

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

CHENINI SOUMIA

Titre :

INTEGRATION NUMERIQUE

Membres du Comité d'Examen :

Dr. Mokhtari Zohir	UMKB	Président
Dr. Kaboul Hanane	UMKB	Encadreur
Dr. Guidad Daradji	UMKB	Examineur

Juin 2019

DÉDICACE

Je dédie ce travail :

A la source de la tendresse, ma mère.

A mon père, qui m'appris que la patience est le Secret du succès.

A mon cœur mon mari Fathi Dahoui

La mère, le père et tout la famille de mon mari

A tous mes frères Mounir, Fouad, Mohamed.

A mes sœurs, Wahiba et Hacina.

A mes maris de mes sœurs ET Les femmes de mes frères

Fils de mes soeurs et de mes frères.

A toutes mes amies.

Khawla, Salsabil, nabila, Amel, Fouzia vous avez toujours offert soutien et réconfort,

j'exprime envers vous une profonde admiration, reconnaissance et attachement

inconditionnels.

A toutes mes collègues.

Je dédie aussi mon travail aux personnes les plus chères de mon cœur.

A toutes qui connaît CHENINI SOUMIA.

A la perle du Université

Mohamed khaidar-Biskra

REMERCIEMENTS

Avant tout nous remercions Allah le tout puissant qui nous a donné le courage, la
volonté et la patience pour faire ce travail

Qu'il nous soit permis de remercier tous ceux qui d'une manière ou d'une autre, de près
ou de loin, y ont contribué.

Nos remerciements s'adressent en particulier à :

- Madame Kaboul Hanane et Benbraïka Souad notre promoteur, pour leur encadrement, pour leurs conseils scientifiques judicieux et leur suivi durant la période de la réalisation de ce travail. Nos sincères remerciements vont à présider les jurys Mokhtari

Zohir et Guidad Daradji.

- Nous tenons à exprimer nos remerciements les plus sincères et les plus profonds aux personnes qui nous ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire ainsi qu'à la réussite de nos études universitaires.

Nous remercions également tous ceux qui ont contribué de prêt ou de loin à la réalisation
de notre mémoire.

Enfin, nous remercions tous les enseignants du département de mathématique de

L'université Med KHEIDER

À vous tous, un grand Merci.

CHENINI SOUMIA

Table des matières

Remerciements	ii
Table des matières	ii
Liste des figures	v
Introduction	1
1 Interpolation polynômiale	3
1.1 Introduction	3
1.1.1 Rappelles et définitions	3
1.1.2 Position du problème d'interpolation	4
1.2 Méthodes d'interpolation	6
1.2.1 Interpolation de Lagrange	6
1.2.2 Interpolation de Newton	8
1.2.3 Interpolation de Hermite	11
1.3 Erreur d'interpolation :	12
2 Méthodes d'intégration numérique	14
2.1 Introduction	14
2.2 Position du problème	15
2.3 Méthode de Newton cotes simples	15

2.3.1	Principe	15
2.3.2	Méthode du rectangle ($p = 0$)	16
2.3.3	Méthode du point milieu ($p = 0$)	17
2.3.4	Méthode du trapèze ($p = 1$)	19
2.3.5	Méthode de Simpson simple ($p = 2$)	21
2.4	Méthode de Newton-Cotes composites	22
2.4.1	Principe	22
2.4.2	Méthode des rectangles ($p = 0, n = m$)	23
2.4.3	Méthode des trapèzes ($p = 1, n = m$)	24
2.4.4	Méthode de Simpson ($p = 2, n = 2m$)	27
2.5	Formules de Gauss	29
3	L'intégration numérique multiple	32
3.1	Introduction	32
3.2	Intégration numérique d'une fonction en 2 variables	32
3.2.1	Par la méthode d'intégration d'une seul variable	32
3.2.2	Par la méthode d'intégration de deux variable	34
	Conclusion	38
	Bibliographie	39
	Annexe B : Abréviations et Notations	40

Table des figures

1	L'intégrale d'une fonction f	1
2.1	Méthode du rectangle ($p = 0$)	16
2.2	Méthode du point milieu ($p = 0$)	18
2.3	Méthode du trapèze ($p = 1$)	20
2.4	Méthode de Simpson simple ($p = 2$)	21
2.5	Méthode composite des rectangles ($p = 0$) pour $m = 6$ intervalles (c'est à dire $n = 6$ sousintervalles et $n + 1 = 7$ points au total).	24
2.6	Méthode composite des trapèzes ($p = 1$), pour $m = 6$ intervalles (c'est à dire $n = 6$ sousintervalles et $n + 1 = 7$ points au total).	25
2.7	Méthode composite de Simpson ($p = 2$) pour $m = 3$ intervalles (c'est à dire $n = 6$ sousintervalles et $n + 1 = 7$ points au total)	27

Introduction

Dans ce mémoire , nous proposons des méthodes numériques pour le calcul approché de :

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

Lorsqu'il s'agit d'une formule simple d'une fonction $f(x)$, cet intégrale peut se fait analytiquement et nous n'avons pas besoin d'utiliser les méthodes numériques. Alors que dans les cas où la formule de $f(x)$ est compliquée ou lorsque nous avons juste des mesures discrètes et aucune formule mathématique qui relie ces mesures, on fait recours aux méthodes numériques . Autrement dit, les méthodes numériques interviennent lorsque la fonction est compliquée ou dans le cas d'une mesure expérimentale.

Calculer numériquement l'intégrale d'une fonction $f(x)$ dans l'intervalle $[a, b]$ revient à calculer la surface délimitée par l'axe des abscisses, les deux droite $y = a$ et $y = b$ et la portion de la courbe de f délimitée par ces deux droites.

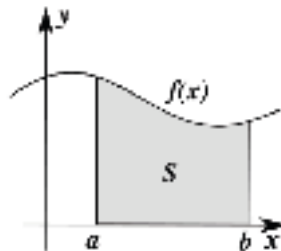


FIG. 1 – L'intégrale d'une fonction f

Et pour cette calculer , la fonction $f(x)$ peut être estimée à l'aide d'un polynôme de degré N avec une certaine erreur.

$$f(x) = P_N(x) + E_N(x)$$

Alors l'intégration numérique est basée principalement sur la relation :

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b P_N(x)dx + \int_a^b E_N(x)dx$$

Dans ce mémoire en va voir trois chapitres :

chapitre(1) : interpolation polynomiale.

chapitre(2) : méthodes d'intégration numérique.

chapitre(3) : L'intégration numérique multiple.

Chapitre 1

Interpolation polynômiale

1.1 Introduction

L'interpolation polynômiale est une technique d'interpolation d'un ensemble de données ou d'une fonction par un polynôme.

Dans ce chapitre, nous nous donnons une fonction f définie sur un intervalle de \mathbb{R} . Nous cherchons à approcher, dans un sens à préciser, cette fonction par un polynôme.

1.1.1 Rappelles et définitions

Définition 1.1.1 *La norme.*

Une application $N : E \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée norme si et seulement si les trois propriétés suivantes sont vérifiées :

- (i) $N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, pour $x \in E$.
- (ii) soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $N(\lambda x) = |\lambda| \cdot N(x)$.
- (iii) $\forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

Définition 1.1.2 *Produit scalaire.*

Soit X est un espace vectoriel sur K ($K = \mathbb{R} \cup \mathbb{C}$) on appelle produit scalaire sur K tout application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ vérifie :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow K$$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle$$

$$1/\forall x, y, z \in X, \forall \alpha, \beta \in K :$$

$$\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$$

$$2/\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \text{ (}\langle \cdot, \cdot \rangle \text{ hermitienne quand } K = \mathbb{C} \text{)}$$

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \text{ (}\langle \cdot, \cdot \rangle \text{ symétrique quand } K = \mathbb{R} \text{)}$$

$$3/\forall x \in X, \langle x, x \rangle \succeq 0 \text{ (}\langle \cdot, \cdot \rangle \text{ définie positive)}$$

$$4/\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$$

Définition 1.1.3 *Espace de Hilbert.*

On appelle espace de Hilbert un espace préhilbertien dont la norme associée en fait un espace complet.

Rappel 1 : On appelle $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ espace préhilbertien. On définit une norme sur H par $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ et donc une distance par $d(x, y) = \|x - y\|$.

Rappel 2 : Complet \Leftrightarrow toute suite de Cauchy est convergente.

1.1.2 Position du problème d'interpolation

soient (x_i, y_i) , $i = 0, \dots, n$, $(n + 1)$ couples de valeurs réelles. l'objectif du problème d'interpolation est de déterminer une fonction f appartenant à une certaine classe qui passe par les points (x_i, y_i) donnés, c'est à dire

$$f(x_i) = y_i, i = 0, \dots, n.$$

Les points (x_i, y_i) sont appelés les points d'interpolation.

Proposition 1.1.1 *Si les x_i sont tous distincts alors il existe un unique polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n vérifiant*

$$P_n(x_i) = y_i, i = 0, \dots, n$$

Preuve. *On peut écrire le polynôme P_n comme suit :*

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$$

Du fait que $P_n(x_i) = y_i, i = 0, \dots, n$, les coefficients $a_i, i = 0, \dots, n$ vérifient le système :

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} a_0x_0^n + a_1x_0^{n-1} + \dots + a_n = y_0 \\ a_0x_1^n + a_1x_1^{n-1} + \dots + a_n = y_1 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \cdot \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \cdot \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \cdot \\ a_0x_n^n + a_1x_n^{n-1} + \dots + a_n = y_n \end{array} \right.$$

(S) est un système linéaire de déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & \dots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & \dots & x_1 & 1 \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \dots & \dots & x_n & 1 \end{vmatrix} = \prod_{i=0, j>i}^n (x_i - x_j)$$

On a $\Delta \neq 0$, car les x_i , sont tous distincts. Donc, le système (S) admet une et une seule solution (a_0, a_1, \dots, a_n) , d'où le polynôme d'interpolation existe et il est unique. ■

1.2 Méthodes d'interpolation

1.2.1 Interpolation de Lagrange

Les polynômes sont des fonctions simples, faciles à évaluer, donc pour représenter une fonction f par une fonction simple c'est en général faire approcher f par un polynôme, et cette approximation est toujours possible, puisque toute fonction peut être approchée, en un sens ou un autre par des polynôme.

Il existe plusieurs méthodes d'approximation, mais nous allons aborder uniquement une méthode d'approximation dite la méthode d'interpolation de Lagrange.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ connue en $n + 1$ points distincts x_0, x_1, \dots, x_n de l'intervalle $[a, b]$. Il s'agit de construire un polynôme P de degré inférieur ou égal à n tel que :

$$\forall i = 0, 1, \dots, n \quad P(x_i) = f(x_i). \quad (1.1)$$

Théorème 1.2.1 *Il existe un et un seul polynôme de degré inférieur ou égal à n solution de (1.1). Le polynôme s'écrit*

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x). \quad (1.2)$$

où

$$L_i(x) = \prod_{k=0, k \neq i}^n \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)}. \quad (1.3)$$

Remarque 1.2.1 1/ Le polynôme P_n est appelé polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction f aux points x_0, x_1, \dots, x_n .

2/ Les polynômes $L_i(x)$ sont appelés polynômes de base de Lagrange associés à ces points.

3/ Les polynômes de Lagrange sont tels que

$$L_j(x_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{si } j = k \\ 0, & \text{si non} \end{cases}$$

Preuve. Existence : On vérifie directement que le polynôme donné par (1.2) est solution de (1.1). Pour cela, on utilise la remarque 3

Unicité : Soit Q un autre polynôme solution. Alors $\forall i = 0, 1, \dots, n$ $Q(x_i) - P(x_i) = 0$. Ainsi $Q - P$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n s'annulant en $n + 1$ points. Il est donc identiquement nul ■

Exemple 1.2.1 Soit les points suivants :

x_i	$f(x_i)$
0	0
1	2
2	36
3	252

a) Obtenir le polynôme de Lagrange passant par les 3 premiers points.

Solution 1.2.1 Le polynôme d'interpolation par Lagrange est donné par :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x)$$

où les $(n + 1)$ fonctions $L_i(x)$ sont définies par :

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

On a trois points, on veut donc un polynôme de degré 2. Si $x_0 = 0, x_1 = 1$ et $x_2 = 2$,

alors :

$$\begin{aligned}
 P_2(x) &= f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) \\
 &= f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \\
 &= 0\frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} + 2\frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} + 36\frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} \\
 &= -2x(x-2) + 18x(x-1) = 2x(2-x) + 2x(9x-9) \\
 &= 2x(2-x+9x-9) \\
 &= 2x(8x-7)
 \end{aligned}$$

b) Obtenir le polynôme de Lagrange passant par les 4 premiers points.

Solution 1.2.2 On a quatre points, on veut donc un polynôme de degré 3. Si $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$ et $x_3 = 3$, alors :

$$\begin{aligned}
 P_3(x) &= f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x) \\
 &= f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \\
 &\quad + f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + f(x_3)\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \\
 &= 0\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} + 2\frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} \\
 &\quad + 36\frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} + 252\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)} \\
 &= \frac{2x(x-2)(x-3)}{(1)(-1)(-2)} + \frac{36x(x-1)(x-3)}{(2)(1)(-1)} + \frac{252x(x-1)(x-2)}{(3)(2)(1)} \\
 &= x(x-2)(x-3) - 18x(x-1)(x-3) + 42x(x-1)(x-2)
 \end{aligned}$$

1.2.2 Interpolation de Newton

Définition 1.2.1 soit f une fonction dont on connaît les valeurs $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ qu'elle prend aux abscisses distinctes x_0, x_1, \dots, x_n .

on définit les différences divisées de f aux points x_0, x_1, \dots, x_n par les relations de récurrence :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta(x_i) = f(x_i) \\ \delta(x_i, x_{i+1}) = \frac{f(x_i) - f(x_{i+1})}{x_i - x_{i+1}} = \frac{\delta(x_i) - \delta(x_{i+1})}{x_i - x_{i+1}} \\ \delta(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = \frac{\delta(x_i, x_{i+1}) - \delta(x_{i+1}, x_{i+2})}{x_i - x_{i+2}} \\ \delta(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+p}) = \frac{\delta(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+p-1}) - \delta(x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+p})}{x_i - x_{i+p}} \end{array} \right. \quad (1.4)$$

la dernière du système (1.4) est appelée la différence divisée d'ordre p de la fonction f aux points $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+p}$

Théorème 1.2.2 le polynôme $P_n(x)$ qui prend les valeurs $f(x_i), i = 0, 1, 2, \dots, n$ aux points distincts $x_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$, peut s'écrire :

$$P_n(x) = \delta(x_0) + \delta(x_0, x_1)(x - x_0) + \delta(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \dots \quad (1.5)$$

$$\dots + \delta(x_0, \dots, x_n)(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})\dots\dots\dots(2.2)$$

Lemme 1.2.1 si $P_n(x)$ est un polynôme de degré n , sa différence divisée d'ordre $(n + 1)$ est identiquement nulle, c'est à dire : $\delta(x_0, \dots, x_n) = 0$ pour tout système de $(n+1)$ nombres distincts x_0, x_1, \dots, x_n .

Définition 1.2.2 la forme (2) du polynôme d'interpolation est appelée, forme de Newton du polynôme d'interpolation pour les différences divisées.

Exemple 1.2.2 On interpole $f(x) = \ln(x)$ par un polynôme aux points $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4, x_4 = 5$.

o Trouver une expression algébrique de ce polynôme en utilisant la méthode de Newton.

Solution 1.2.3 On interpole $f(x) = \ln(x)$ par un polynôme, aux points 1, 2, 3, 4, 5.

Il y a 5 points, donc le degré du polynôme est 4. Le polynôme de Newton est donné par :

$$P_n(x) = \delta_0 + \delta_1(x - x_0) + \delta_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + \delta_n(x - x_0)\dots(x - x_{n-1})$$

où $\delta_i = f[x_0, \dots, x_i]$ est la i -ème différence divisées. Les premières différences divisées sont données par :

$$\delta(x_i, x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

Les deuxièmes différences divisées sont données par :

$$\delta(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = \frac{\delta(x_{i+1}, x_{i+2}) - \delta(x_i, x_{i+1})}{x_{i+2} - x_i}$$

Et finalement, les n -ièmes divisées sont données par :

$$\delta(x_0, \dots, x_n) = \frac{\delta(x_1, \dots, x_n) - \delta(x_0, \dots, x_{n-1})}{x_n - x_0}$$

On construit donc la table des différences divisées comme suit :

i	x_i	$\delta(x_i)$	$\delta(x_i, x_{i+1})$	$\delta(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$	$\delta(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3})$	$\delta(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+4})$
0	1	0,0				
1	2	0,6931471806	0,6931471806			
2	3	1,098612289	0,4054651084	-0,1438410361		
3	4	1,386294361	0,287682072	-0,0588915182	0,02831650597	
4	5	1,609437912	0,223143551	-0,0322692605	0,00887408590	-0,004860605018

Notre polynôme de Newton de degré 4 est donc :

$$\begin{aligned} P_4(x) &= \delta_0 + \delta_1(x - x_0) + \delta_2(x - x_0)(x - x_1) + \delta_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \delta_4(x - x_0)(x - \\ & x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\ &= 0,6931471806(x-1) - 0,1438410361(x-1)(x-2) + 0,02831650597(x-1)(x-2)(x-3) \\ & - 0,004860605018(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \\ &= -1,267382809 + 1,679182105x - 0,4838612475x^2 + 0,07692255615x^3 - 0,004860605018x^4 \end{aligned}$$

1.2.3 Interpolation de Hermite

L'interpolation d'Hermite est une extension de l'interpolation de Lagrange, qui consiste, pour une fonction dérivable donnée et un nombre fini de points donnés

Nous construisons un polynôme d'interpolation en utilisant les valeurs de f et de sa dérivée. supposons f de classe C^1 sur $[a, b]$. On va chercher maintenant un polynôme P tel que pour tout $0 \leq j \leq n$

$$\begin{cases} f(x_j) = P(x_j) \\ f'(x_j) = P'(x_j) \end{cases}$$

Le polynôme P est de degré $2n + 1$. Pour ça, nous utilisons les polynômes H_k et \widehat{H}_k tels que

$$H_k(x_j) = \delta_{kj}, \quad H'_k(x_j) = 0, \quad \widehat{H}_k(x_j) = 0, \quad \text{et} \quad \widehat{H}'_k(x_j) = \delta_{jk}$$

pour tous $0 \leq k, j \leq n$. Avec la base de Lagrange, nous pouvons écrire

$$\begin{cases} H_k(x) = L_k(x)^2(1 - 2L'_k(x_k)(x - x_k)) \\ \widehat{H}_k(x) = L_k(x)^2(x - x_k). \end{cases}$$

Théorème 1.2.3 Soient x_0, \dots, x_n des points de $[a, b]$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . Il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à $2n + 1$ tel que pour tout $0 \leq j \leq n$

$$P(x_j) = f(x_j), \quad \text{et} \quad P'(x_j) = f'(x_j).$$

Il s'écrit,

$$P(x) = \sum_{k=0}^n (f(x_k)H_k(x) + f'(x_k)\widehat{H}_k(x)).$$

De plus, si f est de classe C^{2n+1} alors

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{\|f^{(2n+2)}\|_{\infty}}{(2n+2)!} |\pi_n(x)|^2, \quad \text{pour tout } x \in [a, b].$$

Exemple 1.2.3 Soit $f(x) = \frac{1}{1+x^2}, x \in [0, 1]$

Déterminer le polynôme d'interpolation d'Hermite de f aux points $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$.

Solution 1.2.4 Sous la forme de Hermite, P_3 s'écrit : $P_3(x) = H_0(x) + \frac{1}{2}H_1(x) - \frac{1}{2}K_1(x)$,

où

$$H_0(x) = [L_0(x)]^2 (1 - 2L_0'(x_0)(x - x_0)) = 2x^3 - 3x^2 + 1$$

$$H_1(x) = [L_1(x)]^2 (1 - 2L_1'(x_1)(x - x_1)) = -2x^3 + 3x^2$$

$$\hat{H}_1(x) = [L_1(x)]^2 (x - x_1) = x^3 - x^2$$

D'où,

$$P_3(x) = \frac{1}{2}x^3 - x^2 + 1$$

1.3 Erreur d'interpolation :

Dans la pratique, l'interpolation polynomiale sert à remplacer une fonction f qui est soit inconnue, soit trop compliquée, par une fonction plus simple, en l'occurrence un polynôme. On dit que l'on approxime f par le polynôme d'interpolation P_n . Quand on utilise une approximation, comme c'est le cas dans de nombreuses méthodes d'analyse numérique, il est fondamental d'étudier l'erreur d'approximation. Naturellement, sauf cas particulier, l'expression de l'erreur ne permet pas son calcul exact elle peut cependant être très utile pour en calculer une majoration. C'est ainsi que pour l'interpolation polynomiale on démontre :

Théorème 1.3.1 soit $[a, b]$ un intervalle contenant x_0, x_1, \dots, x_n . on suppose que f est $(n+1)$ fois dérivable sur $[a, b]$.

Alors, pour tout $x \in [a, b]$, il existe $\xi \in [a, b]$ tel que :

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i) \quad (1.6)$$

où

$$\prod_{i=0}^n (x - x_i) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)$$

Remarque 1.3.1 La formule (1.6) ne permet évidemment pas de calculer la valeur exacte de l'erreur parce que, en général, ξ est inconnu. Elle permet par contre, d'en calculer une majoration. D'où :

Corollaire 1.3.1 Sous les hypothèses du théorème (1.6), on a :

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| \quad \text{où} \quad M_{n+1} = \max_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)| \quad (1.7)$$

Exemple 1.3.1 Avec quelle précision peut-on calculer $\sqrt{115}$ à l'aide de la formule de Lagrange pour la fonction $f(x) = \sqrt{x}$, si les points d'interpolation sont :

$$x_0 = 100, x_1 = 121, x_2 = 144 ?$$

Solution 1.3.1 Notons par $P_2(x)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à f aux points x_0, x_1 et x_2 .

On a :

$$|f(x) - P_3(x)| \leq \frac{M_3}{3!} \left| \prod_{i=0}^2 (x - x_i) \right| \quad \text{où} \quad M_3 = \max_{x \in [x_0, x_2]} |f^{(3)}(x)|$$

avec :

★ En posant
$$v(x) = \prod_{i=0}^2 (x - x_i) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) = (x - 100)(x - 121)(x - 144)$$

alors
$$v(115) = 2610$$

★ $f(x) = x^{\frac{1}{2}}, f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}, f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$ et $f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$

et delà :
$$M = \max_{x \in [100, 144]} |f^{(3)}(x)| = \frac{3}{8}10^{-5}$$

Ainsi, pour $x = 115$:
$$|f(115) - P_2(115)| \leq \frac{3}{8}10^{-5} \frac{1}{3!} 2610 \simeq 0.16 \cdot 10^{-2}$$

et donc $P_2(115)$ est une valeur approchée de $f(115)$, calculée avec (au moins) deux décimales exactes.

Chapitre 2

Méthodes d'intégration numérique

2.1 Introduction

Dans ce chapitre on voit les méthodes d'intégration numérique les plus connues et utilisées d'une fonction avec une certaine erreur

On veut calculer $\int_a^b f(x)dx$. On décompose l'intervalle $[a, b]$ en $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. On a alors

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx.$$

sur chaque $[x_{i-1}, x_i]$, on applique une méthode d'intégration élémentaire consistant à remplacer $f(x)$ par

$$P_i(x) = f[x_{i,0}] + f[x_{i,0}, x_{i,1}](x - x_{i,0}) + \dots + f[x_{i,0}, x_{i,1}, \dots, x_{i,l}](x - x_{i,0}) \dots (x - x_{i,l})$$

soit le polynôme d'interpolation de f en des points $x_{i,0}, \dots, x_{i,l}$ de l'intervalle $[a, b]$ (qui peuvent être ou non dans $[x_{i-1}, x_i]$).

2.2 Position du problème

On veut évaluer l'intégrale d'une fonction f sur un intervalle $[a, b]$. Si l'on connaît sa primitive F , alors

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad \text{où } F' = f.$$

Mais dans de nombreux cas, F ne peut pas être connue.

Exemple 2.2.1 $\int_a^b \frac{\sin(x)}{x} dx, \int_a^b e^{-x^2} dx, \int_a^b \sqrt{1 - k \sin(x)} dx, \int_a^b \frac{1}{\sqrt{1 - \sin(x)}} dx.$

La plupart des fonctions qui impliquent dans les problèmes physiques sont des fonctions très compliquées pour être intégrées. Nous cherchons donc une valeur approchée à l'aide de sommes finies, qu'on appellera une formule de quadrature :

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \simeq I_n(f) = \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i)$$

où les $x_i, i = 0, \dots, n$ sont appelés points d'intégration et les $\alpha_i = 0, \dots, n$ poids de la formule de quadrature.

2.3 Méthode de Newton cotes simples

2.3.1 Principe

Le principe générale des méthodes de Newton-Cotes simples est d'approximer la fonction $f(x)$ à intégrer par un polynôme $P(x) \approx f(x)$. Si cette approximation est suffisamment bonne alors, l'intégrale de ce polynôme

$$\tilde{I} = \int_a^b P(x)dx$$

sera une bonne approximation de $I = \int_a^b f(x)dx$. L'avantage est que l'on sait calculer analytiquement la valeur exacte de \tilde{I} . Dans ces méthodes, on choisit des polynômes de

degré p qui coïncident avec $f(x)$ en $p + 1$ points distincts.

2.3.2 Méthode du rectangle ($p = 0$)

Cette méthode utilise le polynôme de degré le plus bas, à savoir le polynôme constant :

$$P_0(x) = f(a) = f_0.$$

L'intégrale approchée $\tilde{I}_0 = \int_a^b P_0(x)dx$ se calcule alors :

$$\tilde{I}_0 = (b - a)f_0$$

Il s'agit de l'aire du rectangle.

Cette intégrale numérique nécessite une unique évaluation de la fonction f (en $x_0 = a$) et représente donc ce qu'on peut faire de plus rapide.

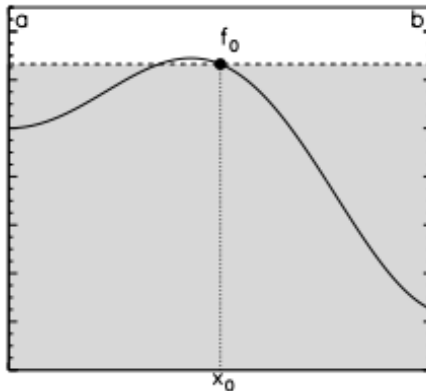


FIG. 2.1 – Méthode du rectangle ($p = 0$)

L'erreur

L'erreur peut être estimée en utilisant les développements en série de Taylor ou le théorème des accroissements finis on trouve alors pour $h = b - a$:

$$\exists \xi \in [a, b] \quad \epsilon_0 = \frac{h^2}{2} f'(\xi) \quad \text{c.a.d} \quad |\epsilon_0| \leq \frac{h^2}{2} \sup_{[a,b]} (|f'|)$$

Démonstration

Pour calculer l'erreur, on peut utiliser le théorème des accroissements finis : $\forall x \in [a, b], \exists \xi \in [a, b]$ tel que :

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(\xi)$$

En remplaçant dans l'expression de l'intégrale et de l'erreur, on trouve :

$$\begin{aligned} \epsilon &= I - \tilde{I} \\ &= \int_a^b (f(x) - P_0(x)) dx = \int_a^b (f(x) - f(a)) dx \\ &= \int_a^b (x - a) f'(\xi) dx = f'(\xi) \int_0^{b-a} x dx \\ &= \frac{(b - a)^2}{2} f'(\xi) = \frac{h^2}{2} f'(\xi) \end{aligned}$$

L'erreur ϵ n'est pas connue car la valeur de $\xi \in [a, b]$ reste indéterminée. Cependant, on peut la majorer par la plus grande valeur de la dérivée sur le domaine considéré. Quelques remarques sur cette erreur :

- ◆ Cette méthode d'intégration est exacte pour toutes les fonctions f constantes (dans ce cas $\epsilon_0 = 0$ puisque qu'elles vérifient $f' = 0$). Dans le cas plus général cette méthode est d'autant plus précise que les variations de f sont faibles (f' petit)
- ◆ Plus le domaine $[a, b]$ est petit, plus l'erreur est faible. Cette erreur décroît en h^2 .

2.3.3 Méthode du point milieu ($p = 0$)

Cette méthode utilise également le polynôme constant pour approximer la fonction f . Cependant, elle exploite mieux les symétries du problème en choisissant la valeur milieu :

$$P_0(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f_0$$

L'intégrale approchée $\tilde{I}_0 = \int_a^b P_0(x)dx$ se calcule alors :

$$\tilde{I}_0 = (b - a)f_0$$

Cette méthode nécessite une unique évaluation de la fonction f (en $x_0 = \frac{(a + b)}{2}$) et correspond donc aussi à ce qu'on peut faire de plus rapide.

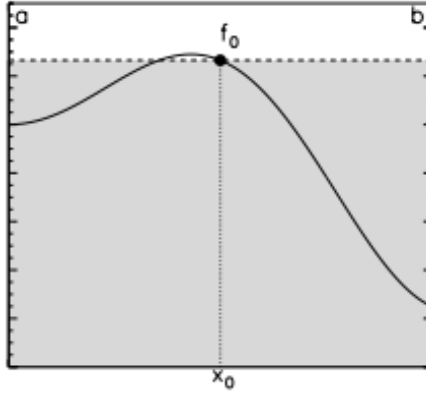


FIG. 2.2 – Méthode du point milieu ($p = 0$)

L'erreur

L'erreur peut être estimée en utilisant les développements en série de Taylor, ou le théorème des accroissements finis. On trouve alors pour $h = b - a$:

$$\exists \xi \in [a, b] \quad \epsilon_0 = \frac{h^3}{24} f''(\xi) \quad c.a.d \quad |\epsilon_0| \leq \frac{h^3}{24} \sup_{[a,b]}(|f''|)$$

Démonstration

Pour calculer l'erreur, on peut utiliser le théorème des accroissements finis au deuxième ordre : $\forall x \in [a, b], \exists \xi \in [a, b]$ tel que :

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \frac{f''(\xi)}{2}$$

En remplaçant dans l'expression de l'intégrale et de l'erreur, on trouve :

$$\begin{aligned}
 \epsilon &= I - \tilde{I} \\
 &= \int_a^b (f(x) - P_0(x)) dx = \int_a^b (f(x) - f(\frac{a+b}{2})) dx \\
 &= \int_a^b \left[(x - \frac{a+b}{2}) f'(\frac{a+b}{2}) + (x - \frac{a+b}{2})^2 \frac{f''(\xi)}{2} \right] dx \\
 &= f'(\frac{a+b}{2}) \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} x dx + \frac{f''(\xi)}{2} \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} x^2 dx = 0 + \frac{f''(\xi)}{3} (\frac{b-a}{2})^3 = \frac{h^3}{3} f''(\xi)
 \end{aligned}$$

L'erreur ϵ n'est pas connue car la valeur de $\xi \in [a, b]$ reste indéterminée. Cependant, on peut la majorer par la plus grande valeur de la dérivée seconde sur le domaine considéré.

Quelques remarques sur cette erreur :

◆ Du fait des symétries, cette méthode d'intégration est exacte pour les fonctions f constante, mais aussi pour les fonctions affines (dans ce cas $\epsilon_0' = 0$ puisqu'elles vérifient $f'' = 0$).

◆ Dans le cas plus général, cette méthode est d'autant plus précise que les variations de f sont faibles (f'' petit).

◆ Plus le domaine $[a, b]$ est petit, plus l'erreur est faible. Cette erreur décroît en h^3 , c'est à dire plus vite que l'erreur de la méthode précédente : $\epsilon_0'/\epsilon_0 \propto h \rightarrow 0$. Ainsi, pour des domaines $[a, b]$ suffisamment petits, la méthode du point milieu est toujours plus précise que la méthode précédente.

2.3.4 Méthode du trapèze ($p = 1$)

Pour approximer la fonction f , cette méthode utilise le polynôme d'ordre 1 qui passe par $f_0 = f(a)$ et $f_1 = f(b)$:

$$P_1(x) = \frac{f_0 + f_1}{2} + \frac{f_1 - f_0}{b - a} (x - \frac{a + b}{2})$$

L'intégrale approchée $\tilde{I}_1 = \int_a^b P_1(x) dx$ se calcule alors mathématiquement ou géomé-

triquement et donne :

$$\tilde{I}_1 = (b - a) \frac{f_0 + f_1}{2}$$

Cette méthode nécessite deux évaluations de la fonction f (en a et en b). Elle est donc en gros deux fois plus lente que les méthodes précédentes.

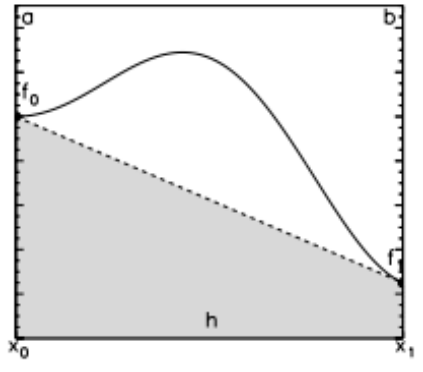


FIG. 2.3 – Méthode du trapèze ($p = 1$)

L'erreur

L'erreur peut être estimée en utilisant les développements en série de Taylor, ou le théorème des accroissements finis. On trouve alors pour $h = b - a$:

$$\exists \xi \in [a, b] \quad \epsilon_1 = -\frac{h^3}{12} f''(\xi) \quad c.a.d \quad |\epsilon_1| \leq \frac{h^3}{12} \sup_{[a,b]}(|f''|)$$

L'erreur ϵ n'est pas connue car la valeur de $\xi \in [a, b]$ reste indéterminée. Cependant, on peut la majorer par la plus grande valeur de la dérivée seconde sur le domaine considéré. Les remarques sur l'erreur sont les mêmes que pour la méthode du point milieu. En précision, cette méthode est donc équivalente à celle du point milieu ($\epsilon_1 \approx \epsilon_0$), mais elle est deux fois plus lente.

2.3.5 Méthode de Simpson simple ($p = 2$)

Pour approximer la fonction f , cette méthode utilise le polynôme de degré 2 (la parabole) qui passe par les trois points $f_0 = f(a)$, $f_1 = f(\frac{a+b}{2})$ et $f_2 = f(b)$:

$$P_2(x) = 2 \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{(x_2 - x_0)^2} (x - x_1)^2 + \frac{f_2 - f_0}{x_2 - x_0} (x - x_1) + f_1$$

L'intégrale approchée $\tilde{I}_2 = \int_a^b P_2(x) dx$ se calcule alors simplement et donne :

$$\tilde{I}_2 = (b - a) \frac{f_0 + 4f_1 + f_2}{6}$$

Cette méthode nécessite trois évaluations de la fonction f (en $x_0 = a, x_1 = \frac{a+b}{2}$ et $x_2 = b$). Elle est donc en gros 3 fois plus lente que les méthodes à 1 point.

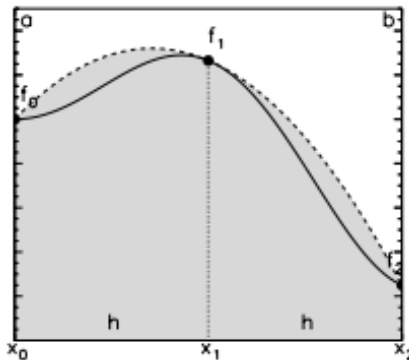


FIG. 2.4 – Méthode de Simpson simple ($p = 2$)

L'erreur

L'erreur peut être estimée en utilisant les développements en série de Taylor, ou le théorème des accroissements finis.

On trouve alors pour $h = \frac{(b-a)}{2}$:

$$\exists \xi \in [a, b] \quad \epsilon_2 = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi) \quad c.a.d \quad |\epsilon_2| \leq \frac{h^5}{90} \sup_{[a,b]} (|f^{(4)}|)$$

L'erreur ϵ n'est pas connue car la valeur de $\xi \in [a, b]$ reste indéterminée. Cependant, on peut la majorer par la plus grande valeur de la dérivée quatrième sur l'intervalle considéré. Quelques remarques sur cette erreur :

◆ Cette méthode d'intégration est exacte pour les fonctions f polynomiales d'ordre 3 (car elles vérifient $f^{(4)} = 0$), ce qui inclut en particulier les fonctions constantes, les fonctions affines, et les paraboles par exemple. Plus généralement elle est d'autant plus précise que les variations de f sont faibles ($f^{(4)}$ petit).

◆ Plus l'intervalle $[a, b]$ est petit, plus l'erreur est faible. Cette erreur décroît en h^5 lorsque h diminue, c'est à dire beaucoup plus rapidement que les méthodes précédentes : $\epsilon_2/\epsilon_0 \propto h^3 \rightarrow 0$, $\epsilon_2/\epsilon_{0'} \propto \epsilon_2/\epsilon_1 \propto h^2 \rightarrow 0$. Ainsi, pour des intervalles $[a, b]$ suffisamment petits, la méthode de Simpson est toujours plus précise que les méthodes précédentes.

2.4 Méthode de Newton-Cotes composites

2.4.1 Principe

L'idée est donc de découper le domaine total d'intégration $[a, b]$ en m intervalles. On approxime alors l'aire $\tilde{I}_k, k \in [0, m - 1]$ de chaque intervalle par des méthodes de Newton-Cotes simples, et on en déduit une approximation de domaine totale par une simple somme

$$\tilde{I} = \sum_{k=0}^{m-1} \tilde{I}_k$$

En utilisant sur chaque intervalle des méthodes de Newton-Cotes simples de degrés différents, on obtient des méthodes composites aux propriétés et aux performances différentes. Sur chaque intervalle, une méthode de degré $p + 1$ évalue la fonction à intégrer en $p + 1$ points, ce qui revient à le subdiviser en p sous-intervalles. Si on applique ce principe à m intervalles contigus, la méthode de Newton-Cotes composite définit $n = m * p$ sous-intervalles au total et nécessite l'évaluation de $n + 1$ points. Plus ce nombre est élevé, plus

la méthode est lente mais, en général, plus elle est précise. Les comparaisons de méthodes de différents degrés se feront donc à nombre total de points n commun, c'est à dire à rapidité équivalente. Les méthodes les plus précises seront les plus performantes.

Dans certains cas, ces m intervalles peuvent être espacés de manière non régulière pour mieux représenter une zone où la fonction $f(x)$ varie beaucoup, mais dans cette partie, nous nous limiterons au cas d'intervalles réguliers.

2.4.2 Méthode des rectangles ($p = 0$, $n = m$)

La méthode des rectangles composite applique la méthode des rectangles simple ($p = 0$) sur chacun des m intervalles. Le nombre total de sous-intervalles est donc $n = m$. L'aire de chaque intervalle vaut :

$$\tilde{I}_{0,k} = (x_{k+1} - x_k)f_k = hf_k.$$

Si bien que l'intégrale totale vaut :

$$\begin{aligned} \tilde{I}_0 &= h(f_0 + f_1 + \dots + f_{n-1} + 0 \times f_n) \\ &= h \sum_{k=0}^{n-1} f_k. \end{aligned}$$

Dans cette formule, tous les points ont le même coefficient (1), sauf le dernier point f_n qui n'est pas utilisé (coefficient 0).

L'erreur est simplement la somme de toutes les erreurs :

$$\begin{aligned} \epsilon_0 &= \sum_{k=0}^{n-1} \epsilon_{0,k} = \frac{h^2}{2} \sum_{k=0}^{n-1} f'(\xi_k) \\ &= \frac{h^2}{2} n f'(\xi). \end{aligned}$$

$$|\epsilon_0| \leq \frac{(b-a)^2}{2n} \sup_{[a,b]} (|f'|).$$

où l'on a utilisé le fait que $h = \frac{(b-a)}{n}$ pour la dernière inégalité. A nouveau, cette méthode est exacte pour les fonctions constantes. Plus généralement, elle est d'autant plus précise que le nombre de points

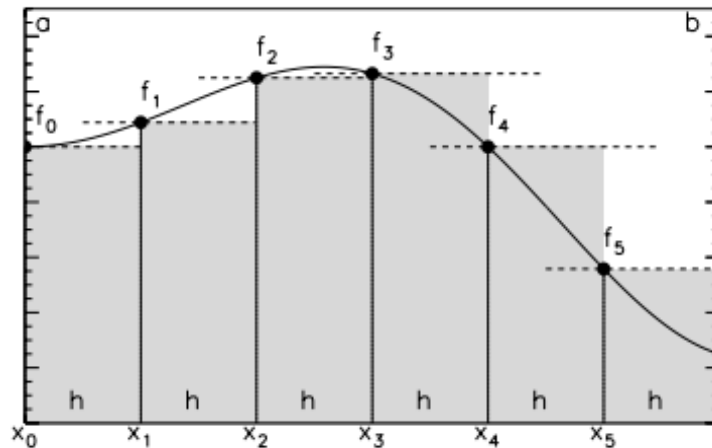


FIG. 2.5 – Méthode composite des rectangles ($p = 0$) pour $m = 6$ intervalles (c'est à dire $n = 6$ sousintervalles et $n + 1 = 7$ points au total).

2.4.3 Méthode des trapèzes ($p = 1$, $n = m$)

La méthode des trapèzes composite applique la méthode des trapèzes simple ($p = 1$) sur chacun des m intervalles. Le nombre total de sous-intervalles est donc à nouveau $n = m$. Chaque intégrale vaut :

$$\tilde{I}_{1,k} = (x_{k+1} - x_k) \frac{f_k + f_{k+1}}{2}$$

Si bien que l'intégrale totale vaut :

$$\begin{aligned}
 \tilde{I}_1 &= \int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \\
 &\simeq \frac{h}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_k) + f(x_{k+1})) \\
 &= \frac{h}{2} (f(x_0) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{k-1}) + f(x_n)) \\
 &= \frac{h}{2} (f(a) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b)).
 \end{aligned}$$

C'est la formule des trapèze composite sur l'intervalle $[a, b]$.

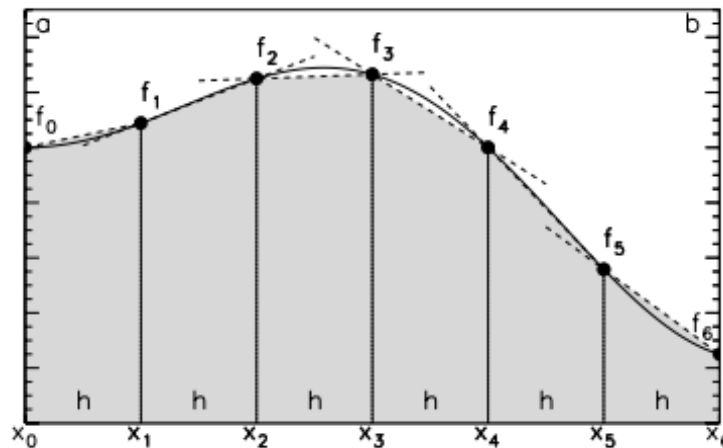


FIG. 2.6 – Méthode composite des trapèzes ($p = 1$), pour $m = 6$ intervalles (c'est à dire $n = 6$ sousintervalles et $n + 1 = 7$ points au total).

L'erreur est simplement la somme de toutes les erreurs :

$$\begin{aligned}\epsilon_1 &= \frac{\epsilon_{1,0}}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \epsilon_{1,k} + \frac{\epsilon_{1,n}}{2} \\ &= -\frac{h^3}{12} \left(\frac{f''(\xi_0)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f''(\xi_k) + \frac{f''(\xi_n)}{2} \right) \\ &= -\frac{h^3}{12} n f''(\xi)\end{aligned}$$

$$|\epsilon_1| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \sup_{[a,b]}(|f''|)$$

où l'on a utilisé le fait que $h = \frac{(b-a)}{2}$. A nouveau, cette méthode est exacte pour les fonctions constantes et affines (et même les paraboles en fait)

Exemple 2.4.1 Soit $f(x) = x^2$, $a = 0$, $b = 1$, on prend $n = 3$ subdivisions.

Donc $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{3}$, $x_0 = a = 0$, $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{2}{3}$, $x_3 = b = 1$ avec $y_0 = f(x_0) = 0$, $y_1 = f(x_1) = \frac{1}{9}$, $y_2 = f(x_2) = \frac{4}{9}$ et $y_3 = f(x_3) = 1$.

$$I(f) = \int_0^1 x^2 dx \simeq I_3(f) = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + y_3) = \frac{19}{54} \simeq 0.351$$

Erreur d'approximation : $I(f) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \simeq 0.333$, d'où,

$$\text{Erreur relative} \simeq \frac{|0.351 - 0.333|}{0.333} = 5,4\%$$

Par contre, si $n = 6$, l'erreur relative $\simeq 1.5\%$

On remarque numériquement que l'erreur a été divisée-approximativement-par 4 lorsque n a doublé (de $n = 3$ à $n = 6$), l'erreur dépend donc de h .

À nouveau, l'erreur est simplement la somme de toutes les erreurs :

$$\begin{aligned}\epsilon_2 &= \dots \\ &= -\frac{h^5}{90} m f^{(4)}(\xi)\end{aligned}$$

$$|\epsilon_2| \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} \sup_{[a,b]} (|f^{(4)}|)$$

où l'on a utilisé le fait que $h = \frac{(b-a)}{n}$ et $n = 2m$.

Exemple 2.4.2 *Application à l'exemple précédent, avec $n = 4$:*

$f(x) = x^2, a = 0, b = 1, h = \frac{1}{4}$, d'après la formule de Simpson

$$\int_a^b f(x) dx \simeq I_2(f) = \frac{h}{3} (y_0 + y_4 + 2y_2 + 4(y_1 + y_3)) = \frac{1}{12} (0 + 1 + \frac{5}{2} + \frac{1}{2}) = \frac{1}{3}$$

Recherche de l'erreur d'approximation

$$\text{On a } |\epsilon_2| \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} \sup_{[a,b]} (|f^{(4)}|)$$

Ceci implique que la formule de Simpson est exacte si f est un polynôme de degré inférieur

ou égal à 3. De plus, cette formule est de degré de précision égal à 3. En effet ;

pour $f(x) = x^4, n = 2, x_0 = a, x_1 = \frac{a+b}{2}$ et $x_2 = b$:

$$I(f) = \int_a^b x^4 dx = \left[\frac{x^5}{5} \right]_a^b = \frac{b-a}{5} (b^4 + ab^3 + a^2b^2 + a^3b + a^4)$$

alors que

$$I_2(f) = \frac{b-a}{6} (a^4 + 4(\frac{a+b}{2})^4 + b^4) = \frac{b-a}{24} (5b^4 + 4ab^3 + 6a^2b^2 + 4a^3b + 5a^4)$$

On voit clairement que $I(f) \neq I_2(f)$.

2.5 Formules de Gauss

On se pose la question suivante : comment choisir au mieux les points d'intégration x_i pour que la formule de quadrature soit de degré de précision le plus élevé possible ? Le problème revient donc à trouver à la fois les poids $\alpha_i^{(n)}, i = 0, \dots, n$ et les points $x_i, i = 0, \dots, n$ de la formule de quadrature :

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \sum_{i=0}^n \alpha_i^{(n)} f(x_i)$$

On a donc $2n + 2$ inconnues à déterminer !

On cherche alors une formule de quadrature exacte sur P_{2n+1} , ce qui donne les $2n + 2$ équations :

$$\int_a^b x^k dx = \sum_{i=0}^n \alpha_i^{(n)} x_i^k \quad k = 0, \dots, 2n + 1.$$

Remarque 2.5.1 *Le degré de précision de la formule proposée peut-il être $2n + 2$?*

La réponse est non. En effet ; soit le polynôme de degré $2n + 2$,

$$Q(x) = (x - x_0)^2(x - x_1)^2 \dots (x - x_n)^2.$$

Ce polynôme est strictement positif (si $x \neq x_i, i = 0, \dots, n$) donc $\int_a^b Q(x) dx > 0$, alors que $\sum_{i=0}^n \alpha_i^{(n)} Q(x_i) = 0$

Théorème 2.5.1 *Les formules de type Gauss sont stables et convergentes pour toute fonction continue.*

Remarque 2.5.2 *1/ Stable signifie les poids intervenant dans la formule de quadrature sont strictement positifs.*

2/ Convergente signifie $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^n \alpha_i^{(n)} f(x_i) = \int_a^b f(x) dx$.

3/ Les formules de type Gauss sont souvent utiles pour les intégrales impropres convergentes.

Exemple 2.5.1 Soit la formule de quadrature à 2 points :

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(x_1) + \epsilon(f) \text{ tel que } \epsilon(f) = I(f) - \tilde{I}(f).$$

Déterminons les poids α_0, α_1 et les points d'intégration x_0 et x_1 pour que la formule proposée soit exacte sur P_3 . Les quatre équations sont les suivantes :

$$\begin{aligned} f \equiv 1, \epsilon(f) = 0, &\iff \int_{-1}^1 1dx = 2 = \alpha_0 + \alpha_1 \\ f(x) = x, \epsilon(f) = 0 &\iff \int_{-1}^1 xdx = 0 = \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 \\ f(x) = x^2, \epsilon(f) = 0 &\iff \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3} = \alpha_0 x_0^2 + \alpha_1 x_1^2 \\ f(x) = x^3, \epsilon(f) = 0 &\iff \int_{-1}^1 x^3 dx = 0 = \alpha_0 x_0^3 + \alpha_1 x_1^3. \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{cases} \alpha_0 x_0 = -\alpha_1 x_1 \\ \alpha_0 x_1 (x_1^2 - x_0^2) = 0 \end{cases}$$

De la dernière équation on tire :

-soit $\alpha_1 = 0$, $\alpha_0 = 2$ et $x_0 = 0$ ce qui est impossible puisque $\alpha_0 x_0^2 + \alpha_1 x_1^2 = \frac{2}{3}$,

-soit $x_1 = 0$, $\alpha_0 = 0$ ou $x_0 = 0$ ce qui est impossible,

-soit $x_1 = -x_0$ et dans ce cas, on obtient $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$.

D'où la formule de quadrature :

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \epsilon(f).$$

Remarque 2.5.3 Il existe des formules de type Gauss où les extrémités de l'intervalle sont des points d'intégration :

Formule de Gauss-Radau de degré de précision 2 :

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \frac{1}{2}f(-1) + \frac{3}{2}f\left(\frac{1}{3}\right) + \epsilon(f).$$

Formule de Gauss-Labatto de degré de précision 3 :

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \frac{1}{3}f(-1) + \frac{4}{2}f(0) + \frac{1}{3}f(1) + \epsilon(f).$$

Formule de Gauss-Labatto de degré de précision 5 :

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \frac{1}{6}f(-1) + \frac{5}{6}f\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \frac{5}{6}f\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \frac{1}{6}f(1) + \epsilon(f).$$

Chapitre 3

L'intégration numérique multiple

3.1 Introduction

il existe une vaste famille d'algorithmes dont le but principal est d'estimer la valeur numérique de l'intégrale définie sur un domaine particulier pour une fonction donnée (par exemple l'intégrale d'une fonction d'une variable sur un intervalle).

Nous avons étudié l'intégration numérique à une variable dans le chapitre précédent et on va voir dans ce chapitre l'intégration numérique de deux variables

3.2 Intégration numérique d'une fonction en 2 variables

3.2.1 Par la méthode d'intégration d'une seule variable

On se donne une fonction continue $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$. Approcher par la méthode des trapèzes

$$I(f) = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx.$$

Supposons que $I(f)$ peut être écrit sous la forme

$$I(f) = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

Posons $g(x) = \int_c^d f(x, y) dy$ et divisons, par analogie au cas d'une seule variable, l'intervalle $[a, b]$ en n parties égales et l'intervalle $[c, d]$ en m parties égales. Ceci induit deux pas de discrétisation $h = \frac{b-a}{n}$ et $k = \frac{c-d}{m}$, alors

$$I(f) = \int_a^b g(x) dx \simeq \frac{h}{2} (g(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} g(x_i) + g(b)). \quad (3.1)$$

D'autre part, on applique la formule des trapèzes pour approcher $g(x) = \int_c^d f(x, y) dy$ avec x constante et y variable, on obtient

$$g(x) \simeq \frac{k}{2} (f(x, c) + 2 \sum_{j=1}^{m-1} f(x, y_j) + f(x, d)). \quad (3.2)$$

En substituant (3.2) dans (3.1), on aura

$$\begin{aligned} I(f) &\simeq \frac{h}{2} \left(\frac{k}{2} (f(a, c) + 2 \sum_{j=1}^{m-1} f(a, y_j) + f(a, d)) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{k}{2} f(x_i, c) \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{j=1}^{m-1} f(x_i, y_j) + f(x_i, d) \right) + \frac{k}{2} (f(b, c) + 2 \sum_{j=1}^{m-1} f(b, y_j) + f(b, d)) \\ &= \frac{hk}{4} (f(a, c) + f(a, d) + f(b, c) + f(b, d) + 2 \left(\sum_{j=1}^{m-1} f(a, y_j) + \sum_{j=1}^{m-1} f(b, y_j) \right) \\ &\quad + 2 \left(\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i, c) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i, d) \right) + 4 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_{ij} f(x_i, y_j)) \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \alpha_{ij} f(x_i, y_j), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
 x_i &= a + ih, \quad x_n = b, \quad y_j = c + jk, \quad y_m = d \quad j = \overline{0, m} \\
 \alpha_{00} &= \alpha_{n0} = \alpha_{m0} = \alpha_{nm} = \frac{hk}{4} \\
 \alpha_{0j} &= \alpha_{nj} = \alpha_{i0} = \alpha_{im} = \frac{hk}{2}, \quad i = \overline{1, n-1} \quad j = \overline{1, m-1} \\
 \alpha_{ij} &= hk, \quad i = \overline{1, n-1} \quad j = \overline{1, m-1}.
 \end{aligned}$$

Remarque 3.2.1 *Ce procédé peut être adapté au calcul numérique d'intégrales triples ou multiples.*

3.2.2 Par la méthode d'intégration de deux variable

Soit Ω un domaine polygonale. On recouvre exactement par des domaines élémentaires du type triangle

Le domaine Ω est partitionné en N triangles K_i tel que :

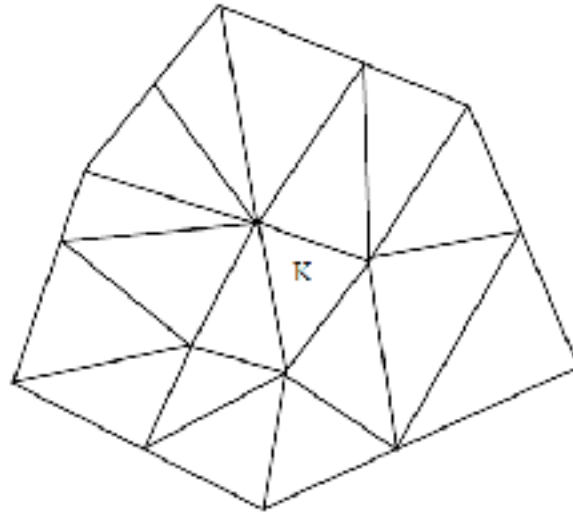
$$\Omega = \cup_{i=1}^N K_i$$

La méthode composite s'écrit alors :

$$\int_{\Omega} f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^N \int_{K_i} f(x, y) dx dy$$

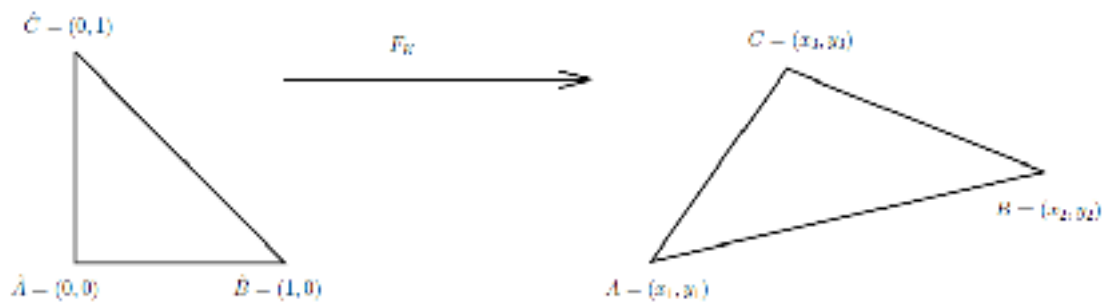
Alors il suffit de déterminer une approximation de $\int_{K_i} f$ pour obtenir celle sur Ω

Comme en une seul variable 1, on va construire des méthodes d'intégrations sur un triangle de référence fixe \hat{K} et puis en déduire celle sur un triangle quelconque.



Transformation affine de \widehat{K} dans K

Soit \widehat{K} le triangle de référence de sommets $\widehat{A} = (0, 0)$, $\widehat{B} = (1, 0)$, $\widehat{C} = (0, 1)$. On désigne par K un triangle quelconque de sommets $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, et $C = (x_3, y_3)$



On cherche la transformation affine inversible

$$F_k : \widehat{K} \mapsto K$$

$$F \begin{pmatrix} \widehat{x} \\ \widehat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\widehat{x} + a_{12}\widehat{y} + b_1 \\ a_{21}\widehat{x} + a_{22}\widehat{y} + b_2 \end{pmatrix}$$

L'application F_K est déterminée de façon unique par

$$F_k(\widehat{A}) = A, F_k(\widehat{B}) = B, F_k(\widehat{C}) = C.$$

en effet

$$\begin{aligned} F \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \Rightarrow b_1 = x_1, b_2 = y_1 \\ F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow a_{11} = x_2 - x_1, a_{21} = y_2 - y_1 \\ F \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} \Rightarrow a_{12} = x_3 - x_1, a_{22} = y_3 - y_1. \end{aligned}$$

L'application F_K s'écrit

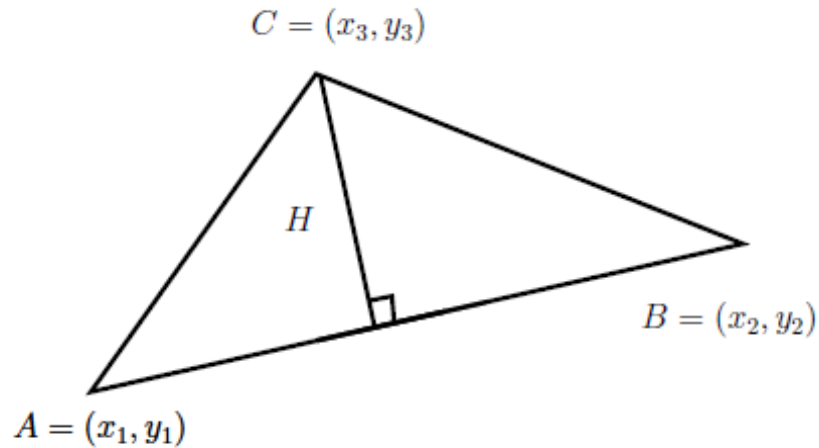
$$F_k(\widehat{X}) = X = J_k \widehat{X} + b = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{x} \\ \widehat{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

avec J_K dépend de K et F_K est inversible $\iff \det J_k \neq 0$. On a $\det J_k = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)$. On montre que $|\det J_k| = 2\text{aire}(K)$. En effet

$$\text{On a } \text{aire}(K) = \frac{H |\overrightarrow{AB}|}{2}.$$

On considère les deux vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} , on a $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \sin \theta$, or $\sin \theta = \frac{H}{|\overrightarrow{AC}|}$, aussi $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}| H = 2\text{aire}(K)$. D'autre part, $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} =$

$$\begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \end{pmatrix} = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1).$$



Changement de variable

On pose $X = F_K(\hat{X})$, on a

$$\int_k f(x, y) dx dy = \int_{\hat{K}} (f \circ F_k)(\hat{X}) |\det \nabla F_k| d\hat{x} d\hat{y}$$

soit encore

$$\int_k f(x, y) dx dy = 2\text{aire}(K) \int_{\hat{K}} (f \circ F_k)(\hat{X}) d\hat{x} d\hat{y}$$

cette formule est très intéressante car on connaît $\text{aire}(K)$ en fonction des coordonnées des sommets et en posant $g = f \circ F_K$, il suffit alors de construire des formules d'intégrations sur le triangle de référence \hat{K} .

Conclusion

En conclusion, dans ce mémoire que l'intégration numérique est une méthode pour calculer une valeur approximative d'une fonction qui est compliqué

d'une autre coté l'intégration numérique permet d'estimer l'intégrale de cette fonction par la méthode d'interpolation avec certain erreur.

Bibliographie

- [1] H-Reinhard, Equation différentielles fondements et applications. gauthier-villars Paris, 1982.
- [2] Antoine Henrot. Analyse numérique, 2017.
- [3] Mustapha Lakrib. cours d'analyse numérique.
- [4] Karima Mebarki, Analyse numérique, Abderrahmane Mira Béjaia
- [5] Mazen saad, Analyse numérique, Ecole centrale de Nantes, 2011-2012

Annexe A : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$f(x), g(x)$: Des fonctions.
E_N, ϵ	: Erreur.
$P_N(x)$: Polynome de degré N.
P_n	: Polynome d'interpolation de Lagrange.
$L_i(x)$: Polynome de base de Lagrange.
$\delta(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+p})$: Les différence divisée d'ordre p.
n, m, p, k	: Des réels.
Ω	: Domaine polygonale.
K	: Triangle quelconque.
\hat{K}	: Triangle de référence.