés vaste : de l'indistre du pétrole au compagnies de transport.Ce baisse des coûts des matrieles informatiques aux performances des logiciels disponibles.
Le problème de transport est depuis longtemps un sujet d'intérêt majeur dans le domaine de l'indistrie et le domaine de financé. Dans ce cadre plusieurs méthode et modèles ont été proposés pour réduire le charge de calculeet linéariser le problème de choix optimal. Tout les modèles ne permettent pas de calculer de manière explicite la perte que poura subir. Nous proposons une approche s'appelle méthode de Coût minimum pour déterminé la solution de

base réalisable en fonction des coûts.

Ce mémoire est devisé en trois chapitre :

Dans le premier chapitre, nous rappelons les concepts de base de la programmation linéaire et les méthodes de résolution d'un programme linéaire comme la méthode de simplexe et la résolution graphique.

Dans le deuxième chapitre, nous avons présenté les concepts de base sur le problème de transport.

Dans la troisième chapitre est consacré a la résolution du problème de transport par la méthode de détermination de solution de base initiale et les méthodes d'optimisation de la solution de base.

Chapitre 1

Programmation linéaire

1.1 Notions de base

La programmation linéaire est un outil trés puissant de la recherche opérationnelle.c'est un outil générique qui peut résoudre un grand nombre de problème.
En mathématiques, les problèmes de programmation linéaire **(PL)** sont des problèmes d'optimisation (maximisation ou minimisation) de fonction à objectif linéaire sous des contraintes ayant la forme d'inéquation linéaire.

1.1.1 Modélisation

La modélisation d'un problème de programmation linéaire consiste a identifier :

- **Variable de décision :** une variable de décision est toute quatité utilise à la résolution du problème, et dont on doit determiner la valeur. On note x_j les variable de décision avec $j = 1, \ldots, n$
- **La fonction objectif :** On appelle fonction objectif l'expression qui modélise la quantité à optimiser en fonction des variable du problème

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n$$

c_j : c'est le coefficient de contribution de la variable x_j dans la fonction objectif.

– **Les contraintes :** On appelle contrainte toute relation limitant le choix des valeurs possibles pour une variable

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \quad \leq, =, \geq b_i \qquad i = 1, \ldots, m$$

les nombre a_{ij} et b_i des constantes réelles et m le nombre des contraintes.

La forme plus général d'un problème de programmation linéaire que nous neterons (**PL**) est suivante :

$$\begin{array}{rlll} \textit{optimisé} & z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & \\ \textit{sous contraintes} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j & \leq, =, \geq b_i & i = 1, \ldots, m \\ & x_j \geq 0 & & j = 1, ..., n \end{array}$$

1.1.2 Solution d'un problème

Définition 1.1 ***(Région réalisable)*** *Ensemble des points qui satisfont aux contraintes du problème.*[7]

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b, x \geq 0\}$$

Définition 1.2 ***(Solution admissible ou réalisable)*** *Une solution est réalisable si les valeurs numériques $x_1, ..., x_n$ satisfont à l'ensemble des contraintes du problème.*[7]

$$x \in X$$

Définition 1.3 ***(Solution optimale)*** *Une solution réalisable x^* est optimale si la valeur qu'elle donne à la fonction coût (objectif) est $\leq$ aux valeurs données par les autres solutions réalisables.(Pas nécessairement unique).*[7]

1.1.3 Exemple d'un programme linéaire

Une usine fabrique deux produits A_1 et A_2 à l'aide de trois matières premières B_1, B_2 et B_3 dont on dispose en quantité limitée. On se pose le problème de l'utilisation optimale de ce stock de matières premières c'est-à-dire la détermination d'un schéma, d'un programme de fabrication tel que :[9]

– les contraintes de ressources en matières premières soient respectées.

– le bénéfice réalisé par la vente de la production soit maximum.

Modèle mathématique :

– Données numériques des contraintes. La disponibilité en matières premières est de 18 unités de B_1, 8 unités de B_2 et 14 unités de B_3.

– Caractéristiques de fabrication. Elles sont données dans le tableau ci-dessous :

	B_1	B_2	B_3
A_1	1	1	2
A_2	3	1	1

– Hypothèses de linéarité du modèle. La fabrication est à rendement constant, c'est-à-dire que pour fabriquer x_1 unités de A_1, il faut $1 \times x_1$ unités de $B_1, 1 \times x_1$ unités de B_2 et $2 \times x_1$ unités de B_3, de même pour la fabrication de x_2 unités de A_2.

– Linéarité de la fonction économique. On suppose que le bénéfice peut s'exprimer à l'aide des bénéfices unitaires c_1, c_2 sous la forme :

$$Z(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2$$

– Réalisation d'un schéma de production. Un schéma de production est un couple $(x_1, x_2), x_1$ et x_2 désignant respectivement les quantités de A_1 et A_2 fabriquées donc vendues, qui doit vérifier les contraintes $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$. Deux questions se posent : un tel schéma est-il réalisable? A-t-on suffisamment de matières premières pour assurer une telle production?

– Le programme linéaire : $\begin{cases} Z(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ 2x_1 + x_2 \leq 14 \end{cases}$

où Z est une fonction économique ou fonction objectif qu'il faut maximiser.

1.2 Forme standard et forme canonique d'un programme linéaire

Définition 1.4 *(**forme canonique**) Un programme linéaire est sous forme canonique lorsque toutes ses contraintes sont des inégalités et toute ses variable sont non-négative.*[4]

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ sous & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \\ & x_j \geq 0 \end{array}$$

Définition 1.5 *(**forme standard**) Un programme linéaire est sous forme standard lorsque toutes ses contraintes sont des égalités et toute ses variable sont non-négatives.*[4]

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ sous & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \\ & x_j \geq 0 \end{array}$$

1.3 Forme matricielle classique et interprétation économique

1.3.1 Forme matricielle

Forme canonique :

$$\begin{cases} Max\ z = c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Forme standard :

$$\begin{cases} Max\ z = c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ le vecteur des variables, $c \in \mathbb{R}^n$ le vecteur coût ou profit associé aux variables, $b \in \mathbb{R}^m$ le second membre des contraintes et $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$.[4]

Proposition 1.1 *Chaque programme linéaire en forme standard s'écrit en forme canonique et inversement.*[11]

Proof.

a) $Ax \leq b, x \geq 0$ (forme canonique)

$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \qquad i = 1, ..., m$

$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + e_i = b_i$ oŭ $e_i = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq 0$

e_i : variable d'´ecart.

Soit $I_m = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ la matrice d'identité d'ordre m, $e = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_m \end{pmatrix}$ le vecteur d'´ecart.

Alors $Ax \leq b, x \geq 0 \Leftrightarrow (A, I_m) \begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix} = b, \begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix} \geq 0$ (forme standard).

Posons $\acute{z}(x, e) = \acute{c} \begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix}$,oŭ $\acute{c} = (c, 0) = (c_1, ..., c_n, \underbrace{0, ..., 0}_{m-\text{fois}})$.

b) $Ax = b$ (forme standard)

$\Longleftrightarrow \begin{matrix} Ax \geq b \\ Ax \leq b \end{matrix} \Longleftrightarrow \begin{matrix} Ax < b \\ (-A)x \leq -b \end{matrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix}$ (forme canonique).[11]

■

1.3.2 Interprétation économique

Un programme linéaire a une interprétation économique très large :

– Un acteur économique qui exerce n activités avec des intensités x_j à déterminer.

– Ces activités utilisent m ressources.

– La quantité a_{ij} de ressources i nécessaires pour exercer l'activité j avec une intensité 1.

– On connait le profit (en maximisation) et le coût (en minimisation).

– c_j Correspond a une intensité 1 de l'activité j.[3]

1.4 Les méthode de résolution d'un programme linéaire

Il existe plusieurs techniques de résolution pour les programmes linéaires. Cela dit nous présentons dans cette section la résolution graphique et la résolution analytique (méthode de simplex).

1.4.1 Résolution graphique

La résolution graphique d'un problème linéaire consiste à tracer la droite qui sépare les demi-plans pour chaque contrainte tout en conservant le demi-plan acceptable, c'est-à-dire le demi-plan des solutions réalisables pour la contrainte. L'intersection des différents demi-plans de toutes les contraintes sans oublier les contraintes de positivité forme le polygone des solutions, appelé aussi "région des solutions admissibles".[12]
Soit le problème suivant :[12]

$$\max \quad z = 600x_1 + 400x_2$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \leq 55 \\ x_1 + 3x_2 \leq 27 \\ 2x_1 + x_2 \leq 20 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Le problème possède trois contraintes plus la contrainte de positivité. On commence à tracer chaque contrainte séparément.

On prend la première contrainte du système et on remplace l'inégalité par une égalité sans l'ajout de variable d'écart, (cette façon de faire est applicable seulement pour la résolution graphique). L'équation résultante correspond à une droite. Pour tracer une droite, il faudrait déterminer deux points, ce qui donne pour la première contrainte notre exemple :
$4x_1 + 5x_2 = 55$

– Si $x_1 = 0 \Longrightarrow x_2 = 11$ le premier point est $(x_1, x_2) = (0, 11)$.
– Si $x_2 = 0 \Longrightarrow x_1 = 13.75$ le deuxième point est $(x_1, x_2) = (13.75, 0)$.

À partir de ces points on trace la première droite et on conserve ce qui est en dessus de la droite. On élimine ensuite la partie supérieure puisque la contrainte est une contrainte d'infériorité.

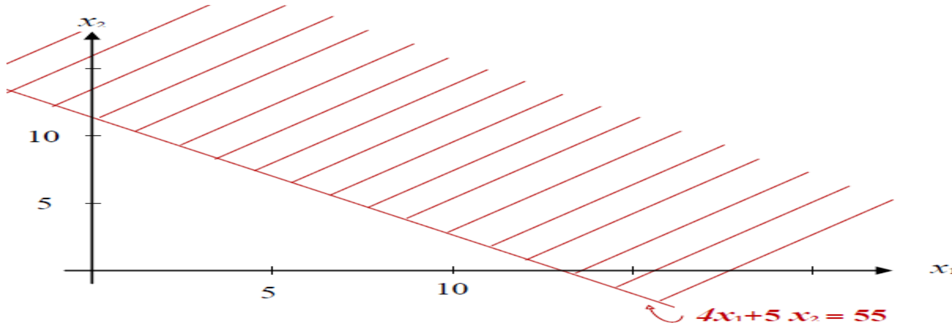

FIG. 1.1 – Représentation de la première contrainte

Ainssi, on applique le même principe pour toutes les contraintes du système :
Bien évidemment, il faut tracer aussi les contraintes de positivité. L'intersection de toutes les contraintes forme le polygone de solutions tel qu'il est donné par la figure (1.2) :

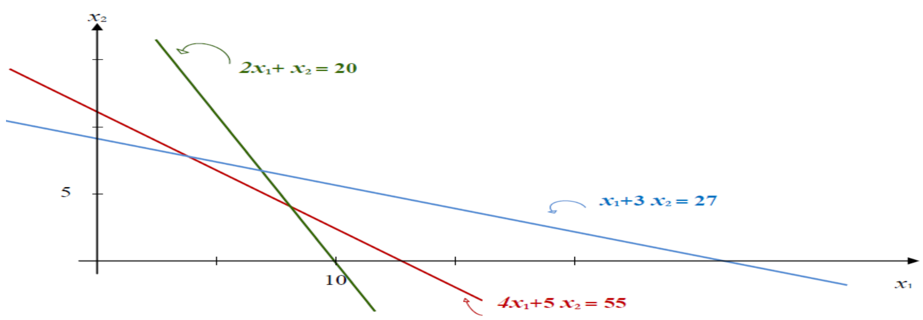

FIG. 1.2 – Représentation des différentes contraintes

Maintenant nous expliquerons la procédure à suivre pour déterminer la valeur maximale pour ce problème qui consiste à tracer la droite qui correspond à la fonction objective.

$400x_1 + 600x_2 = 0$

$4x_1 = -6x_2 \Longrightarrow x_1 = -6/4x_2 \Longrightarrow x_1 = -1.5x_2$

Le coefficient directeur de cette fonction est $(-1, 1.5)$.Il passe par l'origine $(0, 0)$.

Une fois la droite tracée on effectue une translation parallèle à la direction de la droite du bas vers le haut jusqu'à rencontrer le dernier point du polygone satisfaisant les contraintes.

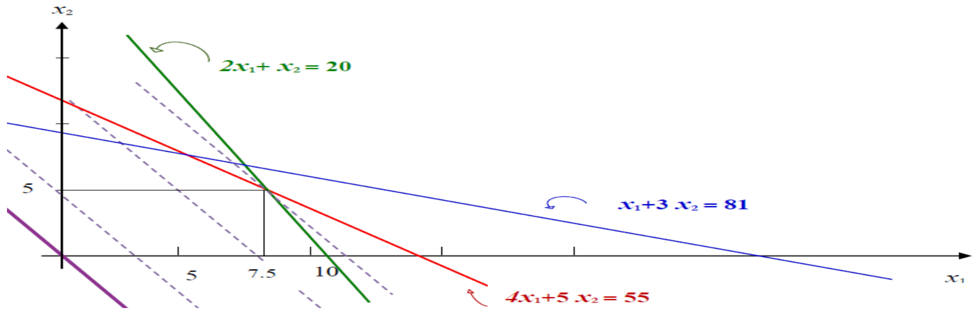

FIG. 1.3 – Résolution graphique du problème (le polygone)

Le maximum de z sur cet ensemble de contraintes est alors atteint. On obtient ainsi le point qui correspond à la solution optimale. Par la projection de ce point sur les axes x_1 et x_2 on obtient : $x_1 = 7.5$ et $x_2 = 5$, ce qui donne une valeur maximale $z = 6000$.

1.4.2 La méthode de simplexe

La méthodologie proposée pour cette technique consiste à visiter tous les états possibles dans un système en partant d'un sommet vers un sommet adjacent de manière à réviser et améliorer la fonction objective. Pour ce faire, nous procédons à l'exploration des différentes démarches selon l'ordre de priorité donné ci dessous :[12]

Étape 1 **:**On démarre l'application de l'approche (méthode du simplexe) par la transformation des contraintes d'inégalité en contraintes d'égalité en ajoutant les variables d'écart.

Étape 2 **:**Dans un second temps nous sélectionnons les variables originales comme variables hors-base et les variables d'écarts comme variable basique, puis nous effectuerons une permutation entre une variable hors-base de notre choix qui sera remplacée par une variable de base (entrante). Le choix de la variable entrante repose sur la variable dont le coefficient est le plus élevé dans la fonction objective.

Étape 3 **:**La variable sortante est la première à s'annuler. On répète le processus jusqu'à ce que tous les coefficients de fonction objective soient négatifs ou nuls. Dans ce cas, on arrête et la solution optimale est trouvée.

Définition 1.6 *Les variables dont la valeur est nulle sont dites variables hors base, les variables dont la valeur est non nulle sont dites en base (dans la base).*[10]

Exemple 1.1 *Considérons le problème d'optimisation linéaire :* [6]

$$\begin{aligned} &maximiser \quad z = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ &sous \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 5 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 11 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 8 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{1.1}$$

Afin de se ramener à un systéme d'équations plutôt que d'inéquations, on introduit les variables d'écart x_4, x_5, x_6 et l'on écrit le problème ci-dessus sous la forme

$$\begin{aligned} x_4 &= 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \\ x_5 &= 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\ x_6 &= 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 \\ z &= 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \end{aligned} \tag{1.2}$$

avec pour but de maximiser z sous les contraintes additionnelles $x_i \geq 0$, $(i = 1,\ldots,6)$. Il est aisé (et recommandé) de vérifier que si $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ est une solution optimale de ce dernier problème, alors les (x_1, x_2, x_3) correspondants constituent une solution optimale du problème (Equation 1.1). Inversement, si (x_1, x_2, x_3) est une solution optimale de (Equation 1.1), alors $(x_1, x_2, x_3, 5-2x_1-3x_2-x_3, 11-4x_1-x_2-2x_3, 8-3x_1-4x_2-2x_3)$ constitue une solution optimale de (Equation 1.2).

Le système (Equation 1.2) possède la solution (non optimale) $(0, 0, 0, 5, 11, 8)$ (l'usage est d'appeler solution réalisable tout choix de variables satisfaisant à l'ensemble des contraintes. On observe que dans l'expression $z = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$, une augmentation de x_1 entraîne une augmentation de z. L'idée première est alors d'augmenter x_1 autant que possible (sans modifier ni x_2 ni x_3) tant qu'aucune des variables d'écart x_4, x_5 ou x_6 ne devient négative. Le choix maximal est donc $x_1 = \min(5/2, 11/4, 8/3) = 5/2$, lorsque x_4 devient nulle, et qui fait passer à la solution réalisable $(5/2, 0, 0, 0, 3, 1/2)$.

On récrit le systéme (Equation 1.2) en exprimant cette fois (x_1, x_5, x_6) (ainsi que z) en termes de (x_2, x_3, x_4), au moyen de l'équation

$$x_1 = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4$$

Ceci donne, aprés substitutions :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{5}{2} + \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \\ x_5 &= 1 + 5x_2 + 2x_4 \\ x_6 &= \frac{25}{2} - \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{5}{2}x_4 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Cette fois, on observe que dans l'expression $z = 25/2 - 7/2x_2 + 1/2x_3 - 5/2x_4$, une augmentation de x_3 (c'est ici le seul choix possible) entraîne une augmentation de z.
A nouveau, on augmente donc x_3 autant que possible (sans modifier ni x_2 ni x_4) tant qu'aucune des variables (dites variables en bases) x_1, x_5 ou x_6 ne devient négative. Le choix maximal est donc $x_3 = \min((5/2)/(1/2), (1/2)/(1/2)) = 1$, lorsque x_6 devient nulle, et qui fait passer à la solution réalisable $(2, 0, 1, 0, 1, 0)$.
On récrit le systéme (Equation 1.3) en exprimant cette fois (x_1, x_3, x_5) (ainsi que z) en termes de (x_2, x_4, x_6), au moyen de l'équation

$$x_3 = 1 + x_2 + 3x_4 - 2x_6$$

Ceci donne, aprés substitutions :

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 - 2x_2 - 2x_4 + x_6 \\ x_3 &= 1 + x_2 + 3x_4 - 2x_6 \\ x_5 &= 1 + 5x_2 + 2x_4 \\ z &= 13 - 3x_2 - x_4 - x_6 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Puisque les coefficients de x_2, x_4 et x_6 intervenant dans l'expression de z ci-dessus sont tous négatifs ou nuls, on déduit que la solution réalisable

$$x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 1, x_6 = 0.$$

est une solution optimale, pour laquelle $z = 13$.

1.5 La dualité

1.5.1 Problème dual

On suppose que A est une matrice de format $m \times n$ et $b \in \mathbb{R}^m$.[]

A chaque problème d'optimisation linéaire, nous allons définir un nouveau problème appellé le dual (**PD**). Le problème original est le primal.

Soit le problème d'optimisation linéaire :

$$\begin{aligned} \min \quad z &= c^t x \\ Ax &\geq b \\ x &\geq 0 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Définition 1.7 *Le dual du problème (Equation 1.5) est :*

$$\begin{aligned} \min \quad z &= b^t y \\ A^t y &\geq c \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

On notera que, pour le problème primal, on a $x \in \mathbb{R}^n$ tandis que $y \in \mathbb{R}^m$ pour le dual.

Exemple 1.2 *Considérons le problème suivant :*

Problème primal :

$$\min \quad z = -x_1 - x_2$$
$$sous \begin{cases} -x_1 - 3x_2 \geq -3 \quad (y_1) \\ -2x_1 - x_2 \geq -2 \quad (y_2) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Problème dual :

$$\max \quad z = -3y_1 - 2y_2$$
$$sous \begin{cases} -y_1 - 2y_2 \leq -1 \quad (x_1) \\ -3y_1 - y_2 \leq -1 \quad (x_2) \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

Proposition 1.2 *Le problème dual du problème dual est le problème primal.*[6]

1.5.2 Relation primal/dual

Théorème 1.1 ***(Dualité faible)*** *Si x est une solution réalisable du problème primal, et y une solution réalisable du problème dual, alors nécessairement :* [7]

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

En particulier, si $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$ alors x est une solution optimale du primal et y est une solution optimale du dual.

Théorème 1.2 ***(Dualité forte)*** *Si Le problème primal possède une solution optimale $x^* = (x_1^*, ..., x_q^*)$ si et seulement si le problème dual possède une solution optimale $y^* = (y_1^*, ..., y_p^*)$ Dans ce cas, on a nécessairement :* [7]

$$\sum_{j=1}^{q} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{p} b_i y_i^*$$

Théorème 1.3 ***(Théorème des écarts complémentaires)*** *Soient $x = (x_1, ..., x_q)$ et $y = (y_1, ..., y_p)$ deux solutions réalisables respectivement du problème primal et du problème dual*

Une condition nécessaire et suffisante pour que x et y soient optimaux simultanément est que : [7]

$$\forall j \in \{1,\ldots,q\}, si\ x_j > 0\ alors\ \sum_{i=1}^{p} a_{ij} y_i = c_j$$

$$et$$

$$\forall i \in \{1,\ldots,p\}, si\ y_i > 0\ alors\ \sum_{i=1}^{p} a_{ij} x_j = b_i$$

Corollaire 1.1 ***(condition necessaire et suffisante d'optimalité)*** *L'égalité des fonctios économiques du primal et du dual est donc une condition nécessaire et suffisante d'optimalité pour des solutions admissibles des deux problèmes.*[]

1.5.3 Interprétation économique de la dualité

- Sans ressource, le profit serait nul. D'où l'idée d'essayer d'évaluer la contribution de chaque ressource au profit observé.Dans ce contexte, les [7]

$$y_i \geq 0,\text{pour } i = 1,..,m$$

représente les valeurs unitaire des ressources i : y_i est la mesure de la contribution d'une unité de i au profit.C'est donc aussi le prix au quel on évalue la ressource i (prix auquel on serait près à vendre la ressource au lieu de l'utiliser).

- Un système de prix $(y_1, ..., y_n)$ (auxquels on serait prêtà vendre nos ressources) pour être acceptable doit nous compenser pour le profit qu'on aurait pu faire en utilisant ces ressources. Donc, if faut que

$$\sum_i a_{ij} y_i \geq c_j, \qquad j = 1, ..., n$$

ce qu'on interprète aussi comme le fait que la valeur des ingrédients doit justifier entièrement le profit attribué à chaque produit.

– Enfin, l'acheteur de nos ressources veillera à minimiser le coût total d'achat

$$\min \sum_i b_i y_i$$

Chapitre 2

Le problème de transport

Ce chapitre a l'objectif de présenter et de modéliser le problème de transport par ses différentes formulations, Il s'agit d'un type de problème de programmation linéaire qui peut être énoncer comme suit "Comment transporter aux moindres coûts entre m origines $X_i = \{x_1, ..., x_m\}$ et n destinations $Y_i = \{y_1, ..., y_n\}$.Les disponibilités ai $(i = 1, ..., m)$ existantes aux origines x_i $(i = 1, ..., m)$, afin de satisfaire les demandes b_j $(j = 1, ..., n)$ des destinations y_j $(j = 1, ..., n)$ étant données $m \times n$ coûts de transport cij.

2.1 Positionnement de problème

Le problème de transport peut être défini comme l'action de transporter des marchandises ou des produits fabriqué par m origines(ou usines) vers n destinations(ou clients), d'une manière que le coût total de transport soit minimale.Donc, la résolution d'un problème de transport consiste à organiser le transport de façon à minimiser le coût total de transport.[2]

2.2 Modélisation

Supposons qu'une entreprise ait m entrepôts et n points de vente, un seul produit doit être expédié des entrepôts aux points de vente.Chaque entrepôt (origine) a un niveau d'approvisionnement donné (disponibilité), et chaque point de vente (destination) a un niveau de demande donné.On nous donne également le coût de transport entre chaque paire d'entrepôt et de destination, telles que :

– La disponibilité de chaque entrepôt i est : a_i unité, ou $i = 1, 2, 3..., m$.

– La demande de chaque destination j est : b_i unité, ou $j = 1, 2, 3..., n$.

– Le coût de transport d'une unité du produit de l'entrepôt i à la destination j est égal à cij unité.

Où $i = \{1, 2, 3..., m\}$ et $j = \{1, 2, 3..., n\}$ Le coût total d'une expédition est linéaire en taille d'expédition.[1]

2.2.1 Variables de décision

Les variables du modèle de programmation linéaire **(PL)** du problème de transport sont des entiers naturels représentant des unités transportées d'une source vers une destination.Les variables de décision sont les suivantes :

x_{ij} : La quantité à transporter de la source i vers la destination j, où $i = 1, 2, 3...m$ et $j = 1, 2, 3, ...n$.[1]

2.2.2 Fonction Objective

le problème consiste à déterminer les quantités x_{ij} à transporter de façon que le coût total de transport $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$ soit minimal.

La fonction objective contient des coûts associés à chacune des variables.C'est une minimisation de problème.Puisque nous supposons que la fonction coût total est linéaire, Le coût total de cette expédition est donné par $c_{ij} \times x_{ij}$.En sommant sur tout i et j, on obtient le coût global de transport pour tous les entrepôts.[3]

2.2.3 Les contraintes

Les contraintes sont les conditions qui obligent à satisfaire la demande et épuiser la disponibilité.Dans un Problème de transport, il existe une contrainte pour chaque sommet. Posons :

a_i désigne une capacité d'une source (disponibilité) et b_j désigne le besoin d'une destination (demande).

Les contraintes sont :

- La disponibilité à chaque source doit être épuisée : $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1, 2, 3...m$.
- La demande à chaque destination doit être satisfaite : $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1, 2, 3, ...n$.
- La non négativité des quantités: $x_{ij} \geq 0; i = 1, ..., m$ et $j = 1, ..., n$. [1]

2.2.4 Formulation mathématique

$$\begin{cases} \min \ z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{j}^{n} x_{ij} = a_i & i = 1, 2, 3..., m \text{ (offer)} \\ \sum_{i}^{m} x_{ij} = b_j & j = 1, 2, 3..., n \text{ (demande)} \\ a_i \geq 0, b_j \geq 0 & i = 1, 2, 3..., m \text{ et } j = 1, 2, 3..., n \\ x_{ij} \geq 0 & i = 1, 2, 3..., m \text{ et } j = 1, 2, 3..., n \end{cases}$$

Il s'agit d'un programme linéaire avec $m \times n$ variables de décision, $m + n$ contraintes fonctionnelles et $m \times n$ contraintes non négatives.

m : Nombre de sources.

n : Nombre de destinations.

a_i : Disponibilité de la $i^{ème}$ source.

b_j : Demande de la $j^{ème}$ destination.

c_{ij} : Coût unitaire de transport de la $i^{ème}$ source à la $j^{ème}$ destination .

x_{ij} : Quantité transportée de la $i^{ème}$ source à la $j^{ème}$ destination.[1]

Proposition 2.1 *Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution réalisable au problème transport est que :*[8]

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad i = 1, 2, 3..., m \text{ et } j = 1, 2, 3..., n$$

Proof. *Si x est une solution qui vérifie les contraintes, on a que* [8]

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \Longrightarrow \sum_{i,j} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \Longrightarrow \sum_{i,j} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Ceci implique

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Inversement, si $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = T$ on pose

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{T} \geq 0$$

Montrons que ce choix de x vérifie les contraintes. En effet

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j = a_i \frac{\sum_{j=1}^{n} b_j}{T} = a_i$$

et

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{m} a_i b_j = b_j \frac{\sum_{i=1}^{m} a_i}{T} = b_j$$

De plus, l'ensemble des solutions réalisables est borné. Il suffit d'observer que, pour une paire d'indices i et j,

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \geq 0 \Longrightarrow 0 \leq x_{ij} \leq a_i$$

Par conséquent, le problème admet une solution optimale.

L'ensemble des contraintes $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \forall i \in \{1, \ldots, m\}$ et $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \forall j \in \{1, \ldots, n\}$ représente $m + n$ équations dans $m \times n$ variables non négatives Chaque variable x_{ij} apparaît exactement en deux contraintes, l'une est associée à l'origine et l'autre est associée à la destination.[] ■

Exemple 2.1 *Une fabrique de conserves expédie des caisses vers des dépôts. Nous voulons que le programme d'expédition des caisses minimise le coût de transport total des usines vers les dépôts. Pour simplifier, nous supposerons qu'il y a deux usines I, II et trois dépôts A, B et*

C. Les disponibilités en caisses dans les usines a_i et les besoins des dépôts b_j sont représentées dans le tableau suivant :[13]

a_i	b_j
350 caisses à l'usine I 550 caisses à l'usine II	300 caisses au dépôt A 300 caisses au dépôt B 300 caisses au dépôt C

TAB. 2.1 – Disponibilités des usines

On voit tout de suite que :

$$\sum_{i=1}^{2} a_i = \sum_{j=1}^{3} b_j = 900$$

Le coût d'expédition, par caisse, entre chaque usine et chaque dépôt est consigné dans le tableau ci-dessous :

	Destinations		
Origines	A	B	C
I	25	17	16
II	24	18	14

TAB. 2.2 – Coûts d'expédition (en francs par caisse)

Le problème consiste à déterminer le nombre de caisses que chacune des usines doit expédier vers chacun des dépôts de façon à ce que le coût de transport total soit le plus faible possible. La fonction objectif à minimiser est :

$$Minimiser \quad z = 25x_{11} + 17x_{12} + 16x_{13} + 24x_{21} + 18x_{22} + 14x_{23}$$

$$\textit{sous contraintes} \begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 350 & \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 550 & (\textit{dues aux destinations}) \\ et & \\ x_{11} + x_{21} = 300 & \\ x_{12} + x_{22} = 300 & \\ x_{13} + x_{23} = 300 & (\textit{dues aux destinations}) \end{cases}$$

2.3 Propriétés de la matrice A

Le problème de transport s'écrit de manière matricielle : [8]

$$\begin{cases} \min \quad z = c^t x \\ Ax = d \\ x \geq 0 \end{cases}$$

où $x = (x_{11}, x_{12}, x_{1n}, x_{21}, x_{2n}, x_{mn})$. C'est-à-dire que l'on déroule la matrice x_{ij} suivant les lignes. On fait de même pour $c = (c_{11}, c_{1n}, c_{21}, c_{mn})$. Il y a $n \times m$ variables et $n+m$ contraintes. Le vecteur d correspond à $d = (a_1, a_2, a_m, b_1, b_2, b_n)$.

Illustrons la matrice A pour $m = 3$ et $n = 4$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & & & \\ & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & \\ & & & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & & & & 1 & & & & 1 & & & \\ & 1 & & & & 1 & & & & 1 & & \\ & & 1 & & & & 1 & & & & 1 & \\ & & & 1 & & & & 1 & & & & 1 \end{bmatrix}$$

La somme des n premières lignes donne

$$L_1 + L_2 + +L_n = (1, 1, ..., 1)$$

Aussi, la somme des lignes $n + 1$ à $n + m$ donne

$$L_{n+1} + L_{n+2} + +L_{n+m} = (1, 1, ..., 1)$$

Si on combine ces deux résultats, on obtient

$$L_1 + L_2 + ... + L_n - L_{n+1} - L_{n+2} - ... - L_{n+m} = 0$$

Ceci implique que

$$rg(A) < m + n$$

Proposition 2.2 *On a les propriétés suivantes pour la matrice A.* [8]

- *Chaque colonne contient exactement deux entrées non nulles et qui sont égales à* 1.
- *Le rang de* A *est égal à* $m + n - 1$.
- *Il y a toujours une ligne de trop que l'on peut éliminer.*
- *Il y a exactement* $m + n - 1$ *variables de base réalisables.*[]

2.4 Problème de transport non équilibré

Si

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Ce problème du transport est connu comme un problème de transport déséquilibré. On a deux Cas :

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad ou \qquad \sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$$

On pourra se ramener à l'énoncé précédent de la manière suivante :

- Si $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$ il suffit d'introduire une destination fictive y_{n+1} de coût de transport égale à zéro entre x_i et $y_{n+1,}(i = 1, \ldots, m)$ dont la demande :

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

- Si $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ il suffit d'introduire une source fictive x_{n+1} de coût de transport égale à zéro entre y_j et x_{m+1},$(j = 1, \ldots, n)$ dont la disponibilité :[1]

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$$

2.5 Dual du problème de transport

Dual du problème de transport est : [8]

$$\min \quad z = \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} = c^t x$$

sous les contraintes :

$$\begin{cases} A_1 x = a & \Longleftrightarrow & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i & \forall i = 1, ..., m \\ A_2 x = b & \Longleftrightarrow & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j & \forall j = 1, ..., n \\ & x \geq 0 & \Longleftrightarrow & x_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

Sous forme compact, ceci s'écrit

$$\min \quad z = c^t x$$

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ -A_1 \\ A_2 \\ -A_2 \end{bmatrix} x \geq \begin{bmatrix} a \\ -a \\ b \\ -b \end{bmatrix}$$

$$x \geq 0$$

Le dual est

$$\max \quad z = a^t u_+ - a^t u_- + b^t v_+ - b^t v_-$$

$$\begin{bmatrix} A_1^t & -A_1^t & A_2^t & -A_2^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_+ \\ u_- \\ v_+ \\ v_- \end{bmatrix} \leq c$$

$$u_+, u_-, v_+, v_- \geq 0$$

C'est-à-dire avec $u = u_+ - u_-$ et $v = v_+ - v_-$, on obtient

$$\max z = a^t u + b^t v$$

$$A_1^t u + A_2^t v \leq c$$

$$u, v \text{ libres}$$

ou

$$A_1^t u + A_2^t v \leq c \Longleftrightarrow u_i + v_j \leq c_{ij}$$

Supposons que x soit la solution optimale du problème.on a

$$x^t(c - A_1^t u - A_2^t) = 0$$

On a les relations

$$u_i + v_j = c_{ij} \qquad \forall x_{i,j} \geq 0$$

Si x est solution de base non dégénéré, on a bien la décomposition $u_i + v_j = c_{ij}$ pour les indices des variables de base.

2.6 Tableau de transport

Le problème de transport peut être décrit en utilisant un modèle mathématique de programmation linéaire, et habituellement, il apparaît dans un tableau de transport. Le modèle d'un problème de transport peut être représenté sous forme de tableau concis avec tous les paramètres pertinents.

Le tableau de transport (Un problème de transport typique est représenté sous forme de matrice standard), où la disponibilité d'approvisionnement (a_i) à chaque source est affichée dans la colonne droite du tableau, et les demandes de destination (b_j) sont affichées dans la ligne inférieure.

Chaque cellule représente une voie, Le coût de transport unitaire (c_{ij}) est indiqué dans le coin supérieur droit de la cellule, la quantité de matériel transporté est affichée au centre de la cellule, Le tableau de transport exprime implicitement les contraintes de l'offre et de la demande et le coût de transport entre chaque source et destination.[1]

Destination : → / Source : ↓	D_1	D_2	... D_j ...	D_n	Disponibilités
S_1	C_{11} x_{11}	C_{12} x_{12}		C_{1n} x_{1n}	a_1
S_2	C_{21} x_{21}	C_{22} x_{22}		C_{2n} x_{2n}	a_2
... S_i ...			C_{ij} x_{ij}		a_i
S_m	C_{m1} x_{m1}	C_{m2} x_{m2}		C_{mn} x_{mn}	a_m
Demandes	b_1	b_2	... b_j ...	b_m	$\sum a_i$ / $\sum b_j$

FIG. 2.1 – Tableau de transport

2.7 Réseau de transport

Graphiquement, le problème du transport est souvent visualisé comme un réseau avec m noeuds sources, n noeuds destinations et un ensemble de $m \times n$ "arcs orientés" Ceci est représenté dans la Figure 2.2 :[1]

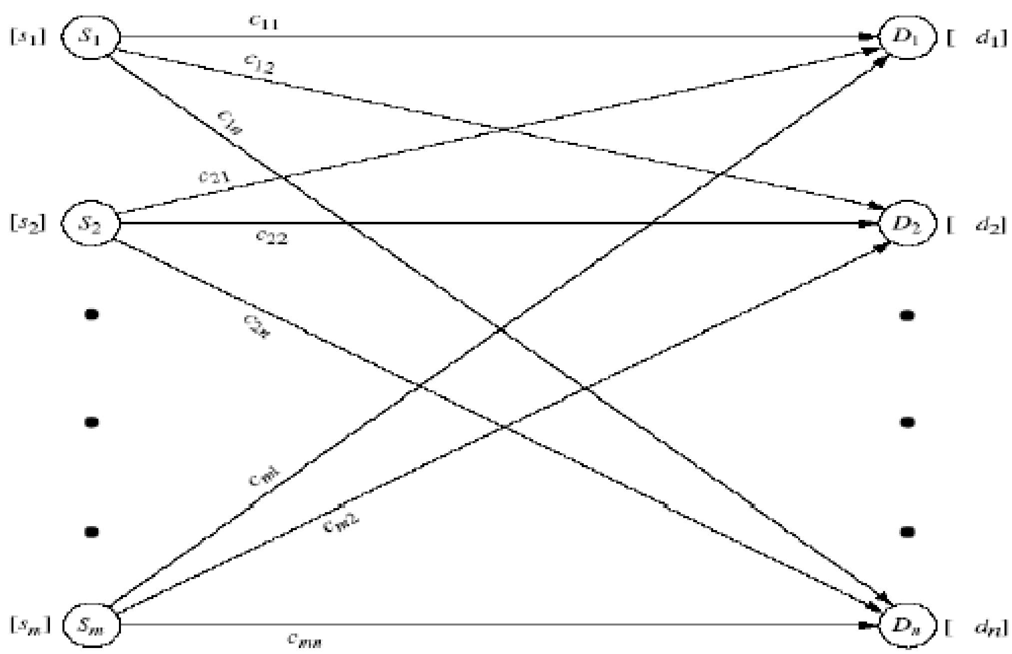

FIG. 2.2 – Réseau de transport

Dans la figure (), il y a $S_1 \ldots S_m$ sources et $D_1 \ldots D_n$ destinations. Les arcs orientés montrent des flux de transport de source vers destination. Chaque destination est liée à chaque source par un flèche, Le nombre $(c_{11} \ldots c_{mn})$ au-dessus de chaque flèche représente le coût du transport sur cette route.

Les problèmes avec la structure ci-dessus se posent dans de nombreuses applications. Par exemple, les sources pourraient représentent des entrepôts, des puits,... etc,et les destinations pourraient représentent des populations, des clients,...etc.

2.8 Dégénérescence en problème de transport

La dégénérescence existe dans un problème de transport lorsque le nombre de cellules remplies est inférieur au nombre de lignes plus le nombre de colonnes moins un $(m + n - 1)$.La dégénérescence peut être observée soit lors de l'attribution initiale lorsque la première entrée dans une ligne où une colonne satisfait à la fois aux exigences de la ligne et de la colonne où lors de l'application d'une méthode de résolution de problème de transport, lorsque les valeurs ajoutées et soustraites sont égales.

Le transport avec $m-$origines et $n-$destinations peut avoir $(m+n-1)$ variables de base positives, sinon la solution de base dégénèrera, Donc chaque fois que le nombre de cellules basiques est inférieur à $m+n-1$, le problème du transport est dégénéré.

Pour résoudre la dégénérescence, les variables positives sont augmentées par autant de variables à valeur nulle que nécessaire pour compléter les $(m+n-1)$ variables de base.[1]

Chapitre 3

Résolution du problème de transport

Dans ce chapitre nous allons présenter deux méthodes graphique (Stepping-Stone, distribution modifiée) pour la recherche de la solution optimale et les méthodes : Coin Nord-Ouest, coût minimum,pour la recherche de la solution de base d'un problème de transport.

3.1 Structure de la résolution de problème de transport

Considérons un problème de transport impliquant m origines et n destinations. Étant donné que la somme des disponibilités d'origine est égale à la somme des demandes de destination,une solution réalisable existe toujours. La $(m+n)-n^{ème}$ contrainte est redondante et peut donc être supprimée. Cela signifie également qu'une solution de base réalisable pour un problème de transport peut avoir au plus $(m+n-1)$ composants strictement positifs, Sinon la solution dégénérera.

Il est toujours possible d'assigner une solution réalisable initiale à un problème de transport.De telle sorte que les exigences des destinations soient satisfaites. Cela peut être réalisé soit par une inspection, soit par des règles simples. Nous commençons par imaginer que la table de transport est vide, c'est-à-dire initialement tout $x_{ij} = 0$. [5]

3.1.1 Solution de base réalisable

On appelle solution de base réalisable une solution vérifiant les contraintes du problème comportant exactement $(m-1) \times (n-1)$ flux nuls.
Si le nombre d'allocations dans les solutions de bases réalisables est inférieur à $(m+n-1)$, on appelle une solution de base dégénérée.[5]

3.1.2 Solution optimale

Une solution réalisable (pas nécessairement de base) est considérée optimale si elle minimise le coût total du transport.[5]

3.1.3 Organigramme de résolution pour le problème de transport

On résume la résolution de problème de transport sous forme d'organigramme suivant :[1]

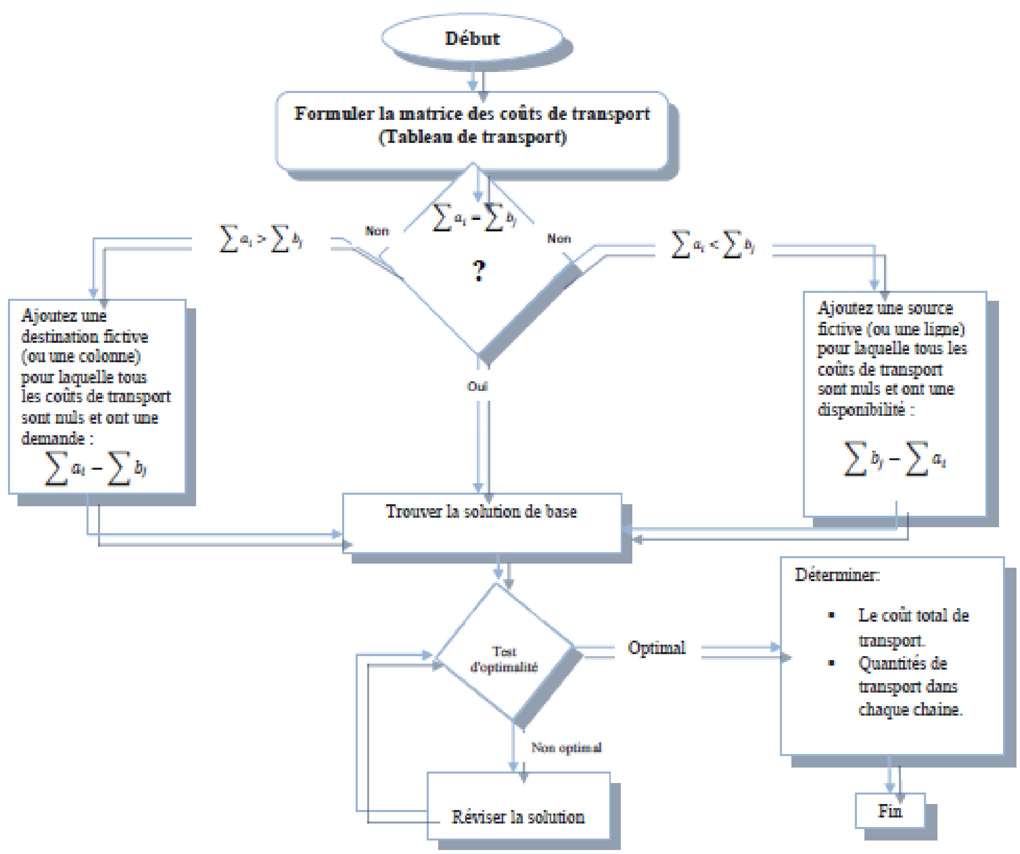

Fig. 3.1 – Organigrame de résolution le problème de transport

3.1.4 Algorithme général de résolution de problème de transport

Les modèles de transport ne commencent pas à l'origine où toutes les valeurs de décision sont nulles, Ils doivent plutôt recevoir une solution de base réalisable initiale.

L'algorithme de résolution à un problème de transport peut se résumer en étapes suivantes :[1]

Étape 1 : Formuler et configurer le problème sous la forme matricielle **:**La formulation du problème de transport est similaire à la formulation du problème **PL**.Ici, la fonction objective est le coût total du transport et les contraintes sont l'offre et la demande disponibles à chaque source et destination, respectivement.

Étape 2 : Obtenir une première solution de base réalisable : Cette solution de base initiale peut être obtenue en utilisant l'une des méthodes suivantes

– Méthode de Coin Nord-Ouest.

– Méthode du Coût Minimum.

La solution obtenue par l'une des méthodes ci-dessus doit satisfaire les conditions suivantes :

1. La solution doit être réalisable, c'est-à-dire qu'elle doit satisfaire toutes les contraintes de l'offre et de la demande.
2. Le nombre d'attribution positive (les cases allouées) doit être égal à $m + n - 1$, où m est le nombre de lignes et n est le nombre de colonnes.

La solution qui satisfait les conditions mentionnées ci-dessus est appelée une solution de base non dégénérée.

Étape 3 : Tester la solution de base initiale pour l'optimalité :L'utilisation de l'une des méthodes suivantes pour tester l'optimalité de la solution de base initiale obtenue :

– Méthode Stepping Stone.

– Méthode de distribution modifiée.

Si la solution est optimale arrêtez, sinon déterminez une nouvelle solution améliorée.

Étape 4 : Mise à jour de la solution :Répétez l'étape 3 jusqu'à atteindre la solution optimale.

3.2 Méthodes de détermination de solution de base initiale

3.2.1 Méthode du Coin Nord-Ouest

Définition 3.1 *La méthode du coin nord-ouest est une méthode facile mais elle n'a pas de sens économique. Puisqu'elle consiste à affecter au coin nord-ouest de chaque grille la quantité maximum possible sans se préoccuper de l'importance du coût.*[5]

Principe

Étape 1 : Localiser la cellule $(p;q)$ qui se trouve dans le coin nord-ouest, c'est à-dire en haut à gauche, de la partie non-éliminée du tableau de transport.

Étape 2 : Envoyer le maximum d'unités pour la cellule $(p;q)$.Ainsi x_{pq} est initialisé comme étant le $min\{a_p, b_q\}$. Ajuster ensuite a_p et b_q, en tenant compte du montant x_{pq} à expédier. Exprimons cette phrase à l'aide d'inégalités : $x_{pq} = min\{a_p, b_q\}$

$$a'_p = a_p - x_{pq}$$

$$b'_p = b_p - x_{pq}$$

Entourer (ou mettre en évidence d'une autre manière) le coût c_{pq} .À la fin de cette étape, soit a'_p,soit b'_q est nul, soit les deux.

Étape 3 :

1. Si $a'_p = 0$ et $b'_q > 0$, cela signifie que l'origine p a été "vidée". Il faut donc éliminer la ligne p du tableau.
2. Si $b'_q = 0$ et $a'_p > 0$, cela signifie que la destination q est entièrement satisfaite et qu'il reste des marchandises dans le dépôt p. Il faut donc éliminer la colonne q du tableau.
3. Si $a'_p = 0$ et $b'_q = 0$, nous nous trouvons dans un cas dégénéré. On élimine alors la ligne p, à moins qu'elle ne soit la seule ligne restante du tableau ; auquel cas il faut éliminer la colonne q.

Étape 4 :

1. S'il reste un total de deux ou plusieurs lignes et colonnes non encore éliminées, reprendre à l'étape 1.
2. S'il ne reste qu'une ligne non éliminée, la solution réalisable de base initiale est déterminée par les cellules entourées.[13]

3.2.2 Méthode de Coût minimum

Définition 3.2 *La méthode du Coût Minimum est une méthode pour calculer une solution de base réalisable d'un problème de transport où les variables de base sont choisies en fonction du coût unitaire du transport. La méthode du coût minimum trouve une meilleure solution de départ en se concentrant sur les coûts de transport les moins chers.*[5]

Principe

cette méthode ne diffère de la précédente que par le critère appliqué à l'étape (1), exposée ici, les étapes $(2), (3)$ et (4) restant les mêmes.[13]

Étape 1 : Trouver la cellule $(p; q)$, telle que c_{pq} est le plus petit coût de tout le tableau.

– La méthode commence par affecter autant que possible à la case avec le coût unitaire de transport le plus petit. Ensuite, la ligne où la colonne satisfaite est dépassée et les montants de l'offre et de la demande sont ajustés en conséquence. Si à la fois une ligne et une colonne sont satisfaites simultanément, une seule est décalée, la même que dans la méthode du Coin Nord-Ouest, Ensuite, recherchez la case non décalée avec le coût unitaire le plus petit et répétez le processus jusqu'à ce qu'une ligne où une colonne exactement soit laissée hors traitement.

3.3 Méthode d'optimisation de la solution de base

3.3.1 Méthode de Stepping-Stone

Définition 3.3 *L'algorithme du Stepping-Stone est un algorithme itératif (donc par étapes successives) vise à améliorer une solution de base.(Faire baisser le coût global).*

On peut appliquer l'algorithme à n'importe quelle solution de base.[5]

Déroulement de l'algorithme :

L'algorithme consiste à modifier la solution pour une qui soit meilleure, donc à rendre non vide une case vide du tableau de transport des quantités.

On appelle :

Ti «ui» : potentiel origine.

Tj «vj» : potentiel destination.

∂_{ij} : coût marginal de la liaison (x_i, x_j).[3]

Algorithme de stepping stone :[3]

1. Déterminer une solution de base initiale.
2. Calculer les coûts marginaux $\delta_{ij} = c_{ij} - (tj - ti)$ avec $t_j - t_i = \theta_{ij}$, la tension de l'arc (i, j), t_i s'appelle le potentiel du sommet i de l'arc (i, j). Si tous les coûts marginaux sont positifs où nuls alors FIN. La solution est optimal, sinon passer à 3.
3. Pour tous les coûts marginaux négatifs, chercher la chaine de substitution et déterminer la quantité maximale qui peut être déplacé et passer à (4).Alors le gain correspondant est égale au produit de cette quantité par le coût marginale.
4. Retenir la substitution qui réalise la plus grande diminution du coût de transport,l'effectuer et revenir à (2).

Remarque 3.1 ***Le coût marginale*** *: la quantité (positive ou négative) qui s'ajout au coût globale lorsqu'on veut transporter une unité sur un arc de flux nul.*[3]

Comment déterminer les potentiels ?

– On utilisera le tableau des coûts limité aux cases où la quantité transitée est non nulle.

– On déterminera les potentiels de proche en proche : on commencera par une destination, puis une origine, puis une destination.

Comment déterminer les δ ?

Pour chaque case nulle, on calculera δ en ajoutant au coût unitaire de la case le potentiel d'origine associée et en retranchant le potentiel de la destination correspondante.

Comment déterminer les quantités à transporter(q) ?

– On déterminera les quantités qu'on peut ajouter aux cases vides uniquement pour celles dont le δ est négatif, il ne sert à rien, en effet, de remplir une case qui fait augmenter le coût.

– Pour remplir une case vide, il faut diminuer une case pleine, donc constituer un circuit de cases pleines qu'on vide et remplit alternativement.

3.3.2 Méthode de Distribution Modifiée

Définition 3.4 *La Méthode de distribution modifiée (où des penalties) : est une version modifiée de la méthode de stepping stone dans laquelle les équations mathématiques remplacent les chaines de substitutions. Cette méthode est plus pratique que stepping stone.*

En appliquant la méthode MODI, nous commençons par une solution initiale obtenue en utilisant les méthodes citées à la section précédente. Ensuite, nous devons calculer une valeur u_i pour chaque ligne i et v_j pour chaque colonne j dans la table de transport.[5]

Les étapes de la méthode de distribution modifiée : [5]

1. Pour calculer les valeurs u_i et v_j pour chaque ligne et chaque colonne, définissez les équations : $u_i + v_j = c_{ij}$.

2. Une fois que toutes les équations ont été écrites, définissez l'une des deux variables u_i ou v_j à zéro, et résolvez le système d'équations pour toutes les valeurs u_i et v_j.

3. Calculez l'indice d'amélioration Δ_{ij} pour chaque cellule inutilisé par l'amélioration de la formule : $\Delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$.

4. Transférer la plus grande quantité possible à la cellule qui a Δ_{ij} le plus négatif en créant un cycle qui satisfait la demande et la disponibilité de chaque rangé.

5. Répétez les étapes 2 à 4 jusqu'à ce qu'il n'y ait pas de Δ_{ij} négatif.

6. Calculez le coût total en multipliant chaque allocation (x_{ij}) par son spécifique coût (c_{ij}).

3.4 Partie pratique

Exemple 3.1 *Dans ce exemple nous appliquons la méthode de Coin nord-ouest au problème de transport donné par la table suivant :* [5]

Origines	Destinations			Offre
	1	2	3	
1	25	17	16	350
2	24	18	14	550
Demande	300	300	300	900

TAB. 3.1 – problème initiale de transport

Itération 1 :

Étape 1 : Le tableau restant se compose de deux lignes et de trois colonnes ; son coin nord-ouest est la cellule $(1;1)$, x_{11} entre donc dans la base.

Étape 2 :

$$x_{11} = \min\{a_1; b_1\} = \min\{350; 300\} = 300$$

$$a'_1 = a_1 - x_{11} = 350 - 300 = 50$$

$$b'_1 = b_1 - x_{11} = 300 - 300 = 0$$

Étape 3 : $a'_1 = 50$ et $b'_1 = 0$, on élimine donc la colonne 1.

Étape 4 : Il nous reste deux lignes et deux colonnes, nous n'avons donc pas terminé.

Origines \ Destinations	~~1~~	2	3	Offre
1	~~25~~ 300	17	16	350 50
2	~~24~~	18	14	550
Demande	~~300~~ 0	300	300	900

FIG. 3.2 – Tableau aprés l'itération 1 du Coin nord-west

Itération 2 :

Étape 1 : Le tableau restant se compose des lignes 1 et 2 ainsi que des colonnes 2 et 3; son coin nord-ouest est donc le cellule $(1; 2)$.

Étape 2 :

$$x_{12} = \min\{a_1; b_2\} = \min\{50; 300\} = 50$$

$$a_1' = a_1 - x_{12} = 50 - 50 = 0$$

$$b_2' = b_2 - x_{12} = 300 - 50 = 250$$

Étape 3 : $a_1' = 50$ et $b_2' = 250$, on élimine donc la ligne 1.

Étape 4 : Il reste une ligne et deux colonnes, il faut donc reprendre la démarche à l'étape (1) afin d'opérer une troisième itération.

Origines \ Destinations	~~1~~	2	3	Offre
~~1~~	~~25~~ 300	~~17~~ 50	~~16~~	~~350~~ 0
2	~~24~~	18	14	550
Demande	~~300~~ 0	300 250	300	900

FIG. 3.3 – Tableau aprés l'itération 2 du Coin nord-west

Itération 3 :

Étape 1 : Il ne reste que la ligne 2 et la colonne 2 et 3, donc le coin nord-ouest est la cellule $(2;2)$.

Étape 2 :

$$x_{22} = \min\{a_2; b_2\} = \min\{550; 250\} = 250$$

$$a'_2 = a_2 - x_{22} = 550 - 250 = 300$$

$$b'_2 = b_2 - x_{22} = 250 - 250 = 0$$

Étape 3 : $a'_2 = 300$ et $b'_2 = 0$, on élimine donc la colonne 2.

Étape 4 : Comme il reste une ligne et une colonne, une quatrième itération est nécessaire.

Destinations / Origines	~~1~~	~~2~~	3	Offre
~~1~~	~~25~~ 300	~~17~~ 50	~~16~~	~~350~~ 0
2	~~24~~	~~18~~ 250	14	550 300
Demande	~~300~~ 0	~~300~~ 0	300	900

FIG. 3.4 – Tableau aprés l'itération 3 du Coin nord-west

Itération 4 :

Étape 1 : Il ne reste que la ligne 2 et la colonne 3, donc le coin nord-ouest est la cellule $(2;3)$.

Étape 2 :

$$x_{23} = \min\{a_2; b_3\} = \min\{300; 300\} = 300$$

$$a'_2 = a_3 - x_{23} = 300 - 300 = 0$$

$$b'_2 = b3 - x_{23} = 300 - 300 = 0$$

Étape 3 : $a'_2 = 300$ et $b'_3 = 0$, la ligne 2 est la dernière ligne, on élimine donc la colonne 3.

Étape 4 : Il ne reste que la ligne 2, la solution réalisable de base initiale est trouvée.

Origines \ Destinations	~~1~~	~~2~~	~~3~~	Offre
~~1~~	~~25~~ 300	~~17~~ 50	~~16~~	~~350~~ 0
~~2~~	~~24~~	~~18~~ 250	~~14~~ 300	~~550~~ 0
Demande	~~300~~ 0	~~300~~ 0	~~300~~ 0	900

FIG. 3.5 – Tableau aprés l'itération 4 du Coin nord-west

Nous pouvons calculer le coût de transport total.

$$z = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij} = c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+c_{22}x_{22}+c_{23}x_{23} = 25(300)+17(50)+18(250)+14(300) = 17050$$

Exemple 3.2 *Dans cet exemple nous appliquons la méthode de matrice minimale au problème de la Table 3.1 :*[5]

Itération 1 :

*Étape 1 :*La cellule $(p;q)$ choisie est la cellule $(2;3)$ dont le coût (14) est le plus petit de l'ensemble du tableau.

*Étape 2 :*Calculons x_{23}, b'_2 et b'_3.

$$x_{23} = \min\{a_2; b_3\} = \min\{550; 300\} = 300$$

$$a'_2 = a_2 - x_{23} = 550 - 300 = 250$$

$$b'_3 = b_3 - x_{23} = 300 - 300 = 0$$

Étape 3 : Comme $a'_2 = 250$ et $b'_3 = 0$, il faut éliminer la colonne 3.

Étape 4 : Il reste deux lignes (1 et 2)et deux colonnes (1 et 2),il faut donc choisir un nouvel x_{pq} qui entrera à son tour dans la solution réalisable de base initiale.

Destinations / Origines	1	2	~~3~~	Offre
1	25	17	~~16~~	350
2	24	18	~~14~~ 300	550 250
Demande	300	300	~~300~~ 0	900

FIG. 3.6 – Tableau aprés l'itération 1 du matrice minimale

Itération 2 :

Étape 1 : Le coût minimum sur ce tableau est 17, soit celui de la cellule $(1;2)$; on va donc initialiser x_{12}.

Étape 2 :

$$x_{12} = \min\{a_1; b_2\} = \min\{350; 300\} = 300$$

$$a'_1 = a_1 - x_{12} = 350 - 300 = 50$$

$$b'_2 = b_2 - x_{12} = 300 - 300 = 0$$

Étape 3 : $a'_1 = 50$ et $b'_2 = 0$, il faut donc éliminer la colonne 2.

Étape 4 : Comme il reste deux lignes et une colonne, nous n'avons pas terminé, nous cherchons alors le troisième x_{pq} à entrer dans la base.

Destinations / Origines	1	~~2~~	~~3~~	Offre
1	25	~~17~~ 300	~~16~~	350 50
2	24	~~18~~	~~14~~ 300	550 250
Demande	300	~~300~~ 0	~~300~~ 0	900

FIG. 3.7 – Tableau aprés l'itération 2 du matrice minimale

Itération 3 :

Étape 1 : Le coût minimum sur la ligne 1, la ligne 2 et la colonne 1 est 24, soit le coût de la cellule $(2;1)$.

Étape 2 :

$$x_{21} = \min\{a_2; b_1\} = \min\{250; 300\} = 250$$

$$a'_2 = a_2 - x_{21} = 250 - 250 = 0$$

$$b'_1 = b_1 - x_{21} = 300 - 250 = 50$$

Étape 3 : $a'_2 = 0$ et $b'_1 = 50$, on élimine donc la ligne 2.

Étape 4 : Il reste une ligne (1) et une colonne (1), il faut donc procéder à $4^{ème}$ itération.

Destinations / Origines	1	~~2~~	~~3~~	Offre
1	25	~~17~~ 300	~~16~~	350 50
~~2~~	~~24~~ 250	~~18~~	~~14~~ 300	~~550~~ 0
Demande	300 50	~~300~~ 0	~~300~~ 0	900

FIG. 3.8 – Tableau aprés l'itération 3 du matrice minimale

Itération 4 :

Étape 1 : Le seul x_{pq} qui peut encore entrer dans la base est x_{11}.

Étape 2 :

$$x_{11} = \min\{a_1; b_1\} = \min\{50; 50\} = 50$$

$$a'_1 = a_1 - x_{11} = 50 - 50 = 0$$

$$b'_1 = b_1 - x_{11} = 50 - 50 = 0$$

Étape 3 :$a'_1 = 0$ et $b'_1 = 0$, la ligne 1 est la dernière des ligneson élimine donc la colonne 1.

Étape 4 : Il ne reste que la ligne 1, nous avons donc terminé!

Origines \ Destinations	~~1~~	~~2~~	~~3~~	Offre
~~1~~	~~25~~ 50	~~17~~ 300	~~16~~	350 0
~~2~~	~~24~~ 250	~~18~~	~~14~~ 300	~~550~~ 0
Demande	300 0	~~300~~ 0	~~300~~ 0	900

FIG. 3.9 – Tableau aprés l'itération 4 du matrice minimale

À l'aide de cet exemple, nous pouvons vérifier les affirmations formulées précédemment. Tout d'abord, en raison de la redondance, on trouve une solution réalisable de base initiale avec $(m + n - 1)$ variables, ici $2 + 3 - 1 = 4$. Ensuite, à chaque itération, une seule contrainte est satisfaite, ce qui se voit facilement sur le tableau. La dernière contrainte est automatiquement satisfaite à la dernière itération ; donc, si après la quatrième itération l'une des origines ou des destinations avait eu une valeur non-nulle, cela aurait signifié qu'il n'existe pas de solution réalisable. Nous pouvons maintenant calculer le coût de transport total :

$$z = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} c_{ij} = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{21}x_{21} + c_{23}x_{23} = 25(50) + 17(300) + 24(50) + 14(300) = 16550$$

Il ne s'agit pas encore du coût minimum ; il sera déterminé lors de la recherche de la solution réalisable optimale.

Exemple 3.3 *Dans cet exemple nous appliquons la méthode de Stepping-Stone au problème de la Table 3.1 :*[5]

Étape 1 : Tableau de transport initial Table 3.1.

Étape 2 : À l'aide de la méthode du coin nord-ouest, nous avions obtenu la solution réalisable de base initiale suivante :

Origines	Destinations 1	2	3	Offre
1	25 * 300	17 * 50	16 (3)	350
2	24 (-2)	18 * 250	14 * 300	550
Demande	300	300	300	900

TAB. 3.2 – Solution réalisable de base initiale

Étape 3 : Calculons maintenant les valeurs de boucles pour les cellules hors de la base $(1;3)$ et $(2;1)$.

$$v(1;3) = c_{13} - c_{23} + c_{22} - c_{12} = 16 - 14 + 18 - 17 = 3$$

$$v(2;1) = c_{21} - c_{11} + c_{12} - c_{22} = 24 - 25 + 17 - 18 = -2$$

Ces valeurs sont du reste reportées dans le tableau ci-dessus, à l'endroit réservé aux x_{ij}. C'est ainsi que l'on procédera lors de tout calcul fait à la main. On remarque que $v(2;1) < 0$; par conséquent, la solution actuelle n'est pas optimale.

Étape 4 : On peut améliorer la solution en faisant entrer $(2;1)$ dans la base.

Opérons donc le changement de base tel qu'il est décrit dans la méthode d'entrée.

1.

$$x'_{21} = \min\{x_{11}, x_{22}\} = \min\{300, 250\} = 250$$

2.

$$x'_{12} = x_{12} - x'_{21} = 50 + 250 = 300$$

$$x'_{11} = x_{11} - x'_{21} = 300 - 250 = 50$$

$$x'_{22} = x_{22} - x'_{21} = 250 - 250 = 0$$

3 La cellule $(2;1)$ entre dans la base ; la cellule $(2;2)$ en sort.

Voici le tableau obtenu après le changement de base :

Origines	Destinations 1	2	3	Offre
1	25 * 50	17 * 300	16 (1)	350
2	24 250	18 * (2)	14 * 300	550
Demande	300	300	300	900

Tab. 3.3 – Tableau après la première itération

Le calcul des valeurs de boucle pour $(1;3)$ et $(2;2)$ nous a permis d'obtenir les résultats reportés dans le tableau. On voit que $v(1;3) = 1$et $v(2;2) = 2$. Comme toutes deux sont non-négatives, la solution actuelle est la solution réalisable de base optimale du problème. Une remarque concernant la boucle $b(1;3)$ s'impose. La cellule $(1;2)$ ne fait en aucun cas partie de cette boucle, par conséquent, il n'y a pas trois cellules consécutives sur la ligne 1, contrairement à ce que l'on pourrait croire. Lors de la recherche d'une boucle, on peut ignorer toute cellule de base unique sur une ligne ou une colonne.

Revenons à notre solution ; nous remarquons qu'elle est la même que la solution réalisable de base initiale trouvée, par la méthode coût minimum, pour lesquelles $z = 16550$. Ceci montre, sur ce petit problème, que cette méthode est plus efficace que la méthode du coin nord-ouest. Il est bien clair que pour des problèmes plus grands que celui envisagé ici, la méthode de la matrice minimale, donne directement la solution réalisable de base optimale.

Exemple 3.4 *Dans cet exemple nous appliquons la méthode de distribution modifée au problème suivant :*[5]

	v_j	v_1	v_2	v_3	
u_i	Destinations / Origines	1	2	3	Offre
u_1	1	25 300	17 50	16	350
u_2	2	24	18 250	14 300	550
	Demande	300	300	300	900

FIG. 3.10 – Tableau de la solution intiale

Itération 1 :

Étape 1 : Calculer pour toutes les cellules allouées :

$u_i + v_j = c_{ij}$: Coût de transport unitaire pour la case ij.

$x_{11} : u_1 + v_1 = 25$

$x_{12} : u_1 + v_2 = 17$

$x_{22} : u_2 + v_2 = 18$

$x_{23} : u_2 + v_3 = 14$

Étape 2 : On met donc $u_1 = 0$ et on obtient :

$v_1 = 25, \qquad v_2 = 17, \qquad u_2 = 1, \qquad v_3 = 13.$

Étape 3 : Utilisez la formule des penalties pour évaluer toutes les cellules vides :

$c_{ij} - u_i - v_j = \Delta_{ij}$.

$x_{13} : \Delta_{13} = c_{13} - u_1 - v_3 = 16 - 0 - 13 = 3$

$x_{21} : \Delta_{21} = c_{21} - u_2 - v_1 = 24 - 1 - 25 = -2$

Étape 4 :

1.
$$x'_{21} = \min\{x_{11}, x_{22}\} = \min\{300, 250\} = 250$$

2.

$$x'_{12} = x_{12} - x'_{21} = 50 + 250 = 300$$

$$x'_{11} = x_{11} - x'_{21} = 300 - 250 = 50$$

$$x'_{22} = x_{22} - x'_{21} = 250 - 250 = 0$$

3. La cellule $(2;1)$ entre dans la base ; la cellule $(2;2)$ en sort.

Voici le tableau obtenu après le changement de base :

	v_j	v_1	v_2	v_3	
u_i	Destinations / Origines	1	2	3	Offre
u_1	1	25 50	17 300	16	350
u_2	2	24 250	18	14 300	550
	Demande	300	300	300	900

FIG. 3.11 – tableau après le changement de base

Itération 2 :

Étape 1 :

$x_{11} : u_1 + v_1 = 25$

$x_{12} : u_1 + v_2 = 17$

$x_{21} : u_2 + v_1 = 24$

$x_{23} : u_2 + v_3 = 14$

Étape 2 : On met donc $u_1 = 0$ et on obtient :

$v_1 = 25, \qquad v_2 = 17, \qquad u_2 = -1, \qquad v_3 = 15.$

Étape 3 :

$x_{13} : \Delta_{13} = c_{13} - u_1 - v_3 = 16 - 0 - 15 = 1$

$x_{22} : \Delta_{22} = c_{22} - u_2 - v_2 = 18 + 1 - 17 = 2$

Toutes les valeurs Δ_{ij} sont positives où nuls, donc la solution obtenue est optimale.

$$z = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij} = c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+c_{21}x_{21}+c_{23}x_{23} = 25(50)+17(300)+24(250)+14(300) = 16550$$

Conclusion

Cette étude nous a donné l'opportunité de nous familiariser au domaine de la recherche opérationnelle, ce domaine qui est la discipline des méthodes scientifiques pour aider à mieux décider et traiter les problèmes stratégiques et économiques, Le problème de transport est l'un de ces problèmes classiques les plus connus, Mais la complexité et la variation des contraintes de ce problème dans le domaine économique impliquent la recherche d'autres heuristiques et même des méta-heuristiques plus efficaces pour la résolution. Ce qui rend difficile de tirer une conclusion définitive sur la résolution de ce type des problèmes.

Dans notre travail nous avons essayé de résoudre le problème de transport équilibré par des différentes méthodes qui nous permettons d'obtenir une solution de base réalisable (Nord-Ouest, Coût minimum).Ensuite les méthodes de l'optimisation de la solution de base (Stripping-Stone, distribution modifiée).

Et enfin on peut dire que ce travail représente une base de départ pour résoudre les problèmes générale de transport.

Bibliographie

[1] ALFRED ASASE, Octobre 2011, THE TRANSPORTATION PROBLEM, Theses submitted to the department of mathematics faculty of physical science and technology Kumasi.

[2] Amzaz Adil, (2016), Résolution des problèmes de la recherche opérationnelle : Problème de transport et problème de chargemen, MEMOIRE DE FIN D'ETUDES, Licence Mathématiques et Applications,UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH.

[3] Ben-Iken Mohamed, (2017), Problème de transport : Modélisation et résolution, MEMOIRE DE FIN D'ETUDES, Licence Mathématiques et Applications, UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH.

[4] Bernard Fortz, (2012-2013), Recherche opérationnelle et applications, Université Libre de Bruxelles, Département d'informatique.

[5] DAHOU Mohamed Lamine & CHETBANI Aissa, (2017-2018), Méthodes d'optimisation dans les réseaux de transport et applications, Mémoire de Master, Université A. Mira de Béjaia.

[6] Didier Smets,Programmation linéaire et Optimisation, Université Paris Dhauphine.

[7] François Vanderbeck, Modèles et méthodes d'optimisation, Mathématiques Appliquées Bordeaux, Licence d' Ingénierie Mathématiques.

[8] Guénette Robert, 2015, cours problème de transport, Université de Laval, Faculter des science et de génie.

[9] Laurent SMOCH, Septembre 2013, Recherche Opérationnelle, Université du Littoral-Côte d'Opale, Pôle Lamartine.

[10] MAAMERI Nessma & SAGHI Soraya, 2013, Recueil sur les méthodes d'optimisation combinatoire et application sur un probléme de transport réel : cas Ifri, Mémoire de Master en Mathémathique, Université A/MIRA de Béjaia.

[11] Marco Dozzi, 2002, cours de Recherche Opérationnelle, Université Lorraine.

[12] Sari Triqui Lamia, Cours de Recherche Opérationnelle, Université Aboubakr Belkaïd Telemcen,Faculté de TECHNOLOGIE.

[13] Yadolah Dodge, 2005, Optimisation appliquée, Université de Neuchâtel, Editeur : Springer Livre.