République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifque

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

Faculté des sciences exactes et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : Probabilités

Par

Draissi Hadjer

Titre

Equations différentielles stochastiques (EDSs)

Membres du Comité d'Examen :

Prof. HAFAYED Mokhtar, *Prof. Université de Biskra*,__________ **Président**

Dr. LAKHDARI Imad Eddine, *MCB. Université de Biskra*,__________ **Encadreur**

Dr. TABET Moufida, *MCB. Université de Biskra*,__________ **Examinateur**

2020

Dédicace

Je dédie cette mémoire

À la source de la patience, Ma chère Mère.

À la source de ma force, Mon chèr père.

À mes soeurs.

À mon seul frère.

À mes chères amies.

À tous ceux qui étaient à côtés de moi et qui m'ont soutenu dans ma carrière universitaire.

Draissi Hadjer

Remerciements

Mes premiers remerciements à Dieu tout-puissant pour la volonté et la patience qu'il m'a données pour achever mon humble travail.

Mes sincères remerciements, mon respect et ma gratitude à mes parents qui ont toujours été là pour moi.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon Directeur de mémoire **M. Lakhdari Imad-Eddine,** professeur de mathématique à l'université de Biskra, pour sa patience, ses conseils, sa confiance.

Mes vifs remerciements vont également aux membres du Jury.

Je remercie à touts les enseignants du département de Mathématiques.

Je remercie également tous ceux qui ont partagé avec moi les moments difficiles.

Table des matières

Introduction générale

Introduction

Dans ce travail, nous intéressons à l'étude des équations différentielles stochastiques (EDSs en abrégé). Elles ont été introduites pour la première fois en 1946 par Kiyoshi Itô pour étudier les trajectoires des processus de diffusion. Ces équations permettent de modéliser les trajectoires aléatoires citons par exemple, les bourses et les mouvements de particules soumises à des phénomènes de diffusion. Elles permettent aussi de traiter des problèmes issus de la théorie des équations aux dérivées partielles EDP.

Les équations différentielles stochastiques servent de modèle mathématique à des systèmes faisant intervenir deux types de forces, l'une déterministe et l'autre aléatoire.

Notre objectif est d'étudier la notion d'équation differentielle stochastique à laquelle on donne un sens gràce à l'intégration stochastique.

Nous présentons dans ce travail trois chapitres, le premier chapitre est introductif et permet d'introduire les outils essentiels pour étudier les EDSs (Filtration, processus stochastique, mouvement brownien, processus de Markov, intégrale stochastique).

Dans le deuxième chapitre, on commence par donner une motivation sur les équations differentielles ordinaires et les EDSs, puis nous étudions l'existence et l'unicité de la solution, les types des EDSs (Equations homogènes en temps, équations inhomogènes en temps, EDSs linéaires).

Finalement, on termine par des exemples sur les EDSs (équation de Black et Sholes, processus d'Ornstein-Uhlenbeck, équation de Tanaka, processus de Bessel).

Chapitre §.1
Généralité sur le calcul stochastique

Chapitre 1

Généralités sur le calcul stochastique

1.1 Filtration

Définition 1.1 *Une filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\leq T}$ *de* $(\Omega, \mathcal{F})$ *est une famille croissante de sous-tribus de* $\mathcal{F}$ *pour* $s \leq t$, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$,

- la filtration naturelle (ou canonique) de processus X_t est donner par

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t), \qquad t \in T,$$

c'est la plus petite σ-algèbre par rapport à laquelle X_s est mesurable pour tous $0 \leq s \leq t$.

L'espace $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in T}, \mathbb{P})$ est appelé espace probabilisé filtré.

Remarque 1.1.1 *La filtration est dite :*

1. Continue à droite si $\mathcal{F}_{t^+} := \cap_{s\geq t}\mathcal{F}s = \mathcal{F}_t$.
2. Satisfait les conditions habituelles si elle est continue à droite et si $\mathcal{F}_0$ contient tous les ensembles $\mathbb{P}-$négligeables de $\mathcal{F}$.

1.2 Processus stochastique

Un processus stochastique est un modéle mathématique qui permet de décrire le comportement, a tout moment aprés l'instant initial (par exemple $t_0 = 0$), d'un phénoméne aléatoire. Nous précisons cette notion dans la définition suivante

Définition 1.2 *Un processus stochastique* $X = (X_t)_{t \in I}$ *est une famille de variables aléatoires, indexée par I et définie sur l'espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *a valeurs dans un espace mésurable* (E, B)*, qu'on appelle espace d'états.*

1. Pour t fixé, $\omega \in \Omega \to X_t(\omega)$ est une variable aléatoire.
2. Pour ω fixé, $t \in T \to X_t(\omega)$ est une fonction réelles, appelée trajectoire du processus.

- $T \subseteq \mathbb{N}$ le processus est à temps discret,

- $T = [0, a]$ tel que $a > 0$ le processus est à temps continu.

Définition 1.3 *Un processus* X *est dit adapté par rapport à la filtration* $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ *si,pour tout* t*, la variable aléatoire* X_t *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable.*

Remarque 1.2.1 *Un processus* X *est évidement adapté par rapport à sa filtration naturelle* $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$.

Définition 1.4 *Un processus* X *est progressivement mesurable par rapport à* $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$*si l'application*

$$([0, t] \times \Omega) \longrightarrow \mathbb{R}^d,$$

$$(s, w) \longrightarrow X_s(w),$$

est mesurable par rapport à $B([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ *et* $B(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 1.1 *Si* X *est un processus stochastique dont les trajectoires sont continues à droite (où à gauche), alors* X *est mesurable et* X *est progressivement mesurable s'il est de plus adapté.*

Définition 1.5 *Un processus* $X = (X_t, t \geq 0)$ *est dit à variation bornée sur* $[0, T]$

$$\sup_{t_i} \sum_{i=1}^{n-1} \left| X_{t_{i+1}} - X_{t_i} \right| < K.$$

Définition 1.6 *Un processus* $X = (X_t, t \geq 0)$ *est dit à variation finie sur* $[0, T]$ *si*

$$\sup_{t_i} \sum_{i=1}^{n-1} \left| X_{t_{i+1}} - X_{t_i} \right| < \infty.$$

Définition 1.7 *Les variables aléatoires* $X_t - X_s$, $0 \leq s \leq t$ *sont appelées les accroissements du processus stochastique* X*, on dit que :*

- *Processus à accroissement indépendants si*

$$(X_t - X_s) \perp \mathcal{F}_t^X = \sigma(X_r, 0 \leq r \leq s) \quad , \forall 0 \leq s \leq t.$$

- *Processus à accroissement stationnaire*

$$X_t - X_s \sim X_{t-s} - X_0, \quad \forall 0 \leq s \leq t.$$

1.3 Mouvement Brownien

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ un espace de probabilité filtré.

Définition 1.8 *Un processus* $B : \Omega \to \mathbb{T} = [0, T]$ *est un mouvement Brownien (MB) standard,si :*

(i) $B_0 = 0, \mathbb{P} - p.s.$

(ii) $\forall s \leq t, \quad B_{s,t} := B_t - B_s \sim N(0, t-s)$.

(iii) *Pour tout* $0 = t_0 < t_1 ... < t_n \leq T$, *les variables* $B_{t_1}, B_{t_1,t_2}, ..., B_{t_{n-1};t_n}$ *sont indépendantes.*

De plus, on appelle B *un* $\mathbb{F}$*-mouvement brownien si* $B \in \mathbb{L}^0(\mathbb{F})$ *et pour tout* $0 \leq s < t \leq T$, *la variable* $B_{s,t}$ *est indépendante de la tribu du passé avant* s*, soit* $\sigma(B_u, u \leq s)$.

Remarque 1.3.1 *1- La définition reste vraie pour* $\mathbb{T} = [0, \infty[$.

2- On appelle $B = (B^1, ..., B^d)^\top$ *un mouvement brownien d-dimentionnel si* $B^1, ..., B^d$ *sont des mouvements browniens independants.*

3- Nous rappelons aussi que l'augmentation habituelle de la filtration naturelle $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *d'un mouvement brownien* B *est* $\mathbb{F}^B = (\sigma(\mathcal{F}_t \cup N))_{t\in\mathbb{T}}$*. De plus,* B *reste un mouvement brownien par rapport à sa filtration augmentée. Par abus de language, l'augmentation de la filtration naturelle de* B *est encore appelée filtration naturelle de* B *ou filtration brownienne.*

1.4 Processus de Markov

Définition 1.9 *Soit* $(X(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ *un processus défini sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*, à valeurs dans* (E, B) *et adapté à la filtration naturelle* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *.*$(X(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est un processus de Markov par rapport à* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *si la condition suivante est satisfaite :*

$$\forall B \in B, \;\; \forall (s,t) \in \mathbb{R}_+^2, s < t : \;\; \mathbb{P}(X(t) \in A \mid \mathcal{F}_s) = P(X(t) \in A \mid X(s)).$$

où $\mathcal{F}_t$ est la filtration associée au processus $(X(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$.

Exemple 1.4.1 *Tout processus stochastique à valeurs réelles* $(X(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ *et à accroissements indépendants est un processus de Markov.*

Probabilité de transition *Soient* $A \in B_{\mathbb{R}}$*,* $x \in \mathbb{R}$ *et* $0 < s < t < \infty$*.*

La probabilité $\mathbb{P}(X(t) \in A \mid X(s))$ *notée* $p(s, X(s), t, A)$ *est appelée probabilité de transition du processus de Markov si* $(X(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ *satisfait les propriétés suivantes :*

1. *Pour tout* $0 \le s < t < \infty$*, et tout* $A \in B_{\mathbb{R}}$*,* $p(s, ., t, A)$ *est* $B_{\mathbb{R}}$*-mesurable .*
2. *Pour tout* $0 \le s < t < \infty$*, et tout* $x \in \mathbb{R}$*,* $p(s, x, t, .)$ *est une probabilité sur* $B_{\mathbb{R}}$*.*
3. *p satisfait les équations de Chapman-Kolmogorov :*

$$p(s, x, t, A) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(s, x, r, dy) p(r, y, t, A) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 \le s < r < t.$$

Les propriétés 1 et 2 expriment que la probabilité de transition $p(s, X(s), t, A)$ est un noyau de transition et conservent les équations de Chapman-Kolmogorov. Ces dernières résultent des propriétés des espérances conditionnelles.

Définition 1.10 (Processus homogènes de Markov) *Un processus de Markov $(X(t))_{t\in[t_0,T]}$ est dit homogène si la probabilité de transition $p(s, x, t, A)$ ne dépend que de l'écart temporel $t-s$. Par conséquent, pour tous $(s,t) \in [t_0, T]^2$,$s < t$, pour tout $u \in [0, T-t]$,pour tout $A \in B_R$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$:$p(s, x, t, A) = p(s+u, x, t+u, A), p.s.$*

1.5 Martingales à temps continu

On suppose donné un espace de probabilité filtré $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$

Définition 1.11 *Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus adapté et intégrable, on dit que X est*

(i) *Une martingale si*

$$\forall 0 \leq s \leq t, \quad \mathbb{E}(X_t/\mathcal{F}_s) = X_s.$$

(ii) *Une sur-martingale si*

$$\forall 0 \leq s \leq t, \quad \mathbb{E}(X_t/\mathcal{F}_s) \leq X_s.$$

(iii) *Une sous-martingale si*

$$\forall 0 \leq s \leq t, \quad \mathbb{E}(X_t/\mathcal{F}_s) \geq X_s.$$

Exemple 1.5.1 *Soit $x \in \mathbb{R}^n$, Y_i iid à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. On pose $X_0 = x$ et*

$$X_n = x + \sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

Ona :

$$\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(X_n + Y_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n + \mathbb{E}(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n + \mathbb{E}(Y_{n+1}).$$

Définition 1.12 *Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique*

(i) *On dit que* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *est uniformément intégrable si :*

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \sup_{t\geq 0} \int_{(|X_t|>\alpha)} |X_t| \, d\mathbb{P} = 0.$$

(ii) *Si* $p \geq 1$, *on dit que* $X = (X_t)_t \geq 0$ *est borné dans* $\mathbb{L}^p$ *si :*

$$\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}\left[|X_t|\right] < \infty.$$

Proposition 1.2 *Soit* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *un processus stochastique :*

a. *S'il existe une v.a.r positive et intégrable* Z *telle que* $|X_t| \leq Z, \forall t \geq 0$, *alors* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *est uniformément intégrable.*

b. *Si* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *est borné dans* $\mathbb{L}^p$, $(p > 1)$, *alors* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *est uniformément intégrable.*

Théoreme 1.1 (Inégalité maximale de Doob) *Si* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *une martingale continue à droite, alors*

$$\forall p > 1, \quad (\mathbb{E}\left[\left|\sup_{0\leq s\leq t} Xs\right|^p\right])^{\frac{1}{p}} \leq \tfrac{p}{p-1} \sup_{0\leq s\leq t} (\mathbb{E}\left[|Xs|^p\right])^{\frac{1}{p}}.$$

Corollaire 1.1 (martingale arrêtée) *Si* $M = (M_t)_{t\geq 0}$ *une martingale et* T *un temps d'arrêt, alors* $M^{\mathsf{T}} = (M_t^{\mathsf{T}})_{t\geq 0} = (M_{T\wedge t})_{t\geq 0}$ *est encore une martingale. Elle est appelée martingale arrêtée.*

Proposition 1.3 *Soient* B *une sous-tribu de* $\mathcal{F}$, Y *un vecteur aléatoire* B*-mesurable et* X *une variable aléatoire indépendante de* B. *Alors, pour toute fonction mesurable* h,

$$\mathbb{E}\left[h(Y, X)/B\right] = \phi(Y), \quad \mathbb{P} - p.s,$$

où $\phi(t) = \mathbb{E}(h(t, X))$.

1.6 Intégrale stochastique

On veut donner un sens à la variable aléatoire :

$$\int_0^T \theta_s dB_s,$$

lorsque l'on intégrale une fonction g par rapport à une fonction f dérivable, si g est régulière, on définit son intégrale comme :

$$\int_0^T g(s)df(s) = \int_0^T g(s)f'(s)ds,$$

Si jamais f n'est pas à dérivable mais simplement à variation bornée, on s'en sort encore en définissant l'intégrale par :

$$\int_0^T g(s)df(s) = \lim_{\pi_n \longrightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} g(t_i)(f(t_{i+1}) - f(t_i)).$$

L'intégrale alors définie s'appelle intégrale de Stieljes.

Nous allons donc construire l'intégrale stochastique sur l'ensemble
$\mathbb{L}^2_{\mathcal{F}}(\Omega, [0,T]) = \left\{(\theta_t)_{0\leq t\leq T}, \text{processus CADLAG } \mathbb{F}\text{-adapté tq } \mathbb{E}\left[(\int_0^T \theta_s^2 ds)\right] < \infty\right\}.$

Définition 1.13 *Un processus $(\theta_t)_{0\leq t\leq T}$ est appelé processus élémentaire s'il existe une subdivision $0 = t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n = T$ et un processus discret $(\theta_i)_{0\leq i\leq n-1}$ tel que tout θ_i est $\mathcal{F}_{t_i}$-adapté et dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ tel que :*

$$\theta_t(w) = \sum_{i=0}^{n-1} \theta_i(w) 1_{]t_i,t_{i+1}]}(t).$$

on note ε l'ensemble des processus élémentaires qui est un espace de $\mathbb{L}^2_{\mathcal{F}}(\Omega, [0,T])$.

Définition 1.14 *L'intégrale stochastique entre 0 et $t \leq T$ d'un processus élémentaire $\theta \in \varepsilon$ est la variable aléatoire définie par :*

$$\int_0^t \theta_s dB_s = \textstyle\sum_{i=0}^n \theta_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + \theta_i(B_t - B_{t_k}) \quad sur \quad]t_k, t_{k+1}],$$

soit

$$\int_0^t \theta_s dB_s = \sum_{i=0}^{n} \theta_i (B_{t\wedge t_{i+1}} - B_{t\wedge t_i}).$$

on associe donc à $\theta \in \varepsilon$ *le processus* $(\int_0^t \theta_s dB_s)_{0\leq t\leq T}$.

Définition 1.15 (Processus d'Itô) *On appelle processus d'Itô, un processus* X *à valeurs réelles tel que :*

$$\forall 0 \leq t \leq T, \quad X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s, \quad \mathbb{P} - p.s$$

où X_0 *est* $\mathcal{F}_0$*-mesurable,* b *et* σ_s *sont deux processus progressivement mesurables vérifiant les conditions*

$$\int_0^t |b_s|\, ds < \infty \quad et \quad \int_0^t \|\sigma_s\|\, ds < \infty.$$

Le coefficient b *est le drift ou la dérivée,*σ *est le coefficient de diffusion.*

Théoreme 1.2 (Première formule d'Itô) *Supposons* f *de classe* $\mathbb{C}^2$*. Alors :*

$$\begin{aligned} f(X) &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s) d\langle X, X\rangle_s \\ &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\sigma_s^2 ds. \end{aligned}$$

Théoreme 1.3 (Deuxième formule d'Itô) *Soit* f *une fonction définie sur* $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ *de classe* C^1 *par rapport à* t*, de classe* C^2 *par rapport à* x*, à dérivées bornées, ona*

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f'_x(s, X_s) dX_s + \int_0^t f'_s(s, X_s) ds + \frac{1}{2}\int_0^t f''_{xx}(s, X_s)\sigma_s^2 ds,$$

ce qui l'on note

$$\begin{aligned} df(t, X_t) &= [f'_t(t, X_t) + \tfrac{1}{2} f''_{xx}(t, X_t)\sigma_t^2] + f'_x(t, X_t) dX_t \\ &= f'_t(t, X_t) dt + f'_x(t, X_t) dX_t + \tfrac{1}{2} f''_{xx}(t, X_t) dX_t. \end{aligned}$$

Théoreme 1.4 *La formule d'Itô montre que*

$$d[X_1X_2](t) = X_1(t)dX_2(t) + X_2(t)dX_1(t) + \sigma_1(t)\sigma_2(t)dt,$$

Cette formule est connue sous le nom d'intégration par parties. La quantité $\sigma_1(t)\sigma_2(t)$ correspond au crochet de X_1, X_2 noté $\langle X_1, X_2\rangle$ est défini comme le processus à variation fini

$$\langle X_1, X_2\rangle = \int_0^t \sigma_1(s)\sigma_2(s)ds.$$

Définition 1.16 *La formule d'Itô où encore le lemme d'Itô, est l'un des principaux résultats de la théorie du calcul stochastique. Cette formule offre un moyen de manipuler le MB ou les solutions d'EDS.*

Chapitre §.2
Equations différentielles stochastiques

Chapitre 2

Equations différentielles stochastiques

Dans ce chapitre, nous étudions les équations différentielles stochastiques (EDSs). On commence par donner une motivation sur les équations différentielles ordinaires dans un contexte d'incertitude représentée par un bruit aléatoire. Puis, nous étudions les résultats principaux d'existence et d'unicité d'une EDS, et les types des (EDSs). Finalement, on termine par les types des equations diffrentielles stochastiques.

2.1 Motivation

Les équations différentielles (standard) gouvernent de nombreux phénonénes déterministes. Pour prendre en compte des phénoménes aléatoires, formellement on doit prendre en compte des « différentielles stochastiques », ce qui transforme les équations en équations différentielles stochastiques (EDSs).

Les équations différentielles sont des équations d'évolution du type

$$\dot{x}(t) = b(t, x(t)) \tag{2.1}$$

où l'inconnue est une fonction $x(t)$ qui doit vérifier une équation impliquant sa dérivée $\dot{x}$ et elle même. Les cas les plus simples sont les équations différentielles d'ordre 1 comme en (2.1) avec $b(t, x) = a + cx$ indépendant de t et affine par rapport á x. Symboliquement, l'équation

(2.1) se réécrit

$$dx(t) = b(t, x(t))dt. \tag{2.2}$$

Cette équation modélise typiquement un syséme physique $(x(t))_{t\geq 0}$ qui évolue avec le temps de façon que x s'accroît, á la date t, selon le taux $b(t, x(t))$. Par exemple, avec $b(t, x) = b(t)x$, l'équation $dx(t) = b(t)x(t)dt$ modélise le cours d'un actif financier $x(t)$ soumis au taux d'intérêt variable $b(t)$ ou d'une population avec un taux de natalité $b(t)$.

Il est bien connu que la solution est

$$x(t) = x_0 \exp\left(\int_0^t b(s)ds\right).$$

Les EDSs sont des généralisations des équations (2.2) où la dynamique déterministe d'évolution b est perturbée par un terme aléatoire (stochastique). On parle alors d'équation différentielle stochastique. En général la perturbation aléatoire est considérée comme un bruit. Par un argument du type TCL, il est légitime de considérer que ce bruit est un processus gaussien et en général il est modélisé par un mouvement brownien B et une intensité de bruit $\sigma(t, x)$:

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \tag{2.3}$$

où σ est une fonction du temps t et de l'inconnue au temps t (X_t) mais pourrait juste dépendre du temps (σ_t) ou de la valeur X_t en t $(\sigma(X_t))$ ou encore être constante σ.

Définition 2.1 *En fait, l'écriture (2.3) est symbolique car dB_t n'a pas vraiment de sens (le mouvement brownien n'est pas dérivable). Il faudrait écrire (2.3) sous la forme*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s \tag{2.4}$$

Maintenant, nous énonçons le théorème fondamentale d'existence et d'unicité de la solutions d'une EDS.

Définition 2.2 (EDS) *On appelle équation différentielle stochastique (EDS) une équation* *en le processus X (à valeurs dans $\mathbb{R}^d$) de la forme*

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \qquad (E(b, \sigma))$$

ce qui, en terme intégrale, s'écrit

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t b_i(s, X_s)ds + \sum_{j=1}^{m} \int_0^t \sigma_{i,j}(s, X_s)dB_s^j, \quad 1 \leq i \leq d \tag{2.5}$$

oú m, d sont des entiers positifs,

- $b(t,x) = (b_i(t,x))_{1 \leq i \leq d}$ est un vecteur mesurable de $\mathbb{R}^d$ défini sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ appelé **dérive** ou **drift** de l'EDS,
- $\sigma(t,x) = (\sigma_{i,j}(t,x))_{\substack{1 \leq i \leq d \\ 1 \leq j \leq m}}$ est une matrice $d \times m$ mesurable définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ appelé **coefficient de diffusion** de l'EDS, et $B = (B^1, ..., B^m)$ est un mouvement brownien standard en dimension m.

La solution d'une EDS est une fonction aléatoire. Il s'agit donc d'un processus qu'on note $X = (X_t)_{t \geq 0}$. Plus précisément, on a :

Définition 2.3 (Solution d'une EDS) *On appelle solution de l'EDS $E(b, \sigma)$ la donnée de*

- un espace de probabilité filtré $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P}\right)$ satisfaisant les conditions habituelles,
- un $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ $-$mouvement brownien $B = (B^1, ..., B^m)$ dans $\mathbb{R}^m$ défini sur cet espace de probabilité,
- un processus $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ $-$adapté continu $X = (X^1, ..., X^d)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ tel que (2.4) soit vérifiée, c'est à dire, coordonnée par coordonnée, pour tout $1 \leq i \leq d$: (2.5).

2.1.1 Hitorique

En 1882, R. Brown a observé le mouvement irrégulier et incessant de particules de Pollen en suspension dans l'eau (Mouvement Brownien). L. Bachelier (1900) a établit la loi qui gouverne la position d'une particule, cette loi est la solution fondamentale de l'équation de la chaleur. En 1905, A. Einstein voulait tester la théorie cinétique moléculaire de la chaleur dans les liquides. Cela l'a mené à une formule qui permettait à partir du Mouvement Brownien de calculer le nombre d'Avogadro. Les observations de Jean Perrin concernant la réalité des atomes ont inspiré Norbert Weiner qui se propose de bâtir un modèle dans lequel, les trajectoires sont continues. Donc Weiner a définit l'objet mathématique de ce phénomène en 1923, il l'appelait "the fundamental random function" (la fonction aléatoire fondamentale). Paul Levy a nommé "Mouvement Brownien" le processus de Weiner. Parmi les travaux liés au Mouvement Brownien, le travail de Langevin (en physique) et par suit Kiyoshi Itô et Stratonovich, notons que le mathématicien K. Itô a démontré sa célèbre formule dans les années 1940. Depuis ces années, des études approfondies des phénomènes aléatoires sont réalisées, elles ont permis des progrés dans le domaine de calcul stochastique et ses applications.

2.2 Existence et unicité

Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)$, $t \geq 0$
satisfait les conditions habituelles, soient :

$$b : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$
$$\sigma : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

J : une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable et indépendante de $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(B_s, s \geq 0\right)$ et $\left(B_s, t \geq 0\right)$ un $\mathcal{F}_t-$mouvement brownien , c'est à dire adadpté à la filtration $(\mathcal{F}_t)\,, t \geq 0$.
Soit l'EDS suivante :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \\ X_0 = J. \end{cases} \tag{2.6}$$

Une solution de l'équation 2.6 est un processus stochastique (X_t) , $t \geq 0$ continu, $\mathcal{F}_t$-adapté qui vérifie :

♦ Pour tout $t \geq 0$, les intégrales $\int_0^t b(s, X_s)ds$ et $\int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s$ sont bien définies :

$$\int_0^t |b(s, Xs)|\, ds < \infty, \quad \mathbb{P} - p.s.$$
$$\int_0^t |\sigma(s, X_s)|^2\, dB_s < \infty, \quad \mathbb{P} - p.s.$$

♦ (X_t), $t \geq 0$ vérifie 2.6 :

$$X_t = J + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s \quad \mathbb{P} - p.s.$$

Supposons la condition suivante :

(H1) Les fonctions b et σ sont continues sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ et lipschitziennes en J, i.e. il existe une constante $K \in]0, +\infty[$ telle que pour tout $t \geq 0$ et $J, y \in \mathbb{R}^d$ on a

$$|b\,(t, J) - b\,(t, y)| \leq K\,|J - y|\,,$$
$$|\sigma\,(t, J) - \sigma\,(t, y)| \leq K\,|J - y|\,,$$

et $\int_0^T |b\,(t, 0)| + \sigma\,(t, 0)^2\, dt \leq +\infty$ pour tout T où $|b|$ et $|\sigma|$ représentent la norme du vecteur b et de la matrice σ.

Pour étudier l'unicité de la solution, on a besoin du Lemme suivant :

Lemme 2.1 (Gronwall) *Soient $T > 0$ et g une fonction positive mesurable bornée sur $[0, t]$. On suppose qu'il existe des constantes $b \geq 0, a \geq 0$ telles que pour tout $t \in [0, T]\,$, on a*

$$g\,(t) \leq b + a \int_0^t g\,(s)\, ds. \tag{2.7}$$

Alors on a $g\,(t) \leq b \exp\,(at)$.

Preuve. En itérant la condition 2.7 sur g, on a pour tout $n \geq 1$,

$$g\,(t) \leq b + b(at) + b\frac{(at)^2}{2} + \cdots + b\frac{(at)^n}{n!} + a^{n+1} \int_0^t ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \cdots \int_0^{s_n} g(s_{n+1})ds_{n+1.}$$

Si g est majorée par A, le dernier terme se majore par $A(at)^{n+1}/(n+1)!$ et il tend vers 0 quand $n \to +\infty$, ce qui prouve le lemme car le développement à droite tend vers $b\exp(at)$.

■

Existence forte : On procéde comme pour les équations différentielles avec une méthode d'approximation de Picard. Pour cela, on pose

$$\begin{aligned} X_t^0 &= J \\ X_t^1 &= J + \int_0^t \sigma(s,J)dB_s + \int_0^t b(s,J)ds \\ X_t^2 &= J + \int_0^t \sigma(s,X_s^1)dB_s + \int_0^t b(s,X_s^1)ds \\ \cdots &= \cdots \end{aligned}$$

$$X_t^n = J + \int_0^t \sigma(s,X_s^{n-1})dB_s + \int_0^t b(s,X_s^{n-1})ds \tag{2.8}$$

Les intégrales stochastiques ci-dessus sont bien définies puisque par récurrence, on constate que, pour chaque n, X_t^n est continu et adapté donc localement borné si bien que le processus $\sigma(t,X_t^n)$ est vérifie (**H1**) et l'intégrale correspondante bien définie.

On fixe maintenant $T>0$ et on raisonne sur $[0,T]$. On prouve par récurrence qu'il existe C_n tel que, pour tout $t\in[0,T]$,

$$\mathbb{E}\left[(X_t^n)^2\right] \le C_n. \tag{2.9}$$

En effet, (2.9) est immédiate si $n=0$ avec $C_0=J$. Puis , on suppose que (2.9) est vraie au rang $n-1$ avec

$$\begin{aligned} |\sigma(s,y)| &\le K' + K\,|y|\,, \quad s\in[0,T]\,, \\ |b(s,y)| &\le K' + K\,|y|\,, \quad y\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Noter que par la croissance sous-linéaire de σ et l'hypothése de récurrence (2.9), on a

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \sigma(s,X_s^{n-1})^2 ds\right] < +\infty.$$

On a donc

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1})dB_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1})^2 ds\right].$$

Comme $(J+y+z)^2 \leq 3(J^2+y^2+z^2)$, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'isométrie $\mathbb{L}^2$, et (**H1**), on majore comme suit

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(X_t^n)^2\right] &\leq 3\left(|J|^2 + \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1})dB_s\right)^2\right] + \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t b(s, X_s^{n-1})ds\right)^2\right]\right) \\
&\text{(convexité)} \\
&\leq 3\left(|J|^2 + \mathbb{E}\left[\int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1})^2 ds\right] + t\mathbb{E}\left[\int_0^t b(s, X_s^{n-1})^2 ds\right]\right) \\
&\text{(isométrie } \mathbb{L}^2,\ \text{Cauchy-Schwarz)} \\
&\leq 3\,|J|^2 + 2(1+T)\mathbb{E}\left[\int_0^t ((K')^2 + K^2(X_s^{n-1})^2)ds\right] \\
&\text{(hypothéses lipschitziennes)} \\
&\leq 3(|J|^2 + 2T(1+T)((K')^2 + K^2 C_{n-1})) =: C_n
\end{aligned}$$

ce qui établit (2.9) par récurrence.

La borne (2.9) et la croissance sous-linéaire de σ assurent alors que, pour chaque n, la martingale locale $\int_0^t \sigma(s, X_s^n)dB_s$ est une vraie martingale bornée dans $\mathbb{L}^2$ sur l'intervalle $[0,T]$ .Cela va permettre de majorer par récurrence $\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|^2\right]$. On a

$$X_t^{n+1} - X_t^n = \int_0^t \left(\sigma(s, X_s^n) - \sigma(s, X_s^{n-1})\right) dB_s + \int_0^t \left(b(s, X_s^n) - b(s, X_s^{n-1})\right) ds.$$

En utilisant les inégalités de Doob et de Cauchy-Schwarz ainsi que l'hypothése (**H1**), on déduit

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t}\left|X_s^{n+1}-X_s^n\right|^2\right]$$
$$\leq 2\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t}\left|\int_0^s\left(\sigma(v,X_v^n)-\sigma(v,X_v^{n-1})\right)dB_v\right|^2+\sup_{0\leq s\leq t}\left|\int_0^s\left(b(v,X_v^n)-b(v,X_v^{n-1})\right)dv\right|^2\right]$$

$(convexité)$

$$\leq 2\left(4\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t\left(\sigma(v,X_v^n)-\sigma(v,X_v^{n-1})\right)dB_v\right)^2\right]+\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t\left(b(v,X_v^n)-b(v,X_v^{n-1})\right)dv\right)^2\right]\right)$$

$(inégalité\ de\ Doob)$

$$\leq 2\left(4\mathbb{E}\left[\int_0^t\left(\sigma(v,X_v^n)-\sigma(v,X_v^{n-1})\right)^2dv\right]+T\mathbb{E}\left[\int_0^t\left(b(v,X_v^n)-b(v,X_v^{n-1})\right)^2dv\right]\right)$$

$(isométrie\ \mathbb{L}^2, Cauchy-Schwarz)$

$$\leq 2\left(4+T\right)K^2\mathbb{E}\left[\int_0^t\left|X_v^n-X_v^{n-1}\right|^2dv\right] \tag{2.10}$$

$$(hypothéses\ lipschitziennes)$$

$$\leq C_T\mathbb{E}\left[\int_0^t\sup_{0\leq r\leq v}\left|X_r^{n+1}-X_r^n\right|^2dv\right] \tag{2.11}$$

avec $C_T=2\left(4+T\right)K^2$. Si on note $g_n(v)=\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq r\leq v}\left|X_r^{n+1}-X_r^n\right|^2\right]$ et $g_n(v)=\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq r\leq v}\left|X_r^0\right|^2\right]=J^2$ alors on a établi

$$g_{n+1}(t)\leq C_T\int_0^t g_n(v)dv. \tag{2.12}$$

Par ailleurs, par (2.9) et les inégalités précédentes, on voit que les fonctions g_n sont bornées sur $[0,T]$. En effet, $g_0(t)=J^2$ pour $t\in[0,T]$ et par une récurrence utilisant (2.12), on établit que pour tout $n\geq 1$ et $t\in[0,T]$, on a

$$g_n(t)\leq J^2C_T^n\frac{t^n}{n!}.$$

On déduit alors que $\sum_{n=0}^{+\infty} g_n(T)^{1/2} < +\infty$, comme

$$\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{0\leq s\leq T} \left|X_s^{n+1} - X_s^n\right| \right\|_2 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \left\| \sup_{0\leq s\leq T} \left|X_s^{n+1} - X_s^n\right| \right\|_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(T)^{1/2} < +\infty,$$

cela entraîne que $\mathbb{P}.s$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{0\leq s\leq T} \left|X_s^{n+1} - X_s^n\right| < +\infty,$$

et donc $P.s$ la suite $(X_t^n)_t \in [0,T]$ converge uniformément sur $[0,T]$ vers un processus limite $(X_t)_t \in [0,T]$ qui est continu. Comme par récurrence, chaque processus X^n est adapté par rapport à la filtration canonique de B, X est aussi à la limite.

Les estimations (2.11) établissent aussi que

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq T} |X_s^n - X_s|^2\right] \leq \left(\sum_{k=0}^{+\infty} g_k(T)^{1/2}\right)^2 \to 0, n \to +\infty.$$

On déduit alors, de l'isométrie dans $\mathbb{L}^2$, et l'hypothése (**H1**) :

$$\mathbb{L}^2 - \lim_{n\to+\infty} \int_0^t \sigma(s, X_s^n) dB_s = \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s,$$
$$\mathbb{L}^2 - \lim_{n\to+\infty} \int_0^t b(s, X_s^n) ds = \int_0^t b(s, X_s) ds.$$

Finalement, en passant à la limite dans l'équation de récurrence (2.8), on obtient que X est solution forte de $\mathbb{E}_x(b,\sigma)$ sur $[0,T]$.

Théoreme 2.1 (Yamada-Watanabe) *S'il y a une existence faible et unicité trajectorielle, alors il y a aussi unicité faible. Delus pour tout espace de probabilité filtré* $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ *et pour tout* $\mathcal{F}_t$*-mouvement brownien* B (B *adapté à* $(\mathcal{F}_t)$) *, il existe pour chaque* J *une (unique) solution forte de l'EDS 2.3 .*

Théoreme 2.2 (Cauchy-Lipschitz pour EDS) *Sous l'hypothése (**H1**), il y a unicité trajectorielle pour* $E(b,\sigma)$*. De plus, pour tout espace de probabilité filtré* $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ *et tout* $(\mathcal{F}_t)_t$*-mouvement brownien* B*, il existe pour chaque* $J \in \mathbb{R}^d$ *une (unique) solution forte de* $E_J(b,\sigma)$*.*

Ce résultat entraîne en particulier qu'il y a existence faible pour $\mathbb{E}(b,\sigma)$. L'unicité faible sera une conséquence du remarque qui suit ce résultat, elle vient aussi de l'unicité trajectorielle si on utilise le théoréme de Yamata-Watanabe.

Remarque 2.2.1 *On peut affaiblir l'hypothése de continuité en t, celle-ci n'intervient essentiellement que pour majorer $\sup\limits_{0\leq t\leq T}|\sigma(t,J)|$ et $\sup\limits_{0\leq t\leq T}|b(t,J)|$ pour J fixé :on peut «localiser» l'hypothése lipschitzienne **(H1)** sur b et σ se contenter d'une constante K qui dépend du compact sur lequel t et J sont considérés. Il faut alors conserver une condition de croissance sous-linéaire :*

$$|\sigma(t,J)|\leq K(1+|J|)\,,\quad |b(t,J)|\leq K(1+|J|)\,.$$

Comme pour les équations différentielles (ordinaires), la croissance sous-linéaire prévient l'explosion de la solution de l'EDS.

Démonstration : Pous simplifier la preuve, on considére le cas $d=m=1$.

Unicité trajectorielle. On considére deux solutions X et X' de $E(b,\sigma)$ avec $X_0=X'_0$, définies sur sur le même espace et avec le même mouvement brownien B. Pour $M>0$ fixé, on considére le temps d'arrêt

$$\tau=\inf\left(t\geq 0:|X_t|\geq M,|X'_t|\geq M\right).$$

D'aprés $E(b,\sigma)$, on a alors pour tout $t\geq 0$:

$$\begin{aligned}X_{t\wedge\tau}&=X_0+\textstyle\int_0^{t\wedge\tau}\sigma(s,X_s)\,dB_s+\int_0^{t\wedge\tau}b(s,X_s)\,ds\\ X'_{t\wedge\tau}&=X'_0+\textstyle\int_0^{t\wedge\tau}\sigma(s,X'_s)\,dB_s+\int_0^{t\wedge\tau}b(s,X'_s)\,ds.\end{aligned}$$

On considére $t\in[0,T]$. Par différence, comme $X_0=X'_0$ et comme X ; X' sont bornées par M sur $]0,\tau]$, l'expression de la variance d'une intégrale stochastique $\mathbb{L}^2$, l'inégalité de Cauchy-

Schwarz, les hypothéses lipschitziennes et la majoration $(J+y)^2 \leq 2(J^2+y^2)$ donnent

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[(X_{t\wedge\tau}-X'_{t\wedge\tau})\right] \\
&\leq 2\left(\mathbb{E}\left[\left(\int_0^{t\wedge\tau}\left(\sigma\left(s,X_s\right)-\sigma\left(s,X'_s\right)\right)dB_s\right)^2\right]+\mathbb{E}\left[\left(\int_0^{t\wedge\tau}\left(b\left(s,X_s\right)-b\left(s,X'_s\right)\right)ds\right)^2\right]\right) \\
&\leq 2\left(\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\tau}\left(\sigma\left(s,X_s\right)-\sigma\left(s,X'_s\right)\right)^2ds\right]+T\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\tau}\left(b\left(s,X_s\right)-b\left(s,X'_s\right)\right)^2ds\right]\right) \\
&\leq 2K^2\left(1+T\right)\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\tau}\left(X_s-X'_s\right)^2\right]ds \\
&\leq 2K^2\left(1+T\right)\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\tau}\left(X_{s\wedge\tau}-X'_{s\wedge\tau}\right)^2\right]ds.
\end{aligned}$$

Si on pose $h(t)=\mathbb{E}(X_{t\wedge\tau}-X'_{t\wedge\tau})^2$ et $C=2K^2(1+T)$, alors on a établi que h vérifie pour $t\in[0,T]$:

$$h(t)\leq C\int_0^t h(s)ds.$$

De plus, par définition de τ, la fonction h est bornée par $4M^2$, l'inégalité de Gronwall (lemme suivant) s'applique avec $b=0$ et $a=C$. On obtient $h=0$, c'est à dire $X_{t\wedge\tau}=X'_{t\wedge\tau}$ ps. Finalement, en faisant $M\to+\infty$, on a $\tau\to+\infty$ et donc$X_0=X'_0$ ps. Les processus X et X'sont des modifications à trajectoires continues, ils sont donc indistinguables, ce qui prouve l'unicité trajectorielle.

2.3 Types des equations différentielles stochastiques

2.3.1 Equations homogénes en temp

Théoreme 2.3 *Soit $\left(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq0},\mathbb{P}\right)$ un espace probabilisé filtré, et soit $(B_t,t\geq0)$ un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien standard, $J\in\mathbb{R}$ et $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sont Lipschitziennes, alors il existe un unique processus $(X_t,t\geq0)$ continu et adapté à $\mathcal{F}_t$ tel que l'équation homogène en temps :*

$$X_t=J+\int_0^t f(X_s)ds+\int_0^t g(X_s)dB_s, \tag{2.13}$$

soit vérifié $\forall t\geq0$ $\mathbb{P}.p.s.$

De plus :

$$\mathbb{E}(\sup X_t^2)_{0\leq t\leq T} < +\infty, \quad \forall t \geq 0.$$

2.3.2 Solution forte

On appelle solution forte de l'EDS :

$$\begin{cases} dX_t = f(X_t)\,dt + g(X_t)\,dB_t \\ X(0) = J, \end{cases}$$

toute fonction aléatoire $X = (X_t, t \geq 0)$ définie sur $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ telle que :

1. X est adaptée à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$.
2. $\int_0^t \left[f(X_s)^2 + g(X_s)^2\right] ds < +\infty$ $\mathbb{P}.p.s$ pour tout t et on a

$$X(t) = J + \int_0^t f(X_s)\,ds + \int_0^t g(X_s)\,dB_s \quad t \geq 0, \quad \mathbb{P}.p.s$$

2.3.3 Solution faible

Une solution faible de l'équation (2.13) est un processus continu tel que les processus (M_t) et (N_t) définis respectivement par :

$$M_t = X_t - X_0 - \int_0^t f(X_s)\,ds,$$

et

$$N_t = M_t^2 - \int_0^t g(X_s)\,ds,$$

sont des martingales

Proposition 2.1 *Le procesus (X_t) solution de l'équation (2.13) est un processus d'Itô.*

Définition 2.4 *Un processus d'Itô est un processus (X_t) pouvant se décomposer comme $X_t = M_t + V_t$, où :*

(M_t) est une martingale continue de carré intégrable (par rapport à une filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$)

(V_t) est un processus continu à variation bornée, adapté à $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ et $V_0 = 0$.

Preuve. On peut décomposer la solution comme $X_t = M_t + V_t$ où

$$M_t = J + \int_0^t g(X_s)\, dB_s \quad V_t = \int_0^t f(X_s)\, ds$$

et rappelons que :

$$\mathcal{J}_T = \left\{ (X_t, t \in [0,T]) \text{ continue et adapté à } \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0} \text{ tel que } E\left(\sup_{0\leq t\leq T} X_t^2 \right) < \infty \right\}.$$

Du fait que $X \in \mathcal{J}_T$ et que g est Lipschitzienne, l'intégrale stochastique $\int_0^t g(X_s)\, dB_s$ est bien définie et (M_t) est une martingale continue de carré intégrable. D'autre part du fait que les fonctions $t \to (X_t)$ et f sont continues, le processus (V_t) est continûment dérivable, donc continu et à variation bornée. Le processus (X_t) est donc un processus d'Itô. ■

2.3.4 Equations inhomogènes en temps

L'équation différentielle stochastique suivante :

$$X(t) = X_0 + \int_0^t f(X_s, s)\, ds + \int_0^t g(X_s, s)\, dB_s, \quad t \geq 0 \;\; \mathbb{P}.p.s \tag{2.14}$$

est dite équation différentielle stochastique inhomogène en temps, f et g dépendent du temps.

Théoreme 2.4 *Si f et $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ sont continues (conjointement en t et en x) et Lipschitziennes en x, alors il existe un unique processus $X(t)$ solution de l'équation (2.14) , $X(t)$ est un processus d'Itô.*

2.3.5 Equation différentielle stochastique linéaires

Soient : $X_0 \in \mathbb{R}$ et $b, \sigma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues et bornées, l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dX_t = b(t)X_t dt + \sigma(t)X_t dB_t, \\ X(0) = X_0, \end{cases} \tag{2.15}$$

est dite équation linéaire.

Définition 2.5 *Soit l'équation différentielle ordinaire :*

$$\begin{cases} d(\varphi_t) = b(t)\varphi_t dt, \\ \varphi_0 = 1, \end{cases}$$

la solution $(\varphi_t, t \in \mathbb{R}^+)$ de l'équation ci -dessus est donnée par $\varphi(t) = \exp\left(\int_0^t b(s)\, ds\right)$.
L'équation (2.15) admet une unique solution forte (X_t) donnée par :

$$X_t = \varphi_t X_0 + \int_0^t \frac{\varphi_t}{\varphi_s} \sigma(s)\, dB_s, t \geq 0.$$

Preuve. $F(t,x) = b(t,x), g(t,x) = \sigma(t)$ sont continues en (t,x) et Lipschitziennes en x, donc l'équation (2.15) admet une unique solution. On écrit tout d'abord $X_t = \varphi_t y_t$ d'où on déduit que :

$$dX_t = \varphi_t dy_t + b(t)\varphi_t y_t dt + 0 = b(t)X_t dt + \sigma(t) dB_t,$$

et

$$\varphi_t dy_t = \sigma(t) dB_t,$$

$$y_t = x_0 + \int_0^t \frac{\sigma(s)}{\varphi_s} dB_s,$$

donc

$$X_t = \varphi_t x_0 + \int_0^t \frac{\varphi_t}{\varphi_s} \sigma(s)\, dB_s.$$

Chapitre §.3
Exemples sur les EDSs

Chapitre 3

Exemples sur les EDSs

Les EDS affines admettent des solutions explicites qu'on peut obtenir comme dans le cas déterministe par la méthode de variation de la constante. Le cas affine est important car les EDS affines apparaissent comme des linéarisées d'EDS plus complexes qu'on ne sait pas toujours résoudre. On se place dans le cas réel, i.e $d = m = 1$.

3.1 Equations de Black et Scholes

C'est le cas particulier où $b(t, x) = bx$ et $\sigma(x) = \sigma x$, i.e.

$$dX_t = bX_t dt + \sigma X_t dB_t. \tag{3.1}$$

Cette EDS modélise l'évolution d'un cours X soumis à un taux d'intérêt déterministe a et à une perturbation stochastique $\sigma X_t dB_t$. Dans un contexte financier, le coefficient de diffusion σ est appelé volatilité. Noter que la partie déterministe de l'accroissement de X_t (bX_t) et sa partie aléatoire (σX_t) sont toutes les deux proportionnelles à la valeur courante, X_t, en t (ce qui est typique des modéles de croissance).

3.2 Equations linéaires

Equation d'Ornstein-Uhlenbeck :

Soit $b(t,x) = -bx(b>0)$ et $\sigma(x) = \sigma$. Il s'agit de

l'équation de Langevin :

$$dX_t = -bX_t dt + \sigma dB_t, \tag{3.2}$$

c'est à dire $b(t,x) = -bx$, et $\sigma(x) = \sigma$.La solution est donnée par

$$X_t = X_0 e^{-bt} + \sigma \int_0^t e^{-b(t-s)} dB_S. \tag{3.3}$$

Sans le terme σdB_t, l'équation $dX_t = -bX_t dt$ se résout immédiatement en $X_t = Ce^{-bt}$.

Pour tenir compte du terme σdB_t, on fait « varier la constante C » :

$$dCe^{-bt} - aCe^{-bt}dt = dX_t = -bX_t dt + \sigma dB_t$$
$$dC = \sigma e^{bt} dB_t$$
$$C = X_0 + \int_0^t \sigma e^{bs} dBs,$$

et avec $X_t = Ce^{-bt}$, l'expression (3.3) est obtenue.

On peut observer directement que (3.3) est satisfaite en dérivant

$$X_t = X_0 e^{-bt} + \sigma e^{-bt} \int_0^t e^{-b(t-s)} dB_S,$$

avec la formule d'Itô

$$d(X_t, Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + d\langle X_t, Y_t \rangle_t \, .$$

Il s'agit du processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Ce cas se généralise au contexte vectoriel.

Soit l'équation $b(t,x) = b_t x$ et $\sigma(x) = \sigma_t x$. On suppose les processus $(b_t)_{t\geq 0}$ et $(\sigma_t)_{t\geq 0}$ bornés et vérifiant l'intégrabilité

$$\int_0^T |b_t| \, dt < +\infty, \int_0^T |\sigma_t|^2 \, dt < +\infty.$$

L'EDS

$$
\begin{aligned}
dX_t &= X_t(b_t dt + \sigma_t dB_t), \qquad (3.4)\\
X_0 &= x,
\end{aligned}
$$

admet pour solution

$$
X_t = x \exp\left(\int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2 ds\right). \qquad (3.5)
$$

Pour le voir, on suppose X positivement borné sur$[0,T]$ (minoré par $1/n$, majoré par n) ; sinon, on introduit le temps d'arrêt $T_n = \inf(t : X_t \leq 1/n$ ou $X_t > n)$ et on arrête les processus à ces dates. On applique la formule d'Itô à $X_{t\wedge T_n}$ et ,à la fonction ln (qui est C^2 sur $[1/n, n]$). De l'équation (3.4), on déduit $d\left\langle X, X\right\rangle_t = X_t^2\sigma_t^2 dt$. Le processus $Y_t = \ln(X_{t\wedge T_n})$ vérifie alors

$$
\begin{aligned}
dY_t &= \frac{1}{X_t}dX_t - \frac{1}{2}\frac{d\left\langle X, X\right\rangle_t}{X_t^2}\\
&= (b_t dt + \sigma_t dB_t) - \frac{\sigma_t^2}{2}dt\\
&= (b_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2)dt + \sigma_t dB_t,
\end{aligned}
$$

ce qui prouve le résultat (3.5).

3.3 Equations affines

On suppose que $b(t,x) = b_t x + c_t$ et $\sigma(t,x) = \sigma_t x + \delta_t$, c'est à dire qu'on considére l'EDS affine générale

$$
dX_t = X_t(bdt + \sigma dB_t) + c_t dt + \delta_t dB_t. \qquad (3.6)
$$

Elle a une solution construite à partir de la solution Z de l'EDS linéaire

$$
dZt = Z_t(b_t dt + \sigma_t dB_t),
$$

avec condition initiale $Z_0 = 1$, i.e.

$$Z_t = \exp\left(\int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2 ds\right),$$

dennée, avec $\tilde{c}_t = c_t + \sigma_t \delta_t$ telle que

$$X_t = Z_t\left(X_0 + \int_0^t Z_s^{-1}(\tilde{c}_s ds + \delta_s dB_s)\right). \tag{3.7}$$

Avec la formule d'Itô, on vérifie que (3.7) satisfait effectivement l'équation (3.6) :

$$\begin{aligned} dX_t &= Z_t(Z_t^{-1}(\tilde{c}_t dt + \delta_t dB_t)) + X_t(b_t dt + \sigma_t dB_t) + d\left\langle Z_t, Z_t^{-1}\delta_t B_t\right\rangle_t \\ &= \tilde{c}_t dt + \delta_t dB_t + X_t(b_t dt + \sigma_t dB_t) + \sigma_t \delta_t dt \\ &= X_t(b_t dt + \sigma_t dB_t) + c_t dt + \delta_t dB_t. \end{aligned}$$

3.4 Equation de Tanaka

On considére l'équation :

$$\begin{cases} dX_t = sign\left(X_t\right) dB_t, \\ X_0 = x, \end{cases}$$

telle que

$$sign\left(z\right) = \left\{1 \ si \ z \geq 0, -1 \text{ si } z < 0\right\}.$$

La fonction $g(z) = sign(z)$ n'est pas Lipschitzienne-continue, on ne peut pas appliquer le théorème. Cette équation n'a pas une forte solution mais elle admet une unique faible solution.

3.5 Processus de Bessel

Soit $b > 0$, on considère l'EDS :

$$dX_t = \frac{b}{X_t}dt + dB_t,$$

$$X_0 = 1.$$

Il existe une unique solution (forte) à cette équation, appelée processus de Bessel.

$f(x) = \frac{b}{x}$ n'est pas Lipschitzienne en 0 ($f'(0) = -\infty$), on déduit que les conditions d'existence et d'unicité sont suffisantes mais pas nécessaires.

Il existe des équations qui ont plus d'une solution. Soit l'EDS :

$$dX_t = 3X_t^{2/3}dt,$$
$$X_0 = 0.$$

Cette équation a plus d'une solution, pout tout b, le processus :

$$dX_t = (t-b)^3 \quad si \quad t > b \quad et \quad 0 \quad si \quad t \leq b,$$

est une solution de l'équation.

La condition de Lipschitz garantie l'unicité de la solution, notons que la fonction $b(x) = 3x_t^{2/3}$ n'est pas Lipschitzienne -continue au point $x = 0$.

Soit l'équation :

$$dX_t = \sin(X_t)\,dt + \cos(X_t)\,dB_t,$$
$$X_0 = 0.$$

$f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = \cos(x)$ sont Lipschitziennes car les dérivées f' et g' sont bornées, donc il existe une unique solution à l'équation ci-dessus.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié la notion des équations differentielles stochastiques (EDSs en abrégé). Le premier aspect étudié est l'existence et l'unicité d'une EDS. D'autre part on a met l'accent sur les types des EDSs (Equations homogènes en temps, équations inhomogènes en temps, EDSs linéaires). Finalement, on a donné des exemples sur les EDSs (équation de Black et Sholes, processus d'Ornstein-Uhlenbeck, équation de Tanaka, processus de Bessel).

Bibliographie

[1] Breton, J.C. : Processus stochastique. Université de Rennes1 (2013).

[2] Jeanblanc, M. : Cours de Calcul stochastique Master 2IF EVRY. Lecture Notes, University of Évry. Available at http ://www. maths. univ-evry. fr/pages_perso/jeanblanc (2006).

[3] Le Gall, J. F. : Mouvement Brownien, martingales et calcul stochastique (Vol.71). Springer Science & Business Media (2012).

[4] Pham, H. : Continuous-time stochastic control and optimization with financial applications, vol. 61. Springer Science & Business Media, (2009).

Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$EDSs$	:	Equations différentielles stochastiques.
$\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$	:	un espace de probabilité filtré.
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	:	L'espace de probabilité.
MB	:	un mouvement Brownien.
$\mathbb{P}-p.s.$	:	Prêsque sûrement pour lamesure de probabilité $\mathbb{P}$.
$\mathbb{L}^2_{\mathcal{F}}(\Omega, [0,T])$	:	L'espace des fonctions linéaires continues de Ω dans $[0,T]$.
$\mathbb{R}^d$	:	Espace réele uclidien de dimension d.
$\langle ., . \rangle$	:	Le produit scalaire dans $\mathbb{R}^d$.
$p.s.$	:	Prêsque sûrement.
L^2	:	Espace du martingale de carré intégrable.
EDP	:	Equation aux dérivées partielles.
$i.e$	:	C'est-à-dire.
$f \in C^1$	:	f est dérivable et f' est continue.
$f \in C^2$	:	La dérivée seconde de f existe et elle est continue.
$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$	:	Filtration.