République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER EN MATHÉMATIQUES

Option : **Statistique**

Présentée par

Chenini Ouahiba

Titre :

Application de mesures de risque en finance

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	ABDELLI JIHANE	UMKB	Encadreur
Dr.	TOUBA SOUNIA	UMKB	Présidente
Dr.	DJABER IBTISEM	UMKB	Examinateur

Septembre 2020

Dédicace

À ma mère et toute ma famille

À mes amis et à tous ceux qui m'ont encouragé

à prendre cette étape de ma vie.

REMERCIEMENTS

Je remercie Dieu le tout-puissant de m'avoir donné la volonté, la force et le courage pour bien mener et finir mon travail.

Je remercie vivement Madame **Abdelli Jihane**, pour le grand plaisir que j'avons eu à travailler avec elle.

Je profite de cette occasion pour présenter ma gratitude pour l'effort qu'elle a fourni pendant des ma transmettre le savoir l'orientation les conseils.

Je remercie les membres de jury : **Dr. Touba Sounia** et **Dr. Djaber Ibtisem** de j'avoir fait l'honneur de participer au jury de mon mémoire.

Mes vifs remerciements vont également au Professeur Necir Abdelhakim pour son encouragement, et restera le symbole de la réussite dans la recherche scientifique.

Je remercie pour les conseils efficaces qui ont mettent en valeur mon travail.

Je remercie également mes parents et ma grande famille et mes amis de m'avoir encouragé, soutenu durant mon travail.

Table des matières

Liste des abréviations

CTE :	Conditionnal Tail Expectation.
$CVaR$:	Conditional Value-at-Risk.
ES :	Expected Shortfall.
$E[X]$:	Espérance mathématique ou moyenne de la v.a. X.
Ω :	L'espace fondamental.
P :	Mesure de probabilité sur
F :	Fonction de distribution..
F^{-1} :	La fonction inverse de F.
F_u :	Distribution conditionnelle des excès.
F_i :	Fonction de distribution de la $i^{éme}$ marginale.
g :	Fonction de distorsion.
G :	Fonction de répatition de la v.a Z.
GEV :	Distribution généralisée de valeurs extrêmes.
GPD :	Distribution généralisée de Pareto.
h :	Fonction de densité multivariée.
H_ξ :	Distribution des valeurs extrêmes standard.
$i : i : d$:	Indépendantes et identiquement distribuées.
MRD :	Mesure de Risque de Distorsion.
$M_X(h)$:	Fonction génératrice des moments.
$P\&L$:	La distribution des profits et des pertes.
r :	Mesure de risque.
F_X :	La fonction de répartition de la variable aléatoire X.
F_n :	La fonction de répartition empirique.
R_g :	Mesure de risque de Wang.
$TVaR$:	Tail-Value-at-Risk.
Var :	Variance mathématique.

VaR : Value-at-Risk.

$\widehat{VAR}$: Estimateur convergent de la VaR.

$v.a$: Variable aléatoire définie sur l'espace (Ω, F, P).

$\leq$: Un pré ordre.

POT : Domaine Pics au-delà d'un seuil.

X : Variable aléatoire définie sur (Ω, F, P).

$\xrightarrow{P}$: Convergence en probabilité.

$\xrightarrow{L}$: Convergence en loi.

Introduction

Depuis de nombreux siècles, les personnes sont exposées à diverses crises et accidents, qu'il s'agisse de catastrophes naturelles (tremblements de terre, tsunamis, ...) ou liées à l'activité humaine (maladies infectieuses, ...), cela provoque de multiples crises financières pour les sociétés financières, les banques et les compagnies d'assurance.

Comme à la fin de 2008, la gestion des risques a pris une importance accrue dans le secteur des services financiers, où la connaissance des méthodologies de base de mesure, d'évaluation et de contrôle des risques est essentielle pour progresser dans la finance. La gestion des risques financiers traite de la relation entre le retour sur investissement requis et les risques associés à cet investissement.

Erik, B., 1993 défini la gestion des risques comme «la gestion d'événements qui ne peuvent être prévus, et qui peuvent entraîner des pertes potentielles survenant dans l'installation, s'ils ne sont pas traités de manière appropriée».

Dans la finance, les gens sont intéressés à les outils d'évaluation de ces risques, Il existe de nombreuses méthodes permettant de décrire de façon quantitative le risque d'un instrument financier.

Ce mémoire réparti en deux chapitres :

Chapitre 1 : Ce chapitre est constitué de quatre sections.

Dans la première section, nous donnons un rappel contient la définition de trois types du risque.

La deuxième section est réservée aux définitions de mesure de risque et ses paramètres. Nous parlons de la caractérisation axiomatique des mesures de risque (Mesure de risque cohérente , propriété d'invariance et de convexité, mesure de risque comonotone additive) et nous traitons ces propriétés.

Dans la troisième section nous exposons les mesures de risque usuelles en finance à savoir la variance, la VaR, TVaR, CTE, la mesure de risque de Wang ainsi que les mesures de risque par distorsion et les mesures spectrales.
Nous présentons dans la quatrième section de la comparaison des risques à travers des outils permettant de classer les risques selon leur dangerosité.

Chapitre 2 : Ce chapitre est réparti en deux sections.

Dans la première section, nous synthétises les différentes méthodes d'estimation de la mesure de risque particulière de Value-at-Risk cette méthodes est l'estimation paramétriques, non paramétrique et semi-paramétrique.
Nous avons choisi dans la deuxième section l'une des méthodes d'estimation non paramétrique, à savoir la simulation historique pour estimer la VaR sur des données réelles relevées dans la marché ouvert financier (la moyenne industrielle Dow Jones).

Chapitre 1

Théories sur les mesures de risques

Le danger est un facteur qui joue un rôle très important dans plusieurs domaines, il évolue au fur et à mesure que son environnement change, il n'est pas lié à un secteur ou un pays spécifique, mais est devenu plus complexe et difficile à prévoir, là où il y en a.

Diverses tentatives pour définir et distinguer ses mesures, notre objectif est se concentrer sur le risque financier depuis la gestion des risques, les risques sont au cœur d'un investissement réussi. Le concept de danger en financement très proche de l'incertitude.

En général, le risque Il est considéré comme un profit ou une perte centrale randomisé. Il est positif ou négatif. Il s'agit d'une mesure de la volatilité du rendement que nous prévoyons recevoir à l'avenir d'un placement.

Définition de risque

Définition 1.1 *Le risque se définit comme une perte potentielle, identifiée et quantifiable, inhérente à une situation ou une activité. Le risque est présent dans toute entreprise et il existe ainsi de nombreux types de risque en fonction du secteur d'activité, mais aussi de la nature du risque (risque quantifiable ou non). En particulier, au sein d'une société de gestion d'actifs, trois services sont généralement dédiés à la gestion du risque :*

Risque liquidité.

Risque de crédit.

Risque de marché.

1.0.1 Types de risque

1. **Risque de marché :** Peut se définir comme le risque de perte qui découle de l'évolution anormale ou désavantageuse lié aux variations des conditions de marché et les fluctuations des prix des instruments financiers qui composent un portefeuille (des taux d'intérêt, des taux de change, le prix des actifs financiers, le cours des actions et les prix des produits dérivés, volatilités, etc...).
2. **Risque de crédit :** Dû aux non respect des engagements des partenaires contractant des crédits, ce risque correspond à la possibilité de subir des pertes financières découlant de l'incompétence d'une entreprise, d'un émetteur ou d'une contrepartie d'honorer ses engagements financiers, ce risque est particulièrement présent dans le portefeuille d'investissement à impact économique.
3. **Risque de liquidité :** Concerne les placements financiers qui sont très difficile à rendre liquide, c'est-à-dire à vendre rapidement en cas de besoin de liquidité.[5]

1.1 Mesure de risque

La mesure du risque est un moyen très important, quel que soit l'institution ou le secteur. La finance peut utiliser diverses techniques pour mesurer les risques, contrôler et connaître leurs sources, afin d'obtenir les meilleurs résultats pour toutes les activités des sociétés d'investissement, de financement et d'exploitation, elle peut déterminer les mesures de risque les plus nécessaires, la mesure du risque est déterminée comme costume..

Une mesure de risque univarié est une fonction associant à chaque variable aléatoire du montant de perte X une valeur réelle $\varrho(X)$.

D'après cette définition, on peut considérer l'espérance, la variance et l'écart-type comme des mesures de risque.

1.1.1 Région de risque

Une notion liée à celle de mesure de risque est la région des portefeuilles accep- tables définie comme suit :

On définit la région de risque acceptable pour la mesure ϱ par

$$G = \{X,\ \varrho(X) \leq 0\}.$$

Chargement de sécurité

Une mesure de risque ϱ contient un chargement de sécurité, si pour tout risque X, on a

$$\varrho(X) \geq E\left(X\right).$$

A partir de la définition de la mesure de risque, on peut considérer toute fonction définie sur l'espace des variables aléatoires, qui prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$ comme mesure de risque, afin de respecter certaines propriétés désirables. [2]

1.1.2 Mesure de risque cohérente

Artzner et coll (1999) [$***$], il a présenté de nombreux axiomes pour façonner une brochure adaptée aux des mesures de risque, un de ces idée mesure de risque cohérente.

Soit Ω l'espace des états possibles de la nature, supposé fini, la valeur future du portefeuille dans les différents états de la nature est donc un vecteur noté X.

L'actif sûr est noté r, ce vecteur a toutes ses coordonnées positives (c'est en ce sens qu'il est qualifié de sûr). Les cinq axiomes suivants permettent de caractériser une mesure de risquer ϱ qui soit cohérente :

1. **Invariance par translation :**

$$\forall X,\ \forall \alpha \qquad \varrho\left(X + \alpha r\right) = \varrho\left(X\right) - \alpha.$$

2 **Sous-additivité :**

$$\varrho\left(X_1+X_2\right) \leq \varrho\left(X_1\right)+\varrho\left(X_2\right).$$

Cet axiome s'interprète par le fait que diviser un portefeuille ne peut réduire le risque total.

3 **Homogénéité positive :**

$$\forall \lambda \geq 0,\ \forall X \qquad \varrho(\lambda X)=\lambda \varrho(X).$$

Le sens de cet axiome est que la taille du portefeuille ne doit pas avoir de conséquence sur la mesure du risque, c'est-à-dire sur le fait d'être acceptable ou non.

4 **Monotonie** :

$$\text{Si } X \leq Y,\ \text{alors} \quad \varrho(Y) \leq \varrho(X).$$

Cet axiome signifie que si X offre un rendement inférieur à celui de Y dans tous les états de la nature, alors il est plus risqué que Y.

5 **Pertinence :**

$$\forall X,\ X \leq 0,\ X \neq 0, \qquad \varrho(X) \geq 0.$$

Cet axiome est nécessaire pour éviter que certains risques ne soient oubliés.

Cette définition ne fournit pas de manière pratique une mesure du risque mais il permet de présenter cinq critères indispensables à vérifier pour tester une mesure de risque en pratique. [1]

1.1.3 Propriété d'invariance et de convexité

Une mesure de risque ϱ est invariante en loi, si pour tous risques X et Y :

$$X \overset{L}{=} Y \Rightarrow \varrho(X) = \varrho(Y).$$

Une mesure de risque ϱ est dite convexe, si elle est monétaire et vérifie :

$$\forall \alpha \in [0,1], \ \varrho[\alpha X + (1-\beta Y)] \leq \alpha \varrho(X) + (1-\beta)\varrho(Y).$$

Si ϱ est une mesure de risque monétaire et homogène, alors la convexité et la sous-additivité sont des notions équivalentes.
Si ϱ est une mesure de risque monétaire, ϱ est convexe si et seulement si la région de risque G est convexe.

1.1.4 Mesure de risque comonotone additive

Une mesure de risque ϱ est comonotone additive, si pour tout vecteur comonotone $(X_1; X_2)$ on a

$$\varrho(X_1 + X_2) = \varrho(X_1) + \varrho(X_2).$$

Dans la littérature, il existe plusieurs mesures de risques. Dans la section suivante, on va présenter quelques mesures de risque les plus utilisées en pratiques tels que la variance, la Valeur en Risque et la Tail-Value-at-Risk.[2]

1.2 Quelques mesures de risque usuelles

1.2.1 La variance

La variance est une mesure de dispersion d'une variable aléatoire autour de sa moyenne. Si X est une variable aléatoire de carré intégrable, sa variance est définie par

$$Var(X) = E\left[(X - E(X))^2\right].$$

1.2.2 La Value-at-Risk

A partir du milieu des années 1990, la base du processus de mesure du risque de marché est la valeur à risque VaR qui constitue une norme de mesure des risques, notamment pour mesurer le capital économique et réglementaire. Certaines orientations sont assurées sur cette mesure de risque approuvée par le comité de Bâle 1 en standard.

Il existe une littérature abondante consacrée aux méthodes d'évaluation dédié à la critique de VaR. Pour un aperçu à jour du sujet de VaR, l'une de plus populaires mesures de risque est la Value-at-Risk (VaR), appelée également "Valeur à Risque". Voici sone graphe (Fig.1) :

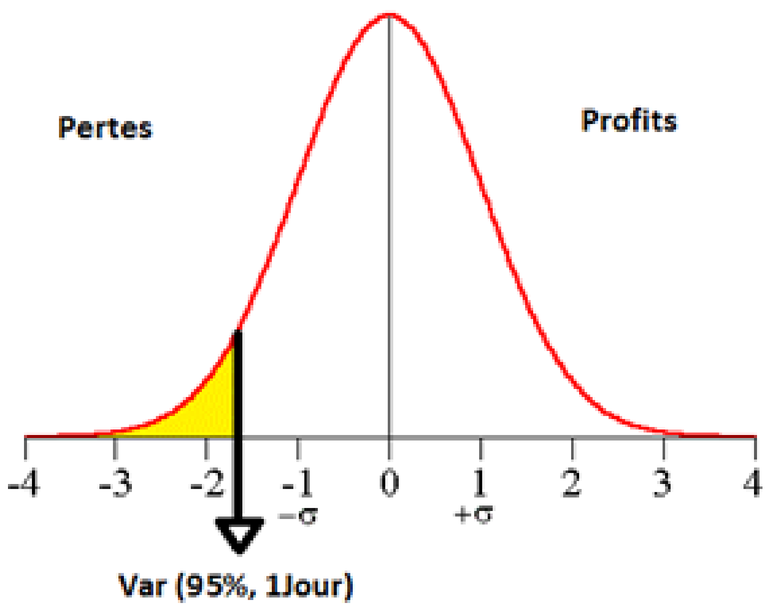

Fig.1 : Valeur à Risque(Distribution de Pertes et profits)

On appelle Value-at-Risk de niveau $\alpha \in (0;1)$ le quantile de niveau α,

$$\varrho\left[X\right] = VaR_{\alpha}\left[X\right] = x_{\alpha}, \qquad ou \qquad P\left(X \leq x_{\alpha}\right) = \alpha.$$

Ou encore

$$\begin{aligned} VaR_\alpha [X] &= F^{-1}(\alpha) = \inf\{x : P[X > x] \leq 1-\alpha\} \\ &= \inf\{P[X \leq x] \geq \alpha\} \\ &= \sup\{x : F(x) < \alpha\} \\ &= Q(\alpha) \end{aligned}$$

i. e, la VaR est le seuil minimum excédé par X avec la probabilité tout au plus $1-\alpha$. La VaR a les propriétés suivantes :

- Pour tout $\alpha \in (0,1)$:

$$VaR_\alpha [X] \leq \max [X].$$

- La VaR est monotone :

$$VaR_\alpha [X] \leq VaR_\alpha [Y], \qquad si\ X \leq Y.$$

- La VaR est translation invariant :

$$VaR_\alpha [X+c] = VaR_\alpha [X] + c.$$

- La VaR est positive homogène :

$$VaR_\alpha [cX] = c \times VaR_\alpha [X].$$

- La VaR est comonotone additive, si les risques $X_1; X_2; ...; X_n$ sont comonotons [3], alors

$$VaR_\alpha [X_1 + X_2 + ... + X_n] = VaR_\alpha [X_1] + VaR_\alpha [X_2] + ... + VaR_\alpha [X_n].$$

La VaR n'est pas cohérent car elle n'est pas sous-additive.

Démonstration : Cette proposition peut se démontrer à l'aide d'un contre-exemple. Soit X

et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois de Pareto de paramètres (2,1) et (2,2), alors

$$\exists \alpha \in \left]0,1\right[, \ VaR_{\alpha}\left[X+Y\right] > VaR_{\alpha}\left[X\right] + VaR_{\alpha}\left[Y\right].$$

Comme le montre le graphique suivant :

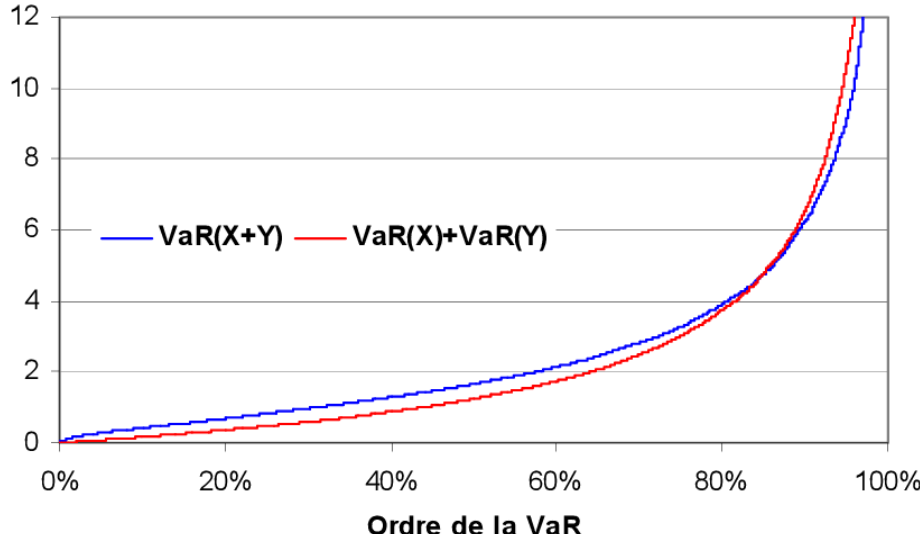

Fig.2 : Value-at-Risk de la somme de deux v.a.de Pareto.

Rappelons qu'une variable aléatoire X de loi de Pareto, Par (α, θ) a pour fonction de répartition

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \frac{\theta}{\theta + x}, & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{, sinon} \end{cases} [6].$$

Les méthodes de calcul de la VaR

Il existe essentiellement trois méthodes qui permettent de calculer la VaR.

Méthode variance covariance ou analytique : Cette méthode suppose que le rendement des facteurs de risque suit une distribution normale, il est donc suffisant d'estimer leurs moyenne et matrice de Variance/Covariance sur l'horizon désiré, cette hypothèse est particulièrement utile dans la mesure où un portefeuille composé uniquement d'actifs conjointement distribués selon une loi normale est lui même normalement distribué.

Méthode Monte Carlo : C'est de loin la méthode la plus difficile à mettre en œuvre car elle nécessite la réalisation d'un nombre conséquent de simulations. ,on détermine dans un premier temps les lois de distribution des rendements des facteurs de risque décrivant la valeur du portefeuille, ces lois de distributions peuvent entre autre être des modèles stochastiques, on simule ensuite un grand nombre de scénario futurs pour déterminer les trajectoires des facteurs de risque. Les résultats de ces simulations sont ensuite utilisés pour exprimer la distribution des pertes et profits et calculer la VaR.

Méthode historique : Elle consiste à obtenir sur la base d'un historique des variations de facteurs de risque à un zone de temps donné, une distribution des variations de valeurs du portefeuille. De cette distribution, on peut extraire un quantile qui permet de lire la VaR pour un seul de confiance donné. Cette méthode est relativement simple mais présente un risque de mesure lié au choix de l'échantillon. Si celui-ci est trop court, on expose à un risque lié au fait qu'on n'aura pas suffisamment de données pour estimer correctement le quantile a 99% (la variance de l'estimateur sera alors trés grande). Si au contraire, on le choisit trop long, on court le risque que la distribution des facteurs change, ce qui induit un risque sur l'estimation de quantile [5].

1.2.3 La Tail-Value-at-Risk

La Tail Value-at-Risk notée $TVaR\ (X;\alpha)$ est définie par :

$$TVaR(X;\alpha) = \frac{1}{1-\alpha}\int_{\alpha}^{1} VaR(X;t)dt.$$

la Tail-VaR est la moyenne des VaR de niveau supérieur à α. voici (Fig 3) :

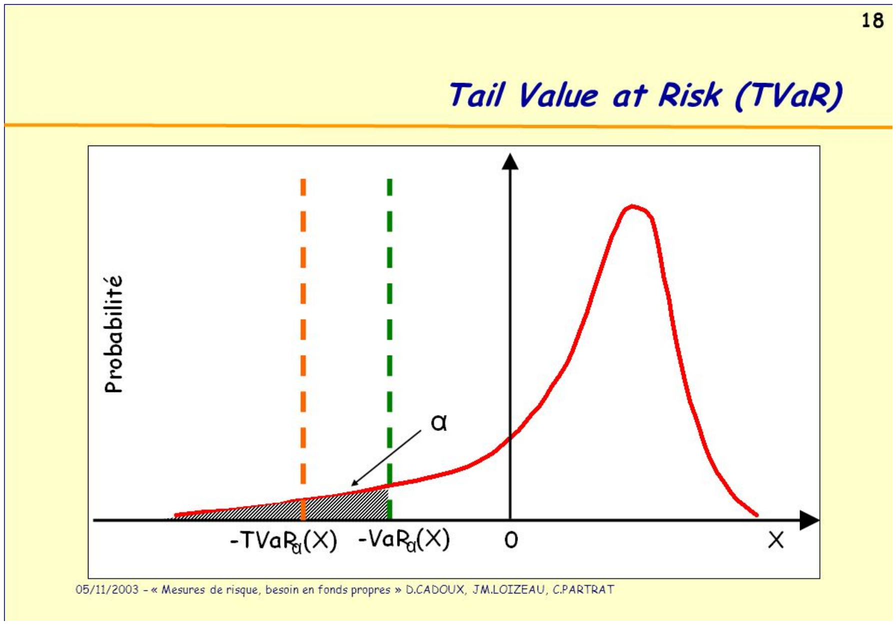

Fig.3 : VaR et Tail-VaR.

Il existe une fonction de répartition $\tilde{F}_X$ (transformée de Hardy-Littlewood de F_X) telle que $\forall\alpha$,

$$\tilde{F}_X^{-1}(\alpha) = TVaR(X;\alpha).$$

Si $\tilde{X}$ a pour loi $\tilde{F}_X$, alors

$$TVaR(X;\alpha) = VaR(\tilde{X};\alpha).$$

La Tail -V aR de X est donc la VaR de la transformée de Hardy-Littlewood de X. Notons que, $TVaR[X,0] = E[X]$. Et comme

$$TVaR(X;\alpha) = \frac{1}{1-\alpha}\left\{E[X] - \int_0^\alpha VaR(X;t)dt.\right\}.$$

On en déduit que la $TVaR$ est une fonction croissante et en de plus

$$TVaR(X;\alpha) \geq TVaR(X;0) = E[X].$$

la Tail $TVaR$ contient toujours un chargement de sécurité.

La CTE est la la perte attendue sachant que la VaR au niveau est dépassée, i.e. perte moyenne dans les pires $1-\alpha\%$ des cas.

La Conditional Tail Expectation au niveau α, notée $CTE[X,\alpha]$ est définie par :

$$CTE[X,\alpha] = E\left[X/X > VaR(X,\alpha)\right].$$

La $CVaR$ est la valeur moyenne des pertes qui excèdent la VaR, i.e. il s'agit de l'excédent moyen de sinistre au-delà de la VaR.

La Conditional VaR au niveau α, notée $CVaR[X,\alpha]$, comme représenté sur la (Fig.4) :

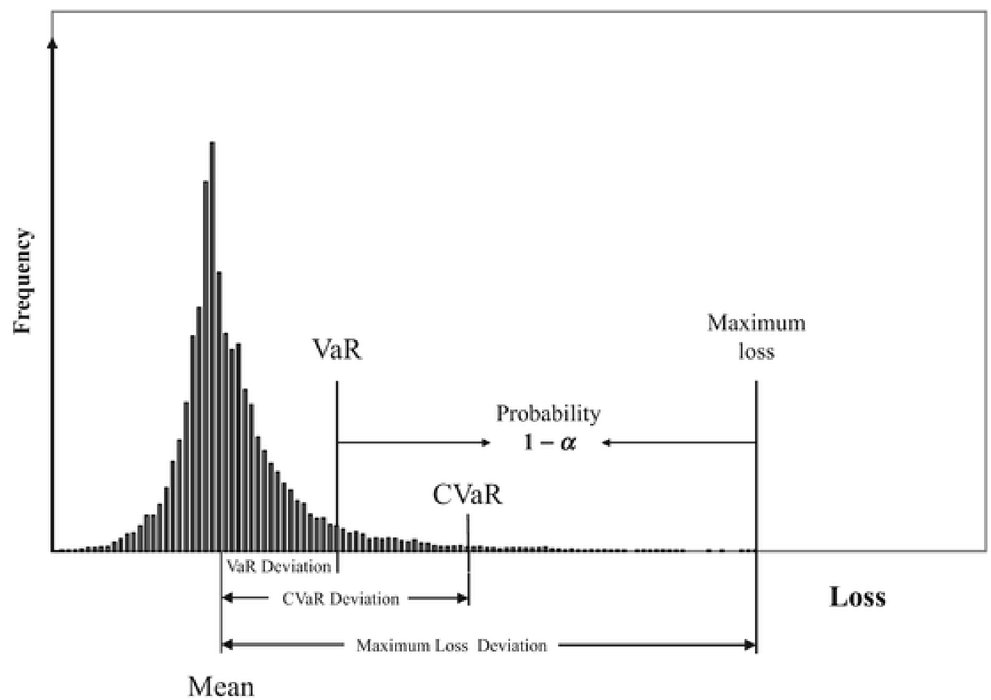

Fig.4 : La VaR et *La Conditional*$-VaR$ (CVaR).

et

$$\begin{aligned} CVaR[X,\alpha] &= E\left[X - VaR\left[X,\alpha\right]/X > VaR\left[X,\alpha\right]\right]. \\ &= e_X\left(VaR\left[X,\alpha\right]\right). \\ &= CTE\left[X,\alpha\right] - VaR\left[X,\alpha\right]. \end{aligned}$$

L'Expected shortfall (ES) est la prime stop-loss dont la franchise est $VaR[X,\alpha]$, ES au niveau α, notée $ES[X,\alpha]$, est

$$ES[X,\alpha] = E\left[(X - VaR[X,\alpha])_+\right].$$

Quel que soit le niveau de probabilité $\alpha \in (0,1)$, les identités suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned}
TVaR(X,\alpha) &= VaR(X,\alpha) + \frac{1}{1-\alpha} ES(X,\alpha), \\
CTE(X,\alpha) &= VaR(X,\alpha) + \frac{1}{F_X\left(VaR(X,\alpha)\right)} ES(X,\alpha).
\end{aligned}$$

La CTE et la $TVaR$ coïncident pour des risques dont la fonction de répartition est continue, i.e.

$$CTE(X,\alpha) = TVaR(X,\alpha), \qquad \alpha \in (0,1).$$

La $TVaR$ est invariante par translation et homogène.

De la même manière, l'homogénéité de la VaR garantit l'homogénéité de la $TVaR$. Soit le risque X et le niveau de perte x tels que $\bar{F}_X(x) > 0$. Quel que soit l'événement aléatoire E tel que

$$P[E] = F_X(x).$$

on a

$$E[X/E] \leq E[X/X > x].$$

Cette proposition garantie que la $TVaR$ est sous-additive lorsque les risques sont continus, (la $TVaR$ et la CTE coïncident).

$$\begin{aligned}
TVaR(X+Y,\alpha) &= E\left[X/X+Y > VaR\left[X+Y,\alpha\right]\right] \\
&= E\left[Y/X+Y > VaR\left[X+Y,\alpha\right]\right] \\
&\leq E\left[X/X > VaR\left[X+Y,\alpha\right]\right] \\
&+ E\left[Y/Y > VaR\left[X+Y,\alpha\right]\right] \\
&= TVaR(Y,\alpha).
\end{aligned}$$

De la même manière, la $TVaR$ est monotone, puisque lorsque $P[X \leq Y] = 1$

$$\begin{aligned}
TVaR(X,\alpha) &= E\left[Y/Y > VaR\left[Y,\alpha\right]\right] \\
&\geq E\left[Y/XcVaR\left[Y,\alpha\right]\right] \\
&\geq E\left[X/X > VaR\left[Y,\alpha\right]\right] \\
&= TVaR(X,\alpha).
\end{aligned}$$

La $TVaR$ est cohérente pour les risques continus et coïncide alors avec la CTE.

La $TVaR$ est la plus petite mesure de risque majorant la VaR qui soit cohérente.

1.2.4 Les mesures de risque de Wang

Nous appellerons fonction de distorsion, toute fonction croissante $g : [0,1] \to [0,1]$ telle que $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$.

On considère ici des variables aléatoires (strictement) positives, i.e. $F(0) = P(X \leq 0) = 0$. Le cas général sera traité dans la partie suivante :

La mesure de risque de Wang associée à la fonction de distorsion g, notée R_g, est

$$R_g\left(X\right) = \int_0^{\infty} g\left(1 - F_X\left(x\right)\right) dx = \int_0^{\infty} g\left(\bar{F}_X\left(x\right)\right) dx.$$

La mesure de risque associée à la fonction de distorsion $g(q) = q$, correspond à l'espérance mathématique $E[X]$.

Si

$$g(q) \geq q,\ \forall q \in [0,1]\,.$$

Alors

$$R_g\,(X) \geq E\,[X]\,.$$

La mesure de risque de Wang comporte un chargement de sécurité.

Si

$$g_1(q) \leq g_2\,(q)\,,\ \forall q \in [0,1]\,,$$

Alors

$$R_{g_1}\,(X) \leq R_{g_2}\,(X)\,.$$

En substituant $\int_0^{\bar{F}_X(x)} dg\,(\alpha)$ à $g(\bar{F}_X\,(x))$ on obtient la mesure de risque de Wang associée à la fonction de distorsion g, on peut s'écrire

$$R_g\,(X) = \int_0^1 VaR\,(X, 1-\alpha)\,dg\,(\alpha)\,.$$

Ainsi, les mesures de risque de Wang sont des moyennes pondérées deVaR.

Si

$$g_\alpha\,(x) = I[x \geq 1-\alpha],$$

Alors

$$R_{g_\alpha}\,(X) = VaR\,[X,\alpha]\,.$$

I.e. la VaR au niveau α est une mesure de Wang particulière correspondant à une fonction de distorsion passant de 0 à 1 en $1-\alpha$; ici,g est la fonction de répartition associée à une masse de Dirac en $1-\alpha$.

Définition 1.2 *On appelle Wang-Transform (WT), la mesure de risque de Wang issue de* *la fonction de distorsion*

$$g_\alpha(x) = \Phi\left[\Phi^{-1}(x) - \Phi^{-1}(\alpha)\right].$$

Certaines mesures de risque usuelles telles que la VaR ou la $TVaR$ sont des mesures de risque de Wang, le tableau ci-dessous reprend les fonctions de distorsion correspondantes :

Mesure de risque	*Paramètre*	*Fonction de distorsion*
Value-at-Risk	VaR_α	$g(x) = 1_{[\alpha,+\infty]}(x)$.
Tail-Value-at-Risk	$TVaR_\alpha$	$g(x) = Min\,(x/\alpha, 1)$.
Mesure de risque PH	PH_ξ	$g(x) = x^{1/\xi}$.
Wang-transform	WT_α	$g(x) = \Phi\left[\Phi^{-1}(x) - \Phi^{-1}(\alpha)\right]$.

Voici le graphe de chacune de ces fonctions (Fig.(5)) :

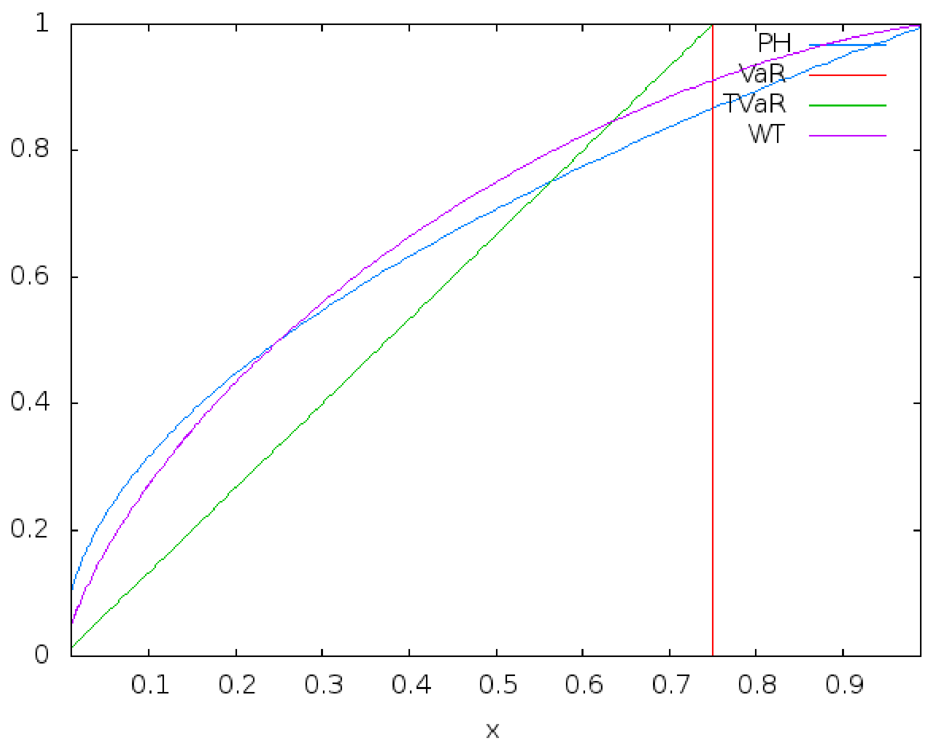

Fig.5 : Quelques fonctions de distorsion.

[7].

1.2.5 Mesures de risque par distorsion

Les mesures de Wang sont un cas particulier de mesures de risques par distorsion.

On appelle mesure de risque par distortion la quantité

$$R(X) = \int_0^1 F^{-1}(1-\mu)\, dg(\mu).$$

Où g est une fonction de répartition sur $[0,1]$, appelée fonction de distorsion. $R(X)$ peut se réécrire

$$R(X) = \int_0^\infty g(1-F(x))\, dx - \int_{-\infty}^0 [1-g(1-F(x))]\, dx.$$

Si $g(q) = q$, $\forall q \in [0,1]$,donc

$$R(X) = \int_0^\infty F(1-F(x))\, dx - \int_{-\infty}^0 gF(x)\, dx = E(X).$$

Soit Q la mesure induite par la transformation g sur P i.e

$$Q([a,b]) = G(P([a,b])).$$

La croissance sur g sur $[0,1]$ permet de construire une capacité.

Considérons la fonction de répartition $G(x) = x^K$. On appelera mesure de risque à hasard proportionnel, la mesure induite par cette transformation

$$R(X,K) = \int_0^1 F^{-1}(1-\mu)\, K\mu^{K-1} d\mu.$$

Lorsque $k < 1$, la fonction G est concave.

1.2.6 Les mesures spectrales

La théorie des mesures spectrales de risque financier, est un développement intéressant dans le secteur financier récemment proposée par Acerbi (2001,2002, 2003). La mesure spectrale

de risque (MSR) est une moyenne pondérée des quantiles d'une distribution de perte, dont les poids dépendent de la fonction d'aversion de risque de l'utilisateur une fonction spectrale (ou fonction d'aversion pour le risque) est : $\Phi : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ décroissante, telle que $\int_0^1 \Phi(t)\, dt$.
La mesure de risque spectrale induite est

$$R(X) = \int_0^1 F_X^{-1}(t)\, \Phi(t)\, dt.$$

Ces mesures de risques sont cohérentes.

Les mesures de distortion de fonction de distortion g concave sont des mesures spectrales, avec $\Phi = g$.
[4] .

1.3 Comparaison des risques

L'objet de ce paragraphe est de présenter des outils permettant de classer les risques selon leur dangerosité.

1.3.1 Relation associée à une mesure de risque

Nous avons étudié un certain nombre de mesures de risque. Une idée naturelle pour comparer deux risques X et Y est de choisir une mesure de risque ϱ et de comparer $\varrho(X)$ et $\varrho(Y)$ ce que l'on peut toujours faire puisque $\mathbb{R}$ est ordonné par la relation d'ordre totale $\leq$. Cette démarche nous permet d'introduire la relation $<_\varrho$ définie comme suit ;
Pour toute mesure de risque ϱ, pour tous risques X et Y, on définit la relation $<_\varrho$ par : $X <_\varrho Y$ si $\varrho(X) \leq \varrho(Y)$.
La relation $<_\varrho$ issue de la mesure de risque ϱ est réflexive et transitive, de plus il est toujours possible de comparer par $<_\varrho$ deux lois de probabilité ou deux variables aléatoires.
N.B. Cette relation n'est pas une relation d'ordre car elle n'est pas antisymétrique. En effet, avoir simultanément $\varrho(X) \leq \varrho(Y)$ et $\varrho(X) \geq \varrho(Y)$ n'implique pas que $X =_{loi} Y$ (et a fortiori que $X = Y$).

Le principal mérite de ce type de relation est qu'il est toujours possible de comparer deux risques. Il faut néanmoins rester prudent car l'on peut avoir simultanément $X <_{\varrho} Y$ et $X >_{\acute{\varrho}} Y$ pour deux mesures de risque ϱ et $\acute{\varrho}$ différentes, c'est pour cette raison que l'on préférera se tourner vers des ordres partiels qui permettent de disposer de davantage de propriétés.

1.3.2 Ordre stochastique

On dit que X domine selon l'ordre stochastique Y ($Y <_{st} X$) si pour toute fonction de distorsion g, on a : $\varrho_g(Y) \leq \varrho_g(X)$.
Cette notion est équivalente à celle de comparaison uniforme des VaR puisque toute mesure de risque de Wang peut s'écrire comme somme de VaR :

$$X <_{st} Y \;\Leftrightarrow\; \varrho_g(X) \leq \varrho_g(Y),$$

pour toute fonction de distorsion g, donc

$$Var(X, \alpha) \leq Var(Y, \alpha),\ \forall \alpha \in [0, 1].$$

La relation $<_{st}$ est un ordre partiel sur l'ensemble des lois de probabilités, l'ordre stochastique ne permet pas de comparer toutes les variables aléatoires, en effet, il est possible d'avoir simultanément

$$Var(X, \alpha) \leq Var(Y, \alpha).$$

$$Var(X, \beta) > Var(Y, \beta).$$

On a :

$$X <_{st} Y \Leftrightarrow E[\varrho(X)] \leq E[\varrho(Y)].$$

En particulier, on a :

$$X <_{st} Y \Leftrightarrow E[X] \leq E[Y].$$

Cela signifie intuitivement que le risque X est plus petit que le risque Y, cette conséquence explique le fait que l'on parle de dominance stochastique au premier ordre pour désigner la relation $<_{st}$.

1.3.3 Ordre convexe

On dit que X est moins dangereux que$Y$ sur la base de l'ordre convexe croissant ($<_{icx}$) et l'on note $X <_{icx} Y$, si pour toute fonction de distorsion g concave, on a :

$$\varrho_g(X) \leq \varrho_g(Y).$$

Cette notion est équivalente à celle de comparaison uniforme des TV aR, puisque :

$$X <_{icx} Y \Leftrightarrow \varrho_g(X) \leq \varrho_g(Y),$$

Pour toute fonction de distorsion g concave

$$TVar(X, \alpha) \leq TVar(Y, \alpha), \ \forall \alpha \in [0, 1].$$

On supposera dans la suite que les risques ont des primes pures finies ce qui garantit l'existence des $TVaR$..Cette relation est également connue sous les noms de dominance stochastique du deuxième ordre, d'ordre Stop-Loss et d'ordre sur les $TVaR$.

On dira que le risque X est moins dangereux que le risque Y de même prime pure au sens de l'ordre convexe ($<_{cx}$), s'il est moins dangereux au sens de l'ordre convexe croissant, i.e. si :

$$X <_{cx} Y \Leftrightarrow X <_{icx} Y.$$

Et

$$E[X] = E[Y].$$

Pour toute fonction convexe croissante et pour autant que les variances existent, on a :

$$X <_{cx} Y \Leftrightarrow E[\varrho(X)] = E[\varrho(Y)].$$

En particulier pour $\varrho : x \to x^2$ avec $x \geq 0$, on a :

$$X <_{cx} Y \Leftrightarrow VaR(X) \leq VaR(Y).$$

Pour autant que les variances existent. Intuitivement cette propriété signifie que si $X <_{cx} Y$, le risque X est moins « variable » que le risque Y.

L'ordre convexe permet de comparer des variables aléatoires de même espérance, ce que ne permettait pas l'ordre stochastique puisque

$$X <_{icx} Y \quad et \quad E[X] = E[Y] \Rightarrow X =_{loi} Y.$$

1.3.4 Théorème de séparation

Le théorème de séparation permet d'établir que si X est moins dangereux que Y :

$$X <_{icx} Y.$$

Selon l'ordre convexe croissant, alors $\exists\ Z$ tel que

$$X <_{st} Z <_{cx} Y.$$

1.3.5 Conclution

Dans le premier chapitre j'ai présenté quelques théories et axiomes sur les mesures du risque, en introduisant les mesures de risque habituelles, en particulier la valeur à risque, (VaR), et sons méthodes de calcul ,la Tail-Value-at-Risk, l'ensemble.(CTE, CVaR, ES), les mesures de risque de Wang, les mesures de risque par distorsion, et les mesures spectrales.

En fin j'ai présenté des comparaison des risques qui contient la relation associée à une mesure de risque , ordre stochastique, ordre convexe et la théorème de séparation

Chapitre 2

Application avec les données financières

2.1 Estimation de la Value-at-Risk :

La VaR (Value-at-Risk) est très utilisé dans les milieux financiers, elle permet de mesurer la perte maximale lié à une position de marché, sur une fenêtre de temps particulière (par exemple une période de temps de t à $t+h$) et pour un niveau de probabilité donné en supposant que l'on connaisse la loi du rendement du portefeuille, dans le cadre d'une probabilité égale à 95%..Cela signifie simplement que dans 95% des cas, la perte ne devrait pas dépenser cette mesure de risque.

De plus la VaR repose sur l'idée de coupler le montant des pertes (quantification brute) et la fréquence des pertes (prise en compte du risque).

Dans cette section nous allons nous intéresser aux différentes méthodes d'estimation de la Value -at-Risk. Le but est donc ici de présenter les méthodes les plus utilisées et de choisir une méthode appropriée à notre problématique, de manière générale, les facteurs de risque du marché (i.e. indices boursiers, taux d'intérêt, cours des titres, etc.) ou de crédit (i.e. probabilités de défaut) sont des variables qui vont déterminer les risques effectivement portés par l'investisseur. Il faut donc tenir compte de la linéarité (actions) ou non (options, futures, etc.) du prix des actifs.

Maintenant, nous présentons quelques méthodes pour estimer la VaR, dans cette partie nous allons présenter différentes techniques d'estimation de la Value-at-Risk. ces diffiérentes méthodes se répartissent en trois catégories :

- Estimation paramétrique.
- Estimation non paramétrique.
- Estimation semi-paramétrique.

2.1.1 Estimation paramétriques :

Les méthodes d'estimation paramétrique de la VaR reposent sur trois hypothèses simplificatrices, nous allons donc décrire dans cette partie trois approches d'estimation paramétrique de la VaR :

- L'approche univariée.
- L'approche variance-covariance.
- La méthode d'indicateurs de risque (ou de RiskMetrics).

1. **Approche univariée :**

On considère le rendement global du portefeuille comme celui d'un actif particulier et on calcule la VaR directement sur ce rendement agrégé.
$(H1)$ On suppose que la distribution des P&L à la date t est une distribution normale d'espérance μ et de σ^2.

$$R_t \sim N\left(\mu, \sigma^2\right).$$

On cherche donc la valeur de la VaR à la date t pour un taux de couverture de α telle que :

$$P\left[R_t \leq -VaR_t\left(\alpha\right)\right] = \alpha \Leftrightarrow P\left[\frac{R_t - \mu}{\sigma} \leq \frac{-VaR_t\left(\alpha\right) - \mu}{\sigma}\right] = \alpha.$$

D'après l'hypothèse $(H1)$:

$$\frac{R_t - \mu}{\sigma} \sim N(0,1).$$

Et par conséquent, si Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale $N(0,1)$, on obtient :

$$\Phi\left(\frac{-VaR_t(\alpha) - \mu}{\sigma}\right) = \alpha \Leftrightarrow VaR_t(\alpha) = -\mu - \sigma\Phi^{-1}(\alpha).$$

Sous l'hypothèse $(H1)$, la VaR associée à un taux de couverture de α est définie par :

$$VaR_t(\alpha) = -\mu - \sigma\Phi^{-1}(\alpha).$$

Où :

- μ est l'espérance de la distribution des P&L.
- σ variance de la distribution des P&L.

Remarque 2.1 *En réalisant ces calculs sur une distribution journalière des rendements, on exprime une VaR_1 à horizon d'un jour.Pour passer d'un horizon d'un jour à un horizon de X jours, on utilisera la formule suivante : $VaR_X = VaR_1\sqrt{X}$.*

2 Approche variance-covariance

Il s'agit d'une approche multi variée de la VaR, au lieu de considérer le rendement global du portefeuille comme celui d'un actif particulier, on prend en compte explicitement les corrélations entre les actifs du portefeuille.
On considère un portefeuille de N actifs corrélés entre eux. soit $R_t(P)$ le rendement du portefeuille d'actifs à la date t.

$$R_t(P) = \sum_{i=1}^{N} x_t^i R_t^i.$$

Avec :

– x_t^i représente le i^{eme} poid de i^{eme} rendement dans le portefeuille .

– R_t^i représente la i^{eme} réalisation de i^{eme} rendement dans le portefeuille .

L'hypothèse principale est donc que les distributions des rendements des actifs qui composent le portefeuille suivent une loi normale, i.e.

$$\forall i \ R_t^i \sim N\left(\mu_t^i, \sigma_t^i\right).$$

Donc la **rentabilité** espérée du portefeuille, i.e. son espérance par :

$$E\left[R_t(P)\right] = \sum_{i=1}^{N} x_t^i E\left(R_t^i\right) = \sum_{i=1}^{N} x_t^i \acute{\mu} = \acute{x}_t \mu_t x_t.$$

Où :

- $\mu_t = \left(\mu_t^1, \mu_t^2, ..., \mu_t^N\right)'$.

- $x_t = \left(x_t^1, x_t^2, ..., x_t^N\right)'$.

Ensuite la **volatilité** du portefeuille, i.e. sa variance par :

$$Var[R_t(P)] = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_t^i x_t^j cov\left(R_t^i, R_t^j\right) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_t^i x_t^j \gamma_t^{ij} = x_t' \Gamma_t x_t.$$

Où :

–Le vecteur x_t représente poids des actifs dans le portefeuille .

–Le vecteur μ_t représente l'espérance des rendements des actifs du portefeuille .

–La matrice $\Gamma_t = \left(\gamma_t^{ij}\right)_{1 \leq i,j \leq N}$est la matrice de covariance des actifs du portefeuille.

On aboutit donc à la définition suivante :

Dans le cas d'un portefeuille d'actifs corrélés entre eux, la formule de calcul de la VaR associée à un taux de couverture de α est la suivante :

$$VaR_t(\alpha) = E\left[R_t(P)\right] - \sqrt{Var[R_t(P) - \Phi^{-1}(\alpha)]},$$
$$= -\acute{x}_t \mu_t - \left(x_t' \Gamma_t x_t\right)^{1/2} \Phi^{-1}(\alpha)$$

Où :

– Le vecteur x_t représente le poids des actifs dans le portefeuille .

– Le vecteur μ_t représente l'espérance des rendements des actifs du portefeuille .

– La matrice Γ_t est la matrice de covariance des actifs du portefeuille.

En pratique, on estime μ_t et Γ_t sur les données.

3 -L'indicateurs de risque (Méthode riskMetrics)

C'est développé par la banque JP Morgan au début des années 90. Il diffère de l'approche variance-covariance au niveau du calcul de la volatilité des rendements du portefeuille, la volatilité est estimée en utilisant ses valeurs passées ainsi que celles des rendements en accordant plus de poids aux valeurs les plus récentes., ceci permet de pouvoir s'adapter plus facilement aux changements de conditions de marché et de pouvoir mieux tenir compte des évènements extrêmes, on note ν_t la volatilité des rendements du portefeuille à la date t :

$$\nu_t = VaR\left[R_t\left(P\right)\right].$$

La volatilité conditionnelle des rendements du portefeuille va être une combinaison linéaire de l'innovation passée et de la valeur passée de la volatilité :

$$\nu_t = \nu_{t-1} + (1-h)\left(r_{t-1}\left(P\right)\right)^2.$$

Où : h est un paramètre de lissage (par exemple, $h = 0,97$).

On aboutit donc à la définition suivante :

Dans le cas d'un portefeuille d'actifs corrélés entre eux, la VaR issue de Risk Metrics définie pour un taux de couverture α de peut s'écrire sous la forme :

$$VaR_t\left[\alpha\right] = -E\left[R_t\left(P\right)\right] - \left(\nu_t\right)^{1/2}\Phi^{-1}\left(\alpha\right).$$

Où :

– r_{t-1} est la réalisation associée à la V.a.R.

– ν_t est estimée à partir de la formule $\nu_t = \nu_{t-1} + (1-h)\left(r_{t-1}\left(P\right)\right)^2$.

– h paramètre de lissage (on fixe souvent $h = 0;97$).

Avantages et limites des méthodes d'estimation paramétriques

Le principal avantage des méthodes d'estimation paramétriques est que les calculs sont simples et rapides, et nécessitent de connaître uniquement la matrice de variance-covariance des rendements du portefeuille cependant.

2.1.2 Estimation non paramétrique

Nous allons présenter différentes méthodes d'estimation non paramétrique de la Value-at-Risk. Dans le cas de l'estimation non paramétrique, on n'impose a priori aucune distribution paramétrique de pertes et profits, dans cette section, on considèrera une approche uni variée de la VaR, i.e. le portefeuille est considéré comme un actif particulier possédant un rendement globale.

Problématique :

Pour détermination de la VaR, il faut l'obtention de la distribution des changements de valeurs du portefeuille (i.e. les pertes et profits potentiels), la figure illustre la problématique générale du calcul de la VaR.

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Modèle d'évaluation}\\ \text{Historique}\end{array}\right\}\rightarrow \text{Techniqued}'\text{estimation}\rightarrow \text{Distribution (pertes et profits)}\rightarrow \text{VaR.}$$

Simulation historique notée HS pour Historical Simulation

Il s'agit de la méthode la plus simple à réaliser, et certainement la plus utilisée actuellement.

a) **Principe et définition**

Le principe de cette méthode est d'estimer la VaR par le fractile empirique des rendements passés.

Soit $\{R_1, R_2, ..., R_T\}$ g une suite de rendements d'un actif ou d'un portefeuille observés aux instants t allant de 1 à T.,on dispose d'une série de T réalisations $\{r_1, r_2, ..., r_T\}$ associée à cette suite de variables aléatoires.

b) **Problème :**

On ne dispose que d'une seule réalisation r_i pour chaque variable aléatoire R_i, il est donc impossible d'estimer la densité associée à chaque variable R_i et par conséquent la VaR, la méthode de simulation historique va donc reposer sur l'hypothèse suivante :

$(H1)$ On suppose que les rendements $(R_t)_{t=1,...,T}$ sont indépendants et identiquement distribués i.e.

$$\forall t = 1, ..., T : f_{R_t}(x) = f_R(x).$$
$$\forall t : VaR_t(\alpha) = VaR(\alpha).$$

Grâce à cette hypothèse, on dispose maintenant d'un échantillon de T réalisations $\{r_1, r_2, ..., r_T\}$ d'une variable aléatoire R de densité $f_R(.)$.

On peut donc estimer la VaR. Sous l'hypothèse $(H1)$, un estimateur convergent de la VaR pour un taux de couverture de est défini par le fractile empirique d'ordre associé aux T réalisations historiques des rendements $\{r_1, r_2, ..., r_T\}$.

$$\widehat{VAR(\alpha)} = percentile\left(\{r_j\}_{j=1}^{T}, \alpha\right).$$

On a le résultat suivant :

$$\widehat{VAR(\alpha)} \xrightarrow{P} VaR(\alpha) \quad quand \quad T \to \infty$$

Ce qui justifie l'utilisation d'une telle approche.

Remarque 2.2 *La fonction « centile » (ou percentile en anglais) définit sous excel et elle renvoie le $k^{éme}$, centile des valeurs d'une plage de données. syntaxe :*

CENTILE(Matrice ;k).

Avec :

Matrice : Obligatoire. Représente la matrice ou la plage de données.

k : Obligatoire. Représente le centile, celui-ci doit être compris entre 0et 1 inclus.

c) **Les limites de la Simulation Historique**

La $VaR\ HS$ est l'estimateur d'une VaR associée à une distribution de P&L non conditionnelle.

En d'autres termes, cette distribution n'est pas calculée sachant un ensemble d'informations disponibles à la date t.

Par conséquent la prévision de la VaR selon la méthode de simulation historique sera invariante aux modifications de l'environnement économique, on qualifie donc les prévisions de la VaR selon la méthode de simulation historique de « plates » ou « pratiquement plates ».

d) **Prévision de la VaR selon la méthode de Simulation Historique**

Principe : Utiliser le fractile empirique associé aux observations passées.

En effet, puisque les rendements sont iid, R_{T+1} a la même distribution que $R_1, R_2, ..., R_T$ et donc un estimateur de sa VaR peut être obtenu à partir de l'estimateur de la VaR des rendements passés, le backtesting consiste à construire une suite de prévisions de la VaR.,pour ce faire, il existe 2 solutions :

Prévision Glissante :

Construction d'un estimateur glissant (rolling estimate) de la VaR en $T+1$, à partir d'un ensemble d'informations récentes de taille fixe T_e appelée largeur de fenêtre. Les prévisions glissantes de la VaR pour un taux de couverture α de par la méthode HS correspondent au fractile empirique d'ordre de la chronique des rentabilités passées observées sur une fenêtre de largeur T_e.

$$VaR\left(\alpha\right)_{t/t-T_e} = percentile\left(\left\{r_j\right\}_{j=t-T_e}^{t-1}, 100\alpha\right)$$

Plus la largeur de fenêtre T_e est petite, plus les prévisions sont volatiles. Plus la largeur de fenêtre T_e est grande, plus les prévisions sont rigides. La VaR prévue convergera vers la VaR non conditionnelle et tendra donc vers une valeur constante dans le temps.

Prévision non Glissante :

Construction d'une succession d'estimateurs de la VaR conditionnellement à toute l'information disponible, l'ensemble des observations connues croît donc au fur et à mesure du temps.

Généralement, on utilise la prévision glissante afin d'introduire un minimum de conditionnement et de limiter le poids des rendements plus anciens.

2.1.3 Estimation semi-paramétrique :

Théorie des valeurs extrêmes :

Cette théorie mesuré le risque extrême directement à partir des queues de distribution, contrairement aux autres méthodes qui estiment la distribution dans son ensemble.

Cadre d'analyse

On considère un n-échantillons $X_1, X_2, ..., X_n$ des variables aléatoires iid de fonction de répartition F.

Soit $M_n = max(X_1, X_2, ..., X_n)$ représentant la plus grande perte observée sur les n pertes observées $X_1, X_2, ..., X_n$.

La fonction de répartition de M_n :

$$P(M_n \leq x) = P(X_1 \leq x, X_2 \leq x, ..., X_n \leq x) = [F(x)]^n .$$

Le principe de la théorie des valeurs extrêmes va être d'identifier la famille de loi vers laquelle M_n va converger et d'estimer F par cette fonction, lorsque n tend vers l'infini, on veut donc trouver les distributions limites telles que :

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{M_n - d_n}{c_n} \leq x\right) = H(x) .$$

Non dégénérée avec : $c_n > 0, d_n \in R$.

Théorème 2.1 ***(limite de Fisher-Tippett)*** *Il s'agit du théorème fondamental de la théorie des valeurs extrêmes. On considère des variables aléatoires* $(X_n)_n$ *iid.,i'il existe des constantes*

$c_n > 0$ *et* $d_n \in R$ *et* H *une fonction de distribution non dégénérée telle que :*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{M_n - d_n}{c_n} \leq x\right) = H(x).$$

Non dégénérée. Alors H *appartient à l'un des 3 types suivants de distribution :*

– **Type 1 Fréchet** : Soit $\alpha > 0$

$$\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \exp\left(-x^{-\alpha}\right), & \text{sinon} \end{cases}.$$

– **Type 2 reverse Weibull** : Soit $\alpha > 0$

$$\Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp\left(-\left(-x\right)^{-\alpha}\right) & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1, & \text{sinon} \end{cases}.$$

– **Type 3 Gumbel :**

$$\Lambda(x) = \exp\left(-e^{-x}\right).$$

Les fonctions, $\Phi_\alpha, \Psi_\alpha,$et Λ sont appelées les distributions standards de valeurs extrêmes.

.

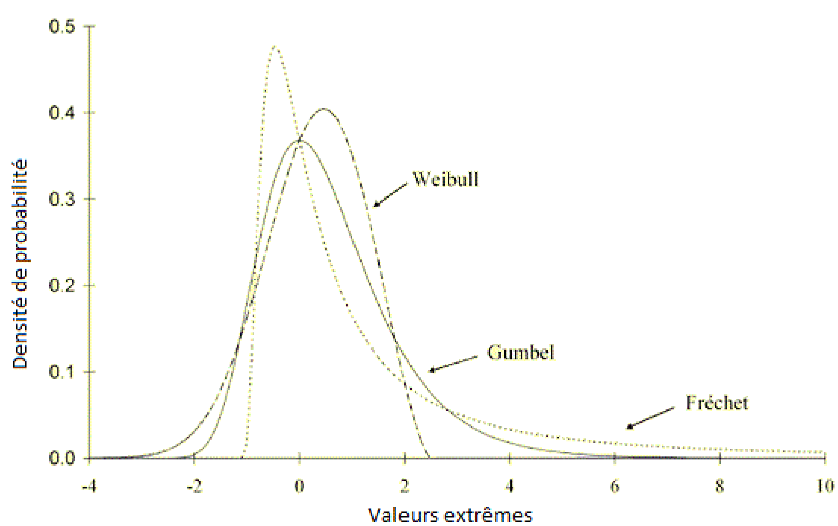

Fig.6 : Les trois types des distributiondes valeurs extrêmes

Méthode des excès et distribution de Pareto généralisée

La méthode des excès est également connue sous le nom de Peaks Over Threshold (**POT**), elle permet de modéliser les queues de distribution d'une série de données, a partir de cette distribution, on peut alors estimer la probabilité d'occurrence d'évènements rares, au-delà des plus grandes valeurs observées.

Définition 2.1 *Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F et μ un réel suffisamment grand appelé seuil, on définit les excès au-delà du seuil μ comme l'ensemble des variables aléatoires Y telles que :*

$$y_i = x_i - \mu,\ x_i > \mu.$$

On appelle right-end point de F, le point x_F tel que :

$$x_F = \sup_{x \in R} \{x \ / \ F(x) < 1\}.$$

On cherche donc à partir de la distribution F de X, à définir une distribution conditionnelle F_μ par rapport au seuil μ pour les variables aléatoires dépassant ce seuil, on définit alors la distribution conditionnelle des excès F_μ par :

$$\begin{aligned} F_\mu(y) &= P[X - \mu < y | X > \mu] \\ &= \frac{P(\{X \leq y + u\} \cap \{X > u\})}{P(\{X > u\})} \\ &= \frac{F(y+\mu) - F(\mu)}{1 - F(\mu)}. \end{aligned}$$

Pour $0 \leq y \leq x_F - \mu$.

$$F_\mu(x) = P[X < x | X > \mu] = \frac{F(x) - F(\mu)}{1 - F(\mu)}.$$

Pour $x \geq \mu$.

L'objectif de la méthode POT.est de déterminer par quelle loi de probabilité il est possible d'estimer cette distribution conditionnelle des excès, le théorème de Picklands, Balkema et Haan est le résultat théorique central de la théorie des valeurs extrêmes .

Théorème 2.2 *(Picklands, Balkema et Haan) La distribution limite d'un excès est donnée par le théorème de Balkema-de Haan-Pickands,si F appartient à l'un des 3 MDA de Gumbel, Fréchet ou Weibull, alors il existe une fonction de répartition des excès au-delà du seuil μ, notée F_μ qui peut être approchée par une loi de Pareto Généralisée (GPD) telle que :*

$$\lim_{\mu \to x_F} sup|F_\mu(y) - H_{\sigma,\xi}(y)| = 0.$$

La loi de Pareto Généralisée $H_{\sigma,\xi}$ s'écrit sous la forme : $H_{\sigma,\xi}(y) = 1 + logH_\xi(y)$ où $H_\xi(y)$ est la loi de probabilité des valeurs extrêmes généralisée.

En considérant le modèle GEV avec le paramètre de localisation $\mu = 0$ (car pour les excès, l'effet de ce paramètre est pris en compte dans la suite (d_n), on montre que la loi correspond à

$$H_{\sigma,\xi}(y) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \xi \frac{y}{\sigma}\right)^{-1/\xi} & \text{si} \quad \xi \neq 0 \\ 1 - \exp\left(\frac{y}{\sigma}\right) & \text{si} \quad \xi = 0. \end{cases}.$$

Avec

- $y \in [0; x_F - \mu] \quad si \quad \xi \geq 0.$
- $y \in [0; -\frac{\sigma}{\xi}] \quad si \quad \xi < 0.$

On a vu que plus l'indice de queue ξ est élevé, plus la distribution considérée a des queues épaisses, par conséquent, $\xi > 0$ signifie que la probabilité d'occurrences de rentabilités extrêmes et notamment le risque de pertes extrêmes est plus importante que ce que prévoit la loi normale, ainsi, le risque d'investissement, i.e. des pertes extrêmes est d'autant plus important que l'indice de queue correspondant à ses plus faibles rentabilités (queue de gauche) est élevé, a partir de ces résultats, il est possible d'évaluer la perte maximale pour une probabilité donnée et sous des conditions extrêmes de marché, un estimateur de la distribution conditionnelle des excès et donc un estimateur de la VaR avec N_μ le nombre d'excès au-delà du seuil μ sont ainsi donnés par :

$$\widehat{F(x)} = 1 - \frac{N_\mu}{n}\left(1 + \hat{\xi}\frac{x-\mu}{\hat{\sigma}}\right)^{\frac{-1}{\hat{\xi}}}.$$

Et donc

$$\widehat{VAR_\alpha} = \mu + \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}}\left[\left(\frac{n}{N_\mu}(1-\alpha)^{-\hat{\xi}}\right) - 1\right].$$

[7]

2.2 Application en finance :

2.2.1 Présentation de la Moyenne industrielle Dow Jones (DJI)

DJI - Prix en temps réel DJI. Devise en USD 27 737,40+44,52 (+ 0,16%), À partir de 15h00 HAE. Marché ouvert.

Résumé :

Précédent Fermer	27 692,88	Gamme du jour	27 526,25 - 27 743,09
Ouvert	27 622,68	Gamme de 52 semaines	18 213,65 - 29 568,57
Le volume	214 264 473	Moy. Le volume	391 642 812

2.2.2 Données

Les cours quotidiens (présentés sous Excel dans l'annexe) sont observés sur la période du 20/04/2020 au 20/08/2020. L'objectif principal de cette étude est d'appliquer la simulation historique HS pour le calcul de la VaR.

pour ce faire, on a suivi les 3 étapes suivantes

1ère étape :

Nous avons téléchargé les cours de bourse sur Internet (http ://www.finance.Yahoo com).

2ème étape :

Nous avons enregistré ces données au format CSV afin de pouvoir exploiter les données sous Excel ou R.

3ème étape :

Exploitation des données.

On dispose donc du cours de clôture de l'action Moyenne industrielle Dow Jones (DJI) du 20/04/2020 au 20/08/2020. À partir de ces valeurs, on calcule le rendement associé.

Soit P_t la valeur de l'actif à la date t, le rendement associé est défini par :

$$R_t = ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$$

Ensuite, nous pouvons exploiter ces données sous Excel ou R. pour calculer la VaR.

1. **À l'aide d'Excel :** Nous pouvons ainsi visualiser le graphe des rendements quotidiens d'Moyenne industrielle Dow Jones du 20/04/2020 au 20/08/2020,(voir Fig 7.) :

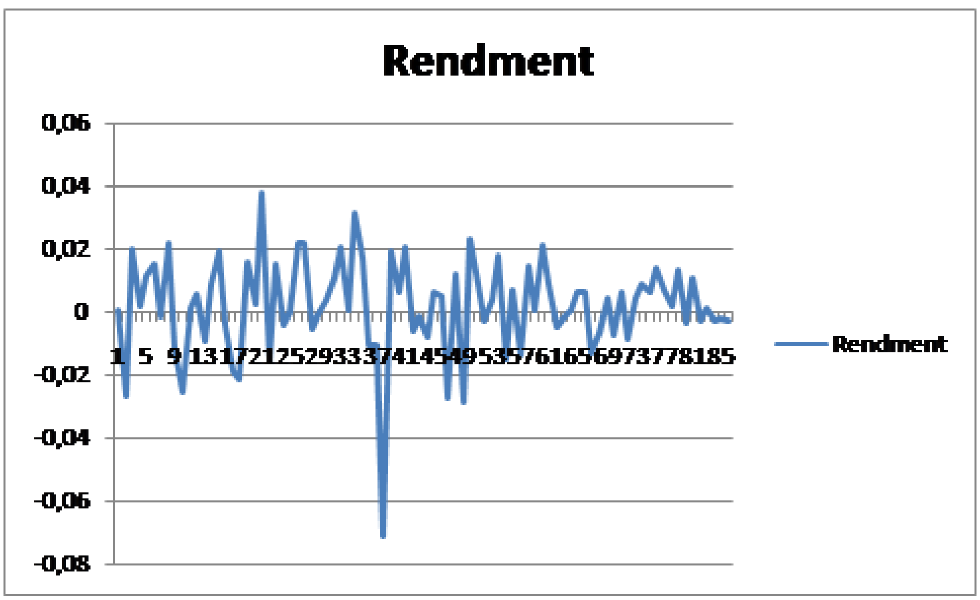

Fig.7 : Rendements quotidiens du cours d'DJI sous Excel.

On dispose dans ce cas d'un échantillon de $T = 85$ réalisations $r_1 1, r_2, ..., r_{85}$.

`Moyenne` $(r_1 1, r_2, ..., r_{85}) = 0,001856396$,

`Min` $(r_1 1, r_2, ..., r_{85}) = -0,071476541$,

`Max` $(r_1 1, r_2, ..., r_{85}) = 0,037779826$,

`Médiane` $(r_1 1, r_2, ..., r_{85}) = 0,002539807$,

`Somme` $(r_1 1, r_2, ..., r_{85}) = 0,157793675$,

Pour un taux de couverture $\alpha = 1\%$, la $\widehat{VAR_t}(1\%) = -0,035599738$.i.e. si l'on dispose d'un portefeuille d'DJI d'un montant total d'1 million d'euros, il y a 1%de risque de réaliser une perte au moins égale à 35 59 euros.
Pour un taux de couverture $\alpha = 0,5\%$, la $\widehat{VAR_t}(0,5\%) = -0,053538139$.i.e. si l'on dispose d'un portefeuille d'DJI d'un montant total d'1 million d'euros, il y a $0,5\%$de risque de réaliser une perte au moins égale à 53 53 euros.
Pour un taux de couverture $\alpha = 5\%$, la $\widehat{VAR_t}(5\%) = -0,025102947$.i.e. si l'on dispose d'un portefeuille d'DJI d'un montant total d'1 million d'euros, il y a 5%de risque de réaliser une perte au moins égale à 25 10 euros.

2.2.3 Conclusion

Dans la deuxième chapitre, j'ai présenté les trois méthodes pour estimer la Value-at-Risk l'estimation paramétrique, l'estimation non paramétrique, et l'estimation semi-paramétrique.

Ensuite j'ai présenté une application en finance sur (la Moyenne industrielle Dow Jones (DJI)) afin d'illustrer comment estimer la VaR par la méthode non paramétrique (simulation historique HS).

Conclusion

Il y a plusieur de difficultés de financier (préparer une évaluation quotidienne des risques), les risques jouent aujourd'hui un rôle important, et le plus important est gestion des investissements. Cette mémoire est dédiée à l'analyse de métriques spécifiques, les facteurs de risque les plus utilisés tels que VaR, CTE, TVaR et en général, mesures du risque de distorsion, l'objectif principal était de rédiger ces échelles de risque par la méthode expérimentale (non paramétrique), cela permet de construire des limites de confiance pour les différentes procédures que nous avons.,nous disons que le «risque extrême» est qui a une petite chance que produise (Événements rares)., des mesures de risque sont prises maintenant partie importante, par conséquent, l'apprécier devient une tâche essentielle, les gestion des risques. Il met un accent particulier sur les projections de valeur à risque en utilisant la méthode de simulation historique.

Nous pouvons conclure que toutes les mesures de risque ont des avantages et des inconvénients,de plus, on peut dire qu'il n'y a pas d'échelle un risque meilleur que les autres.

À la fin de la recherche, il convient de noter que la gestion des risques sont des outils disponible pour les particuliers et les institutions à utiliser et à activer afin de réduire la possibilité de perte, mais nous confirmons que :

• La conversation de tout risque ne peut être réduite à zéro presque impossible.

• Tous les risques ne peuvent pas être modifiés de manière globale car nous vivons toujours dans un monde rempli d'incertitudes et de doutes quant à l'issue des décisions futures.

Mais nous pouvons approfondir l'étude de la prédiction de la valeur à risque en utilisant la méthode de simulation historique et essayer de développer d'autres résultats théoriques et pratiques en utilisant différentes méthodes,pour mieux contrôler les risques.

Bibliographie

[1] BENSEGHIR, S. (2006). Calcul de la VaR selon l'approche historique et la théorie des valeurs extrêmes sur un fonds alternatif de Dexia Asset Management. Mémoire d'Actuariat..

[2] Abdelli, J. (2018). Sur la théorie des valeurs extrêmes, mesures des risques et applications (Doctoral dissertation, UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER-BISKRA)..

[3] KENIOUA, Z. (2017). SUR LES MESURES DE RISQUES ET LEURS APPLICATIONS (Doctoral dissertation, UNIVERSITÉ MOHAMED KHEIDER-BISKRA)..

[4] Charpentier, A. (2010). Mesures de risque. Université Rennes, 1..

[5] Ouaar, F. (2010). Estimation empirique de la mesure spectrale des risques financiers (Doctoral dissertation, Université de Biskra)..

[6] THEROND, P. E. (2004). Mesures et comparaison de risques. Cours universitaire-ISFA.

[7] BELKHIIAR Nadjjatt,.BRAHMII Chahrazad,Sur les mesures de risque,(MEMOIRE DE FIN DE CYCLE,Université A. Mira de Bejaïa Faculté des Sciences Exactes Département de Mathématique).

Annexe A :

les cours quotidiens d'Moyenne industrielle Dow Jones (DJI) qui sont observés sur la période du 20/04/2020 au 20/08/2020.

Date	Adj Close	Rendment	or-Rendme
20/04/2020	23650,43945		
21/04/2020	23018,88086	-0,02706691	-0,071476541
22/04/2020	23475,82031	0,019656183	-0,028766061
23/04/2020	23515,25977	0,001678594	-0,027526238
24/04/2020	23775,26953	0,010996383	-0,02706691
27/04/2020	24133,7793	0,014966545	-0,025881989
28/04/2020	24101,55078	-0,001336304	-0,021986776
29/04/2020	24633,85938	0,021845708	-0,019056285
30/04/2020	24345,7207	-0,011765801	-0,016003453
01/05/2020	23723,68945	-0,025881989	-0,015211901
04/05/2020	23749,75977	0,001098311	-0,013952938
05/05/2020	23883,08984	0,005598255	-0,013176554
06/05/2020	23664,64063	-0,009188693	-0,011765801
07/05/2020	23875,89063	0,008887212	-0,01094514
08/05/2020	24331,32031	0,018895233	-0,010405499
11/05/2020	24221,99023	-0,004503514	-0,009188693
12/05/2020	23764,7793	-0,019056285	-0,008549008
13/05/2020	23247,9707	-0,021986776	-0,00803209
14/05/2020	23625,33984	0,016102012	-0,007759651
15/05/2020	23685,41992	0,002539807	-0,006868695
18/05/2020	24597,36914	0,037779826	-0,006501547
19/05/2020	24206,85938	-0,016003453	-0,00579519
20/05/2020	24575,90039	0,015130266	-0,005051373
21/05/2020	24474,11914	-0,004150106	-0,004503514
22/05/2020	24465,16016	-0,000366127	-0,004150106
26/05/2020	24995,10938	0,02143011	-0,003768296
27/05/2020	25548,26953	0,021889405	-0,003087692
28/05/2020	25400,64063	-0,00579519	-0,0030715
29/05/2020	25383,10938	-0,000690428	-0,003022831

01/06/2020	25475,01953	0,003614378	-0,002867875
02/06/2020	25742,65039	0,010450819	-0,002403319
03/06/2020	26269,89063	0,020274276	-0,002350334
04/06/2020	26281,82031	0,000454017	-0,001513793
05/06/2020	27110,98047	0,031061372	-0,001336304
08/06/2020	27572,43945	0,016877874	-0,000690428
09/06/2020	27272,30078	-0,01094514	-0,000366127
10/06/2020	26989,99023	-0,010405499	0,000334375
11/06/2020	25128,16992	-0,071476541	0,000402599
12/06/2020	25605,53906	0,018819173	0,000454017
15/06/2020	25763,16016	0,006136873	0,001098311
16/06/2020	26289,98047	0,020242325	0,001228738
17/06/2020	26119,60938	-0,006501547	0,001678594
18/06/2020	26080,09961	-0,001513793	0,001696447
19/06/2020	25871,46094	-0,00803209	0,002539807
22/06/2020	26024,96094	0,005915647	0,003583576
23/06/2020	26156,09961	0,005026304	0,003614378
24/06/2020	25445,93945	-0,027526238	0,004330594
25/06/2020	25745,59961	0,011707543	0,004348343
26/06/2020	25015,55078	-0,028766061	0,005026304
29/06/2020	25595,80078	0,022930643	0,005598255
30/06/2020	25812,88086	0,008445319	0,005915647
01/07/2020	25734,9707	-0,003022831	0,005961433
02/07/2020	25827,35938	0,003583576	0,006058012
06/07/2020	26287,0293	0,017641264	0,006134306
07/07/2020	25890,17969	-0,015211901	0,006136873
08/07/2020	26067,2793	0,006817127	0,006144903
09/07/2020	25706,08984	-0,013952938	0,006794898
10/07/2020	26075,30078	0,014260613	0,006817127
13/07/2020	26085,80078	0,000402599	0,008445319

14/07/2020	26642,58984	0,021119922	0,008503072
15/07/2020	26870,09961	0,008503072	0,008887212
16/07/2020	26734,71094	-0,005051373	0,008893183
17/07/2020	26671,94922	-0,002350334	0,010417276
20/07/2020	26680,86914	0,000334375	0,010450819
21/07/2020	26840,40039	0,005961433	0,010996383
22/07/2020	27005,83984	0,006144903	0,011707543
23/07/2020	26652,33008	-0,013176554	0,012963858
24/07/2020	26469,89063	-0,006868695	0,013809174
27/07/2020	26584,76953	0,004330594	0,014260613
28/07/2020	26379,2793	-0,007759651	0,014966545
29/07/2020	26539,57031	0,006058012	0,015130266
30/07/2020	26313,65039	-0,008549008	0,016102012
31/07/2020	26428,32031	0,004348343	0,016877874
03/08/2020	26664,40039	0,008893183	0,017641264
04/08/2020	26828,4707	0,006134306	0,018819173
05/08/2020	27201,51953	0,013809174	0,018895233
06/08/2020	27386,98047	0,006794898	0,019656183
07/08/2020	27433,48047	0,001696447	0,020242325
10/08/2020	27791,43945	0,012963858	0,020274276
11/08/2020	27686,91016	-0,003768296	0,021119922
12/08/2020	27976,83984	0,010417276	0,02143011
13/08/2020	27896,7207	-0,002867875	0,021845708
14/08/2020	27931,01953	0,001228738	0,021889405
17/08/2020	27844,91016	-0,003087692	0,022930643
18/08/2020	27778,07031	-0,002403319	0,031061372
19/08/2020	27692,88086	-0,0030715	0,037779826
C'est fini			

Résumé

De nombreux chercheurs se sont intéressés à la question des risques des institutions financières, et elle a été étudiée de toutes les parties afin de réduire les crises financières pouvant entraîner des pertes importantes si nous ne sommes pas en mesure de les identifier et de les mesurer puis de les gérer et de prévenir leur survenue et non de les répéter l'un des outils utilisés dans cette gestion complexe est la mesure des risques, ce qui a permis de réaliser un profit en l'actuel risque de subir des pertes excessives.

Le but de cette thèse est de compiler les différentes mesures du risque, les plus importants sont la valeur en risque (VaR) et la ruine potentielle. Des études préparées sur des simulations historiques pour avoir besoin de la VaR ont été réalisées.

الخلاصة

اهتم كثير من الباحثين بمسألة مخاطر المؤسسات المالية ، وقد تمت دراستها من جميع الأطراف من أجل تقليل الأزمات المالية التي يمكن أن تؤدي إلى خسائر كبيرة إذا لم نتمكن من تحديدها ثم قياسها، ومنع حدوثها وعدم تكرارها إحدى الأدوات المستخدمة في هذه الإدارة المعقدة هي قياس المخاطر، مما جعل من الممكن تحقيق ربح في المخاطر الحالية لتكبد خسائر مفرطة.
الهدف من هذه الأطروحة هي جمع مقاييس مختلفة للمخاطر، وأهمها القيمة المعرضة للخطر (VaR) والدمار المحتمل. تم إعداد دراسات حول عمليات المحاكاة التاريخية التي تتطلب الحاجة إلى "القيمة المعرضة للمخاطر".

Abstract

Many researchers have been interested in the issue of financial institution risks, and it has been studied by all parties in order to reduce financial crises that can lead to significant losses if we are not able to identify and measure them then. To manage them and prevent their occurrence and not to repeat them one of the tools used in this complex management is the measurement of risks, which made it possible to make a profit in the current risk of incurring excessive losses. The aim of this thesis is to compile the different measures of risk; the most important are the value at risk (VaR) and the potential ruin. Studies prepared on historical simulations to need the VaR have been carried out