République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifque

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

Faculté des sciences exactes et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : Probabilités

Par

Cherroun Abderrahmane

Titre

Principe du maximum pour les systèmes EDSPR avec saut

Membres du Comité d'Examen :

Dr. HAFAYED Mokhtar, *Université de Biskra*, ________ **Président**

Dr. LAKHDARI-Imad Eddine, *Université de Biskra*, ________ **Encadreur**

Dr. TABET Moufida, *Université de Biskra*, ________ **Examinateur**

2020

Dédicace

À mes trés chers parents qui m'ont guidé durant les moments les plus pénibles de ce long chemin, ma mère Sabah qui a été toujours à ma coté et elle ma soutenu toute ma vie, et mon père Chaaban qui a sacrifié toute sa vie afin de ma voir devenir ceque je suis, merci infiniment mes parents

À mon trés chères frères : BADRE EDDINE et AMAR

À mon trés chères soeurs : SARA, SOUMIA, DOUAA

À toute ma belle famille

Et à tous mes amis de prés ou de loin

REMERCIEMENTS

En préambule à ce mémoire, j'adresse ces quelques mots pour remercier notre ALLAH tous puissante pour exprimer mes reconnaissances envers sa grande générosité. ALLAH ma donnée la volonté, la patience, et la santé durant toutes me années d'étude.

Je remercie vivement m'encadreur **Dr** : Lakhdari Imad Eddine, pour ses conseils précieuse durant toute cette période et pour sa patience avec moi.

Je suis trés honore que **Dr** : Hafayed Mokhtar, ait accepté rapporter mon travail et de présider mon jury de mémoire.

Je remercie **Dr** : Tabet Moufida, d'avoir accepté d'examiner mon travail. je suis trés heureuse de le voir participer à mon jury.

Table des matières

Introduction

Dans ce mémoire de master, on s'intéresse a étudier les problèmes de contrôle stochastique où le système est de la forme suivante (EDSPR) :

$$\begin{cases} dx^v(t) & = f(t, x^v(t), v(t))\, dt + \sigma(t, x^v(t), v(t))\, dB(t) \\ & \quad + \int_E c(t, x^v(t-), v(t), e)\, \widetilde{N}(dedt), \\ x^v(0) & = x_0 \\ -dy^v(t) & = \int_E g(t, x^v(t), y^v(t), z^v(t), r^v(t,e), v(t))\, \pi(de)\, dt \\ & \quad - z^v(t)\, dB(t) - \int_E r^v(t,e)\, \widetilde{N}(dedt), \\ y^v(T) & = \phi(x^v(T)), \end{cases}$$

tell que :

$$f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n,$$

$$\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^{n \times d},$$

$$c : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \times E \to \mathbb{R}^n,$$

$$g : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times d} \times \mathbb{R}^m \times U \to \mathbb{R}^m.$$

Le coût définit comme suit

$$J(v(\cdot)) \doteq \mathbb{E}\left[\int_0^T \int_E l(t, x^v(t), y^v(t), z^v(t), r^v(t,e), v(t))\, \pi(de)\, dt + h(x^v(T)) + \gamma(y^v(0))\right],$$

où

$$l : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times d} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R},$$

$$\phi : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,$$

$$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

$$\gamma : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R},$$

et f, σ, c, g, l, ϕ, h ,γ sont des fonctions diterministes.

Le processus de contrôle qui résout ce problème est appelé optimal. Ce type de problème a été étudié par des nombreux auteurs, voir par exemple [2, 3, 4, 5].

Notre objectif dans ce mémoire est d'étudier les conditions nécessaires et suffisants d'optimalités sous forme d'un principe du maximum stochastique pour les systèmes de type EDSPR avec saut. Plus précisément, le système est gouvernée par un mouvement Brownien et une mesure aléatoire de Poisson. Notez bien que cette étude est basé sur le travail de Shi et Wu[6].

Nous présentons notre travail comme suit :

► Le premier chapitre contient une généralité sur la théorie du calcul stochastique qui nous permet d'étudier notre problème.

► Dans le deuxième chapitre, nous obtenons le principe du maximum stochastique pour un type de système EDSPR avec saut sous forme locale et on obtient également les condition suffisantes d'optimalités.

► Dans le dernier chapitre, nous appliquons notre résultat pour étudier le problème de sélection de portefeuille moyenne-variance mélangée avec un problème d'optimisation d'une fonction d'utilité récursive et donnons l'expression explicite de la stratégie de sélection de portefeuille optimale.

Chapitre 1

Généralités sur le calcul stochastique

Dans ce chapitre nous allons rappeler des notions essentielles du calcul stochastique, nous commençons par définir un processus stochastique, mouvement Brownien, l'intégrale stochastique, processus d'itô, nous rappelons ensuite les équations différentielles stochastique et le processus de poisson.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $\left(\mathbb{R}^d, \beta\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$ un espace mesurable.

1.1 Processus stochastique

Définition 1.1.1 *Un processus stochastique $X = (X_t)_{t\in T}$ est une famille de variables aléatoires :*

$$X_t(\omega) : (\Omega, \mathcal{F}) \to \left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)\right),$$

indexée par un temps $t \in T$:

1. Pour t fixé, $\omega \in \Omega \mapsto X_t(\omega)$ est une variable aléatoire.
2. Pour ω fixé, $t \in T \mapsto X_t(\omega)$ est une fonction réelles, appelée trajectoire du processus.

i) $T \subseteq \mathbb{N}$ le processus est à temps discrét.

ii) $T = [0, a]$ tel que $a > 0$ le processus est à temps continu.

Définition 1.1.2 (Filtration) *1. Une filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\leq T}$ *de* $(\Omega, \mathcal{F})$ *est une famille croissante de sous-tribus de* $\mathcal{F}$ *pour* $s \leq t$, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$.

2. La filtration naturelle (ou canonique) de processus X_t *est donné par :*

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma\left(X_s, 0 \leq s \leq t\right), \quad t \in T,$$

c'est la plus petite σ-algèbre par rapport à laquelle X_s est mesurable pour tous $0 \leq s \leq t$.

Remarque 1.1.1 *L'espace* $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}{=}\left(\mathcal{F}_t\right)_{t\in T}, \mathbb{P}\right)$ *est appelé espace probabilisé filtré.*

Remarque 1.1.2 *La filtration est dite :*

a) *Continue à droite si* $\mathcal{F}_{t^+} := \cap_{s\geq t}\mathcal{F}s = \mathcal{F}_t$.

b) *Satisfait les conditions habituelles si elle est continue à droite et si* $\mathcal{F}_0$ *contient tous les ensembles* $\mathbb{P}$*-négligeables de* $\mathcal{F}$.

Définition 1.1.3 *Un processus* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est dit mesurable si l'application définie sur* $(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{B} \otimes \mathcal{F})$ *par* $(t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$ *est mesurable.*

Définition 1.1.4 *On dit que un processus* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est adapté par rapport à* $\mathcal{F}$ *si pour tout* $t \in T$, X_t *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable.*

Définition 1.1.5 *Un processus est à trajectoire continue si*

$$\mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega; t \mapsto X_t(\omega) \ \text{ est continue}\}\right) = 1.$$

Définition 1.1.6 *Un processus* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est dit progressivement mesurable par rapport à* $\mathcal{F}$ *si* $\forall\ t \in T$ *l'application*

$$(s, \omega) \mapsto X_s(\omega)$$

est mesurable sur $\left([0,t] \times \Omega, \mathcal{B}\left([0,t]\right) \otimes \mathcal{F}_t\right)$.

Définition 1.1.7 *Un processus* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est dit càdlàg (continue à droite et pourvu de limite à gauche) si ses trajectoires sont continues à droite et pourvues de limite à gauche pour presque tout* ω.

Remarque 1.1.3 *Un processus progressivement mesurable est mesurable et adapté.*

Proposition 1.1.1 *Soit* $(X_t)_{t\geq 0}$ *un processus stochastique dont les trajectoires sont continués à droite (ou à gauche), alors* X_t *est mesurable et progressivement mesurables s'il est de plus adapté.*

Définition 1.1.8 (processus gaussien) *Un processus stochastique* $X = (X_t)_{t\in T}$ *est gaussien ssi toute combinaison linéaire de ses marginales* $\alpha_1 X_{t_1} + ... + \alpha_n X_{t_n}$ *suit une loi gaussienne (pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $t_1, ...t_n \in T$ *et* $\alpha_1 ... \alpha_n \in \mathbb{R}$*).*

Définition 1.1.9 *: Deux processus* X *et* Y *sont dit équivalentes s'ils ont la même loi (égalité de toutes les lois fini-dimensionnelles). On écrira* $X \stackrel{\mathcal{L}}{=} Y$.

Définition 1.1.10 *: Un processus* X *est dite à accroissements indépendants si on a :*

1. $X_0 = 0$, *p.s,*

2. $\forall n \geq 1, \forall t_1, ..., t_n \in \mathbb{R}_+$, *tel que :* $0 < t_1 < t_2 < ... < t_n$, *les v.a*

$$\left(X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}}\right)$$

   sont indépendantes.

Définition 1.1.11 *: Un processus stochastique* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ *est un processus accroissements indépendants stationnaires si :* $\forall s,\ t \in \mathbb{R}_+$, *tel que* $0 \leq s < t$, *la variable aléatoire* $X_t - X_s$ *a la même loi que* X_{t-s}. *Autrement dit :*

$$\forall h \geq 0 \ : \ X_{t+h} - X_{s+h} \stackrel{\mathcal{L}}{=} X_{t-s}.$$

(notation $X \stackrel{\mathcal{L}}{=} Y$ ssi X et Y ont la même loi).

Définition 1.1.12 *Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est dit être un processus de Lévy s'il possède les propriétés suivantes :*

1. *Les trajectoires de X sont $\mathbb{P}$-presque surement continue à droite avec limites à gauche ;*
2. *$\mathbb{P}(X_0 = 0) = 1$;*
3. *Pour $0 \leq s \leq t$, $X_t - X_s$ est égal en distributions à X_{t-s} ;*
4. *Pour $0 \leq s \leq t$, $X_t - X_s$ est indépendant de $(X_u, u \leq s)$*

1.2 Martingales

Le nom martingale est synonyme de jeu équitable.

Définition 1.2.1 *Un processus $(M_t)_{t\geq 0}$ adapté par rapport une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ et tel que pour tout $t \geq 0$, $M_t \in L^1$ est appelé :*

1. *Une martingale si pour $s \leq t$: $\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] = M_s$.*
2. *Une sur-martingale si pour $s \leq t$: $\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] \leq M_s$.*
3. *Une sous-martingale si pour $s \leq t$: $\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] \geq M_s$.*

Exemple 1.2.1 *: Si X est un processus à accroissement indépendants avec $X_t \in L^1$ pour tout $t \geq 0$ et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sa filtration naturelle. Alors :*

$$(X_t - \mathbb{E}[X_t]),\ t \geq 0$$

est une $\mathcal{F}_t^X$-martingale.

Théoreme 1.2.1 *: Soit M sur-martingale continue à droite (resp. martingale), et soit S et T deux temps d'arrêt bornés tels que $S < T$. Alors M_S et M_T sont intégrables et :*

$$M_S \geq \mathbb{E}[M_T \mid M_S] \quad p.s. \quad (resp. =)$$

Proposition 1.2.1 *: (**Décomposition de Doob**) Soit $(X_t)_t$ un processus aléatoire intégrable. Alors il existe une martingale $(M_t)_t$ et un processus $\mathcal{F}$-prévisible $(V_t)_t$, tels que : $M_0 = V_0 = 0$, et*

$$X_t = X_0 + M_t + V_t, \quad pour\ tout \quad t \geq 0.$$

De plus, cette décomposition est unique.

Définition 1.2.2 *: On dit qu'un processus $M = (M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale locale s'il existe une suite de temps d'arrêt $(T_t)_t$ telle que :*

$$T_t \to \infty, \ \mathbb{P}\text{-}p.s.$$

et le processus arrêté M^{T_t} est une martingale pour tout t.

Définition 1.2.3 *: Une semi-martingale est un processus*

$$X = X_0 + A + M,$$

où A est un processus à variation finie, X_0 est une variable $\mathcal{F}_0$-mesurable et M est une martingale locale, ces deux deniers processus étant issus de 0.

1.3 Mouvement Brownien (MB)

Définition 1.3.1 *Un processus stochastique $(B_t)_{t\geq 0}$ est appellée mouvement Brownien si vérifiée les conditions suivantes :*

1. $B_0 = 0$.
2. $(B_t) \to B_t(\omega)$ continue $\mathbb{P}$-$p.s.$
3. $\forall 0 \leq s \leq t$, la variable aléatoire $B_t - B_s$ est indépendante de $\mathcal{F}_s$.
4. $\forall 0 \leq s \leq t$, $B_t - B_s$ est de loi $N(0, t-s)$.

Remarque 1.3.1 *Lorsque $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est la filtration naturelle de $(B_t)_{t\geq 0}$, on dit que B est un mouvement Brownien naturel.*

Proposition 1.3.1 *Si $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien, alors :*

i) le processus $\breve{B}$ défini par $\breve{B}_t = B_{t+s} - B_s$ est un mouvement Brownien.

ii) le processus $\widehat{B}$ défini par $\widehat{B}_t = -B_t$ est un mouvement Brownien.

iii) le processus $\widetilde{B}$ défini par $\widetilde{B}_t = \frac{1}{c} B_{c^2 t}$ est un mouvement Brownien.

vi) le processus $\overline{B}$ défini par, $\overline{B}_t = tB_{\frac{1}{t}}, \forall t > 0, \overline{B}_0 = 0$ est un mouvement Brownien.

1.4 Intégrale stochastique

On se donne un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et un mouvement Brownien B sur cet espace. On désigne par $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$ la filtration naturelle du MB.

Définition 1.4.1 *l'intégrale de Wiener définir par .*

$$\int_0^t \theta_s dB_s,$$

telle que θ est un processus stochastique.

Définition 1.4.2 *On dit que $\{\theta_t, t \geq 0\}$ est un "bon processus" s'il est $(\mathcal{F}_t)$ adapté et càdlàg vérifiant :*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s ds\right] < +\infty \quad, \forall t \geq 0.$$

Propriétés de l'intégrale stochastique : On note Λ l'ensemble $L^2_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^+)$ des processus θ adaptés càglàd vérifiant

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s^2(\omega)\, ds\right] < \infty.$$

Définition 1.4.3 *Soit B un MB et $\{\theta_t, t \geq 0\}$ un "bon processus" :*

1. $\theta \mapsto \displaystyle\int_0^t \theta_s dB_s$ est linéaire.
2. Le processus $(\displaystyle\int_0^t \theta_s dB_s)_{t\in]0,T]}$ est à trajectoire continue.
3. $N_t = \left[\displaystyle\int_0^t \theta_s dB_s\right]^2 - \displaystyle\int_0^t \theta_s^2 ds$. Le processus $(N_t, t \geq 0)$ est une martingale.
4. on a : $\mathbb{E}\left[\displaystyle\int_0^t \theta_s dB_s\right] = 0$ et $var\left[\displaystyle\int_0^t \theta_s dB_s\right] = \mathbb{E}\left[\displaystyle\int_0^t \theta_s^2 ds\right]$.

1.5 Processus d'Itô

Un processus X est un processus d'Itô si

$$X_t = x + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s,$$

où b est un processus adapté tel que $\displaystyle\int_0^t |b_s| ds$ existe (au sens Lebesgue) $p.s.$ pour tout t, et σ un processus appartenant à Λ.

On utilise la notation plus concise suivante

$$\begin{cases} dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t, \\ X_0 = x. \end{cases}$$

Le coefficient b est le drift ou la dérive, σ est le coefficient de diffusion.

L'écriture $dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t$ est unique (sous réserve que les processus b et vérifient les conditions d'intégrabilité).

Ceci signifie que si

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t = dX_t = \widetilde{b}_t dt + \widetilde{\sigma}_t dB_t.$$

alors $b = \tilde{b}, \sigma = \tilde{\sigma}$. En particulier, si X est une martingale locale alors $b = 0$ et réciproquement.

On peut définir un processus d'Itô pour des coefficients de diffusion tels que $\int_0^t \sigma_s^2 ds < \infty$, mais on perd la propriété de martingale de l'intégrale stochastique. La partie $x + \int_0^t b_s ds$ est la partie à variation finie. Si un processus A à variation finie et une martingale, il est constant. En effet, si $A_0 = 0, \quad A_t^2 = 2\int_0^t A_s dA_s$ et par suite $\mathbb{E}\left[A_t^2\right] = 0$.

1.6 Equations différentielles stochastiques

Une équation différentielle stochastique est une équation de la forme

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s. \tag{1.1}$$

Ou en autre forme

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)\, dt + \sigma(t, X_t)\, dB_t, \\ X_0 = x. \end{cases}$$

L'inconnue est le processus X. Le problème est, comme pour une équation différentielle ordinaire, démontrer que sous certaines conditions sur les coéfficients, l'équation différentielle a une unique solution. Il est utile de préciser les données.

Soit b et σ deux fonctions de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ à valeurs réelles données. On se donne également un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)$ et un $(\mathcal{F}_t)$ mouvement brownien B sur cet espace. Une solution de (1.1) est un processus X continu $(\mathcal{F}_t)$-adapté tel que les intégrales $\int_0^t b(s, X_s)\, ds$ et $\int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s$ sont un sens et l'égalité

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s$$

est satisfaite pour tout t, $\mathbb{P}-p.s.$

1.7 Processus de Poisson

Définition 1.7.1 *Un processus de poisson N de paramétre $\lambda > 0$ est un processus de comptage*

$$\forall t \geq 0,\ \ N_t = \sum_{n\geq 1} \mathbf{1}_{\{T_n \leq t\}},$$

associé à une famille $(T_n;\, n \in \mathbb{N})$ avec $T_0 = 0$ de va représentant les temps d'arrivées, telle que les variables aléatoires $(T_{n+1} - T_n;\, n \in \mathbb{N})$ sont i.i.d de loi exponentielle de paramétre λ.

Processus de Poisson compensé : On définit la version "*centrée*" d'un processus de Poisson par

$$\tilde{N}_t = N_t - \lambda t.$$

Sa fonction caractéristique est

$$\phi_{\tilde{N}_t}(z) = \exp\left[e^{iz} - 1 - iz\right].$$

$\widetilde{N}$ est aussi a accroissement indépendant. Comme

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[N_t/N_s, s \leq t\right] &= \mathbb{E}\left[N_t - N_s + N_s/N_s\right] \\ &= \mathbb{E}\left[N_t - N_s\right] + N_s = \lambda\left(t-s\right) + N_s,\end{aligned}$$

alors $\left(\widetilde{N}_t\right)$ est une martingale,

$$\forall s \leq t, \qquad \mathbb{E}\left(\widetilde{N}_t/\widetilde{N}_s\right) = \widetilde{N}_s.$$

$\left(\widetilde{N}_t\right)$ est dite processus de Poisson compensé et l'expression déterministe $(\lambda t)_{t\geq 0}$ est dite compensateur de $(N_t)_{t\geq 0}$. Pour un processus de Poisson compensé, la mesure aléatoire est définie par ;

$$\widetilde{M}(A) = M(A) - \lambda |A| .$$

vérifie :

$$\mathbb{E}\left(\widetilde{M}(A)\right) = 0 \text{ et } var\left(\widetilde{M}(A)\right) = \lambda |A| .$$

Remarque 1.7.1 *Pour définir la mesure aléatoire de Poisson sur $\mathbb{R}^d$, on peut remplacer $A \subset \mathbb{R}^+$ par un ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ et la mesure de Lebesgue $|\cdot|$ par une mesure de Radon -Nykodim μ sur E.*

Mesure aléatoire de Poisson compensée : La mesure aléatoire de Poisson compensée est définie par :

$$\widetilde{M}(A) = M(A) - \mu(A),$$

et elle vérifie :

- Pour tous les ensembles compacts disjoints $A_1, ..., A_n \in E$.
- Les variables $\widetilde{M}(A_1), ..., \widetilde{M}(A_n)$ sont indépendantes et vérifient

$$\mathbb{E}\left(\widetilde{M}(A_i)\right) = 0, var\left(\widetilde{M}(A_i)\right) = \mu(A_i) .$$

Le processus de Poisson est définit par un processus de comptage n'est pas utilisé pour modéliser les cours d'actifs, car la condition que la taille est toujours égale à 1, n'est pas réaliste. C'est pour ça, on va définir le processus de Poisson composé,

Définition 1.7.2 *Le processus de Poisson composé d' intensité de sauts λ et de distribution de taille de sauts μ est un processus stochastique $(X_t)_{t\geq 0}$ est défini par :*

$$X_t = \sum_{k=1}^{N_t} Y_k,$$

où $\{Y_i\}_{i\geq 1}$ est une suite de $v.a$ indépendantes de loi μ et N est un processus de Poisson standard d'intensité indépendant de $\{Y_i\}_{i\geq 1}$.

Proposition 1.7.1 *un processus de Poisson $(X_t)_{t\geq 0}$ est composé si et seulement si, il est un processus de Lévy et ses trajectoires sont des fonctions continues par morceau.*

Mesure aléatoire d'un processus de Poisson composé : Pour tout processus càdlàg et en particulier, pour tout processus de Poisson composé, on peut associé une mesure aléatoire sur $\mathbb{R}^d \times [0, \infty[$ qui décrit les sauts de X pour chaque ensemble mesurable $B \subset \mathbb{R}^d \times [0, \infty[$:

$$J_X(B) = \mathbb{E}\left[\sum_{t\in[0,T]} 1_B\left(X_t - X_{t^-}, t\right)\right].$$

Pour chaque ensemble mesurable $A \subset \mathbb{R}^d$, $J_X\left(A \times [t_1, t_2]\right)$ contient le nombre de sauts de X entre t_1 et t_2 dont les tailles des sauts sont dans A.

Première Formule d'Itô

Théoreme 1.7.1 *Supposons que $X\left(t\right) \in \mathbb{R}$ est un processus de Lévy d'itô de la forme*

$$dX\left(t\right) = \alpha\left(t, \omega\right) dt + \beta\left(t, \omega\right) dB\left(t\right) + \int_{\mathbb{R}} \gamma\left(t, z, \omega\right) \overline{N}\left(dt, dz\right), \tag{1.2}$$

où

$$\overline{N}\left(dt, dz\right) = \begin{cases} N\left(dt, dz\right) - \upsilon\left(dz\right) dt & \text{si} \quad \mid z \mid < R \\ N\left(dt, dz\right) & \text{si} \quad \mid z \mid \geq R \end{cases} \tag{1.3}$$

pour certains $R \in [0, \infty]$.

Soit $f \in C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ et définie $Y\left(t\right) = f\left(t, X(t)\right)$. Alors $Y\left(t\right)$ est à nouveau un processus de lévy d'itô et

$$
\begin{aligned}
dY(t) &= \frac{\partial f}{\partial t}(t, X(t))\,dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X(t))\left[\alpha(t,\omega)\,dt + \beta(t,\omega)\,dB(t)\right] \\
&+ \frac{1}{2}\beta^2(t,\omega)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X(t))\,dt \\
&+ \int\limits_{|z|<R} \Big\{ f\left(t, X\left(t^-\right) + \gamma(t,z)\right) - f\left(t, X\left(t^-\right)\right) \\
&- \frac{\partial f}{\partial x}\left(t, X\left(t^-\right)\right)\gamma(t,z)\Big\}\,\upsilon(dz)\,dt \\
&+ \int\limits_{\mathbb{R}} \left\{ f\left(t, X\left(t^-\right) + \gamma(t,z)\right) - f\left(t, X\left(t^-\right)\right)\right\} \overline{N}(dt, dz).
\end{aligned} \tag{1.4}
$$

Remarque 1.7.2 *Si $R = 0$ alors $\overline{N} = N$.*
Si $R = \infty$ alors $\overline{N} = \widetilde{N}$.

La formule d'Itô multi–dimensionnelle : Soit $X(t) \in \mathbb{R}^n$ être un processus de Lévy d'itô de la forme

$$
dX(t) = \alpha(t,\omega)\,dt + \sigma(t,\omega)\,dB(t) + \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(t,z,\omega)\,\overline{N}(dt,dz), \tag{1.5}
$$

où $\alpha : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\sigma : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}^{n\times m}$ et $\gamma : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{R}^{n\times \ell}$ sont des processus adaptés tels que les intégrales existent. $B(t)$ est un mouvement Brownien m-dimensionnel et

$$
\begin{aligned}
\overline{N}(dt,dz)^T &= \left(\overline{N_1}(dt,dz_1), ..., \overline{N}_\ell(dt,dz_\ell)\right) \\
&= \left(N_1(dt,dz_1) - \chi_{|z_1|<R_1}\upsilon_1 d(z_1)\,dt, ..., N_\ell(dt,dz_\ell) - \chi_{|z_\ell|<R_\ell}\upsilon_\ell d(z_\ell)\,dt\right),
\end{aligned}
$$

où $\{N_j\}$ sont des mesures aléatoires de Poisson indépendantes avec des mesures de Lévy υ_j provenant de processus de Lévy indépendant (uni–dimensionnel) $\eta_1, ..., \eta_\ell$.

Notez que chaque colonne γ^k de $n \times \ell$ la matrice $\gamma = [\gamma_{ij}]$ ne dépend de z que par la $k^{ième}$

coordonnée z_k, c'est-à-dire

$$\gamma^k(t,z,\omega)=\gamma^k(t,z_k,\omega)\,;\quad z=(z_1,...,z_\ell)\in\mathbb{R}^\ell.$$

Ainsi, l'intégrale à droite de (1.5) n'est qu'une notation de matrice abrégée. Lorsqu'il est écrit en détail composant numéro i de $X(t)$ en (1.5), $X_i(t)$ obtient la forme .

$$X_i(t)=\alpha_i(t,\omega)\,dt+\sum_{j=1}^{m}\sigma_{ij}(t,\omega)\,dB_j(t)+\sum_{j=1}^{\ell}\int_{\mathbb{R}}\gamma_{ij}(t,z_j,\omega)\,\overline{N}_j(dt,dz_j)\,;\quad 1\leq i\leq n. \tag{1.6}$$

Soit $f\in C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$. Mettre $Y(t)=f(t,X(t))$. Alors

$$\begin{aligned} dY(t)=&\frac{\partial f}{\partial t}dt+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\alpha_i dt+\sigma_i dB(t))+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left(\sigma\sigma^T\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}dt \\ &+\sum_{k=1}^{\ell}\int_{|z_k|<R_k}\left\{f\left(t,X\left(t^-\right)+\gamma^{(k)}(t,z_k)\right)-f\left(t,X\left(t^-\right)\right)\right. \\ &\left.-\sum_{i=1}^{n}\gamma_i^{(k)}(t,z_k)\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(X\left(t^-\right)\right)\right\}\upsilon_k(dz_k)\,dt \\ &+\sum_{k=1}^{\ell}\int_{\mathbb{R}}\left\{f\left(t,X\left(t^-\right)+\gamma^{(k)}(t,z_k)\right)-f\left(t,X\left(t^-\right)\right)\overline{N}_k(dt,dz_k)\right\}, \end{aligned} \tag{1.7}$$

où $\gamma^{(k)}\in\mathbb{R}^n$ est le numéro de colonne k de $n\times\ell$, la matrice $\gamma=[\gamma_{ik}]$ et $\gamma_i^k=\gamma_{ik}$ est le nombre de coordonnées i de $\gamma^{(k)}$.

Chapitre 2

Principe du maximum stochastique

2.1 Formulation du problème

Soit $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ un espace de probabilite filtré satisfait les conditions habituelle. $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ est une filtration engendrée par deux processus indépendants $\{B(t)\}_{t\geq 0}$ et N telleque $\{B(t)\}_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien standard de dimension d et N une mesure aléatoire de poisson de $E \times \mathbb{R}_+$. Soit $E \subset \mathbb{R}^l$ un ensemble ouvert non vide équipé de son champ Borel $\mathcal{B}(E)$ avec componsateur $\widehat{N}(dedt) = \pi(de)\,dt$ où

$$\widetilde{N}(A \times [0,t]) = (N - \widehat{N})(A \times [0,t])_{t\geq 0},$$

est une martingale pour tout $A \in \mathcal{B}(E)$ satisfant $\pi(A) < \infty$. Supposons que π est une mesure σ-finie sur $(E, \mathcal{B}(E))$ qu'on appellon la mesure de caractéristique.

Soit $\mathcal{H}$ un espace vectoriel de dimension finie et $T > 0$ un fixé. On note par :

- $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T; \mathcal{H})$ est l'espace de toute les variables aléatoires de carré intégrables à valeur dans $\mathcal{H}$ et $\mathcal{F}_T$-mesurables.

- $L^2_{\mathcal{F}}([0,T]; \mathcal{H})$ est l'espace des processus de carré intégrable à valeur dans $\mathcal{H}$ et $\mathcal{F}_t$-adaptés.

- $L^\infty_{\mathcal{F}}[0,T]; \mathcal{H})$ est l'espace des processus bornées à valeur dans $\mathcal{H}$ et $\mathcal{F}_t$-adaptés.

- $L^2_{\mathcal{F},P}([0,T];\mathcal{H})$ est l'espace des processus de carré intégrable à valeur dans $\mathcal{H}$ et $\mathcal{F}_t$-prévisibles.

- $F^2_P([0,T];\mathcal{H})$ est l'espace de toute processus $f(\cdot,\cdot,\cdot)$ définis sur $\Omega\times[0,T]\times E$ et $\mathcal{F}_t$-prévisibles tell que :

$$\mathbb{E}\int_0^T\int_E |f(\cdot,t,e)|^2\,\pi(de)\,dt<\infty.$$

Soit U un sous ensemble convexe non vide de $\mathbb{R}^K$. On définit l'ensemble de contrôle admissible :

$$U_{ad}=\left\{v(\cdot)\in L^2_{\mathcal{F},P}\left([0,T];\mathbb{R}^K\right);v(t)\in U,\text{ a.e. } t\in[0,T],\ \mathbb{P}\text{−a.s.}\right\}.$$

Pour tout contrôle admissible $v(\cdot)\in U_{ad}$, et $x_0\in\mathbb{R}^n$, nous considérons le systême de contrôl stochastique EDSPR avec saut comme suit :

$$\begin{cases} dx^v(t)=f(t,x^v(t),v(t))\,dt+\sigma(t,x^v(t),v(t))\,dB(t) \\ \qquad +\int_E c(t,x^v(t-),v(t),e)\,\widetilde{N}(dedt), \\ -dy^v(t)=\int_E g(t,x^v(t),y^v(t),z^v(t),r^v(t,e),v(t))\,\pi(de)\,dt \\ \qquad -z^v(t)\,dB(t)-\int_E r^v(t,e)\,\widetilde{N}(dedt), \\ x^v(0)=x_0,\ \ y^v(T)=\phi(x^v(T)), \end{cases} \tag{2.1}$$

avec une fonction du coût donée par :

$$J(v(\cdot))\doteq\mathbb{E}\left[\int_0^T\int_E l(t,x^v(t),y^v(t),z^v(t),r^v(t,e),v(t))\,\pi(de)\,dt+h(x^v(T))+\gamma(y^v(0))\right], \tag{2.2}$$

telle que

$$\begin{array}{ll} f:[0,T]\times\mathbb{R}^n\times U\to\mathbb{R}^n, & \sigma:[0,T]\times\mathbb{R}^n\times U\to\mathbb{R}^{n\times d}, \\ c:[0,T]\times\mathbb{R}^n\times U\times E\to\mathbb{R}^n, & g:[0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{m\times d}\times\mathbb{R}^m\times U\to\mathbb{R}^m, \\ l:[0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{m\times d}\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}, & \phi:\Omega\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m, \\ h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}, & \gamma:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}, \end{array}$$

sont des fonctions diterministes.

Notre problème de contrôle optimal stochastique est de trouver un contrôle admissible pour minimiser la fonction de coût (2.2) de notre systéme EDSPR avec sauts (2.1) . Maintenant on va definit nos principales hypothèses sur les fonctions ci-dessus dans ce mémoire comme suit :

$$(H\ 2.1)\quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{ll} i) & \begin{array}{c} f,\sigma,c \text{ sont des Lipschitz globales en } (x,v) \text{ et } g \\ \text{est Lipschitz global dans } (x,y,z,r,v)\,; \end{array} \\ ii) & \begin{array}{c} f,\sigma,c,g,l,h,\gamma \text{ sont continuellement différentiables} \\ \text{dans leurs variables comprenant } (x,y,z,r,v)\,; \end{array} \\ iii) & \begin{array}{c} f_x, f_v,\sigma_x,\sigma_v,g_x,g_y,g_z,g_r,g_v \text{ et} \displaystyle\int_E \left|c_x(\cdot,\cdot,e)\right|^2\pi(de)\,, \\ \displaystyle\int_E \left|c_v(\cdot,\cdot,e)\right|^2\pi(de) \text{ sont bornés}\,; \end{array} \\ iv) & \begin{array}{c} l_x,l_y,l_z,l_r,l_v \text{ sont bornés par } C\left(1+|x|+|y|+|z|+|r|+|v|\right), \\ h_x \text{ et } \gamma_y \text{ sont bornés par } C\left(1+|x|\right),\ C\left(1+|y|\right),\ \text{respectivement,} \end{array} \end{array} \\ v)\ \forall x\in\mathbb{R}^n, \phi(x)\in L^2\left(\Omega,\mathcal{F}_T;\mathbb{R}^m\right) \text{ et pour } \omega\in\Omega,\ \phi(x) \text{ est} \\ \text{continuellement différenciable en } x,\ \phi_x \text{ est borné}\,; \\ vi)\text{ pour tout } t\in[0,T],\ f(t,0,0),\ g(t,0,0,0,0,0)\in L^2_{\mathcal{F}}\left([0,T]\right);\mathbb{R}^n), \\ \sigma(t,0,0)\in L^2_{\mathcal{F},p}\left([0,T]\right);\mathbb{R}^{n\times d}) \text{ et } c(t,0,0,\cdot)\in F^2_p\left([0,T];\mathbb{R}^n\right). \end{array} \right.$$

Au dessus, les hypothèses sur b,σ,c,l,h sont des conditions usuelles pour obtenir le principe du maximum stochastique pour le système de contrôle stochastique (EDS) (voir [[8]]).

Cependant, le system (2.1) se compose d'un EDS et EDSR donc nous avons besoin d'hypothèses appropriés sur g, ϕ, γ.

Sous l'hypothèse $(H\ 2.1)$ l'equation (2.1) admet une solution unique $x^v(\cdot) \in L^2_{\mathcal{F}}([0,T];\mathbb{R}^n)$ pour donné $(x_0, v(\cdot)) \in \mathbb{R}^n \times U_{a,d}$ (voir [[12]]), de plus l'EDSR (2.1) admet une solution unique

$$(y^v(\cdot), z^v(\cdot), r^v(\cdot,\cdot)) \in L^2_{\mathcal{F}}([0,T];\mathbb{R}^m) \times L^2_{\mathcal{F},p}\left([0,T];\mathbb{R}^{m\times d}\right) \times F^2_p([0,T];\mathbb{R}^m).$$

Alors, notre problème de contrôle optimale est bien défini.

Afin d'obtenir le principe du maximum stochastique, nous utilisons la méthode classique de variation convexe (voir[[13]]). Soit $u(\cdot)$ un contrôle optimale et $(x(\cdot), y(\cdot), z(\cdot), r(\cdot,\cdot))$ la trajectoire optimale correspondante. Soit $v(\cdot)$ tel que $u(\cdot) + v(\cdot) \in U$. Comme U est convexe, alors pour tout $0 \leq \rho \leq 1$:

$$u^\rho(\cdot) \doteq u(\cdot) + \rho v(\cdot)$$

est également dans U.

Nous notons par $\left(x_\rho(\cdot), y_\rho(\cdot), z_\rho(\cdot), r_\rho(\cdot,\cdot)\right)$ à la trajectoire correspondante à $u^\rho(\cdot)$.

Soit $\left(x^{1,\rho}(t), y^{1,\rho}(t), z^{1,\rho}(t), r^{1,\rho}(t,\cdot)\right)$ la solution de l'équation variationnelle suivante :

$$\begin{cases} dx^{1,\rho}(t) = \left[f_x(t)\, x^{1,\rho}(t) + f_v(t)\, v(t)\right] dt + \left[\sigma_x(t)\, x^{1,\rho}(t) + \sigma_v(t)\, v(t)\right] dB(t) \\ \qquad\qquad + \displaystyle\int_E \left[c_x(t)\, x^{1,\rho}(t-) + c_v(t)\, v(t)\right] \widetilde{N}(dedt), \\ -dy^{1,\rho}(t) = \displaystyle\int_E \left[g_x(t,e)\, x^{1,\rho}(t) + g_y(t,e)\, y^{1,\rho}(t) + g_z(t,e)\, z^{1,\rho}(t) + g_r(t,e)\, r^{1,\rho}(t,e)\right. \\ \qquad\qquad \left. + g_v(t,e)\, v(t)\right] \pi(de)\, dt - z^{1,\rho}(t)\, dB(t) - \displaystyle\int_E r^{1,\rho}(t,e)\, \widetilde{N}(dedt), \\ x^{1,\rho}(0) = 0, \quad y^{1,\rho}(T) = \phi_x(x(T))\, x^{1,\rho}(T). \end{cases} \tag{2.3}$$

On note par $f(t) \equiv f(t, x(t), u(t))$, $\sigma(t) \equiv \sigma(t, x(t), u(t))$, $c(t,\cdot) \equiv c(t, x(t), u(t), \cdot)$,

$l(t) \equiv l(t, x(t), y(t), z(t), r(t, \cdot), u(t))$, $g(t, \cdot) \equiv g(t, x(t), y(t), z(t), r(t, \cdot), u(t))$, et même notation pour leurs dérivés.

Sous $(H\ 2.1)$, il existe un unique $(x^{1,\rho}(\cdot), y^{1,\rho}(\cdot), z^{1,\rho}(\cdot), r^{1,\rho}(\cdot,\cdot)) \in L^2_{\mathcal{F}}([0,T];\mathbb{R}^n) \times L^2_{\mathcal{F}}([0,T];\mathbb{R}^m) \times L^2_{\mathcal{F},p}\left([0,T];\mathbb{R}^{m\times d}\right) \times F^2_p([0,T];\mathbb{R}^m)$ satisfant (2.3).

Pour $t \in [0,T]$, $\rho > 0$, on pose :

$$\widetilde{x}^{\rho}(t) \doteq \rho^{-1}(x_{\rho}(t) - x(t)) - x^{1,\rho}(t),$$

$$\widetilde{y}^{\rho}(t) \doteq \rho^{-1}(y_{\rho}(t) - y(t)) - y^{1,\rho}(t),$$

$$\widetilde{z}^{\rho}(t) \doteq \rho^{-1}(z_{\rho}(t) - z(t)) - z^{1,\rho}(t),$$

$$\widetilde{r}^{\rho}(t,\cdot) \doteq \rho^{-1}(r_{\rho}(t,\cdot) - r(t,\cdot)) - r^{1,\rho}(t,\cdot).$$

Nous avons les résultats de convergence suivants.

b) Lemme 2.1.1 *Soit l'hypothèse* $(H\ 2.1)$, *alors :*

$$\begin{array}{ll} \lim\limits_{\rho\to 0}\sup\limits_{0\le t\le T}\mathbb{E}\left|\widetilde{x}^{\rho}(t)\right|^2 = 0, & \lim\limits_{\rho\to 0}\sup\limits_{0\le t\le T}\mathbb{E}\left|\widetilde{y}^{\rho}(t)\right|^2 = 0, \\ \lim\limits_{\rho\to 0}\mathbb{E}\displaystyle\int_0^T \left|\widetilde{z}^{\rho}(t)^2\right| dt = 0, & \lim\limits_{\rho\to 0}\mathbb{E}\displaystyle\int_0^T\int_E \left|\widetilde{r}^{\rho}(t,e)\right|^2 \pi(de)\,dt = 0. \end{array} \tag{2.4}$$

Preuve. Premièrement , nous avons :

$$\begin{cases} d\widetilde{x}^{\rho}(t) = \left[A^{\rho}(t)\,\widetilde{x}^{\rho}(t) + G^{1\rho}(t)\right]dt + \left[B^{\rho}(t)\,\widetilde{x}^{\rho}(t) + G^{2\rho}(t)\right]dB(t) \\ \qquad\qquad + \displaystyle\int_E \left[C^{\rho}(t-,e)\,\widetilde{x}^{\rho}(t-) + G^{3\rho}(t-,e)\right]\widetilde{N}(dedt), \\ \widetilde{x}^{\rho}(0) = 0, \end{cases}$$

où nous notons (pour simplifier, nous omettons l'indice de temps t) :

$$
\begin{aligned}
A^{\rho} &\doteq \int_0^1 f_x\left(x+\lambda\rho\left(x^{1,\rho}+\widetilde{x}^{\rho}\right), u+\lambda\rho v\right) d\lambda, \\
G^{1\rho} &\doteq \left[A^{\rho}-f_x(x,u)\right] x^{1,\rho}+\int_0^1 \left[f_v(x,u+\lambda\rho v)-f_v(x,u)\right] v d\lambda, \\
B^{\rho} &\doteq \int_0^1 \sigma_x\left(x+\lambda\rho\left(x^{1,\rho}+\widetilde{x}^{\rho}\right), u+\lambda\rho v\right) d\lambda, \\
G^{2\rho} &\doteq \left[B^{\rho}-\sigma_x(x,u)\right] x^{1,\rho}+\int_0^1 \left[\sigma_v(x,u+\lambda\rho v)-\sigma_v(x,u)\right] v d\lambda, \\
C^{\rho}(\cdot) &\doteq \int_0^1 c_x\left(x+\lambda\rho\left(x^{1,\rho}+\widetilde{x}^{\rho}\right), u+\lambda\rho v, \cdot\right) d\lambda,
\end{aligned}
$$

et

$$
G^{3\rho}(\cdot) \doteq \left[C^{\rho}(\cdot)-c_x(x,u,\cdot)\right] x^{1,\rho}+\int_0^1 \left[c_v(x,u+\lambda\rho v,\cdot)-c_v(x,u,\cdot)\right] v d\lambda.
$$

Nous appliquons la formule d'Itô's à $\left|\widetilde{x}^{\rho}(t)\right|^2$, en notant l'hypothèse (H 2.1), nous avons :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|\widetilde{x}^{\rho}(t)\right|^2 \quad &= \mathbb{E}\int_0^T \left[\left\langle 2\widetilde{x}^{\rho}(t), A^{\rho}(t)\widetilde{x}^{\rho}(t)+G^{1\rho}(t)\right\rangle+\left|B^{\rho}(t)\widetilde{x}^{\rho}(t)+G^{2\rho}(t)\right|^2\right] dt \\
&+\mathbb{E}\int_0^T\int_E \left|C^{\rho}(t,e)\widetilde{x}^{\rho}(t)+G^{3\rho}(t,e)\right|^2 \pi(de)\, dt \\
&\leq C\mathbb{E}\int_0^T \left|\widetilde{x}^{\rho}(t)\right|^2 dt+o(\rho).
\end{aligned}
$$

En suite, nous pouvons obtenir le premier résultat de convergencence de (2.4) à partir l'inégalité de Gronwall et nous avons :

$$
\begin{cases}
-d\widetilde{y}^{\rho}(t)=\displaystyle\int_E \left[D^{\rho}(t,e)\widetilde{x}^{\rho}(t)+I^{\rho}(t,e)\widetilde{y}^{\rho}(t)+F^{\rho}(t,e)\widetilde{z}^{\rho}(t)+\Lambda^{\rho}(t,e)\widetilde{r}^{\rho}(t,e)\right. \\
\qquad\qquad \left.+G^{4\rho}(t,e)\right]\pi(de)\, dt-\widetilde{z}^{\rho}(t)\, dB(t)-\displaystyle\int_E \widetilde{r}^{\rho}(t,e)\, \widetilde{N}(dedt), \\
\widetilde{y}^{\rho}(T)=\rho^{-1}\left[\phi\left(x_{\rho}(T)\right)-\phi(x(T))\right]-\phi_x(x(T))\, x^{1,\rho}(T),
\end{cases}
$$

alors, nous désignons

$$D^{\rho}(\cdot) \doteq \int_0^1 \left\{ g_x(x+\lambda\rho\left(x^{1,\rho}+\widetilde{x}^{\rho}\right), y+\lambda\rho\left(y^{1,\rho}+\widetilde{y}^{\rho}\right), \right.$$
$$\left. z+\lambda\rho\left(z^{1,\rho}+\widetilde{z}^{\rho}\right), r(\cdot)+\lambda\rho\left(r^{1,\rho}(\cdot)+\widetilde{r}^{\rho}(\cdot)\right), u+\lambda\rho v, \cdot) \right\} d\lambda,$$

et

$$\begin{aligned} I^{p}(\cdot) \doteq & \int_0^1 \{ g_y(x+\lambda\rho(x^{1,\rho}+\widetilde{x}^{\rho}), y+\lambda\rho(y^{1,\rho}+\widetilde{y}^{\rho}), \\ & z+\lambda\rho(z^{1,\rho}+\widetilde{z}^{\rho}), r(\cdot)+\lambda\rho(r^{1,\rho}(\cdot)+\widetilde{r}^{\rho}(\cdot)), u+\lambda\rho v, \cdot)\} d\lambda, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} F^{p}(\cdot) \doteq & \int_0^1 \{ g_z(x+\lambda\rho(x^{1,\rho}+\widetilde{x}^{\rho}), y+\lambda\rho(y^{1,\rho}+\widetilde{y}^{\rho}), \\ & z+\lambda\rho(z^{1,\rho}+\widetilde{z}^{\rho}), r(\cdot)+\lambda\rho(r^{1,\rho}(\cdot)+\widetilde{r}^{\rho}(\cdot)), u+\lambda\rho v, \cdot)\} d\lambda, \\ \Lambda^{\rho}(\cdot) \doteq & \int_0^1 \{ g_r(x+\lambda\rho(x^{1,\rho}+\widetilde{x}^{\rho}), y+\lambda\rho(y^{1,\rho}+\widetilde{y}^{\rho}), \\ & z+\lambda\rho(z^{1,\rho}+\widetilde{z}^{\rho}), r(\cdot)+\lambda\rho(r^{1,\rho}(\cdot)+\widetilde{r}^{\rho}(\cdot)), u+\lambda\rho v, \cdot)\} d\lambda, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} G^{4\rho}(\cdot) \doteq & \left[D^{\rho}(\cdot)-g_x(\cdot)\right] x^{1,\rho}+\left[I^{\rho}(\cdot)-g_y(\cdot)\right] y^{1,\rho} \\ & +\left[F^{\rho}(\cdot)-g_z(\cdot)\right] z^{1,\rho}+\left[H^{\rho}(\cdot)-g_r(\cdot)\right] r^{1,\rho}(\cdot) \\ & +\int_0^1 [g_v(x+\lambda\rho(x^{1,\rho}+\widetilde{x}^{\rho}), y+\lambda\rho(y^{1,\rho}+\widetilde{y}^{\rho}), z+\lambda\rho(z^{1,\rho}+\widetilde{z}^{\rho}), \\ & r(\cdot)+\lambda\rho(r^{1,\rho}(\cdot)+\widetilde{r}^{\rho}(\cdot)), u+\lambda\rho v)-g_v(\cdot)] v d\lambda. \end{aligned}$$

Nous appliquons la formule d'Itô's à $\left|\widetilde{y}^{\rho}(t)\right|^2$, notant l'hypothèse $(H\ 2.1)$, on a :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left|\widetilde{y}^{\rho}(t)\right|^2+\mathbb{E}\int_t^T\left|\widetilde{z}^{\rho}(s)\right|^2 ds+\mathbb{E}\int_t^T\int_E\left|\widetilde{r}^{\rho}(s,e)\right|^2\pi(de)\,ds \\ & =\mathbb{E}\int_t^T\int_E\langle 2\widetilde{y}^{\rho}(s), D^{\rho}(s,e)\,\widetilde{x}^{\rho}(s)+I^{\rho}(s,e)\,\widetilde{y}^{\rho}(s)+F^{\rho}(s,e)\,\widetilde{z}^{\rho}(s)+\Lambda^{\rho}(s,e)\,\widetilde{r}^{\rho}(s,e) \\ & +G^{4\rho}(s,e)\rangle\pi(de)\,ds+\mathbb{E}\left\{\rho^{-1}\left[\phi\left(x_{\rho}(T)\right)-\phi(x(T))\right]-\phi_x(x(T))\,x^{1,\rho}(T)\right\}^2 \\ & \leq C\mathbb{E}\int_t^T\left|\widetilde{y}^{\rho}(s)\right|^2 ds+\frac{1}{2}\mathbb{E}\int_t^T\left|\widetilde{z}^{\rho}(s)\right|^2 ds+\frac{1}{2}\mathbb{E}\int_t^T\int_E\left|\widetilde{r}^{\rho}(s,e)\right|^2\pi(de)\,ds+o(\rho). \end{aligned}$$

Encore, d'aprés l'inégalité de Gronwall, nous pouvons obtenir les trois derniers résultats de convergence de (2.4) . ■

D'aprés $u(\cdot)$ est un contrôle optimal, alors :

$$\rho^{-1}\left[J\left(u^{\rho}(\cdot)\right)-J\left(u(\cdot)\right)\right]\geq 0. \tag{2.5}$$

De ceci et du Lemma 2.1.1, nous avons ce qui suit.

Lemme 2.1.2 *Sous l'hypothèse* $(H\ 2.1)$, *alors l'inégalité variationnelle suivante est vérifiée :*

$$\begin{aligned}o(\rho)\leq \mathbb{E}\int_0^T\int_E &\left[l_x(t)\,x^{1,\rho}(t)+l_y(t)\,y^{1,\rho}(t)+l_z(t)\,z^{1,\rho}(t)+l_r(t)\,r^{1,\rho}(t,e)\right. \\ &\left.+l_v(t)\,v(t)\,\pi(de)\right]dt+\mathbb{E}\left[h_x(x(T))\,x^{1,\rho}(T)\right]+\mathbb{E}\left[\gamma_y(y(0))\,y^{1,\rho}(0)\right].\end{aligned} \tag{2.6}$$

Preuve. A partir du premier résultat de (2.4), nous dérivons

$$\begin{aligned}\rho^{-1}\mathbb{E}\left[h\left(x_\rho(T)\right)-h\left(x(T)\right)\right] &= \rho^{-1}\mathbb{E}\int_0^1\left\{h_x\left(x(T)+\lambda\left(x_\rho(T)-x(T)\right)\right)\left(x_\rho(T)-x(T)\right)\right\}d\lambda \\ &\to \mathbb{E}\left[h_x(x(T))\,x^{1,\rho}(T)\right].\end{aligned}$$

De même, nous avons :

$$\begin{aligned}\rho^{-1}\mathbb{E}\left[\gamma\left(y_\rho(0)\right)-\gamma\left(y(0)\right)\right] &= \rho^{-1}\mathbb{E}\int_0^1\left\{\gamma_y(y(0))+\lambda\left(y_\rho(0)-y(0)\right)\left(\left(y_p(0)\right)-y(0)\right)\right\}d\lambda \\ &\to \mathbb{E}\left[\gamma_y(y(0))\,y^{1,\rho}(0)\right].\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}&\rho^{-1}\left\{\mathbb{E}\int_0^T\int_E\left[l\left(t,x_\rho(t),y_p(t),z_\rho(t),r_\rho(t,e),u(t)-l(t)\right)\right]\pi(de)\,dt\right\} \\ &\to \mathbb{E}\int_0^T\int_E\left[l_x(t)\,x^{1,\rho}(t)+l_y(t)\,y^{1,\rho}(t)+l_z(t)\,z^{1,\rho}(t)+l_r(t)\,r^{1,\rho}(t,e)+l_v(t)\,v(t)\right]\pi(de)\,dt.\end{aligned}$$

■

Ensuite, nous introduisons les équations adjointe suivantes

$$\begin{cases} dp\left(t\right)=\displaystyle\int_{E}\left[g_{y}^{\intercal}\left(t,e\right)p\left(t\right)-l_{y}^{\intercal}\left(t\right)\right]\pi\left(de\right)dt+\int_{E}\left[g_{z}^{\intercal}\left(t,e\right)p\left(t\right)-l_{z}^{\intercal}\left(t\right)\right]\pi\left(de\right)dB\left(t\right) \\ \qquad\qquad+\displaystyle\int_{E}\left[g_{r}^{\intercal}\left(t-,e\right)p\left(t-\right)-l_{r}^{\intercal}\left(t-\right)\right]\widetilde{N}\left(dedt\right), \\ -dq\left(t\right)=\left[f_{x}^{\intercal}\left(t\right)q\left(t\right)-\displaystyle\int_{E}g_{x}^{\intercal}\left(t,e\right)p\left(t\right)\pi\left(de\right)+\sigma_{x}^{\intercal}\left(t\right)k\left(t\right)+\int_{E}\left(c_{x}^{\intercal}\left(t,e\right)R\left(t,e\right)\right.\right. \\ \qquad\qquad\left.\left.+l_{x}^{\intercal}\left(t\right)\right)\pi\left(de\right)\right]dt-k\left(t\right)dB\left(t\right)-\displaystyle\int_{E}R\left(t,e\right)\widetilde{N}\left(dedt\right), \\ p\left(0\right)=-\gamma_{y}\left(y\left(0\right)\right),\quad q\left(T\right)=-\phi_{x}^{\intercal}\left(x\left(T\right)\right)p\left(T\right)+h_{x}\left(x\left(T\right)\right). \end{cases} \tag{2.7}$$

De même manière que (2.3), sous l'hypothèse $(H\ 2.1)$, il existe unique

$$\left(p\left(t\right),q\left(t\right),k\left(t\right),R\left(t,\cdot\right)\right)\in L_{\mathcal{F}}^{2}\left(\left[0,T\right];\mathbb{R}^{m}\right)\times L_{\mathcal{F}}^{2}\left(\left[0,T\right];\mathbb{R}^{n}\right)\times L_{\mathcal{F},p}^{2}\left(\left[0,T\right];\mathbb{R}^{n\times d}\right)\times F_{p}^{2}\left(\left[0,T\right];\mathbb{R}^{n}\right)$$

satisfsant EDSPR (2.7).

On définit la fonction Hamiltonienne $H:[0,T]\times\mathbb{R}^{n}\times\mathbb{R}^{m}\times\mathbb{R}^{m\times d}\times\mathbb{R}^{m}\times U\times\mathbb{R}^{m}\times\mathbb{R}^{n}\times\mathbb{R}^{n\times d}\times\mathbb{R}^{n}\rightarrow\mathbb{R}$ comme suit :

$$\begin{aligned} &H\left(t,x,y,z,r\left(\cdot\right),v,p,q,k,R\left(\cdot\right)\right) \\ &\doteq\left\langle q,f\left(t,x,v\right)\right\rangle+\left\langle k,\sigma\left(t,x,v\right)\right\rangle-\int_{E}\left[\left\langle p,g\left(t,x,y,z,r\left(e\right),v\right)\right\rangle\right. \\ &\left.-l\left(t,x,y,z,r\left(e\right),v\right)-\left\langle R\left(e\right),c\left(t,x,v,e\right)\right\rangle\right]\pi\left(de\right). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Notons $H\left(t\right)\equiv H\left(t,x\left(t\right),y\left(t\right),z\left(t\right),r\left(t,\cdot\right),u\left(t\right),p\left(t\right),q\left(t\right),k\left(t\right),R\left(t,\cdot\right)\right)$ et ses dérivée, puis les équations adjointes (2.7) peut être réécrit comme le type de système hamiltonien stochastique suivant :

$$\begin{cases} dp(t) = -H_y(t)\,dt - H_z(t)\,dBt - \displaystyle\int_E H_r(t-,e)\,\widetilde{N}(dedt), \\ -dq(t) = H_x(t)\,dt - K(t)\,dBt - \displaystyle\int_E R(t,e)\,\widetilde{N}(dedt), \\ p(0) = -\gamma_y(y(0)), \quad q(T) = -\phi_x^{\intercal}(x(T))\,p(T) + h_x(x(T)). \end{cases} \tag{2.9}$$

Le principal résultat de ce mémoire est le suivant.

2.2 Principe du maximum stochastique

Théoreme 2.2.1 *(Principe du maximum stochastique) Supposons que* $(H\ 2.1)$ *est vérifiée. Soit* $u(\cdot)$ *un contrôle optimal et* $(x(\cdot), y(\cdot), z(\cdot), r(\cdot,\cdot))$ *est la trajectoire optimale correspondante. Alors nous avons :*

$$\langle H_v(t), v - u(t)\rangle \geq 0, \quad \forall v \in U \quad a.e \quad t \in [0,T], \quad \mathbb{P}-a.s. \tag{2.10}$$

Preuve. On applique la formule d'Ito à $\langle x^{1,\rho}(t), q(t)\rangle + \langle y^{1,\rho}(t), p(t)\rangle$, on obtient :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[h_x(x(T))\,x^{1,\rho}(T)\right] + \mathbb{E}\left[\gamma_y(y(0))\,y^{1,\rho}(0)\right] \\ &= \mathbb{E}\int_0^T \int_E \left[-l_x(t)\,x^{1,\rho}(t) - l_y(t)\,y^{1,\rho}(t) - l_z(t)\,z^{1,\rho}(t) - l_r(t)\,r^{1,\rho}(t,e) - l_v(t)\,v(t)\right]\pi(de)\,dt \\ &+ \mathbb{E}\int_0^T \langle H_v(t), v(t)\rangle dt. \end{aligned}$$

Ceci avec l'inégalité variationnelle (2.6) implique, pour $v(\cdot)$ telleque $u(\cdot) + v(\cdot) \in U_{ad}$,

$$\mathbb{E}\int_0^T \langle H_v(t), v(t)\rangle dt \geq 0.$$

Donc (2.10) obtenue. ■

Comme nous avons mentionné dans l'introduction, nous pouvons également prouver, sous quelques conditions additionnelle de convexité/concavité, la condition nécessaire et suffisante ci-dessus dans le Théreme 2.1.1. Suppossons $(H\ 2.2)$: h est convexe en x et γ est convexe en y.

Ensuite, nous avons la résultat suivante.

Théoreme 2.2.2 *(Conditions suffisantes d'optimalités) Supposons que* $(H\ 2.1)$, $(H\ 2.2)$ *vérifiées. Soit* $u(\cdot)$ *un contrôle admissible et* $(x(\cdot), y(\cdot), z(\cdot), r(\cdot,\cdot))$ *la trajectorire correspondante avec* $y(T) = M_T x(T), M_T \in \mathbb{R}^{m\times n}$. *Soit* $(p(\cdot), q(\cdot), k(\cdot), R(\cdot,\cdot))$ *est la solution de l'équation adjointe* (2.7). *Supposons que* H *est convexe en* $(x, y, z, r(\cdot), v)$. *alors,* $u(\cdot)$ *est un contrôle optimal si il satisfait* (2.10).

Preuve. Soit $v(\cdot)$ un contrôle admissible arbitraire et $(x^v(\cdot), y^v(\cdot), z^v(\cdot), r^v(\cdot))$ est la trajectoire correspondante. Nous considérons :

$$\begin{aligned} J(u(\cdot)) - J(v(\cdot)) &= \mathbb{E}\int_0^T \int_E [l(t) - l(t, x^v(t), y^v(t), z^v(t), r^v(t,e), v(t))]\,\pi(de)\,dt \\ &\quad + \mathbb{E}[h(x(T)) - h(x^v(T))] + \mathbb{E}[\gamma(y(0)) - \gamma(y^v(0))]. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Par la convexité de h et la formule d'Itô's, notant $(2.1), (2.7)$, on obtient

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[h(x(T)) - h(x^v(T))] \\ &\leq \mathbb{E}[(x(T) - x^v(T))^\intercal h_x(x(T))] \\ &= \mathbb{E}[(x(T) - x^v(T))^\intercal q(T)] + \mathbb{E}[(x(T) - x^v(T))^\intercal M_T^\intercal p(T)] \\ &= \mathbb{E}\int_0^T \Big[(x(t) - x^v(t))^\intercal (-f_x^\intercal(t)\,q(t) + \int_E g_x^\intercal(t,e)\,p(t)\,\pi(de) - \sigma_x^\intercal(t)\,k(t) \\ &- \int_E c_x^\intercal(t,e)\,R(t,e)\,\pi(de) - l_x^\intercal(t)\,\pi(de)) + \langle q(t), f(t) - f(t, x^v(t), v(t))\rangle \\ &+ \langle k(t), \sigma(t) - \sigma(t, x^v(t), v(t))\rangle + \int_E \langle R(t,e), c(t,e) - c(t, x^v(t), v(t), e)\rangle \pi(de)\Big]\,dt \\ &+ \mathbb{E}[(x(T) - x^v(T))^\intercal M_T^\intercal p(T)]. \end{aligned}$$

Et de même, par la convexité de γ et la formule d'Itô's, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\gamma\left(y\left(0\right)\right)-\gamma\left(y^{v}\left(0\right)\right)\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\left(y\left(0\right)-y^{v}\left(0\right)\right)^{\intercal}\gamma_{y}\left(y\left(0\right)\right)\right] \\
&=-\mathbb{E}\left[\left(y\left(0\right)-y^{v}\left(0\right)\right)^{\intercal}p\left(0\right)\right] \\
&=-\mathbb{E}\left[\left(x\left(T\right)-x^{v}\left(T\right)\right)^{\intercal}M_{T}^{\intercal}p\left(T\right)\right]+\mathbb{E}\int_{0}^{T}\int_{E}\left[\left(y\left(t\right)-y^{v}\left(t\right)\right)^{\intercal}\left(g_{y}^{\intercal}\left(t,e\right)p\left(t\right)-l_{y}^{\intercal}\left(t\right)\right)\right. \\
&+\left(z\left(t\right)-z^{v}\left(t\right)\right)^{\intercal}\left(g_{z}^{\intercal}\left(t,e\right)p\left(t\right)-l_{z}^{\intercal}\left(t\right)\right)+\left(r\left(t,e\right)-r^{v}\left(t,e\right)\right)^{\intercal}\left(g_{r}^{\intercal}\left(t,e\right)p\left(t\right)-l_{r}^{\intercal}\left(t\right)\right) \\
&\left.-\left\langle p\left(t\right),g\left(t,e\right)-g\left(t,x^{v}\left(t\right),y^{v}\left(t\right),z^{v}\left(t\right),r^{v}\left(t,e\right),v\left(t\right)\right)\right\rangle\right]\pi\left(de\right)dt.
\end{aligned}$$

Par la définition (2.8) de H nous avons

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\int_{0}^{T}\int_{E}\left[l\left(t\right)-l\left(t,x^{v}\left(t\right),y^{v}\left(t\right),z^{v}\left(t\right),r^{v}\left(t,e\right),v\left(t\right)\right)\right]\pi\left(de\right)dt \\
&=\mathbb{E}\int_{0}^{T}\left[H\left(t\right)-H\left(t,x^{v}\left(t\right),y^{v}\left(t\right),z^{v}\left(t\right),r^{v}\left(t,\cdot\right),v\left(t\right),p\left(t\right),q\left(t\right),k\left(t\right),R\left(t,\cdot\right)\right)\right]dt \\
&+\mathbb{E}\int_{0}^{T}\int_{E}\left[-\left\langle q\left(t\right),f\left(t\right)-f\left(t,x^{v}\left(t\right),v\left(t\right)\right)\right\rangle-\left\langle k\left(t\right),\sigma\left(t\right)-\sigma\left(t,x^{v}\left(t\right),v\left(t\right)\right)\right\rangle\right. \\
&+\left\langle p\left(t\right),g\left(t,e\right)-g\left(t,x^{v}\left(t\right),y^{v}\left(t\right),z^{v}\left(t\right),r^{v}\left(t,e\right),v\left(t\right),e\right)\right\rangle \\
&\left.-\left\langle R\left(t,e\right),c\left(t,e\right)-c\left(t,x^{v}\left(t\right),v\left(t\right),e\right)\right\rangle\right]\pi\left(de\right)dt.
\end{aligned}$$

En ajoutant (dans) l'égalité ci dessus, à partir de (2.11), nous pouvons obtenir :

$$\begin{aligned}
&J\left(u\left(\cdot\right)\right)-J\left(v\left(\cdot\right)\right) \\
&\leq \mathbb{E}\int_{0}^{T}\left[H\left(t\right)-H\left(t,x^{v}\left(t\right),y^{v}\left(t\right),z^{v}\left(t\right),r^{v}\left(t,\cdot\right),v\left(t\right),p\left(t\right),q\left(t\right),k\left(t\right),R\left(t,\cdot\right)\right)\right. \\
&-\left\langle H_{x}\left(t\right),x\left(t\right)-x^{v}\left(t\right)\right\rangle-\left\langle H_{y}\left(t\right),y\left(t\right)-y^{v}\left(t\right)\right\rangle-\left\langle H_{z}\left(t\right),z\left(t\right)-z^{v}\left(t\right)\right\rangle \\
&\left.-\left\langle H_{r}\left(t\right),r\left(t,\cdot\right)-r^{v}\left(t,\cdot\right)\right\rangle\right]dt
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Depuis que H est convexe en $(x, y, z, r(\cdot), v)$, alors :

$$\begin{aligned} & H(t) - H(t, x^v(t), y^v(t), z^v(t), r^v(t, \cdot), v(t), p(t), q(t), k(t), R(t, \cdot)) \\ & \leq \langle H_x(t), x(t) - x^v(t) \rangle + \langle H_y(t), y(t) - y^v(t) \rangle + \langle H_z(t), z(t) - z^v(t) \rangle \\ & + \langle H_r(t), r(t, \cdot) - r^v(t, \cdot) \rangle + \langle H_v(t), u(t) - v(t) \rangle. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Par (2.12) et (2.13), alors nous obtenons obtenons

$$J(u(\cdot)) - J(v(\cdot)) \leq \mathbb{E} \int_0^T \langle H_v(t), u(t) - v(t) \rangle dt. \tag{2.14}$$

Puis à partir de la condition nécessaire (2.10) on déduit que $J(u(\cdot)) \leq J(v(\cdot))$ pour tout $v(\cdot) \in U$, ce qui prouve que $u(\cdot)$ est optimal. $\blacksquare$

Chapitre 3

Application

Dans ce chapitre, nous appliquons les résultats obtenus dans le chapitre 2 pour étudier le problème de sélection de portefeuille moyenne variance mélangée avec un problème d'optimisation d'une function d'utilité récursive.

3.1 Formulation du problème et hypothèses

Supposons que nous avons deux types de titres dans le marché pour un choix d'investissement possible :

- Une sécurité sans risque (par exemple, une obligation), où le prix $S_0(t)$ au temps t est donné par
$$dS_0(t) = \rho_t S_0(t)\,dt,\ \ S_0(0) > 0, \tag{3.1}$$
ici ρ_t est une fonction déterministe bornée.
- Une sécurité risqué (par exemple, Un stock), où le prix $S_1(t)$ au temps t est donné par
$$dS_1(t) = S_1(t-)\left[\mu_t dt + \sigma_t dBt + \int_E \eta_t(e)\,\widetilde{N}(dedt)\right],\ \ S_1(0) > 0, \tag{3.2}$$
avec μ_t, $\sigma_t \neq 0$ sont des fonctions déterministes bornées et $\mu_t > \rho_t$.

Pour toute $S_1(t) > 0$, on suppose que $\eta_t(e) > -1, \forall e \in E$, de plus nous supposons que $\int_E \eta^2(e)\,\pi(de)$ est une fonction bornée.

Soit $v(t) \doteq \theta_1(t)\,S_1(t)$ est le montant investi dans la sécurité risqué que nous appelons la stratégie de portefeuille.

Etant donné la richesse initiale $x^v(0) = x_0 \geq 0$, en combinant (3.1) et (3.2) nous pouvons obtenir la dynamique de la richesse suivante :

$$\begin{cases} dx^v(t) = [\rho_t x^v(t) + (\mu_t - \rho_t)\,v(t)]\,dt + \sigma_t v(t)\,dBt + \int_E \eta_t(e)\,v(t-)\,\widetilde{N}(dedt), \\ x^v(0) = x_0. \end{cases} \tag{3.3}$$

On note par U_{ad} l'ensemble des portefeuilles admissibles à valeur dans $U = \mathbb{R}$.

Sous le cadre ci-dessus, Framsted et al.[14] discuté le problème de sélection du protfolio moyenne variance dans l'Exemple 3.1, c'est -à-dire que l'objet de l'investisseur est de trouver un portefeuille admissible $v^*(t)$ qui minimise la variance

$$Var[x^v(T)] \doteq \mathbb{E}\left[(x^v(T) - \mathbb{E}[x^v(T)])^2\right],$$

à un moment futur $T > 0$ sous la condition que $\mathbb{E}[x^v(T)] = A$ pour un certain $A \in \mathbb{R}$. En utilisant la méthode du multiplicateur de Lagrange, nous savons que c'est équivalent à étudier le problème suivant :

$$\sup_{v(\cdot)\in U_{ad}} \mathbb{E}\left[-\frac{1}{2}(x^v(T) - a)^2\right], \tag{3.4}$$

où $a \in \mathbb{R}$ est donné. En utilisant un principe de maximum suffisant, Framastad, et Al.[14]–[15] a donné l'expression de la sélection de portefeuille optimale.

Dans ce chapitre, nous étudions le problème de sélection de portfeuille moyenne variance ci dessus mélangé avec un problème d'optimisation fonctionnelle utilitaire récursif.

Le récursif utilité signifie que l'utilité au temps t est une fonction de l'utilité future (dans ce cas, nous ne considérons pas la consommation). En fait, dans notre cadre de diffusion avec sauts, l'utilitaire récursif peut être supposée satisfait certains EDSR. Les problèmes d'optimisation avec l'utilité récursif ont un contexte économique important, voir $[10]-[11]$ pour plus de détails.

On considère un petit investisseur, doté d'une richesse initiale $x_0 > 0$, qui choisit à chaque instant t sa stratégie de portefeuille $v(t)$. L'investisseure veut choisir une stratégie de portefeuille $v^*(\cdot) \in U_{ad}$ maximiser la fonctionn d'utilité attendue suivante qui peut être séparée en deux parties : une partie est le récompense terminale équivalente

$$\mathbb{E}\left[-\frac{1}{2}\left(x^v(T)-a\right)^2\right];$$

l'autre partie est une fonction utilitaire récursif avec générateur

$$g(t,v,x,y) = \rho_t x + (\mu_t - \rho_t) v - \beta y,$$

où $\beta \geq 0$ constante. Plus précisément, pour tout $v(\cdot) \in U_{ad}$ la fonctionn utilitaire de l'investisseur est défini par :

$$\overline{J}(v(\cdot)) \doteq \mathbb{E}\left[-\frac{1}{2}\left(x^v(T)-a\right)^2\right] + y^v(t)\,|_{t=0}, \tag{3.5}$$

où

$$y^v(t) \doteq \mathbb{E}\left[x^v(T) + \int_t^T \left[\rho_s x^v(s) + (\mu_s - \rho_s) v(s) - \beta y^v(s)\right] ds \,|_{\mathcal{F}_t}\right], \quad t \in [0,T].$$

En fait, dans notre cadre de diffusion avec sauts, le processus de richesse $x^v(\cdot)$ et le processus utilitaire récursif $y^v(\cdot)$ peut être considéré comme la solution de ce qui suit

EDSPR :

$$
\begin{cases}
dx^v(t) = [\rho_t x^v(t) + (\mu_t - \rho_t) v(t)] \, dt + \sigma_t v(t) \, dBt + \int_E \eta_t(e) \, v(t-) \, \widetilde{N}(dedt), \\
-dy^v(t) = [\rho_t x^v(t) + (\mu_t - \rho_t) v(t) - \beta y^v(t)] \, dt - z^v(t) \, dBt - \int_E r^v(t, e) \, \widetilde{N}(dedt), \\
x^v(0) = x_0, \quad y^v(t) = x^v(T),
\end{cases}
\tag{3.6}
$$

et notre problème d'optimisation peut être réécrit comme (indiquant $J = -\overline{J}$)

$$
J(v^*(\cdot)) = \inf_{v(\cdot) \in U_{ad}} J(v(\cdot)). \tag{3.7}
$$

Nous pouvons vérifier que toutes les hypothèses de la section 2 sont satisfaites, puis nous pouvons utilitser notre principe du maximum (Thérème 2.1.1) pour résoudre le problème d'optimisation précèdent (3.7) . Dans ce cas, l'equation adjointe (2.7) se rèduit à

$$
\begin{cases}
dp(t) = -\beta p(t) \, dt, \\
-dq(t) = \rho_t [q(t) - p(t)] \, dt - k(t) \, dBt - \int_E R(t, e) \, \widetilde{N}(dedt), \\
p(0) = 1, \quad q(T) = x(T) - a - p(T).
\end{cases}
\tag{3.8}
$$

Notant que dans ce cas le processus adjoint $p(\cdot)$ réduit à un fonction déterminste car notre générateur g ne contient pas les processus $z(\cdot), r(\cdot, \cdot)$. Soit $v^*(\cdot)$ une stratégie de portfeuille optimale et $x^*(\cdot), y^*(\cdot)$ le processus de richesse correspondant et le processus d'utilité récursif, respictivement, avec la solution correspondante $(p^*(\cdot), q^*(\cdot), k^*(\cdot), R^*(\cdot))$ aux équations adjioints (3.8). Alors, la fonction d'hamiltonienne (2.8) se réduit à

$$
\begin{aligned}
&H(t, x^*(\cdot), y^*(t), v, p^*(\cdot), q^*(t), k^*(t), R^*(t, \cdot)) \\
&= -[\rho_t x^*(t) + (\mu_t - \rho_t) v] (p^*(t) - q^*(t)) + \sigma_t k^*(t) v \\
&+ \beta p^*(t) y^*(t) + \int_E \eta_t(e) R^*(t, e) v \pi(de).
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

De plus, cette expression est linéaire de v. Par la condition nécessaire (2.10), nous avons

$$-\left(\mu_t-\rho_t\right)\left(p^*\left(t\right)-q^*\left(t\right)\right)+\sigma_t k^*\left(t\right)+\int_E \eta_t\left(e\right) R^*\left(t,e\right)\pi\left(de\right)=0. \tag{3.10}$$

Afin de trouver l'expression de $v^*\left(t\right)$, nous conjecturons un processus $q^*\left(t\right)$ avec forme

$$q^*\left(t\right)=\phi_t x^*\left(t\right)+\Psi_t, \tag{3.11}$$

où ϕ_t, Ψ_t sont des fonctions différentiables.

En appliquant la formule d'Itô à (3.11), on peut obtenir

$$\begin{aligned} dq^*\left(t\right) &= \phi_t\left\{\left[\rho_t x^*\left(t\right)+\left(\mu_t-\rho_t\right)v^*\left(t\right)\right]dt+\sigma_t v^*\left(t\right)dB\left(t\right)\right. \\ &\left.+\int_E \eta_t\left(e\right)v^*\left(t-\right)\widetilde{N}\left(dedt\right)\right\}+x^*\left(t\right)\dot{\phi}_t dt+\dot{\Psi}_t dt \\ &= \left[\phi_t\rho_t x^*\left(t\right)+\phi_t\left(\mu_t-\rho_t\right)v^*\left(t\right)+x^*\left(t\right)\dot{\phi}_t+\dot{\Psi}_t\right]dt \\ &+\phi_t\sigma_t v^*\left(t\right)dB\left(t\right)+\int_E \phi_t\eta_t\left(e\right)v^*\left(t-\right)\widetilde{N}\left(dedt\right) \end{aligned} \tag{3.12}$$

En comparant (3.12) avec le EDSR dans (3.8), on obtient (en notant que $\rho^*\left(t\right)=e^{-\beta t}$)

$$\phi_t\rho_t x^*\left(t\right)+\phi_t\left(\mu_t-\rho_t\right)v^*\left(t\right)+x^*\left(t\right)\dot{\phi}_t+\dot{\Psi}_t=-\rho_t\left(\phi_t x^*\left(t\right)+\Psi_t\right)+\rho_t e^{-\beta t}, \tag{3.13}$$

et

$$k^*\left(t\right)=\phi_t\sigma_t v^*\left(t\right), \tag{3.14}$$

$$R^*\left(t,e\right)=\phi_t\eta_t\left(e\right)v^*\left(t\right). \tag{3.15}$$

Remplacer $(3.14), (3.15)$ par (3.10) et désigner

$$\Lambda_t \doteq \sigma_t^2+\int_E \eta_t^2\left(e\right)\pi\left(de\right), \tag{3.16}$$

on peut avoir

$$v^*(t) = \frac{(\rho_t - \mu_t)\left(\phi_t x^*(t) + \Psi_t - e^{-\beta t}\right)}{\phi_t \Lambda_t}. \tag{3.17}$$

D'autre part, (3.13) donne :

$$v^*(t) = \frac{\left(2\phi_t\rho_t + \dot{\phi}_t\right) x^*(t) + \rho_t\Psi_t + \dot{\Psi}_t - \rho_t e^{-\beta t}}{\phi_t(\rho_t - \mu_t)}. \tag{3.18}$$

En combinant (3.17) et (3.18) (en notant la condition terminale en (3.8)), on obtient :

$$\dot{\phi}_t = \left[\tfrac{(\rho_t-\mu_t)^2}{\Lambda_t} - 2\rho_t\right]\phi_t, \quad \phi_T = 1,$$

et

$$\dot{\Psi}_t = \left[\tfrac{(\rho_t-\mu_t)^2}{\Lambda_t} - \rho_t\right]\Psi_t - e^{-\beta t}\left[\tfrac{(\rho_t-\mu_t)^2}{\Lambda_t} - \rho_t\right], \quad \Psi_T = -a-1.$$

La solution de cette équation est

$$\phi_t = \exp\left\{-\int_t^T \left[\frac{(\rho_s-\mu_s)^2}{\Lambda_s} - 2\rho_s\right] ds\right\}, \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}\Psi_t = \exp&\left\{-\int_t^T \left[\frac{(\rho_s-\mu_s)^2}{\Lambda_s} - \rho_s\right] ds\right\} \\ &\cdot\left\{\int_t^T e^{-\beta s}\left[\frac{(\rho_s-\mu_s)^2}{\Lambda_s} - \rho_s\right]\exp\left\{\int_s^T \left[\frac{(\rho_r-\mu_r)^2}{\Lambda_r} - \rho_r\right] dr\right\} ds - a - e^{-\beta T}\right\}.\end{aligned} \tag{3.20}$$

Avec ce choix de ϕ_t et Ψ_t le processus

$$\begin{aligned} p^*(t) &= e^{-\beta t}, & q^*(t) &= \phi_t x^*(t) + \Psi_t, \\ k^*(t) &= \phi_t\sigma_t v^*(t), & R^*(t,e) &= \phi_t \eta_t(e) v^*(t), \end{aligned}$$

Satisfant l'equation adjointe (3.8) avec $v^*(t)$ donnée par (3.17). Ainsi, avec ce choix de $v^*(t)$, la condition nécessaire (2.10) du théreme 2.1.1 est vérifié.

Théoreme 3.1.1 *La solution optimale $v^*(t)$ de notre problème de sélection de portefeuille moyenne-variance mélangée avec un problème d'optimisation d'utilitté récursif* (3.7)*, lorsque la dynamique de richesse obéit [17], est donné sous forme de feedback par*

$$v^*(t, x^*) = \frac{(\rho_t - \mu_t)\left(\phi_t x^* + \Psi_t - e^{-\beta t}\right)}{\phi_t \Lambda_t}, \tag{3.21}$$

où $\Lambda_t, \phi_t, \Psi_t$ sont respectivement donnés par (3.16), (3.19), (3.20).

Dans cet mémoire, nous avons étudié les conditions nécessaires et suffisants d'optimalités pour un système stochastique EDSPR avec sauts. Dans ce système, les coefficients de saut et le processus du diffusion dependent par la variable de contrôle. Le résultat obtenu est appliqué au problème de sélection de portefeuille moyenne variance mélangée avec un problème d'optimisation d'une function d'utilité récursive. L'expression explicite de la stratégie est donné sous forme de feedback .

Bibliographie

[1] S. G. Peng, A general stochastic maximum principle for optimal control problems, SIAM J. on Control and Optimization, 1990, 28(4) : 966–979.

[2] S. G. Peng, Backward stochastic differential equations and applications to optimal control, Applied Mathematics and Optimization, 1993, 27 : 125–144.

[3] W. S. Xu, Stochastic maximum principle for optimal control problem of forward and backward system, J. of Australian Mathematical Society, 1995B, 37 : 172–185.

[4] Z. Wu, Maximum principle for optimal control problem of fully coupled forward-backward stochastic systems, Systems Science and Mathematical Sciences, 1998, 11(3) : 249–259.

[5] J. T. Shi and Z. Wu, The maximum principle for fully coupled forward-backward stochastic control system, Acta Automatica Sinica, 2006, 32(2) : 161–169.

[6] Shi, J., Wu, Z. : Maximum principle for forward-backward stochastic control system with random jumps and applications to finance. Journal of Systems Science and Complexity 23(2), 219-231 (2010).

[7] R. Situ, A maximum principle for optimal controls of stochastic systems with random jumps, in Proceedings of National Conference on Control Theory and its Applications, Qingdao, China, 1991.

[8] S. J. Tang and X. J. Li, Necessary conditions for optimal control of stochastic systems with random jumps, SIAM J. on Control and Optimization, 1994, 32(5) : 1447–1475.

[9] X. Y. Zhou and D. Li, Continuous time mean-variance portfolio selection : A stochastic LQ frame-work, Applied Mathematics and Optimization, 2000, 42 : 19–33.

[10] N. El-Karoui, S. G. Peng, and M. C. Quenez, A dynamic maximum principle for the optimization of recursive utilities under constraints, The Annals of Applied Probability, 2001, 11(3) : 664–693.

[11] N. El-Karoui, S. G. Peng, and M. C. Quenez, Backward stochastic differential equations in finance, Mathematical Finance, 1997, 7(1) : 1–71.

[12] N. Ikeda and S. Watanabe, Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes, North-Holland, Kodansha, 1989.

[13] A. Bensoussan, Lecture on Stochastic Control : Nonlinear Filtering and Stochastic Control, Lecture Notes in Mathematics, 972, Springer-Verlag, Berlin, 1981.

[14] N. C. Framstad, B. Oksendal, and A. Sulem, A sufficient stochastic maximum principle for optimal control of jump diffusions and applications to finance, J. of Optimization Theory and Applications, 2004, 121(1) : 77–98 (Errata, 2005, 124(2) : 511–512).

[15] Bensoussan, A. : Lectures on stochastic control. In : Nonlinear filtering and stochastic control. pp. 1-62. Springer, (1982)

[16] Pham, H. : Optimisation et contrôle stochastique appliqués à la finance, vol. 61. Springer, (2007)

[17] Yong, J., Zhou, X.Y. : Stochastic controls : Hamiltonian systems and HJB equations, vol. 43. Springer Science & Business Media, (1999)

Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	Espace de probabilité.
$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathbb{P})$	Espace de probabilité filtré.
EDS	Equation différentielle stochastique.
$EDSR$	Equation différentielle stochastique retrograde
$\mathcal{B}(\mathbb{R})$	Tribu Borélienne sur $\mathbb{R}$
b	la derivé (drift)
σ	Terme de diffusion.
$\mathcal{U}$	L'ensemble des contrôles admissibles.
$J(\cdot)$	La fonction de coût.
$\widehat{u}$	contrôle optimal.
$H(t, x, u, p, q, r)$	L'Hamiltonian.
$p(t)$	Processus adjoint.
$\mathbb{P} - p - s.$	Presque sûrment pour lamesure de probabilité $\mathbb{P}$.

Résumé

Dans ce mémoire, on s'intéresse à étudier le principe du maximum stochastique pour un type de système EDSPR avec saut sous forme locale, et on obtient également les conditions suffisantes d'optimalités. Nous appliquons notre résultat pour étudier le problème de sélection de portefeuille moyenne-variance mélangée avec un problème d'optimisation d'une fonction d'utilité récursive.Finalement, nous donnons une expression explicite de la stratégie de sélection de portefeuille optimale.

Mots clés. Contrôle optimal.Equation différentielles stochastique.Principe du maximum. Condition suffisante d’optimalité. Portefeuille moyenne-variance.

Abstract

In thisthesis, we are interested in studying of the stochastic maximum principlefor a type of forward-backward system with local jump, and wealsoobtainsufficient conditions for optimities. Weapplyourresult to study the average variance portfolio selectionproblemwith a problem of optimizinga recursive utility function. Finally, wegive an explicit expression of the optimal portfolio selectionstrategy.

Key words.Optimal control. Stochasticdifferentialequation. Maximumprinciple.

Sufficient condition of optimality. Average variance portfolio.

الملخص

في هذه الأطروحة، نحن مهتمون بدراسة مبدأ الحد الأقصى لنوع من نظام EDSPR مع القفز المحلي، ونحصل أيضا على شروط كافية للمثالية. نطبق ناتجتنا لدراسة مشكلة اختيار حافظة محافظ التباين المتوسط مع مشكلة تحسين وظيفة المرافق العددية. أخيرا، نعطي تعبيرا صريحا عن استراتيجية اختيار المحفظة الأمثل.

الكلماتالمفتاحية.السيطرة الأمثل. المعادلة التفاضلية الاستوكاستك. مبدأ الحد الأقصى. الشروطالكافية المثالية. حافظة التباين المتوسط.