**République Algérienne Démocratique et Populaire**

**Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifque**

**UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA**

**Faculté des sciences exactes et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE**

**DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES**

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

Master en Mathématiques

Option : Probabilité

Par

**Cherk Arbia**

**Titre**

# Conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité en contrôle stricte

Membres du Comité d'Examen :

| | | | |
|---|---|---|---|
| Dr. | **GHERBAL Boulakhras** | U.Biskra | Président |
| Dr. | **ABBA abdelmadjid** | U.Biskra | Encadreur |
| Dr. | **TABET Moufida** | U.Biskra | Examinateur |

**Séptembre 2020**

## REMERCIEMENTS

En préambule à ce mémoire je tiens à remercier sincérement ***allah*** qui m'aide et me donne la patience et le courage durant ces langues années d'étude.

Je tiens à remercier sincérement mon encadreur **Dr. ABBA Abdelmadjid,**pour ces conseils ,sa grande disponibilité et sa générosité avec la quelle il m'a fait partager ses travaux, ses idées et ses intuitions.

Je remercie également les membres du jury **GHERBAL Boulakhras** et **TABET Moufida** pour accepté d'évalure et de juger ce modeste travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Mes remerciemesnt s'adressent égalemment à tous les enseignants du département de mathématique,afin de nous aider dans notre parcours d'étude , tout au long de ces annés.

Et une mention spéciale de notre professeur et chef de département de mathématique **Mokhtar HAFAYED**.

Enfin,j'adresse mes plus sincéres remerciemmesnts à tous mes proches et amis,qui m'ont toujours soutenus et encouragés au cours de la réalisation de ce mémoire.

***Mérci à tout***

# Table des matières

# Introduction

La théorie du contrôle optimal est utilisée pour modéliser beaucoup de situations en sciences de l'ingénieur, en sciences économiques et sociales et de façon plus générale dans tous les domaines utilisant les applications des mathématiques. La raison pour cela est évidente.

Dans ce mémoire de master, on s'intéresse à un problème de contrôle stochastique strict, où le sytème est gouverné par une équation différentielle stochastique de la forme suivante :

$$\begin{cases} dX_t = b\left(t, X_t, u_t\right) dt + \sigma\left(t, X_t, u_t\right) dW_t \\ X\left(0\right) = x \end{cases}$$

où $b, \sigma$ sont des fonctions données, $x$ est la condition initiale et $W = (W_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien de dimension $d$, défini sur un espace probabilisé filtré $(\Omega; \mathcal{F}; (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}; \mathbb{P})$. La variable contrôle $u = (u_t)$, appelée contrôle strict (classique), est un processus $\mathcal{F}_t$ adapté à valeurs dans un sous ensemble $\mathbb{U}$de $\mathbb{R}^d$.

On note par $\mathcal{V}$ la classe de tous les contrôles stricts.

L'objectif du problème de contrôle stochastique est de minimiser une fonction coût de la forme :

$$J\left(u\right) = \mathbb{E}\left[\int_0^T h\left(t, X_t, u_t\right) dt + g\left(X\left(T\right)\right)\right].$$

où $h$ et $g$ sont des fonctions données et $\left(X\left(t\right)\right)$ est une solution d'une équation différentielle stochastique précédente

Un contrôle $u$ est dit optimal s'il vérifie

$$J\left(u\right) = \inf\left(J\left(\nu\right); \forall \nu \in \mathcal{V}\right).$$

Notre objectif dans ce mémoire est d'établir des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalités pour contrôle strict qui sont des processus à valeurs dans un sous ensemble de $\mathbb{R}^d$, sous forme de principe du maximum de Pontryagin dans les quelle le coefficient de diffusion dépend explicitement du contrôle avec un domaine de contrôle n'est pas nécessairement convexe. Cette nouvelle méthode a parmi de résoudre plusieurs problèmes de contrôles stochastiques en finances.La suite de ce travail est organisée de la manière suivante :

**Chapitre 1** Dans le premier chapitre, on s'intéresse aux problèmes des processus stochastiques,Mouvement Brownien, Martingale et les solutions faibles et fortes des équations différentielles stochastiques.

Nous commençons par présenter les résultats principaux des equations diérentielles stochastiques de façon générale. On décrit brièvement les processus stochastiques, Mouvement Brownien, Martingale et les solutions faibles et fortes des équations différentielles stochastiques.

**Chapitre-2** Dans ce chapitre, on étudie les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalités pour les contrôles stricts sous forme de principe du maximum de Pontryagin, pour des systèmes gouvernés par des équations différentielles stochastiques

.

# Chapitre 1

# Équations Différentielles Stochastiques

## 1.1 Introduction

Les équations différentielles stochastiques (EDSs) constituent une généralisation des équations différentielles ordinaires. Celles-ci ont été introduites pour la première fois en 1946 par $K.\ It\widehat{o}$ pour étudier les trajectoires de processus de diffusion. Cette notion a été traitée de manière profonde en relation avec la théorie des semi-martingales. Des applications dans tous les domaines des sciences de l'ingénieur (filtrage des processus, contrôle optimal, mathématiques finançières,gestion des stocks etc...) ont été réalisés en utilisant ce genre d'équations. Les équations différentielles stochastiques constituent un modèle de diffusion en milieu non homogène. Soit $X_t$ la position d'une particule assez petite en suspension dans un liquide à l'instant $t$. Si on néglige l'inertie de la particule, on peut admettre que le déplacement de cette derniere est la résultante de deux composantes, d'une part un déplacement centré dû à la vitesse macroscopique du liquide,d'autre part des fluctuations provoquées par l'agitation thermique des molécules du liquide.

Soit $b(t, X)$ la vitesse macroscopique du liquide au point $X$ à l'instant $t$. On supposera que la composante fluctuative dépend du temps, de la position $X$ et de la durée $\Delta t$ pendant laquelle est envisagé le déplacement, alors :

$$X_{t+\Delta t} - X_t = b(t,X)\Delta t + x_{t,X,\Delta t}.\text{avec } \mathbb{E}\left(x_{t,X,\Delta t}\right) = 0.$$

Si on suppose que

$$x_{t,X,\Delta t} = \sigma\left(t, X_t\right) x_{t,\Delta t}$$

Où $\sigma\left(t, X_t\right)$ désigne les propriétés du milieu $x_{t,\Delta t}$ l'accroissement en milieu homogène

$$x_{t,\Delta t} = W_{t;\Delta t} - W_t$$

avec $W_t$ un mouvment Brownien alors

$$X_{t+\Delta t} - X_t = b(t,X_t)\Delta t + \sigma\left(t, X_t\right)\left(W_{t+\Delta t} - W_t\right).$$

En passant aux différentiables, on obtient :

$$\begin{cases} dX_t = b\left(t, X_t\right) dt + \sigma\left(t, X_t\right) dW_t. \\ X_0 = x. \end{cases}$$

La formulation intégral nous donne :

$$X_t = x + \int_0^t b\left(s, X_s\right) ds + \int_0^t \sigma\left(s, X_s\right) dW_s.$$

Comme $W = W_{t\in[0,T]}$ est un processus dont les trajectoires sont $\mathbb{P}-ps$ à variations infinies $\int_0^t \sigma\left(s, X_s\right) dW_s$ ne peut pas être considérée comme une intégrale de Lebesgue Stieljes. Par conséquent cette équation ne peut être interprétée comme une équation différentielle ordinaire. Avant de donner la définition de solution à cette équation on doit justifier son écriture et donner un sens aux quantités de la forme $\int_0^t \sigma\left(s, X_s\right) dW_s$ appelées *intégrales stochastiques d'Itô.*

## 1.2 Intégrale stochastique

### 1.2.1 Processus stochastiques

**Définition 1.2.1 (processus stochastique)** *Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable, et soit $T$ un ensemble d'indices quelconque. Un processus aleatoire (indexé par $T$) a valeurs dans $E$ est une famille $\{X_t, t \in T\}$ de variables aleatoires à valeurs dans $E$. Si on ne precise pas $(E, \mathcal{E})$ on supposera implicitement que $E = \mathbb{R}$ et $\mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu borelienne de $\mathbb{R}$.*

$-$Dans la plus part des cas étudiés dans ce mémoire, l'espace $(E, \mathcal{E})$ sera $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ou $\left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$.

#### Processus mesurable, adapté, progressivement mesurable

On supose que $T = \mathbb{R}_+, (\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable :

- Un processus $X = (X_t)_{t \in T}$ est dit **mesurable** si l'application :

$$X_t : (\Omega \times \mathbb{R}_+, \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)) \longmapsto \left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$$
$$(t, \omega) \longmapsto X_t(\omega) = X(t, \omega)$$

  est mesurable.
- Un processus $X = (X_t)_{t \geq 0}$ est dit **adapté** si, pour tout $t \geq 0$ la variable aléatoire $X_t$ et $\mathcal{F}_t-$mesurable.
- Un processus $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est dit **progressivement mesurable** (ou progressif) si, pour tout $t \geq 0$, l'application$(\omega, s) \longmapsto X_s(\omega)$ définie sur $\Omega \times [0, t]$ dans $\mathbb{R}^d$ est mesurable pour la tribu $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}([0, t])$ et $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$.

**Définition 1.2.2 (trajectoire)** *Si $(X_t)_{t \in T}$ est un processus aleatoire à valeurs dans un espace $E$,les trajectoires de $X$ sont les applications $t \in T \longmapsto X_t(\omega)$ obtenues en fixant $\omega$. Les trajectoires constituent donc une famille, indexee par $\omega \in \Omega$, d'applications de $T$ dans $E$.*

- Le processus est dit à trajectoire continues si, pour tout $\omega$, la fonction$t \longmapsto X_t(\omega)$est continie sur $\mathbb{R}_{+}$..
- Un processus est dit **càdlàg** (continu à droite et pourvu de limite à gauche) si ses trajectoires sont continues à droite et pourvues de limites à gauche pour presque tout $\omega$.
- Un processus est dit **càglàd** (continu àgauche et pourvu de limite à droit) si ses trajectoires sont continues à gauche et pourvues de limites à droite pour presque tout $\omega$.

**Proposition 1.2.1** *Si $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus est adapté et à trajectoire continues à droite (**ie :** pour tout $\omega \in \Omega$, $t \longmapsto X_t(\omega)$ est continue à droite ). Alors $X$ est progressivement mesurable.*

**Modifications, indistingabilité des processus.**

Soients $X = (X_t)_{t \in T}$ et $Y = (Y_t)_{t \in T}$ deux processus aléatoires indéxe par le même ensemble $S$ et définis sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$ on dit :

1. $X$ est une **modification** de $Y$ si, pour tout $t \geq 0$ les variables $X_t$ et $Y_t$ sont égales :

$$\mathbb{P}.p.s : \forall t \in T,\ \mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1.$$

2. $X$ et $Y$ sont **indistringuables** si, $\mathbb{P}.p.s$ les trajectoires de $X$ et $Y$ sont les mêmes :

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t, \forall t \in T) = 1.$$

**Exemple 1.2.1** *Considérons $\tau = \Omega = [0, 1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0, 1])$, $\lambda$ la mesure de Lebesgue. Nous définissons*

$$X_t = t\ ;\ \forall (t, \omega) \in \tau \times \Omega$$

$$Y_t = t\ ;\ \textit{si } \omega \neq t \textit{ et } Y_t = 0 \textit{ sinon}\ ;\ \forall (t, \omega) \in \tau \times \Omega$$

*Alors $X$ et $Y$ sont une modification l'un de l'autre, pourtant toutes les trajectoires de $X$ sont continues et toutes celles de $Y$ sont discontinues (sauf pour $\omega = 0$). Ces processus ne* *sont donc pas indistinguables.*

**Proposition 1.2.2** *Si $X$ et $Y$ sont deux processus dont les trajectoires sont p.s continues et $X$ est une modification de $Y$ alors $X$ et $Y$ sont* ***indistringuables.***

### 1.2.2 Filtration

**Définition 1.2.3** *On appelle filtration, une famille croissante de sous tribus $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ de $\mathcal{F}$*

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F},\ \forall s \leq t.$$

*Si l'éspace de probabilité $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{P})$ est muni d'une filtration $\mathcal{F}$, on parlera de l'éspace de probabilité filtré $\left(\Omega,\ \mathcal{F},\ (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\ \mathbb{P}\right)$.*

– *la filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est dit* ***càd*** *"continie à droite " si, $\mathcal{F}_t = \underset{s>t}{\cap} \mathcal{F}_s$.*

– *Les ensembles négligeables $\mathcal{N}$ sont contenus dans $\mathcal{F}_0$ où*

$$\mathcal{N} = \{B \subset \Omega\ ,\ \exists\ A \in \mathcal{F},\ B \subset A.\ \mathbb{P}(A) = 0\}.$$

**Exemple 1.2.2 (Filtration naturelle d'un processus)** *est le suivant :*

Soit $X = (X_t, t \geq 0)$ un processus stochastique déféni sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. La fitration naturelle de $X$ est notée par $\mathcal{F}_t^X$ ,est définie par $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s,\ 0 \leq s \leq t)$. Elle est également appelée la fitration engendrée par $X$.

### 1.2.3 Mouvement brownien

**Définition 1.2.4** *On appelle un mouvement brownien (standard) un processus stochastique $(W_t, t \geq 0)$ tel que :*

– $\mathbb{P}(W_0 = 0) = 1.$ *(le mouvement brownien issu de lorigine).*

– $\forall\ 0 \leq s \leq t$, *la variable aléatoire $W_t - W_s$ est de loi gaussienne, centrée de varaince $(t-s)$*

$$\textbf{ie}\ :\forall 0 \leq s \leq t,\ W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0,\ t-s).$$

*(Stationnarité des accroissements du mouvement brownien).*

– $\forall\ n, \forall\ t, 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n$ *,les variables* $\left(W_{t_n} - W_{t_{n-1}}, \ldots, W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_0}\right)$ *sont indépendantes, ou bien sous forme équivalente :soit* $0 \leq s \leq t$; *La variable* $(W_t - W_s)$ *est indépendante de la tribu* $\sigma\left(W_u\ ,\ u \leq s\right)$.

**Proposition 1.2.3** *$W$ est un mouvement brownien standard si et seulement si $W$ est un processus gaussien avec éspérence nulle et sa covaraince*

$$Cov\left(W_t, W_s\right) = s \wedge t = \min\left(s,\ t\right).$$

**Remarque 1.2.1** *Si* $(W_t,\ t \geq 0)$ *est un mouvement Brouwnien, alors :*

**i** *Le processus $\hat{W}$ déféni par $\hat{W} = (-W_t)$ est un mouvement Brouwnien.*

**ii** *Le processus $\hat{W}$ déféni par $\hat{W} = \left(\frac{1}{c}W_{c^2 t}\right)$pour tout $c > 0$ ;est un mouvement Brouwnien.'* (*Propriété de scaling*)

**iii** *Le processus définir par $\forall\ t > 0$ , $\hat{W} = tW_{\frac{1}{t}}; \hat{W}(0) = 0$ est un mouvement Brouwnien.*

### 1.2.4 Martingale

Soit $X = (X_t, t \geq 0)$ un processus stochastique adapté défini sur l'espace de probabilité $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{P})$ muni de la fitration $\mathcal{F}$

On dit que $X$ est une $\mathcal{F}_t-$martingale respectivement une **sous -martingale** respectivement **surmartingale,** si :

1. $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est -adapté pour tout $t$ ,(**ie** : $\forall \mathbf{t} \in \mathbb{R}_+$ ,$X_t$ est $\mathcal{F}_t-$mesurable).
2. $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est -intégrable pour tout (**ie** : $\forall \mathbf{t} \in \mathbb{R}_+, \mathbb{E}\left(|X_t|\right) < +\infty)$.
3. $\forall t, s \in \mathbb{R}_+, \forall s \leq t, , \mathbb{E}\left(X_t | \mathcal{F}_s\right) = X_s.p.s$ respectivement $\mathbb{E}\left(X_t | \mathcal{F}_s\right) \geq X_s$ ; respectivement $\mathbb{E}\left(X_t | \mathcal{F}_s\right) \leq X_s$.

**Lemme 1.2.1** *Le mouvement brownien $W_t$ est une martingale par rapport à sa filtration naturelle* $\left(\mathcal{F}_t^W, t \in \mathbb{R}_+\right)$.

**Preuve.**

**i** Rappellons d 'abord que pour tout $t \geq 0$, $W_t \sim \mathcal{N}\left(0,\ t\right)$ ,ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[|W_t|\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{\frac{-x^2}{2t}} dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} (-x) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{\frac{-x^2}{2t}} dx + \int_{0}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{\frac{-x^2}{2t}} dx \\
&= \sqrt{\frac{2t}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} x \frac{1}{t} e^{\frac{-x^2}{2t}} dx \\
&= \sqrt{\frac{2t}{\pi}} \left[ -e^{\frac{-x^2}{2t}} \right]_0^{+\infty} = \sqrt{\frac{2t}{\pi}} < +\infty.
\end{aligned}$$

**ii** $\forall\ 0 \leq s \leq t$,on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[W_t | \mathcal{F}_s^W\right] &= \mathbb{E}\left[W_t - W_s | \mathcal{F}_s^W\right] + \mathbb{E}\left[Ws | \mathcal{F}_s^W\right] \\
&= \mathbb{E}\left[W_t - W_s\right] + W_s \\
&= 0 + W_s.
\end{aligned}$$

■

**Théorme 1.2.1 (Lévy)** *Les processus suivants sont des martingales par rapport à* $\mathcal{F}_t^W$ :

Le processus $W_t$ est une martingale.Le processus $(W_t^2 - t, t \geq 0)$ est une martingale.

*Réceproquement* : si $X$ est une processus continu tel que $X = (X_t, t \geq 0)$ et $X = (X_t^2 - t,\ t \geq 0)$ sont des martingale par rapport $\mathcal{F}_t$.Alors $X$ est une mouvement brownien.

### 1.2.5 Intégrale stochastique

Dans cette partie on consider l'espace de Hilbert $L(\mathbb{R}_+,\ [0,\ t])$ muni la norme $\|f\|_2 = \left(\int_0^T f(s)\, ds\right)^{1/2}$ et produit scalaire $\langle f,\, g\rangle = \int_0^T f(s)\, g(s)\, ds$. tel que $f$ et $g$ fonctions boréliennes de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ de carré intégrable$\Big($**ie** : $\int_0^T |f(s)|\, ds < +\infty\Big)$ $(resp\ g)$.

#### Intégrale de Winer

**Définition 1.2.5** *L'intégrale de winer est simplement une intégrale* $\omega \mapsto \mathbf{Y}_t(\omega) = \left(\int_0^T X_s ds\right)(\omega)$ *.où* $X_s$ *fonction déterministe* $($*ne dépend pas de* $\omega)$ *et* $(W_t)_{t\geq 0}$*un mouvement brownien.*

**cas étagés**

Soit $f$ une fonction en exalier de la forme $f(t) = \sum_{i=1}^{i=n} f\ \left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right)$ .La varaible aléatoire

$$I(f) \overset{déf}{=} \int_0^T f(s)\, dW_s.$$

est une varaible gaussien d'éspérence nulle et de varaince $\int_0^T f^2(s)\, ds$.

En effet

1. $I(f)$ est gaussien car le processus $W$ est gaussien
2. $I(f)$ est centrée car $W$ centrée

$$\mathbb{E}(I(f)) = \sum_{i=1}^{i=n} f\ \mathbb{E}\left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right) = 0.$$

$$Var(I(f)) = \sum_{i=1}^{i=n} f_{i-1}^2\, Var\left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right) = \sum_{i=1}^{i=n} f_{i-1}^2\ (t_i - t_{i-1}) = \int_0^{+\infty} f^2(s)\, ds = \|f\|_2$$

**cas générale**

On montre en analyse que, si $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$, il existe une suite $f\ ^2$de fonctions en escalier qui converge($dans\ L(\mathbb{R}_+)$) vers $f$, c'est-'a-dire qui vérifie que

$$\int_0^{+\infty} |f_n - f|^2(x)\, dx \longrightarrow_{n\longrightarrow\infty} 0.$$

Dans ce cas, la suite $(f_n)$ est de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R}_+)$. La suite de v.a.

$$F_n = \int_0^{+\infty} f_n(s)\, dW_s.$$

est une suite de Cauchy dans l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$

(en effet $(\|F_n - F_m\|_2 = \|f_n - f_m\|_2 \longrightarrow_{n,m\longrightarrow\infty} 0)$, donc convergente .Notons que la limite dépend de $f$ et non de la suite $(f_n)$.

On pose

$$\int_0^T f(s)\, dW_s \overset{déf}{=} \lim_{n\longrightarrow\infty} \int_0^T f_n(s)\, dW_s.$$

La limite étant prise dans $L^2(\Omega)$.

On dit que $\int_0^T f(s)\,dW_s$ est l'intégrale stochastique (ou intégrale de Wiener) de $f$ par rapport à $W$.

- $f \longrightarrow I(f)$ est linéaire de $L^2(\mathbb{R}_+)$ dans $L(\Omega)$ (**ie** :$I(f+g) = I(f) + I(g)$).
- $f \longrightarrow I(f)$ est isométrie :$\|I(f)\|^2 = \|f\|^2$tel que :

$$\begin{cases} \|f\|^2 = \int_0^t f^2 ds. \\ \|I(f)\|^2 = \mathbb{E}\left(\int_0^t f^2 ds\right). \end{cases}$$

- proprieté isométrie implique $\mathbb{E}(I(f)\,I(g)) = \int_0^t f(s)\,g(s)\,ds$.
- $I(f)$ est v.a gaussienne mesurable par rapport $\sigma(W_t,\ 0 \leq t \leq T)$.

**Lintégrale stochastique en génerale**

**Définition 1.2.6** *On peut généraliser la définition de l'intégrale de winer et definir $\int_0^t \theta_s dW_s$ pour des processus stochastique.*

**Cas processus étagés**

On appelle processus étagé (ou élémentaire) les processus de types $\theta_t(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} \theta_i(\omega)\, 1_{]t_i,t_{i+1}]}$. s'il existe une subdivision de réel $t_i, 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n$et une suite de variables aléatoires $\theta_i \in L^2(\Omega,\ \mathbb{P})$, $\forall i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$.On défnit alors :

$$\int_0^{+\infty} \theta_s dW_s = \sum_{i=0}^{n-1} \theta_i \left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right).$$

On a :

$$\mathbb{E}\left(\int_0^{+\infty} \theta_s dW_s\right) = 0.$$

et

$$Var\left(\int_0^{+\infty} \theta_s dW_s\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^{+\infty} \theta_s^2 ds\right).$$

**cas générale**

- On peut la définition de l'intégrale stochastique à une classe plus large.
- Dans ce cas on perd le caractère gaussien de l'intégrale stochastique.

On définit l'ensemble $\Lambda$ des processus càglàde de carré intégrable (appartenant à $L^2(\Omega\times\mathbb{R}_+)$)comme l'ensemble

$$\Lambda=\left\{\mathcal{F}_t-adapt\acute{e},\ \ c\grave{a}gl\grave{a}d.et\ si\ \mathbb{E}\left(\int_0^{+\infty}\theta_t^2dt\right)<+\infty,\ \forall t>0.\right\}$$

Les processus étagés appartiennent à $\Lambda$,on dit que $\theta_n$ converge vers $\theta$ dans $L^2(\Omega\times\mathbb{R}_+)$ si :

$$\|\theta-\theta_n\|\longrightarrow 0\ qaund\ n\longrightarrow\infty.$$

On peut définir $\int_0^{+\infty}\theta_s dW_s$ pour tous Les processus $\theta$ de $\Lambda$ on approche $\theta$par Les processus étagé soit :

$$\theta=\lim_{n\longrightarrow+\infty}\theta_n\ o\grave{u}\ \theta_n=\sum_{i=1}^{k(n)}\alpha_i^n 1_{]t_i,,t_{i+1}]}\ o\grave{u}\ \alpha^n\epsilon\mathcal{F}_t.$$

La limite au sens de $L^2(\Omega\times\mathbb{R}_+)$ et ona :

$$\mathbb{E}\left(I\left(\theta\right)\right)=\lim_{n\longrightarrow+\infty}\mathbb{E}\left(I\left(\theta^n\right)\right)=\lim_{n\longrightarrow+\infty}\sum_{i=1}^{k(n)}\mathbb{E}\left(\alpha_i^n\right)\mathbb{E}\left(W_{t_{i+1}}-W_{t_i}\right)=0.$$

$$\begin{aligned}Var\left(I\left(\theta\right)\right)&=\lim_{n\longrightarrow+\infty}Var\left(I\left(\theta^n\right)\right)=\lim_{n\longrightarrow+\infty}\mathbb{E}\left(I\left(\theta^n\right)^2\right)\\&=\lim_{n\longrightarrow+\infty}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{k(n)}\alpha_i^n\left(t_{i+1},t_i\right)\right]\\&=\mathbb{E}\left(\int_0^{+t}\theta_s^2ds\right).\end{aligned}$$

On note $\int_0^t\theta_s dW_s\overset{d\acute{e}f}{=}\int_0^{+\infty}1_{]0,t]}dW_s$.Si $\theta$ est étagé $\int_0^t\theta_s dW_s=\sum_{i=1}^{k(n)}\alpha_i^n\left(W_{(t_{i+1})\wedge t}-W_{t_i\wedge t}\right)$.

On pose $\Lambda$ l'ensemble $L_{loc}(\Omega\times\mathbb{R}_+)$ des processus $\theta$ adaptés càglad vérifiant $\mathbb{E}\left(\int_0^{+t}\theta_s^2(\omega)\,ds\right)<\infty,\ \forall t.$

1. **linéarité :** Soit $a$ et $b$ des constantes et $\theta_s, \varphi_s$ deux processus de $\Lambda$ ona :

$$\int_0^t (a\ \theta_s + b\ \varphi_s)\, dW_s = a \int_0^t \theta_s W_s + b \int_0^t \varphi_s dW_s.$$

2. **propriétés de martingale :**

$$M_t = \int_0^t \theta_s dW_s \text{ où } \theta \in \Lambda$$

   – Le processus $(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale à trajectoire continues.

   – $M_t^2 - \int_0^t \theta_s^2 dW_s$ est une martingale.

3. **propriétés d'isométrie :** Soit $\theta, \varphi^{'}$deux processus de $\Lambda$ on a :

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t \theta_s dW_s \int_0^t \varphi_s dW_s\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^t (\theta_s \varphi_s)\, ds\right).$$

   de plus le processus :

$$\int_0^t \theta_s dW_s \int_0^t \varphi_s dW_s - \int_0^t (\theta_s \varphi_s)\, ds \text{ ,est une } \left(\mathcal{F}_t^W\right) - \text{martingale.}$$

### 1.2.6 Processus d'Itô

Soient $\left(\Omega, \mathcal{F},\ (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ unespace de probabilité muni d'une filtration et $(W_t)_{t\geq 0}$mouvement Brownien .On appelle processus d'Itô un processus $(X_t)_{0\leq t\leq T}$à valeurs dans $\mathbb{R}$sous la forme :

$$X_t = \underbrace{X_0 + \int_0^t b_s ds +}_{processus\ \grave{a}\ variation\ finie\ de\ X} + \underbrace{\int_0^t \sigma_s dW_s}_{martingale\ de\ X}.$$

oû

– $X_0$ :condition initiale est $\mathcal{F}_t - mesurable$.

– $b_s$ :est un processus $\mathcal{F}_t - adapt\acute{e}$ est $\int_0^t |b_s|\, ds < +\infty$.

– $\sigma_s$ :un processus appartenant à $\Gamma$ $\left(\textbf{ie} : \mathcal{F}_t - adapt\acute{e}, cagl\grave{a}d \text{ et } \int_0^t |\sigma_s|\, ds < +\infty\right)$.

Le coéfficient $b$ s'appelle de drift ou la dérive et $\sigma$ est coéfficient de diffusion.

**Propriétés 1.2.1** *Le processus $X$ est une martingale si seulement si $b_0 = 0$ et $\sigma \in \Gamma$.Si*

$\sigma \in \Gamma$ *on a :*

1. $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_0) + \int_0^t \mathbb{E}(b_s)\, ds.$
2. $\mathbb{E}(X_t/\mathcal{F}_s) = X_s + \mathbb{E}\left(\int_0^t b_s/\mathcal{F}_s\right).$

**-IntégrIale par rapport à un processus d'Itô**

Soit $(X_t)_t$ un processus d'Itô de différentielle

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dW_t$$

On note (sous réserve de conditions d'intégrabilité)

$$\int_0^t \theta_s dX_s \overset{def}{=} \int_0^t \theta_s b_s ds + \int_0^t \theta_s \sigma_s dW_s.$$

**-Première forme :** Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus d'Itô de diffrentielle :

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dW_t$$

Pour un processus d'Itô avec $f \in C^2(\mathbb{R})$ :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\, \sigma_s^2 ds.$$

ou cette formule s'écrit :

$$df(X_t) = f'(X_t)\, dX_t + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_t)\, d < X >_t .$$

Et le règle de multiplication :

$$dt.dt = 0, dt.dW_t = 0, dW_t.dW_t = dt$$

**-Deuxième forme :**

Soit $f$ fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de classe $C^1$ par rapport à $t$, de classe $C^2$ par rapport à $x$, à dérivées bornées on a :

$$f(t,\ X_t) = f(0,\ X_0) + \int_0^t f'_t(s,\ X_s)\, ds + \int_0^t f'_x(s,\ X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(s,\ X_s)\, \sigma_s^2 ds.$$

ce que l'on note

$$df(t,\ X_t) = f'_t(t,\ X_t)\, dt + f'_x(t,\ X_t)\, dX_t + \frac{1}{2} f''_{xx}(t,\ X_t)\, d\langle X\rangle_t.$$

**-cas multidimensionnel**

Soit $(X_i,\ i = 1,\ 2)$deux processus d'Itô tels que

$$dX_i = b_i dt + \sigma_i dW_t.$$

Avec $f$ une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe $C^2$ : Alors On a

$$\begin{aligned} df(X_1(t),\ X_2(t)) &= f'_1(X_1(t),\ X_2(t))\, dX_1(t) + f'_2(X_1(t),\ X_2(t))\, dX_2(t) \\ &\frac{1}{2}\left(f''_{11}\sigma_1^2(t) + 2f''_{12}\sigma_1(t)\,\sigma_2(t) + f''_{22}\sigma_2^2(t)\right)(X_1(t),\ X_2(t))\, dt. \end{aligned}$$

où $f_i^{'}$ désigne la dérivée par rapport à $x_i$, $i = 1,\, 2$ et $f_i^{"}$ la dérivée seconde par rapport à $x_i, x_j$.Sous forme condensée, on écrit :

$$df(X_1,\ X_2)(t) = \sum_{i=1}^{2} f'_i(X_1(t),\ X_2(t))\, dX_i(t) + \frac{1}{2}\sum_{i,j} f^{"}_{ij}(X_1(t),\ X_2(t))\, \sigma_i\sigma_j dt.$$

**Intégration par parties, crochet**

La formule d'Itô montre que

$$d[X_1X_2](t) = X_1(t)dX_2(t) + X_2(t)dX_1(t) + \sigma_1(t)\sigma_2(t)dt.$$

Cette formule est connue sous le nom d'intégration par parties.La quantité $\sigma_1(t)\sigma_2(t)dt$ correspond au crochet de $X_1$ et $X_2$ ; noté $< X_1, X_2 >$ est défini comme le processus à variation finie

$$< X_1, X_2 >_t = \int_0^t \sigma_1(s)\sigma_2(s)ds$$

**- Cas vectoriel.**

Soit $(X_t, t \geq 0)$ un processus d'Itô multidimensionnel de composantes$(X_i\,(t)\,; i = 1, \ldots, n)$ ;tel que

$dX_t = u_t dt + v_t dW_t$ ,soit

$$\begin{bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \\ \cdots \\ dX_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdots \\ u_p \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} & \cdots & \cdots & v_{1,p} \\ v_{2,1} & v_{2,2} & \cdots & \cdots & v_{2,p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_{p,1} & v_{p,2} & \cdots & \cdots & v_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dW_1 \\ dW_2 \\ \cdots \\ dW_P \end{bmatrix}.$$

Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ de classe $C^{1,2}$ Alors on a :

$$df(t; X_t) = f_t^{'}(t; X_t)dt + \sum_{i=1}^{n} f_i^{'}\,(t, X_t)\,dX_i\,(t) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} f_{i,j}^{"}\,(t, X_t)\,dX_i\,(t)\,dX_j\,(t)\,.$$

où l'on a utilisé les conventions d'écrire

$$dW_i dW_j = \sigma_{i,j}dt; dW_i dt = 0; dtdt = 0.$$

Calculer $I = \int_0^t W_s dW_s$ tel que :

$$f(x) = x^2.$$

$$W_s^2 = 0 + 2\int_0^t W\,(s)\,dW_s + \int_0^t ds.$$

Ce qui donne, d'aprés l'intégration :

$$\int_0^t W(s)\, dW_s = \frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}t.$$

Calculer $I = \int_0^t s\; dW_s$ tel que : $f(t,\, x) = tx$

$$tW_t = W_t dt + t dW_t + 0$$

Alors :

$$\int_0^t s dW_s = tW_t - \int_0^t W_s dW_s.$$

## 1.3 Solutions faibles et fortes des équations diférentialles stochastiques

Une équation différentielle stochastique est une équation de la forme :

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dW_s.$$

ou sa forme différentielle :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)\, dt + \sigma(t, X_t)\, dW_t \\ X_0 = x \end{cases} \tag{1.1}$$

Telle que :$X$ est un processus inconnu et $\forall n,\, m \in \mathbb{N}$.

– $x$ :est la condition initiale à valeur dans $\mathbb{R}^n$.

– $b : [0,\ T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $T > 0.b(t,\ x) = \{b_i(t,\ x),\ i = 1..n\}$

est une vecteure mesurable de $\mathbb{R}^n$ et s'appelle la déive.

– $\sigma : [0,\ T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times m}$, $T > 0.\sigma(t,\ x) = \{\sigma_{ij}(t,\ x),\ i = 1..n;\ j = 1..m\}$

un champ de matrices $(n \times m)$ est appellé coefficient de diffusion de l'$EDS$.

Soit $x$ une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$ mesurable indépendantede $W$ telle que :

$$\mathbb{E}\left(|x|\right) < \infty, \ \forall p > 1.$$

Soit 1.1 vérifiant les conditions suivantes :

$$\mathbb{P}\left(X_0 = x\right) = 1. \tag{1.2}$$

$$\mathbb{P}\left(\int_0^t |b\left(s, \ X\right)| + \sigma^2\left(s, \ X_s\right) ds < \infty\right) = 1. \tag{1.3}$$

$$X_t = x + \int_0^t b\left(s, \ X_s\right) ds + \int_0^t \sigma\left(s, \ X_s\right) dW_s. \tag{1.4}$$

**Définition 1.3.1 (solution forte)** *On dit que l'équation* 1.1 *admet une solution forte* (*trajectorielle*)*, si pour chaque espace de probabilité muni d'une filtration* $\left(\Omega, \ \mathcal{F}, \ \left(\mathcal{F}_t\right)_{t\geq 0}, \ \mathbb{P}\right)$ *pour tout mouvement brownien* $W = \left(W_t\right)_{t\in[0,T]}$ *il existe* $X = \left(X_t\right)_{t\in[0,T]}$ *continu tel que les conditions* 1.2, 1.3*et* 1.4 *sont vérifiées .Quand on parle de solution fort on sous-entend que l'espace probabilisé filtré* $\left(\Omega, \ \mathcal{F}, \ \left(\mathcal{F}_t\right)_{t\geq 0}, \ \mathbb{P}\right)$ *; et le mouvement brownien* $W = \left(W_t\right)_{t\in[0,T]}$ *sont déjà donnés. Si de plus* $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^W$ *alors le processus* $X$ *est* $\mathcal{F}_t$*-adapté et on a*

$$\mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{F}_t^W$$

*si le processus* $X = \left(X_t\right)_{t\in T}$ *est adaptée à la filtration naturelle du mouvement brownien.*

**Définition 1.3.2 (solution faible)** *On dit que léquation* 1.1 *admet une solution faible* (*en loi*)*. Si on peut trouver un espace probabilité muni d'une filtration* $\left(\Omega, \ \mathcal{F}, \ \left(\mathcal{F}_t\right)_{t\geq 0}, \ \mathbb{P}\right)$*. un mouvment brownien* $W = \left(W_t\right)_{t\in[0,T]}$ *et un processus* $X = \left(X_t\right)_{t\in[0,T]}$ *continu tels que les conditions* 1.2, 1.3 *et*1.4 *soient vérifées.Quand on parle de solution faible est la colléction des objets* $\left(\Omega, \ \mathcal{F}, \ \left(\mathcal{F}_t\right), \ W, \ X\right)$ *dans beaucoup de cas, où la solution faible éxiste, on a* $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^X$ *et par conséquent* $W = \left(W_t\right)_{t\in[0,T]}$ *relativement à* $\mathcal{F}_t$*.C'est pour quoi dans le cas des solutions faible on a :*

$$\mathcal{F}_t^W \subset \mathcal{F}_t^X$$

**Définition 1.3.3** *On dit que l'équation* 1.1 *admet une solution forte unique si pou deux solutions fortes* $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ *et* $Y = (Y_t)_{t\in[0,T]}$ *on a*

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0;T]} |X_t - Y_t|^2 > 0\right) = 0.$$

*c'est-à-dire :*

$$\mathbb{P}\left(X_t = Y_t, \forall t \in [0;T]\right) = 1.$$

**Définition 1.3.4** *On dit que l'équation* 1.1 *admet une solution faible* (*enl oi*)*.Si pour deux solutions* $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{P},\ \mathcal{F}_t;\ W,\ X)et\big(\bar{\Omega},\ \bar{\mathcal{F}},\ \bar{\mathbb{P}},\ \bar{\mathcal{F}}_t;\bar{W},\ \bar{X}\big)$ *; il y à coincide desdistributions des processus* $X$*et* $\bar{X}$*.C'est-à-dire : pour* $A \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$ *on a :*

$$\mathbb{P}\left(\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\right) = \mathbb{P}\left(\bar{\omega} \in \bar{\Omega} : \bar{X}(\bar{\omega}) \in A\right).$$

$$dX_t = f(X_t)dt + g(X_t)dW_t \text{ et } X_0 = x \tag{1.5}$$

**Remarque 1.3.1** – *Une solution forte est bien sur aussi une solution faible, mais l'inverse n'est pas vrai en général.*

– *Les solutions faibles ne sont pas mesurables par raport* $\mathcal{F}_t^W$ *et c'est ce qui différencie les solutions faibles des solutions forts.*

**Exemple 1.3.1** *Considrons l'équation différentielle stochastique :*

$$\begin{cases} dX_t = sign\left(X_t\right)dW_t \\ X_0 = x \end{cases} \tag{1.6}$$

*où*

$$sign\left(x\right) = \begin{cases} 1 \ \ si\ x \geq 0 \\ -1 \ \ si\ x < 0 \end{cases} \quad et\ sign^2\left(x\right) = 1.$$

*On voit que toute solution de l'équation* 1.6*est un un mouvement brownien puisque* $X$ *est une martingale issue de* 0 *,et est un solution faible en loi mais n' a pas solution forte .*

Soit $\hat{W}_t$ un mouvement brownien réel issu de 0 possons :

$$Y_t = \int_0^t sign\left(\hat{W}_t\right) d\hat{W}_s.$$

de la même maniére, on voit que $Y$ est un mouvement brownien en déduisons

$$\begin{aligned} Y_t &= \int_0^t sign\left(\hat{W}_t\right) dY_s \\ &= \int_0^t sign\left(\hat{W}_t\right) sign\left(\hat{W}_t\right) d\hat{W}_s \\ &= \int_0^t d\hat{W}_s = \hat{W}_t \end{aligned}$$

$\hat{W}_t$ est une solution de 1.6, en prenant $Y$ comme mouvement brownien. Il y a existence faible mais puisque :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\int_0^t 1_{\left\{\hat{W}_t=0\right\}}\right)^2 d\hat{W}_s &= \mathbb{E}\left(\int_0^t 1_{\left\{\hat{W}_t=0\right\}}\right)^2 ds \\ &= \int_0^t \mathbb{P}\left(\hat{W}_t = 0\right) ds = 0. \end{aligned}$$

comme

$$\begin{aligned} sign\left(-\hat{W}_t\right) &= 1_{\left\{-\hat{W}_t \geq 0\right\}} - 1_{\left\{-\hat{W}_t < 0\right\}} \\ &= 1_{\left\{-\hat{W}_t > 0\right\}} - 1_{\left\{-\hat{W}_t \leq 0\right\}} \\ &= 1_{\left\{\hat{W}_t < 0\right\}} - 1_{\left\{-\hat{W}_t \geq 0\right\}} \\ &= -sign\left(\hat{W}_t\right). \end{aligned}$$

Nous avons p.s

$$\begin{aligned} -\hat{W}_t &= \int_0^t sign\left(\hat{W}_t\right) dY_s \\ &= \int_0^t sign\left(\hat{W}_t\right) 1_{\left\{-\hat{W}_t \neq 0\right\}} dY_s \\ &= \int_0^t sign\left(-\hat{W}_t\right) dY_s \end{aligned}$$

il s'en suit que $-\hat{W}_t$ est également solution de 1.6 avec le mouvement brownien $Y$, et donc il n'y a pas unicité trajectorielle.

### 1.3.1 Existence et unicité

**Théorme 1.3.1** *Soit $T > 0$ and $b(t,\ x)$ et $\sigma(t,\ x)$ fonctions mesurables satisfaisantes :*

1. *(condition de lipschits locale)* $\exists k \in \mathbb{R}_+$ :

$$|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq k\,|x-y|\,,\ \ t \in [0,T]\,; x,y \in \mathbb{R}^n. \qquad (1.7)$$

2. *(condition de croissance linéaire)* $\exists M \in \mathbb{R}_+$ :

$$|b(t,x)| + |\sigma(t,x)| \leq k\,(1+|x|)\,, t \in [0,T]\,, x \in \mathbb{R}^n. \qquad (1.8)$$

3. $X_0$ *:varaible aléatoire indépandante de* $W = (W_t)_{t\geq 0}$ *et de carré intégrable* (**ie** : $\mathbb{E}\left(|X_0^2|\right) < +\infty$) *.Alors*

l'équation 1.1 admet une unique solution forte $X = (X_t(\omega))_{t\geq 0}$adaptée par la filtration $\mathcal{F}_t^{X_0} = \mathcal{F}_t \wedge \sigma(X_0)$ et vérifie :

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T |X_t|^2\,dt\right) < +\infty.$$

**Lemme 1.3.1** (***Lemme de Gronwall***) *Soit $T > 0$, et $g$ une fonction continue telle que,pour*

$$g(a) \leq a + b\int_0^t g(s)\,ds;\ \ a \in \mathbb{R},\ \ b \geq 0.$$

*Alors :*

$$g(t) \leq a \exp bt;\ \ pour\ 0 \leq t \leq T.$$

**Preuve.** Le preuve est facile par itération de laconditioin sur $g$ sous l'intégrale on écrit :

$$\begin{aligned}
g(t) &\leq a + b\int_0^t g(s)\,ds \\
&\leq a + b\int_0^t \left(a + b\int_0^s g(u)\,du\right) ds \\
&\leq a + abt + b^2 \int_0^t g(u)\,duds \\
&\leq a + abt + b^2 \int_{0\leq u\leq s\leq t}^t \left(a + b\int_0^u g(v)\,dv\right) duds \\
&\leq a + abt + ab^2 \int_{0\leq u\leq s\leq t}^t duds + b^3 \int_0^t \int_0^s \int_0^u g(v)\,dvduds \\
&\leq a + abt + a\frac{b^2t^2}{2} + b^3 \int_0^t \int_0^s \int_0^u g(v)\,dvduds \\
&\vdots \\
&\leq a + abt + a\frac{b^2t^2}{2} + a\frac{b^3t^3}{3!} + \ldots = a\exp(bt).
\end{aligned}$$

■

**Lemme 1.3.2 (Inégalité de Bulkholder-Davis-Gundy)**

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T}\left|\int_0^t \sigma(s,X_s)\,dW_s\right|^2\right] \leq C\ \mathbb{E}\left[\left|\int_0^t \sigma(s,X_s)\,ds\right|^2\right]. \tag{1.9}$$

*où $C$ est constante positive.*

***Preuve.*** ***(Existence et unicité)***

1. ***unicité*** *Supposons que $X = (X_t)_{t\in[0;T]}$ et $Y = (Y_t)_{t\in[0;T]}$ deux solutions* 1.1*tel que $X_0 = Y_0 = x$ on appliquant l'inégalité :*

$$(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$$

*et en utilisant les formules de $X_t$et $Y_t$ on obtient :*

$$|X_t - Y_t|^2 \leq 2\left|\int_0^t b(s,X_s) - b(s,Y_s)ds\right|^2 + 2\left|\int_0^t \sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s)dW_s\right|^2$$

*passant à l'espérence mathématique on obtient :*

$$\mathbb{E}\left(|X_t - Y_t|^2\right) \leq 2\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t b(s,X_s) - b(s,Y_s)ds\right|^2\right] + 2\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t \sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s)dW_s\right|^2\right].$$

*Par les inégalités de* ***Cauchy-Schawrtz*** *et* ***Buckholders-Davis-Gundy*** *on obtient :*

$$< \int_0^t g\left(s\right) dW_s >_T = \int_0^t g^2\left(s\right) ds.$$

$$\mathbb{E}\left[|X_t - Y_t|^2\right] \leq 2T\mathbb{E}\left[\int_0^t |b(s,X_s) - b(s,Y_s)|^2\, ds\right] + 2\mathbb{E}\int_0^t |\sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s)|^2\, ds$$

*En appliquant la condition de lipschitzienne* 1.5*on obtient :*

$$\mathbb{E}\left[|X_t - Y_t|^2\right] \leq C\int_0^t \mathbb{E}\left[|X_s - Y_s|^2\right] ds.$$

*où* $C = max(2Tk;\, 2k)$. *En appliquant l'inégalité de Tchébychef on obtient :*

$$\forall\theta{>}0;\left(\mathbb{P}\left|X_t - Y_t\right|^2 > \theta\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left[|X_t - Y_t|^2\right]}{\theta} = 0.$$

*Donc pour tout ensemble $D$ dénombrable partout dense dans* $[0;T]$*on a :*

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0;T]} |X_t - Y_t|^2 > 0\right) = 0.$$

*le processus$X$ et $Y$ sont continues. On conclut que*

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\in T} |X_t - Y_t|^2 > 0\right) = 0.$$

*Ce qui prouve que $X$ et $Y$ sont indistinguables alors prouve l'unicité forte de la solution.*

*2.* ***Existence*** *L'existence d'une solution forte depend de l'utilisation de la méthode des* *approximation ssuccéssuves et pour cela on pose*

$$X_t^n = x + \int_0^t b\left(s, X_s^{n-1}\right) ds + \int_0^t \sigma\left(s, X_s^{n-1}\right) dW_s. \tag{1.10}$$

*On pose*

$$X_t^{n+1} - X_t^n = \int_0^t b\left(s, X^n\right) - b\left(s, X_s^{n-1}\right) ds + \int_0^t \sigma\left(s, X_s^n\right) - \sigma\left(s, X_s^{n-1}\right) dW_s$$

*En utilisant la même téchnique que pour l'unicité on obtient comme* $(a+b)^2 = 2\left(a^2+b^2\right)$ *,alors :*

$$\mathbb{E}\left[\left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|^2\right] \leq C \int_0^t \mathbb{E}\left[\left|X_t^n - X_t^{n-1}\right|^2\right]$$

*Où* $c = \max(2Tk;\ 2k)$ *D'aprés* 1.7 *on a :*

$$\mathbb{E}\left[\left|X_t^1 - X_t^0\right|^2\right] \leq 2CT\left(1 + \mathbb{E}\left(\left|X_t^0\right|^2\right)\right),$$

*puisque*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left|X_t^1 - X_t^0\right|^2\right] &\leq 2\mathbb{E}\left|\int_0^t b\left(s, X_s^0\right) ds\right|^2 + 2\mathbb{E}\left|\int_0^t \sigma\left(s, X_s^0\right) d\omega_s\right|^2 \\
&\leq 2T\mathbb{E}\int_0^t \left|b\left(s, X_s^0\right)\right|^2 ds + 2\mathbb{E}\int_0^t \left|\sigma\left(s, X_s^0\right)\right|^2 ds \\
&\leq 2TK\int_0^t \left(1 + \mathbb{E}\left(\left|X_t^0\right|^2\right)\right) ds + 2K\int_0^t \left(1 + \mathbb{E}\left(\left|X_s^0\right|^2\right)\right) ds \\
&\leq (2CTK + 2K)\left(1 + \mathbb{E}\left(\left|X_t^0\right|^2\right)\right) T \\
&\leq 2CT\left(1 + \mathbb{E}\left(\left|X_t^0\right|^2\right)\right) \\
\mathbb{E}\left[\left|X_t^1 - X_t^0\right|^2\right] &\leq MT.
\end{aligned}$$

*tel que* $M = 2C\left(1 + \mathbb{E}\left(\left|X_t^0\right|^2\right)\right)$*.Par récurence sur* $n$ *il résulte que :*

$$\mathbb{E}\left[\left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|^2\right] \leq \frac{(MT)^{n+1}}{(n+1)!}$$

*et démontré que*

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left|X_t^{n+2}-X_t^{n+1}\right|^2\right] &\leq \frac{(MT)^{n+2}}{(n+2)!} \\
&\leq C\int_0^t \mathbb{E}\left[\left|X_t^{n+1}-X_t^{n}\right|^2\right]ds \leq C\int_0^t \frac{(Ms)^{n+1}}{(n+1)|}ds = C\frac{(MT)^{n+2}}{(n+2)!}
\end{aligned}
$$

*on obtient alors*

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left|X_t^{m}-X_t^{n}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} &= \left\|X_t^{m}-X_t^{n}\right\|_{L^2(\Omega)} \\
&= \sum_{k=n}^{m-1}\left\|X_t^{k+1}-X_t^{k}\right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{(MT)^{k+1}}{(k+1)|}\right)^{\frac{1}{2}} \to 0 \ \ (n\to\infty)
\end{aligned}
$$

*Lorsque* $n\to\infty$ *on obtient* $\mathbb{E}\left[\left|X_t^{m}-X_t^{n}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}\to 0$. *Alors on trouve*

$$
\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}\left[\left|X_t^{m}-X_t^{n}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}=0 \tag{1.11}
$$

*Donc* $X_t^n$ *est une suite de cauchy dans* $L^2(\Omega)$ *et par conséquant elle est convergente. Notons* $X_t$ *sa limite, c'est-à-dire :*

$$
\lim_{n\to\infty}X_t^n\to X_t.
$$

*Maintenant, le processus* $X_t^n$ *définit par :*

$$
X_t^n = x+\int_0^t b\left(s,X_s^{n-1}\right)ds+\int_0^t \sigma\left(s,X_s^{n-1}\right)dW_s
$$

*D'après l'égalité* 1.9*et lemme de Fatou on on obtient :*

$$
\mathbb{E}\int_0^T\left|X_s-X_s^n\right|^2ds\leq \limsup_{m\to\infty}\mathbb{E}\int_0^T\left|X_t^m-X_t^n\right|^2ds\to 0.
$$

$$
\mathbb{E}\int_0^T\lim_n\left|X_s-X_s^n\right|^2ds\leq \limsup_{m\to\infty}\mathbb{E}\int_0^T\left|X_t^m-X_t^n\right|^2ds\to 0.
$$

*Donc*

$$\mathbb{E}\int_0^T |X_s - X_s^n|^2 \, ds \to 0.$$

*En utilisant l'isométrie d'Itô*

$$\mathbb{E}\int_0^t |\sigma(s, X_s^n) - \sigma(s, X_s) \, dW_s|^2 \le C \int_0^t \mathbb{E}|X_s^n - X_s|^2 \, ds \to 0$$

*et de plus*

$$\int_0^t \sigma(s, X_s^n) \, dW_s \to \int_0^t \sigma(s, X_s) \, dW_s$$

*On applique l'inégalité de Hôlder*

$$\mathbb{E}\int_0^t |b(s, X_s^n) - b(s, X_s) \, ds|^2 \le CT \int_0^t \mathbb{E}\left(|X_s^n - X_s|^2\right) ds \to 0$$

*Et par la continuité de* $b(t, .)$ *on obtient*

$$\int_0^t b(s, X_s^n) \, ds \to \int_0^t b(s, X_s) \, ds, (n \to \infty)$$

*En passant à la limite dans* **??** *on obtient* .

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s) \, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) \, dW_s$$

*Donc* $X_t$*est une solution de l'équation* 1.1 *montrons que*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t \in [0,T]} |X_t|^p\right) < M, \forall p > 1.$$

*Par l'inégalité* $(a + b + c) \le 3a^2 + 3b^2 + 3c^2$ *et on passant aux espérence on a*

$$\mathbb{E}\left(|X_t|^2\right) \le 3\mathbb{E}\left(|x|^2\right) + 3T\mathbb{E}\int_0^t |b(s, X_s)|^2 \, ds + 3\mathbb{E}\int_0^t |\sigma(s, X_s)|^2 \, ds,$$

*d'aprés* 1.8*on trouve*

$$\mathbb{E}\left(|X_t|^2\right) \le 3\mathbb{E}\left(|x|^2\right) + 3Tk \int_0^t \mathbb{E}\left(1 + |X_s|^2\right) ds + 3k \int_0^t \mathbb{E}\left(1 + |X_s|^2\right) ds.$$

*Posant* $M = \max(3; 3Tk; 3k)$ *et* $C = \max(M; 2M)$ *on obtient*

$$\mathbb{E}\left(|X_t|^2\right) \leq C\left(1+\mathbb{E}\left(|x|^2\right)\right) + C\int_0^t \mathbb{E}\left(|X_s|^2\right) ds.$$

*En appliquant le lemme de Grnwall on obtient :*

$$\mathbb{E}\left(|X_t|^2\right) \leq C\left(1+\mathbb{E}\left(|x|^2\right)\right)\exp\left(Ct\right); \forall t \in T$$

*Puisque* $\mathbb{E}\left(|x|^2\right) < \infty$ *alors en posant* $M = C\left(1+\mathbb{E}\left(|x|^2\right)\right)\exp\left(CT\right)$. *On obtient*

$$\mathbb{E}\left(|X_t|^2\right) \leq M \ ; \forall t \in [0, T]$$

*Ce qui implique*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]} |X_t|^p\right) < M$$

*D'où le resultat.*

■

# Chapitre 2

# Conditions nécessaires et suffisants pour un contrôle relaxé et strict

## 2.1 Introduction

Notre objectif dans ce chapitre est d'établir des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour un problème de controle optimal stochastique pour des system gouverné par des EDSs de la forme suivante :

$$\begin{cases} dX_t = b\left(t, X_t, u_t\right) dt + \sigma\left(t, X_t, u_t\right) dW_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

et le cout a minimiser est donné par

$$J(u) = E[g(X_T) + \int_0^T h(t, X_t, u(t))dt].$$

Selon la méthode de Seid Bahlali. L'idée serait d'injecter l'éspace des contrôles stricts $\mathcal{V}$ dans l'espace des mesures de probabilité sur $\mathbb{U}$ où $\mathbb{U}$ designe l'ensemble des valeurs prises par le contrôle strict. Ce nouveau espace appelé espace des contrôles relaxés. La démonstration est basé sur l'approximation des trajectoires des contrôles relaxés par les trajéctoires des contrôles stricts et le principe du maximum approché. L'idée principale est d'utiliser le fait que l'espace des contrôles relaxés est convexe .On établit les conditions nécéssaires d'optimalités en utilisation la méthode classique de perturbation convexe. Si $u$ un contrôle relaxé optimal et $q$ un élément arbitraire de $\mathcal{R}$, on peut défénir un contrôle perturbé comme suit :

$$u_t^\theta = u_t + \theta(q_t - u_t).$$

avec $\theta$ un petit suffisant $\theta \geq 0$ et pour chaquet $t \in [0; T]$ .D'aprés l'optimalité de $u$ on a :

$$J(u_t^\theta) - J(u_t) \geq 0.$$

## 2.2 Formulation du problème

Soit $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ un mouvement brownien $d-$dimensionnel défini dans un espace de probabilisé filtré $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P}\right)$,soient $\mathcal{F}_t = \sigma\left(W_s, 0 \leq s \leq t\right)$ filtration naturelle de $W_t$.

On considère l'$EDS$ suivante :

$$\begin{cases} dX_t = b\left(t, X_t, u_t\right) dt + \sigma\left(t, X_t, u_t\right) dW_t \\ X_0 = x \end{cases} \tag{2.1}$$

où

$$b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$$
$$\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{U} \rightarrow M_{n \times d}\left(\mathbb{R}\right).$$

sont deux fonctions Boreliennes et $x$ une varaible aléatoire $n-$ dimensionnel $\mathcal{F}_0-$mesurable et indépendante de $W$ telle que

$$\mathbb{E}\left(|x|^m\right) < \infty; \forall m > 1.$$

Soit $T$ un nombre réel strictement positif et $\mathbb{U}$ un sous ensemble non vide de $\mathbb{R}^d$.

**Définition 2.2.1 (contrôle admissible)** *On appelle contrôle admissible tout processus*

*$\nu_t$ mesurable ; $\mathcal{F}_t-$adapte à valeurs dans un sous ensemble $\mathbb{U}$ de $\mathbb{R}^d$ tel que :*

$$\mathbb{E} \sup_{t\in[0,T]} |\nu(t)|^m < \infty, \forall m > 1.$$

*Notant par $\mathcal{V}$ l'ensemble de tous les contrôles admissibles :*

$$\mathcal{V} \triangleq \{\nu : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{U}.\textit{tel que } \nu(\cdot) \ \textit{ soit mesurable et } \mathcal{F}_t - \textit{adapté}\}.$$

On étudie un contrôle de problème stochastique dont le système est gouverné par une équation diffirentielle stochastique et non linéaire 2.1 la fonction côut est défnit de $\mathcal{V}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$J(u) = \mathbb{E}\left[\int_0^T h(t, X_t, u_t)\, dt + g(X(T))\right] \tag{2.2}$$

où

$$h : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{U} \to \mathbb{R}^n$$

et

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Sont deux fonctions Boreliennes et $X_t^u$ est la trajectoire du système contrôlé par $u$.

**Définition 2.2.2 (contrôle optimal)** *Le problème de contrôle optimal consiste à minimiser une fonction de coût $J$ sur un ensemble des contrôles admissibles $\mathcal{V}$. Un contrôle admissible $u$ est dite optimal si elle satisfait :*

$$J(u) = \inf(J(\nu); \forall \nu \in \mathcal{V}).$$

On note par $f_x$ et $f_{xx}$ les dérrivées premiéres et secondes par rapport à $x$ pour $b, \sigma, g, h$ on suppose que :

$$b, \sigma, g, h \text{ sont deux fois dérivables par rapport à la variable d'état } x. \tag{2.3}$$

$$b_x, \sigma_x, g_x, h_x \text{ sont uniformes bornés.} b, h, g \text{ sont bornés par } C(1 + |x| + |u|) \tag{2.4}$$

**Définition 2.2.3** *Un contrôle relaxé $q$ est une variable alèatoire $q(w,dt,da)$ à valeurs dans l'éspace $V$ telle que pour chaque $t$.*

$$1_{[0,t[}\, q \ \ est\ \mathcal{F}_t - mesurable.$$

**Remarque 2.2.1** *Un contrôle relaxé peut être écrit sous la forme :*

$$q(w,dt,da) = dtq(w,da),$$

*où $q(w,dt,da)$ est un processus progréssivement mesurable à valeurs dans l'éspace $\mathbb{P}(\mathcal{V})$ des mesures de probabilités.*

**Remarque 2.2.2** *L'ensemble $\mathcal{V}$ des contrôles stricts peut être injecté dans l'ensemble $\mathcal{R}$ des contrôles relaxés par l'aplication $\Psi$*

$$\mu \rightarrow \Psi(\mu)(dt,da) = dt.\delta_{\mu(t)}.(da) \in \mathcal{R}$$

*où $\delta_{\mu(t)}$ est la mesure de Dirac de masse.*

Le deuxième résultat principal de ce chapitre est cracterisé par l'optimalité des processus contrôles stricts. L'idée principale est remplacer les contrôles relaxés par des mesures (Dirac) qui chargent des contrôles stricts. Ainsi on doit réduire le $\mathcal{R}$ des contrôles relaxés et minimise le côut de $J$ sur l'ensemble :

**Remarque 2.2.3**

$$\delta(\mathcal{V}) = \{q \in \mathfrak{R} \ : q = \delta_v, \nu \in \mathcal{V}\} \tag{2.5}$$

*où $\delta(\mathcal{V})$ l'ensemble des contrôles relaxes sous la forme des mesure de Dirac qui charge des contrôles stricts. Si pour chaque :*

$$t \in [0;T], q_t \in \delta(\mathcal{V}),$$

*alors*

$$q_t = \delta_{\nu_t}. \text{ avec } \nu \in \mathcal{V}$$

*Si* $f \in C_b^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

$$f(x_t) - f(x) - \int_0^T \int_{\mathbb{U}} lf(s, x_s, a) q_s(w, da) ds;$$

*est un* $P$*-martingale et* $L$ *est ingénérateur infitésimal associe à l'équation d'état dansle cas des contrôles relaxés est donnée par :*

$$\begin{cases} dX_t^q = \int_{\mathbb{U}} b(t, X_t^q, a) q_t(da) dt + \int_{\mathbb{U}} \sigma(t, X_t^q, a) q_t(da) dW_t \\ X_0^q = x, \end{cases} \tag{2.6}$$

*la fonction coût a minimiser est donné par*

$$J(q) = E\left[ g(X(T)) + \int_0^T \int_{\mathbb{U}} h(t, X_t, a) q_t(da) dt \right],$$

*avec les mêmes hypothèses sur* $h$ *et* $g$*. On cherche à minimiser la fonction coût* $J(q)$*sur l'ensemble* $\mathcal{R}$*, telle que :*

$$J(\mu) \leq J(q).$$

*On note :*

$$J(\mu) = \inf_{\mu \in \mathcal{R}} J(q)$$

**Remarque 2.2.4** *On pose :*

$$b^*(t, X_t^q, q_t) = \int_{\mathbb{U}} b(t, X_t^q, a) q_t(da) dt$$

$$\sigma^*(t, X_t^q, q_t) = \int_{\mathbb{U}} \sigma(t, X_t^q, a) q_t(da) dt$$

$$h^*(t, X_t^q, q_t) = \int_{\mathbb{U}} h(t, X_t^q, a) q_t(da) dt$$

*l'équation précidente donnée :*

$$\begin{cases} dX_t^q = b^*(t, X_t^q, q_t)dt + \sigma^*(t, X_t^q, q_t)dW_t \\ X_0^q = x, \end{cases}$$

*la fonction coût est définie par :*

$$J(q) = E\left[g(X^q(T)) + \int_0^T h(t, X_t^q, q_t)dt\right]$$

*et dans ce cas la fonction* $b^*$ *et* $\sigma^*$ *qui satisfait les mêmes conditions que* $b$*,* $\sigma$ *et de plus linéaire en* $q$. $\mathbb{P}(\mathbb{U})$ *l'ensemble des valeurs du processus* $q_t$*, où* $\mathbb{P}(\mathbb{U})$ *est l'espace des mesures de probabilités sur* $\mathbb{U}$*soit convexe et compact.Si* $q_t$=$\delta_{\mu(t)}$ *est la mesure de Dirac au* $u(t)$ *pour chaque* $t \in [0; T]$ *alors :*

$$\int_{\mathbb{U}} b(t, X_t^q, a)q_t(da)dt = \int_{\mathbb{U}} b(t, X, a)\delta_{\mu(t)}(da)dt = b(t, X_t^q, u_t)$$

$$\int_{\mathbb{U}} \sigma(t, X_t^q, a)q_t(da)dt = \int_{\mathbb{U}} \sigma(t, X, a)\delta_{\mu(t)}(da)dt = \sigma(t, X_t^q, u_t)$$

$$\int_{\mathbb{U}} h(t, X_t^q, a)q_t(da)dt = \int_{\mathbb{U}} h(t, X, a)\delta_{\mu(t)}(da)dt = h(t, X_t^q, u_t)$$

*dans ce cas* $X_t^u = X_t^q$ *et* $J(q) = J(u)$*, ce qui nous permetra d'obtenir un problème de contrôle strict.*

**Approximation des trajectoires :**

Pour établir le principe du maximum dans le cas des contrôles relaxés,on a besoin d'un résultat d'approximation des trajectoires des contrôles relaxés par les trajectoires des contrôles stricts.Pour cela, l'outil essentiel est un lemme connu sous le nom de chaterring lemma et qui est donné par :

**Lemme 2.2.1 (Chaterring lemma)** *Soit* $q$ *un contrôle relaxé alors il existe une suite*$(u^n)$

*de contrôle ordinaire telle que : :*

$$dtq_t^n(da) = dt\delta_{\mu^n(t)}(da) \to dtq_t(da) \text{ faiblement qaund } n \to +\infty$$

*Pour toute fonction h :*$[0;T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{P}(\mathbb{U}) \to \mathbb{R}^d$ *continue sur* $[0;T] \times \mathbb{P}(\mathbb{U})$ *telle que :*

$$\int_0^T \int_{\mathbb{U}} h(t, X_t^q, a) q_t(da) dt \text{ soit linéaire en } q.$$

*on a :*

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^T \int_{\mathbb{U}} h(t, X_t^q, a) q_t^n(da) dt = \int_0^T \int_{\mathbb{U}} h(t, X_t^q, a) q_t(da) dt.$$

## 2.3 Conditions nécessaires d'optimalité pour les contrôles stricts et relaxés

Dans ce cas on applique la méthode des pertirbations c'est a dire : on se donne un contrôle optimal $u$ et on le perturbe puisque $\mathcal{R}$ convexe,on applique la méthode des perturbations convexes c'est à dire $\theta > 0$, assez petit soit $u$ un contrôle optimal. On pose pour tout $q \in \mathcal{R}$ ,*un contrôle perturbé* comme suit :

$$u_t^\theta = u_t + \theta \left(q_t - u_t\right), \forall \nu_t \in \mathcal{V} \text{ où } \theta > 0. \tag{2.7}$$

puisque $u_t$ est optimal alors :

$$0 \leq J\left(u_t^\theta\right) - J\left(u_t\right) \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} 0 \leq J\left(u_t^\theta\right) - J\left(u_t\right) &= J\left(u_t + \theta\left(q_t - u_t\right)\right) - J\left(u_t\right) \\ &= \lim_{\theta \to 0} \frac{J\left(u_t + \theta\left(q_t - u_t\right)\right) - J\left(u_t\right)}{\theta} \\ &= J_q\left(u_t\right)\left(\nu_t - u_t\right). \end{aligned}$$

Pour obtenir l'inégalité variationnelle on a besoin de lemmes suivant :

**Lemme 2.3.1**

$$\lim_{\theta\to 0}\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|X_t^\theta - X_t^u\right|^2\right] = 0. \tag{2.9}$$

**Preuve.**

$$\begin{aligned}X_t^\theta - X_t^u &= \int_0^t \left[\int_{\mathbb{U}} b\left(s, X_s^\theta, a\right) u_s^\theta(da) - \int_{\mathbb{U}} b\left(s, X_s^u, a\right) u_s(da)\right] ds \\ &+ \int_0^t \left[\int_{\mathbb{U}} \sigma\left(s, X_s^\theta, a\right) u_s^\theta(da) - \int_{\mathbb{U}} \sigma\left(s, X_s^u, a\right)\ u_s(da)\right] dW_s\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}X_t^\theta - X_t^u &= \int_0^t \left[\int_{\mathbb{U}} b\left(s, X_s^\theta, a\right) u_s^\theta(da) - \int_{\mathbb{U}} b\left(s, X_s^u, a\right) u_s^\theta(da)\right] ds \\ &+ \int_0^t \left[\int_{\mathbb{U}} b\left(s, X_s^\theta, a\right) u_s^\theta(da) - \int_{\mathbb{U}} b\left(s, X_s^u, a\right) u_s(da)\right] ds \\ &+ \int_0^t \left[\int_{\mathbb{U}} \sigma\left(s, X_s^\theta, a\right) u_s^\theta(da) - \int_{\mathbb{U}} \sigma\left(s, X_s^u, a\right) u_s^\theta(da)\right] dW_s \\ &+ \int_0^t \left[\int_{\mathbb{U}} \sigma\left(s, X_s^\theta, a\right) u_s^\theta(da) - \int_{\mathbb{U}} \sigma\left(s, X_s^u, a\right) u_s(da)\right] dW_s\end{aligned}$$

De la définition de $u^\theta(t)$ et passant aux espérance on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left|X_t^\theta - X_t^u\right|^2 &\leq C\mathbb{E}\int_0^t \left|\int_{\mathbb{U}} b\left(s, X_s^\theta, a\right) u_s(da) - \int_{\mathbb{U}} b\left(s, X_s^u, a\right) u_s(da)\right|^2 ds \\ &+ C\theta^2\mathbb{E}\int_0^t \left|\int_{\mathbb{U}} b\left(s, X_s^\theta, a\right) q_s(da) - \int_{\mathbb{U}} b\left(s, X_s^u, a\right) u_s(da)\right|^2 ds \\ &+ C\mathbb{E}\int_0^t \left|\int_{\mathbb{U}} \sigma\left(s, X_s^\theta, a\right) u_s(da) - \int_{\mathbb{U}} \sigma\left(s, X_s^u, a\right) u_s(da)\right|^2 ds \\ &+ C\theta^2\mathbb{E}\int_0^t \left|\int_{\mathbb{U}} \sigma\left(s, X_s^\theta, a\right) q_s(da) - \int_{\mathbb{U}} \sigma\left(s, X_s^u, a\right) u_s(da)\right|^2 ds.\end{aligned}$$

D'aprés 2.3 et $b$,$\sigma$ sont uniformement lipchtéziene par raport à $x$

$$\mathbb{E}\left|X_t^\theta - X_t^u\right|^2 \leq C\mathbb{E}\int_0^t \left|X_t^\theta - X_t^u\right|^2 ds + C\theta^2$$

on applique **lemme de Gronwalle inégalité Buckholder-Davis Gundy** :

$$\lim_{\theta\to 0}\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|X_t^\theta - X_t^u\right|^2\right] = 0.$$

Finalement on obtient le lemme. ■

**Lemme 2.3.2** *Soit $z_t$ est la solution unique de l'équation linéaire suivante :*

$$\begin{cases} dz_t = \int_{\mathbb{U}} b\left(t, X_t^{\theta}, a\right) u_t\left(da\right) z_t dt + \int_{\mathbb{U}} \sigma\left(t, X_t^u, a\right) u_t\left(da\right) z_t dW_t \\ + \left[\int_{\mathbb{U}} b\left(t, X_t^u, a\right) q_t\left(da\right) - \int_{\mathbb{U}} b\left(t, X_t^u, a\right) u_t\left(da\right)\right] dt \\ + \left[\int_{\mathbb{U}} \sigma\left(t, X_t^u, a\right) q_t\left(da\right) - \int_{\mathbb{U}} \sigma\left(t, X_t^u, a\right) u_t\left(da\right)\right] dW_t \\ z_0 = 0. \end{cases} \tag{2.10}$$

*on a*

$$\lim_{\theta \to 0} \mathbb{E}\left[\left|\frac{X_t^{\theta} - X_t^u}{\theta} - z_t\right|\right]^2 = 0. \tag{2.11}$$

**Preuve.** On pose :

$$Y_t = \frac{X_t^{\theta} - X_t^u}{\theta} - z_t$$

$$\begin{aligned} Y_t = {} & \frac{1}{\theta}\int_0^t \left[\int_{\mathbb{U}} b\left(s, X_s^{\theta}, a\right) u_s^{\theta}(da) - \int_{\mathbb{U}} b\left(s, X_s^u, a\right) u_s^{\theta}(da)\right] ds \\ & + \frac{1}{\theta}\int_0^t \left[\int_{\mathbb{U}} b\left(s, X_s^u, a\right) u_s^{\theta}(da) - \int_{\mathbb{U}} b\left(s, X_s^u, a\right) u_s(da)\right] ds \\ & + \frac{1}{\theta}\int_0^t \left[\int_{\mathbb{U}} \sigma\left(s, X_s^{\theta}, a\right) u_s^{\theta}(da) - \int_{\mathbb{U}} \sigma\left(s, X_s^u, a\right) u_s^{\theta}(da)\right] dW_s \\ & + \int_0^t \left[\int_{\mathbb{U}} \sigma\left(s, X^u, a\right) u_s^{\theta}(da) - \int_{\mathbb{U}} \sigma\left(s, X_s^u, a\right) u_s(da)\right] dW_s \\ & - \int_0^t \int_{\mathbb{U}} b\left(s, X_s^{\theta}, a\right) u_s(da) z_s ds - \int_0^t \int_{\mathbb{U}} \sigma\left(s, X_s^u, a\right) u_s(da) z_s dW_s \\ & - \int_0^t \left[\int_{\mathbb{U}} b\left(s, X_s^u, a\right) q_s(da) - \int_{\mathbb{U}} b\left(s, X_s^u, a\right) u_s(da)\right] ds \\ & - \int_0^t \left[\int_{\mathbb{U}} \sigma\left(s, X^u, a\right) q_s(da) - \int_{\mathbb{U}} \sigma\left(s, X_s^u, a\right) u_s(da)\right] dW_s. \end{aligned}$$

D'aprés la définition de $u^{\theta}(t)$ et passant aux espérances on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left|X_t\right|^2 \leq {} & C\mathbb{E}\int_0^t \int_0^1 \int_{\mathbb{U}} \left|b_x\left(s, X_s^u + \lambda(X_s + z_s), a\right) X_s\right|^2 u_s(da) d\lambda ds \\ & + C\mathbb{E}\int_0^t \int_0^1 \int_{\mathbb{U}} \left|\sigma_x\left(s, X_s^u + \lambda(X_s + z_s), a\right) X_s\right|^2 u_s(da) d\lambda ds + C\mathbb{E}\left|\alpha_t^{\theta}\right|^2, \end{aligned}$$

telle que :

$$\begin{aligned}
\alpha_t^\theta &= \int_0^t \int_0^1 \int_{\mathbb{U}} b_x\left(s, X_s^u + \lambda(X_s + z_s), a\right)\left(X_t^\theta - X_t^u\right) q_s(da) d\lambda ds \\
&- \int_0^t \int_0^1 \int_{\mathbb{U}} b_x\left(s, X_s^u + \lambda(X_s + z_s), a\right)\left(X_t^\theta - X_t^u\right) u_s(da) d\lambda ds \\
&+ \int_0^t \int_0^1 \int_{\mathbb{U}} \sigma_x\left(s, X_s^u + \lambda(X_s + z_s), a\right)\left(X_t^\theta - X_t^u\right) q_s(da) d\lambda dW_s \\
&- \int_0^t \int_0^1 \int_{\mathbb{U}} \sigma_x\left(s, X_s^u + \lambda(X_s + z_s), a\right)\left(X_t^\theta - X_t^u\right) u_s(da) d\lambda dW_s \\
&+ \int_0^t \int_0^1 \int_{\mathbb{U}} b_x\left(s, X_s^u + \lambda(X_s + z_s), a\right)(z_s) u_s(da) d\lambda ds \\
&+ \int_0^t \int_0^1 \int_{\mathbb{U}} \sigma_x\left(s, X_s^u + \lambda(X_s + z_s), a\right)(z_s) u_s(da) d\lambda dW_s \\
&- \int_0^t \int_{\mathbb{U}} b\left(s, X_s^u, a\right) u_s(da) ds - \int_0^t \int_{\mathbb{U}} \sigma\left(s, X_s^u, a\right)(z_s) u_s(da) dW_s
\end{aligned}$$

Ona $b_x$ et $\sigma_x$ sont continues et bornnés donc :

$$\mathbb{E}\left|X_t^\theta\right|^2 \leq C\mathbb{E}\int_0^t \left|X_t^\theta\right|^2 ds + C\mathbb{E}\left|\alpha_t^\theta\right|^2$$

Où

$$\lim_{\theta \to 0} \mathbb{E}\left|\alpha_t^\theta\right|^2 = 0.$$

On a appliqué le lemme2.2.1 et la continuité de $b_x$ et $\sigma_x$et **lemme de Gronwall** et **inégalité Buckholder -Davis -Gundy :**

$$\lim_{\theta \to 0} \mathbb{E}\left[\left|\frac{X_t^\theta - X_t^u}{\theta} - z_t\right|\right]^2 = 0.$$

Finalement on obtient le lemme. ■

**Lemme 2.3.3** *Soit $u$ est contrôle optimal strict, alors on a :*

$$\begin{aligned}
0 &\leq \mathbb{E}\left[g_x\left(X_T^u\right) z_T\right] + \mathbb{E}\int_0^T \int_{\mathbb{U}} h_x\left(t, X_t^u, a\right) u_t(da) z_t dt \\
&+ \mathbb{E}\int_0^T \left[\int_{\mathbb{U}} h_x\left(t, X_t^u, a\right) q_t(da) - \int_{\mathbb{U}} h_x\left(t, X_t^u, a\right) u_t(da)\right] dt
\end{aligned} \tag{2.12}$$

**Preuve.** On aplique le lemme2.2.1on a :

$$0 \leq \mathbb{E}\left[g(X_T^\theta) - g(X_T^u)\right] + \mathbb{E}\int_0^T \int_{\mathbb{U}} h(t, X_t^\theta, a)u_t^\theta(da)dt - \mathbb{E}\int_0^T \int_{\mathbb{U}} h(t, X_t^u, a)u_t(da)dt$$

$$0 \leq \mathbb{E}\left[g(X_T^\theta) - g(X_T^u)\right] + \mathbb{E}\int_0^T \int_{\mathbb{U}} h(t, X_t^\theta, a)u_t^\theta(da)dt - \mathbb{E}\int_0^T \int_{\mathbb{U}} h(t, X_t^u, a)u_t^\theta(da)dt$$
$$+ \mathbb{E}\int_0^T \int_{\mathbb{U}} h(t, X_t^u, a)u_t^\theta(da)dt - \mathbb{E}\int_0^T \int_{\mathbb{U}} h(t, X_t^u, a)u_t(da)dt.$$

D'aprés la définition de $u^\theta(t)$ ona :

$$0 \leq \mathbb{E}\left[g(X_T^\theta) - g(X_T^u)\right] + \mathbb{E}\int_0^T \int_{\mathbb{U}} h(t, X_t^\theta, a)u_t(da)dt - \mathbb{E}\int_0^T \int_{\mathbb{U}} h(t, X_t^u, a)u_t(da)dt$$
$$+ \theta\mathbb{E}\int_0^T \left[\int_{\mathbb{U}} h(t, X_t^\theta, a)q_t(da) - \int_{\mathbb{U}} h(t, X_t^\theta, a)u_t(da)\right] dt$$

$$0 \leq \mathbb{E}\int_0^1 g_x\left(x_T^u + \lambda\theta(X_T + z_T)\right) z_T d\lambda + \mathbb{E}\int_0^T \int_{\mathbb{U}} \int_0^1 h_x\left(x_t^u + \lambda\theta(X_t + z_t), a\right) u_t(da) z_t d\lambda dt$$
$$\theta\mathbb{E}\int_0^T \left[\int_{\mathbb{U}} h(t, X_t^\theta, a)q_t(da) - \int_{\mathbb{U}} h(t, X_t^\theta, a)u_t(da)\right] dt + \rho_t^\theta$$

telle que$\rho_t^\theta$définie par :

$$\rho_t^\theta = \mathbb{E}\int_0^1 g_x\left(x_T^u + \lambda\theta(X_T + z_T)\right) X_T d\lambda + \mathbb{E}\int_0^T \int_{\mathbb{U}} \int_0^1 h_x\left(x_t^u + \lambda\theta(X_t + z_t), a\right) u_t(da) X_t d\lambda dt$$

d'aprés la continuité de $g_x$ et $h_x$et **linégalité Cauchy Schwartz** et Lemme (10)

$$\lim_{\theta \to 0} \rho_t^\theta = 0.$$

$$0 \leq \mathbb{E}\left[g(X_T^u)z_T\right] + \mathbb{E}\int_0^T \int_{\mathbb{U}} \int_0^1 h_x\left(s, x_t^u + \lambda\theta(X_t + z_t), a\right) u_t(da) X_t d\lambda dt$$
$$+ \mathbb{E}\int_0^T \left[\int_{\mathbb{U}} h(t, X_t^\theta, a) q_t(da) - \int_{\mathbb{U}} h(t, X_t^\theta, a) u_t(da)\right] dt.$$

Finalement on obtient le lemme ■

**Théorme 2.3.1** *A partir de l'inégalité variationnelle* 2.12 *on établie les conditions nécéssaires d'optimalité qui vérifient le contrôle optimal u. Soit* $\Phi$ *la solution fondamentale associeé à l'équation linéaire* $(E.L)$

$$\begin{cases} d\Phi_t = \int_{\mathbb{U}} b_x\left(t, X_t^\theta, a\right) u_t\left(da\right) \Phi_t dt + \int_{\mathbb{U}} \sigma_x\left(t, X_t^u, a\right) u_t\left(da\right) \Phi_t dW_t \\ \Phi_0 = I_d \end{cases} \tag{2.13}$$

$\Phi$*inversible et son inverse* $\Psi$*vérifie :*

$$\begin{cases} d\Psi_t = \left[\int_{\mathbb{U}} \sigma_x\left(t, X_t^\theta, a\right) u_t\left(da\right) \Psi_t \int_{\mathbb{U}} \sigma_x^*\left(t, X_t^u, a\right) u_t\left(da\right)\right] dt - \int_{\mathbb{U}} b_x\left(t, X_t^\theta, a\right) u_t\left(da\right) \Psi_t dt \\ - \int_{\mathbb{U}} \sigma_x\left(t, X_t^u, a\right) u_t\left(da\right) \Psi_t dW_t \\ \Phi_0 = I_d \end{cases} \tag{2.14}$$

*telle que* $\Phi$ *et* $\Psi$ *vérifie :*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |\Phi_t|^2\right] + \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |\Psi_t|^2\right] < \infty$$

*on pose :*

$$\alpha_t = \Psi_t z_t \tag{2.15}$$

$$X_1 = \Phi_T^*\left(T\right) g_x\left(X^u\left(T\right)\right) + \int_0^T \left[\Phi_t^* \int_{\mathbb{U}} h_x\left(t, X_t^u, a\right) u_t\left(da\right)\right] dt \tag{2.16}$$

$$Y_t = \mathbb{E}\left[X_1 | F_t\right] - \int_0^t \left[\Phi_T^* \int_{\mathbb{U}} h_x\left(s, X_s^u, a\right) u_s\left(da\right)\right] ds \tag{2.17}$$

*On remarque d'aprés* 2.15, 2.16, 2.17

$$\mathbb{E}\left[\alpha_T Y_T\right] = \mathbb{E}\left[\left(g_x\left(X_T^u\right) z_T\right)\right] \tag{2.18}$$

*telle que* $g_x$ *et* $h_x$ *sont bornnées et* 2.13 $X_1$ *est carré intégrable*

$$\mathbb{E}\left[\left(|X_1|^2\right)\right] < \infty$$

$\mathbb{E}\left[X_1|F_t\right]$ *est un martingale de carré intégrable, théorème de décomposition de Itô pour les martingales carré intégrable. Si* $(z_t)$ *est une martingale de carré intégrable alors il existe un processus* $B_s$ *telle que :*

$$z_t = \mathbb{E}\left[z_t\right] + \int_0^t B_s dW_s,$$

*telle que*

$$\mathbb{E}\int_0^t |B_s|^2 \, ds.$$

*On applique théorème de décomposition d'Itô on a :*

$$Y_t = \mathbb{E}\left[X_1\right] + \int_0^t B_s dW_s - \int_0^t \left[\Phi_s^* \int_{\mathbb{U}} h_x\left(s, X_s^u, a\right) u_s\left(da\right)\right] ds.$$

*On a appliqué la formule d'Itô sur* $\alpha_t = \Psi_t z_t$ *et* $\alpha_t Y_t$, 2.18*et inégalité* 2.13

$$0 \leq \mathbb{E}\int_0^T \left[H\left(t, X_t^u, q_t, P_t^u, Q_t^u\right) - H\left(t, X_t^u, u_t, P_t^u, Q_t^u\right)\right] dt. \tag{2.19}$$

*On défnit le Himiltonian* $H$ *sur* $[0;T] \times \mathbb{R}^n \times$ $Q(\mathbb{U}) \times \mathbb{R}^n \times$ $M_{n\times d}(\mathbb{R})$*dans* $\mathbb{R}$ *avec :*

$$\begin{aligned} H\left(t, X_t^u, q_t, P_t^u, Q_t^u\right) = & \int_{\mathbb{U}} h\left(s, X_t, a\right) u_t\left(da\right) + \int_{\mathbb{U}} b\left(t, X_t, a\right) q_t\left(da\right) P_t \\ & + \int_{\mathbb{U}} \sigma\left(t, X_t, a\right) q_t\left(da\right) Q_t \end{aligned}$$

$\left(P_t^u, Q_t^u\right)$ *est un couple de processus adapté telle que :*

$$P_t^u = \Psi_t^* Y_t, P_t^u \in L^2\left(\left[0, T\right]; \mathbb{R}^n\right) \tag{2.20}$$

$$Q_t^u = \Psi_t^* B_s - \int_{\mathbb{U}} \sigma^*\left(t, X_t^u, a\right) u_t\left(da\right) P_t^u; Q_t^u \in L^2\left(\left[0, T\right]; \mathbb{R}^{n\times d}\right). \tag{2.21}$$

*et le processus* $B$*vérifé :*

$$\int_0^t B_s dW_s = \mathbb{E}\left[\Phi_T^*(T)\, g_x(X^u(T)) + \int_0^T \Phi_t^* \int_{\mathbb{U}} h_x(s, X_t^u, a)\, u_t(da)\, |F_t\right]$$
$$- \mathbb{E}\left[\Phi_T^*(T)\, g_x(X^u(T)) + \int_0^T \Phi_t^* \int_{\mathbb{U}} h_x(s, X_t^u, a)\, u_t(da)\right].$$

*le processus* $P_t^u$ *t est un processus adjoint et avec* 2.16 ,2.17, 2.20

$$P_t^u = \mathbb{E}\left[\Psi^* \Phi_T^*(T)\, g_x(X^u(T)) + \Psi^* \int_0^T \Phi_t^* \int_{\mathbb{U}} h_x(s, X_t^u, a)\, u_t(da)\, / F_t\right].$$

*On a appliqué la formule d'Itô sur le processus adjoint* $P_t^u$ *on obtient l'équation adjionte*

$$\begin{cases} -dP_t^u = H_x(t, X_t^u, u_t, P_t^u, Q_t^u)\, dt - P_t^u dW_t \\ P_T^u = g_x(X^u(T)) \end{cases} \tag{2.22}$$

**Théorme 2.3.2** *Supposons que* $u$ *est un contrôle optimal strict minimise le côut* $J$ *sur* $\mathcal{V}$ *et* $X_t^\nu$ *la solution de l'équation* 2.1*contrôlée par* $(u)$ *il existe un couple unique de procéssus adapté*

$$(P_t^u; Q_t^u) \in L^2([0,T] \times \mathbb{R}^n) \times L^2([0,T] \times \mathbb{R}^{n \times d})$$

*et solution du l'équation suivante :*

$$\begin{cases} -dP_t^u = H_x(t, X_t^u, u_t, P_t^u, Q_t^u)\, dt - Q_t^u dW_t. \\ P_T^u = g_x(X_T^u) \end{cases} \tag{2.23}$$

*et vérfiés :*

$$H(t, X_t^u, u_t, P_t^u, Q_t^u) = \inf_{\nu \in \mathbb{U}} H(t, X_t^v, \nu_t, P_t^v, Q_t^v), \mathbb{P} - ps, dt - pp. \tag{2.24}$$

*oû l'Hamiltonien défnir dans le cas strict de* $[0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{V} \times \mathbb{R}^n \times M_{n\times d}(\mathbb{R})$ *dans* $\mathbb{R}$ *par :*

$$H(t, X_t, \nu_t, P_t, Q_t) = h(t, X, \nu_t) + b(t, X, \nu_t)\, P + \sigma(t, X, \nu_t)\, Q. \tag{2.25}$$

**Preuve.** Soit $u$ un contrôle optimal strict de problème $\{2.1, 2.2; 2.3\}$ et $\nu$ être un élément arbitraire de $\mathcal{V}$ il existe ; $\mu, q \in \delta(\mathcal{V})$ telle que :

$$\mu = \delta_u(\mathcal{V}) \ ; \ q = \delta_v(\mathcal{V}). \tag{2.26}$$

comme $u$ minimise le côut $J$ sur $\mathcal{V}$,donc par le lemme , minimise $J$ sur $\delta(\mathcal{V})$ : Alors, par les conditions d'optimalités nécéssaires pour des contrôles relaxés théorème2.3.1 ; il existe une paire unique des processus adaptés $(P_t^u, Q_t^u)$, qui est une solution de 2.22comme on a

$$H\left(t, X_t^u, \mu_t, P_t^u, Q_t^u\right) = \inf_{q_t \in \delta(\mathcal{V})} H\left(t, X_t^q, q_t, P_t^q, Q_t^q\right), \mathbb{P} - ps, dt - pp.$$

par 2.26 on peut facilement voir :

$$X^\mu = X^u$$

$$H\left(t, X_t^u, \mu_t, P_t^u, Q_t^u\right) = H\left(t, X_t^u, u_t, P_t^u, Q_t^u\right)$$

$$H\left(t, X_t^v, q_t, P_t^v, Q_t^v\right) = H\left(t, X_t^v, \nu_t, P_t^v, Q_t^v\right)$$

ou la paire$(P_t^u, Q_t^u)$ est solution de 2.23 le théorème est prouvé. ■

### 2.3.1 Les Conditions suffisantes pour les contrôles stricts et relaxés

**Théorme 2.3.3** *Soient $g$ et l'application $x \to H(t, X_t, \nu, P, Q)$ sont convexe alors $u$ est un contrôle optimal pour le proplème$\{2.1, 2.2$ et $2.3\}$ s'il verifie*

$$H\left(t, X_t^u, u_t, P_t^u, Q_t^u\right) = \inf_{\nu \in \mathbb{U}} H\left(t, X_t^u, \nu_t, P_t^u, Q_t^u\right), \mathbb{P} - ps, dt - pp.$$

**Preuve.** Soit $u$ un contrôle relaxé arbitraire (candidat à être optimal) et $(X_t^u)$ la solution associée. Pour tout un contrôle relaxé $q$ avec solution associée $(X_t^q)$ on a :

$$\begin{aligned} J(q) - J(u) = \mathbb{E}\left[g\left(X_t^q(T)\right) - g\left(X_t^u(T)\right)\right] + \mathbb{E}\int_0^T \int_{\mathbb{U}} h\left(t, X_t^q(t), a\right) q_t(da) \\ - \int_{\mathbb{U}} h\left(t, X_t^u(t), a\right) u_t(da)\, dt. \end{aligned}$$

puisque $g$ est convexe, on aura :

$$\begin{aligned} g\left(X_t^q(T)\right)-g\left(X_t^u(T)\right) &\geq g_x\left(X_t^u(T)\right)\left(X_t^q(T)-X_t^u(T)\right) \\ J(q)-J(u) &\geq \mathbb{E}\left[g_x\left(X_t^u(T)\right)\left(X_t^q(T)-X_t^u(T)\right)\right] \\ &\quad+\mathbb{E}\int_0^T \int_{\mathbb{U}} h\left(t, X_t^q(t), a\right) q_t(da) \\ &\quad-\int_{\mathbb{U}} h\left(t, X_t^u(t), a\right) u_t(da)\, dt. \end{aligned}$$

On remarque que

$$P_T^u=g_x\left(X_t^u(T)\right).$$

On déduit

$$\begin{aligned} J(q)-J(u) \leq & \mathbb{E}\left[P_T^u\left(X_t^q(T)-X_t^u(T)\right)\right] \\ & +\mathbb{E}\int_0^T \int_{\mathbb{U}} h\left(t, X_t^q(t), a\right) q_t(da) \\ & -\int_{\mathbb{U}} h\left(t, X_t^u(t), a\right) u_t(da)\, dt. \end{aligned}$$

En appliquant la formule de Itô à $P_T^u\left(X_t^q-X_t^u\right)$

$$\begin{aligned} d\left(P_t^u\left(X_t^q-X_t^u\right)\right) &= dP_t^u\left(X_t^q-X_t^u\right)+P_t^u d\ \left(X_t^q-X_t^u\right)+d<P_t^u, X_t^q-X_t^u> \\ d\left(P_t^u\left(X_t^q-X_t^u\right)\right) &= \left(-H_x\left(t, X_t^u, u_t, P_t^u, Q_t^u\right) dt-P_t^u dW_t\right)\left(X_t^q-X_t^u\right) \\ &\quad+P_t^u\left[\int_{\mathbb{U}} b\left(t, X_t^q, a\right) q_t(da)-\int_{\mathbb{U}} b\left(t, X_t^u, a\right) u_t(da)\right] dt \\ &\quad+P_t^u\left[\int_{\mathbb{U}} \sigma\left(t, X_t^q, a\right) q_t(da)-\int_{\mathbb{U}} \sigma\left(t, X_t^u, a\right) u_t(da)\right] dW_t \\ &\quad-Q_t^u\left[\int_{\mathbb{U}} \sigma\left(t, X_t^q, a\right) q_t(da)-\int_{\mathbb{U}} \sigma\left(t, X_t^u, a\right) u_t(da)\right] dt. \end{aligned}$$

On passant à l'espérence :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[P_t^u\left(X_t^q-X_t^u\right)\right] &= \mathbb{E}\int_0^T -H_x\left(t,X_t^u,u_t,P_t^u,Q_t^u\right)\left(X_t^q-X_t^u\right)dt \\
&+\mathbb{E}\int_0^T P_t^u\left[\int_{\mathbb{U}} b\left(t,X_t^q,a\right)q_t\left(da\right)-\int_{\mathbb{U}} b\left(t,X_t^u,a\right)u_t\left(da\right)\right]dt \\
&-\mathbb{E}\int_0^T Q_t^u\left[\int_{\mathbb{U}} \sigma\left(t,X_t^q,a\right)q_t\left(da\right)-\int_{\mathbb{U}} \sigma\left(t,X_t^u,a\right)u_t\left(da\right)\right]dt \\
J\left(q\right)-J\left(u\right) &\leq \mathbb{E}\int_0^T \left[H_x\left(t,X_t^u,u_t,P_t^u,Q_t^u\right)-H_x\left(t,X_t^u,q_t,P_t^u,Q_t^u\right)\right]dt \\
&-\mathbb{E}\int_0^T H_x\left(t,X_t^u,u_t,P_t^u,Q_t^u\right)\left(X_t^u-X_t^q\right)dt.
\end{aligned}
$$

Puisque $H$ est convexe en $X$ et linéaire en $u$ .plus condition nécéssaire d'optimalité on a :

$$
H\left(t,X_t^q,q_t,P_t^q,Q_t^q\right)-H\left(t,X_t^u,u_t,P_t^u,Q_t^u\right)\geq H_x\left(t,X_t^u,u_t,P_t^u,Q_t^u\right)\left(X_t^q-X_t^u\right)
$$

Equivalent :

$$
H\left(t,X_t^q,q_t,P_t^q,Q_t^q\right)-H\left(t,X_t^u,u_t,P_t^u,Q_t^u\right)-H_x\left(t,X_t^u,u_t,P_t^u,Q_t^u\right)\left(X_t^q-X_t^u\right)\leq 0.
$$

Alors on obtient :

$$
J\left(q\right)-J\left(u\right)\geq 0.
$$

D'où le résultat.

Soit $u$ être un contrôle strict (candidat peut être optimal) telle que :

$$
H\left(t,X_t^u,u_t,P_t^u,Q_t^u\right)=\inf_{\nu_t\in\mathbb{U}} H\left(t,X_t^v,\nu_t,P_t^v,Q_t^v\right),\mathbb{P}-ps,dt-pp.
$$

Soient $u\in\mathcal{V}$,$\nu\in\mathcal{V}$, donc il existe $\mu$ et $q\in\delta\left(\mathcal{V}\right)$ telle que :

$$
\mu=\delta_u,q=\delta_\nu.
$$

ceci implique que

$$
X^\mu=X^u.
$$

$$H\left(t, X_t^{\mu}, \mu_t, P_t^{\mu}, Q_t^{\mu}\right) = H\left(t, X_t^{u}, u_t, P_t^{u}, Q_t^{u}\right).$$

$$H\left(t, X_t^{\mu}, q_t, P_t^{\mu}, Q_t^{\mu}\right) = H\left(t, X_t^{u}, \nu_t, P_t^{u}, Q_t^{u}\right).$$

On deduit que

$$H\left(t, X_t^{\mu}, \mu_t, P_t^{\mu}, Q_t^{\mu}\right) = \inf_{q_t \in \delta(\mathbb{U})} H\left(t, X_t^{u}, q_t, P_t^{u}, Q_t^{u}\right); \; \mathbb{P}-ps, \; dt-pp.$$

$H$ est convexe parraport à $X$, et $g$ est convexe, d'aprés le théorème 2.3.1 minimise le côut $J$ sur $\delta\left(\mathcal{V}\right)$ , on deduit que $u$ minimise le cout $J$ sur $\mathcal{V}$. Le théorème de principe du maximum est donc prouvé. ■

# Conclusion

Dans ce mémoire, on a établie les conditions nécessaires ainsi les conditions suffisantes d'optomalité satisfaites par un contrôle strict pour des systèmes différentiels gouvernés par une équations différentielles stochastiques avec des coefficients controlés, dans un demaine de contrôles n'est pas necessairement convexe, sous la forme de principe du maximum stochastique de Pontryagin. La démonstration est basé sur l'approximation des trajectoires des contrôles stricts et le principe du maximum approché. Cette méthode on sait que les resulats classique sur le principe du maximum stochastique reposent en grande partie sur la dérivée de second-ordre. Par contre, par l'approche de S. Bahlali en utilisant seulement la dérivée du premier ordre. Cette nouvelle approche introduit par S. Bahlali [4] (Necessary and sufficient optimality conditions for relaxed and strict control problems. SIAM. J. Control. Optimal., Vol. 47, pp. 2078-2095.(2008)) permet d'établir un principe du maximum stochastique global pour les problèmes de contrôle strict et relaxé.

.

# Bibliographie

[1] J. Francois Le Gall : Mouvement brownien,martingales et calcul stochastique.Springer,2013.

[2] M. Jeanblanc : Cours de Cacul stochastique.Master 2 IF EVRY,2006.

[3] M. Abba : Mémoire Magistère, Abba Abdelmajid, Université de Biskra

[4] S. Bahlali : Necessary and sufficient optimality conditions for relaxed and strict control problems. SIAM. J. Control. Optimal., Vol. 47, pp. 2078-2095.(2008)

[5] J. Yong, and X.Y.Zhou : Stochastic controls,Hamiltonian Systems and HJB Equations, vol 43,Springer, New York, (1999) .

## Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

| | |
|---|---|
| $S$ | Temps terminal. |
| $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ | Espace de probabilité. |
| $\mathbb{R}^d$ | Espace réel euclidien de dimension d. |
| $(\mathcal{F})_{t\geq 0}$ | Filtration. |
| $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ | Espace de probabilité filtré. |
| $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ | Tribu Brownien. |
| $W_t$ | Mouvement Brownien. |
| $\mathbb{P}$ | Probabilité. |
| $\mathbb{E}$ | Espérance par rapport à la probabilité. |
| $EDS$ | Equation différentielle stochastique. |
| $dt - p.p.$ | Presque partout par rapport la mesure$dt$. |
| $P - p.s.$ | Presque sûrement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$. |
| $\mathcal{A}$ | Un Borélien de $\mathbb{R}^d$. |
| $\mathcal{V}$ | Ensemble de contrôles admissibles. |
| $J(.)$ | La fonction de coût à minimiser. |
| $\nu$ | Contrôle admissibles. |
| $u$ | Contrôle strict optimal. |
| $H$ | Hamiltonien. |
| $u_t^\theta = u_t + \theta(\nu_t - u_t)$ | Contrôle perturbé. |