

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE DE MOHAMED KHIDER-BISKRA  
FACULTE DES SCIENCES ET DES SCIENCES DE L'INGENIEUR  
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL

N° d'ordre :.....

Série :.....

## MÉMOIRE DE MAGISTÈRE

Spécialité : GENIE CIVIL

Option : structure

*Présentée Par :*

**BOUALI AOUATEF**

**THÈME :**

**LE VERROUILLAGE TRAPEZOÏDAL D'UN ELEMENT MEMBRANAIRE A  
QUATRE-NOEUDS DANS UN  
CHAMPS LINEAIRE**

**SOUTENUE LE 28/11/2005**

Devant le jury

<b>Président :</b>	<b>S. BENMEBAREK</b>	<b>Prof</b>	<b>Univ. Biskra</b>
<b>Rapporteur :</b>	<b>M.T. BELARBI</b>	<b>M.C</b>	<b>Univ. Biskra</b>
<b>Examineur :</b>	<b>L. BELOUNAR</b>	<b>M.C</b>	<b>Univ. Biskra</b>
	<b>A. ZATAR</b>	<b>M.C</b>	<b>Univ. Biskra</b>

# NOTATION

$\sim$	Utilisé pour traduire un vecteur
$\wedge$	Produit vectoriel
$\bullet$	Produit Scalaire
$*$	Utilisé pour définir une Quantité Virtuelle
$\equiv$	Identique à
$\int$	Intégrale
$\{\}$	Vecteur colo
$\langle \rangle$	Vecteur ligne
$[ ]$	Matrice
$[ ]^T$	Matrice Transposée
$[ ]^{-1}$	Matrice Inverse
$u_i, v_i$ Et $w_i$	Déplacement du point $i$ suivant $x, y$ et $z$
$\bar{u}$	Déplacement Imposés
$D.D.l$	Degré de Liberté
$div, grad$	Opérateur Divergence, Opérateur Graduant
$f_{,x} = \frac{\partial f}{\partial x}$	Dérivée Partiel de $f$ par rapport à $x$
$\xi, \eta$	Coordonnées Paramétriques
$x, y, z$	Coordonnées Cartésiennes Locales
$X, Y, Z$	Coordonnées Cartésiennes Globales
$CT$	Cisaillement Transversal
$N_i$	Les Fonctions D'interpolation
$h$	Epaisseur
$V$	Volume
$dV, dA$	Elément de Volume, d'air
$S = \partial V, \partial A$	Contour du Volume, d'air
$W, W^e$	Forme Intégrales Globale et Elémentaire

$[N]$	Matrice des Fonction de Forme
$[J]; J$	Matrice Jacobinne de Transformation ; déterminant de $[J]$
$[j]$	Matrice Jacobinne inverse
$E, \nu$	Module d'Young, Coefficient de Poisson
$[H] = [H]^T$	Matrice de Comportement Elastique
$[C] = [H]^{-1}$	Matrice de Souplesse
$[B]$	Matrice reliant les Déformation aux Variables Nodales
$[P]$	Matrice d'approximation des Contraintes des les Eléments Mixtes
$[k]$	Matrice de Rigidité Globale
$[k_m], [k_f]$ Et $[k_c]$	Matrice de Rigidité Elémentaire de Membrane, de Flexion et de $CT$
$[Q]$	Matrice de Transformation Orthogonale
$[T]$	Matrice de Transformation au repère Globale
$S_f$	Partie du Contour où les Efforts sont Imposés
$S_u$	Partie du Contour où les Déplacement sont Imposés
$\beta_{xi}$	Rotation du Point $i$ autour de L'axe $y$
$\beta_{yi}$	Rotation du Point $i$ autour de L'axe $x$
$\theta_{zi}$	Rotation du Point $i$ autour de L'axe $z$
$\{\tau\}$	Tenseur de Contraintes
$\{N_m\}, \{M\}$ Et $\{T\}$	Vecteur des Efforts Résultants de membrane, de Flexion et de $CT$
$w_i, \beta_{xi}$ , Et $\beta_{yi}$	Variables Nodales (de Flexion) dans le Repère Local
$u_i, v_i$	Variables Nodales (de Flexion) dans le Repère Local
$\{u_n\}$	Vecteur Déplacements Nodales
$\langle \varepsilon \rangle$	Vecteur des Déformations
$\langle e \rangle$	Vecteur des Déformations de Membrane
$\langle \chi \rangle$	Vecteur des Courbures
$z \langle \chi \rangle$	Vecteur des Déformations de Flexion

$\langle \gamma \rangle$	Vecteur des Déformations de Cisaillement Transversal
$\langle \gamma \rangle$	Vecteur des Déformations Indépendantes où de Substitutions
$\{\sigma\}$	Vecteur des Contraintes
$[K]$	Vecteur Charges Equivalentes
$\{f_n\}$	Vecteur des Sollicitations Elémentaire
$\{F\}$	Vecteur des Sollicitations Globales
$\{U\}$	Vecteur des Solution
$a_{\bar{1}}, a_{\bar{2}}$	Vecteur de Base (base covariante)
$t_{\bar{1}}, t_{\bar{2}}$ Et $n$	Vecteur Orthonormés de $[Q]$

# **PLAN GENERAL**

**I-** GENERALITE (DIFINITION ET ANALYSE BIBLOGRAFIE)

**II-** THEOREME DE MACNEAL (DEMONSTRATION).

**III-** FORMULATION DES ELEMENTS Q4 ; Q4PS ; SBQ4.

**IV-** VALIDATION ET APPLICATION.

**V-** CONCLUSION ET RECOMMANDATION.

# SOMMAIRE

<b>Introduction générale</b> . . . . .	1
--	---

## PARTIE A

### CHAPITRE 1 : LA METHODE DES ELEMENTS FINIS ET LES PROBLEMES D'ELASTICITE

<b>1.1. Introduction</b> . . . . .	3
<b>1.2. Solide élastique.</b> . . . . .	3
1.2.1. Lois du comportement . . . . .	4
1.2.1.1. Lois de Hooke . . . . .	4
1.2.1.2 Cinématique virtuelle . . . . .	6
1.2.1.3 Principe variationnelle . . . . .	8
1.2.1.4 Discrétisation d'un domaine par éléments finis . . . . .	9
1.2.1.4.1.1 Discrétisation . . . . .	10
1.2.1.4.1.2 Intégration . . . . .	10
<b>1.3. Interpolation de degré élevé en membrane</b> . . . . .	11
1.3.1. Le verrouillage membranaire . . . . .	11
1.3.1.1. Consideration générale concernant le phénomène de verrouillage membranaire . . . . .	11
1.3.1.2 Mise en équation et position du problème . . . . .	12
1.3.1.3 Processus du passage à la limite et conséquences du problème. . . . .	15
<b>1.4. Critère de convergence</b> . . . . .	18
1.4.1. Etats de déformation constant et le « Patch test » . . . . .	18
1.4.2. Mouvement du corps rigide . . . . .	18
1.4.3. Continuité inter-éléments . . . . .	20
1.4.4. Blocage de membrane. . . . .	20
<b>1.5. Conclusion</b> . . . . .	21

## CHAPITRE 2 : THEOREME DE MACNEAL

<b>2.1. Introduction</b> . . . . .	22
<b>2.2. Théorème de mac neal numériquement</b> . . . . .	22
2.2.1. Problème propre au théorème de macneal . . . . .	22
<b>2.3. Le théorème : analyse et démonstration.</b> . . . . .	27
<b>2.4. Conclusion</b> . . . . .	33

## PARTIE B

### CHAPITRE 3 : FORMULATION DES ELEMENTS

#### $Q_4$ ; $Q_4PS$ ; $SBQ_4$

<b>3.1. Introduction</b> . . . . .	34
<b>3.2. Formulation déplacement</b> . . . . .	34
3.2.1. Présentation générale . . . . .	36
3.2.2. Présentation algébrique. . . . .	38
3.2.2.1. Formulation paramétrique . . . . .	39
3.2.2.2. Matrice de rigidité et vecteur de force sur l'élément de référence. . . . .	41
<b>3.3. Formulation mixte (hybride)</b> . . . . .	42
3.3.1. Présentation générale . . . . .	42
3.3.2. Présentation algébrique . . . . .	45
3.3.3. Implémentation de l'élément $Q_4PS$ . . . . .	46
3.3.1. Formulation de l'élément $SBQ_4$ . . . . .	47
3.3.1.1. Description de l'élément $SBQ_4$ . . . . .	47
3.3.1.2 Formulation variationnels de l'élément $SBQ_4$ . . . . .	47
3.3.1.3 Evaluation automatique de la matrice $[K_0]$ . . . . .	49
<b>3.4. Conclusion</b> . . . . .	52

## CHAPITRE 4: VALIDATION ET APPLICATION

<b>4.1. Introduction</b> . . . . .	54
<b>4.2. Cas d'une poutre simple</b> . . . . .	54
4.2.1. Poutre simple élancée de MacNeal. . . . .	55
4.2.2. Poutre console courte d'Allman. . . . .	57
<b>4.3. Performance de SBQ<sub>4</sub></b> . . . . .	57
4.3.1. Etude du panneau fuselé de Cook. . . . .	60
4.3.2. Fléxion plane d'une poutre encastree . . . . .	61
4.3.1.1. Commentaires : maillage sans distorsions. . . . .	62
4.3.1.1. Commentaires : maillage avec distorsions. . . . .	62
<b>4.4. Conclusion</b> . . . . .	63

## CHAPITRE 5 : CONCLUSION ET RECOMMANDATION

<b>5.1. Conclusions générales</b> . . . . .	64
---	----

### Références bibliographiques



***INTRODUCTION***

***GENERALE***

## **INTRODUCTION GENERALE**

Pour évaluer les états de contraintes, des déformations et les caractéristiques vibratoires dans des produits, des structures des pièces mécaniques, l'ingénieur doit décrire le comportement des systèmes physiques grâce à des équations aux dérivées partielles. Et vu la difficulté de résoudre ces équations on a besoin de modèles qui permettent de simuler le comportement de ces systèmes complexe. Pour cela, on a recours à plusieurs techniques dont la méthode des éléments fins.

Cette méthode est une technique mathématique d'intégration aux dérivées partielles mise sous forme variationnelle. Elle fait appel aux trois domaines suivants :

- Science de l'ingénieur pour construire les équations aux dérivées partielles ;
- Méthodes numériques pour construire et résoudre les équations algébriques ;
- Programmation pour exécuter efficacement les calculs sur ordinateur ;

Cette méthodes a connu plusieurs développements depuis son application en 1956, plus exactement par l'application des publications de Tuener , Clough, Martin et Topp qui ont introduit le concept d'élément fini ( ils représentent un milieu continu élastique à deux dimensions par un assemblage de panneaux triangulaire sur lesquels les développements sont superposés varier linéairement).

Soulignons également le travail de Argyris et Kelesy qui systématise l'utilisation de la notion d'énergie dans l'analyse des structures.

Dès 1960 cette méthode subit un développement rapide dans plusieurs directions :

- La méthode des éléments finis est reconnue comme un outil général de résolution d'équation aux dérivées partielles. Elle est donc utilisée pour résoudre des problèmes non stationnaires, non linaires dans le domaine des structures ainsi que dans d'autres domaines.
- Une base mathématique de la méthode des éléments finis est construite à partir de l'analyse fonctionnelle.
- La méthode est reformulée, à partir de considération énergétique et variationnelle, sous la forme générale des résidus pondérés.

Ainsi on assiste au développement de nouveaux éléments tels que poutre, plaques, coques et l'établissement de nouvelles formulations telles que la formulation hybride.

L'application des formulations dites mixtes ou hybrides, dans de nombreuses situations comme les plaques et les coques, de définir des modèles éléments finis très performants.

Dans notre travail nous avons analysé de manière précise la nature du phénomène de verrouillage trapézoïdal de façon à retenir l'ensemble des solutions le mieux adapté à satisfaire les exigences suivantes :

- Représentation de la géométrie des déplacements.
- Représentation du mouvement du corps rigide.
- Elimination du verrouillage trapézoïdal.
- Convergence vers la solution exacte.

C'est dans ce contexte que s'inscrit le présent travail qui vise à apporter des éléments de réponse à ces problèmes.

Après avoir présenté le théorème de MacNeal (démonstration) ; une synthèse des problèmes de modélisation des structures à géométrie courbe ainsi des solutions avancées est effectuée.

Ceux-ci sont alors largement testés et confrontés à d'autres types de formulations aussi bien en analyse élastique linéaire qu'en stabilité initiale ou en vibrations. Leurs convergences rapides dans divers types de situation semble performante. Ils offrent ainsi une base de calcul linéaire suffisamment fiable ouvrant des perspectives intéressantes pour le calcul non-linéaire.

***CHAPITRE 1***  
***GENERALITE***  
***DEFINITIONS ET***  
***ANALYSES***  
***BIBLIOGRAPHIQUES***

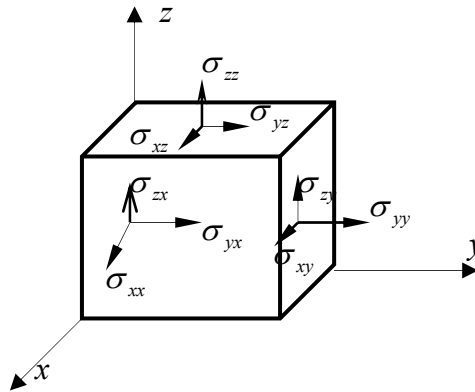


**1.2.1. Lois du comportement :**

**1.2.1.1. Lois de Hooke :**

Dans un repère orthonormé  $(x, y, z)$  l'état de contraintes, en un point donné d'un milieu continu, est entièrement défini par le tenseur de contrainte, noté  $[\sigma]$  fonction du point considéré (FIG I.2).

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$



**FIG. I.2 TENSEURS DE CONTRAINTES DANS UN REPERE ORTHONOME**

Le module d'élasticité des matériaux est la caractéristique de la résistance d'un matériau à la déformation élastique. Le matériau de bas module sont flexibles et subissent des déformations importantes lorsqu'on les charge.

Pour les matériaux dits élastique linéaire, les contraintes sont des fonctions linéaire. Ces relations se traduisent sous la forme générale :

$$[\sigma] = [H][\varepsilon] \tag{1.2}$$

Cette relation dite loi de Hooke généralisé

Et

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

- $[\varepsilon]$  Tenseur de déformation.

- $[H]$  Matrice d'élasticité (faisant intervenir les caractéristiques physiques du matériau).

Les tenseurs  $[\sigma], [\varepsilon]$  étant symétriques, la forme des deux tenseurs devient (sous forme matricielle) :

$$\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_{xx} \sigma_{yy} \sigma_{zz} \sigma_{xy} \sigma_{yz} \sigma_{xz} \rangle \quad (1.4)$$

$$\langle \varepsilon \rangle = \langle \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz} \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{xz} \rangle \quad (1.5)$$

Et pour le cas d'un matériau isotrope, la matrice  $[H]$  à la forme suivante :

$$[H] = a \begin{bmatrix} b & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & b & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

$$a = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad b = 1-\nu, \quad c = \frac{1-2\nu}{2}$$

Où  $E$  et  $\nu$  sont le module d'élasticité (ou le module de Young) et le coefficient de poisson. Et la matrice de souplesse est définie comme étant la matrice inverse de la matrice d'élasticité :

$$[C] = [H]^{-1} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

Pour les contraintes planes la loi de comportement est définie à partir de la matrice  $[C]$  en introduisant l'hypothèse  $\sigma_z = 0$ . La matrice  $[H]$  correspond alors à l'inverse de la matrice  $[C]$  réduite.

La matrice  $[C]$  devient :

$$[C] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

Et la matrice  $[H]$  :

$$[H] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-\nu)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

Pour les déformations planes la loi de comportement est définie à partir de la matrice  $[H]$  en introduisant l'hypothèse  $\varepsilon_z = 0$ . La matrice  $[C]$  correspond alors à l'inverse la matrice  $[H]$  réduite.

#### 1.2.1.2. Cinématique virtuelle :

Les théories linéaires retenues pour les plaques et coques sont des théories dites du premier ordre où le champ de déplacement varie linéairement en  $z$ , sans variation d'épaisseur, en incluant l'influence des déformations de cisaillement transversal. Ces théories sont basées sur l'hypothèse cinématique dite des sections droites. Elle est généralement associée au nom de REISSER et MINDLIN.

L'hypothèse des sections droites permet d'exprimer les déplacements virtuels  $(u_q^*)$  d'un point quelconque  $q$  en fonction des déplacements virtuels du point  $p(u_p^*)$  situé sur la surface moyenne (ou de référence) et en fonction d'un accroissement de déplacements virtuels  $(z\beta^*)$  du à la rotation de la section (FIG I.3).



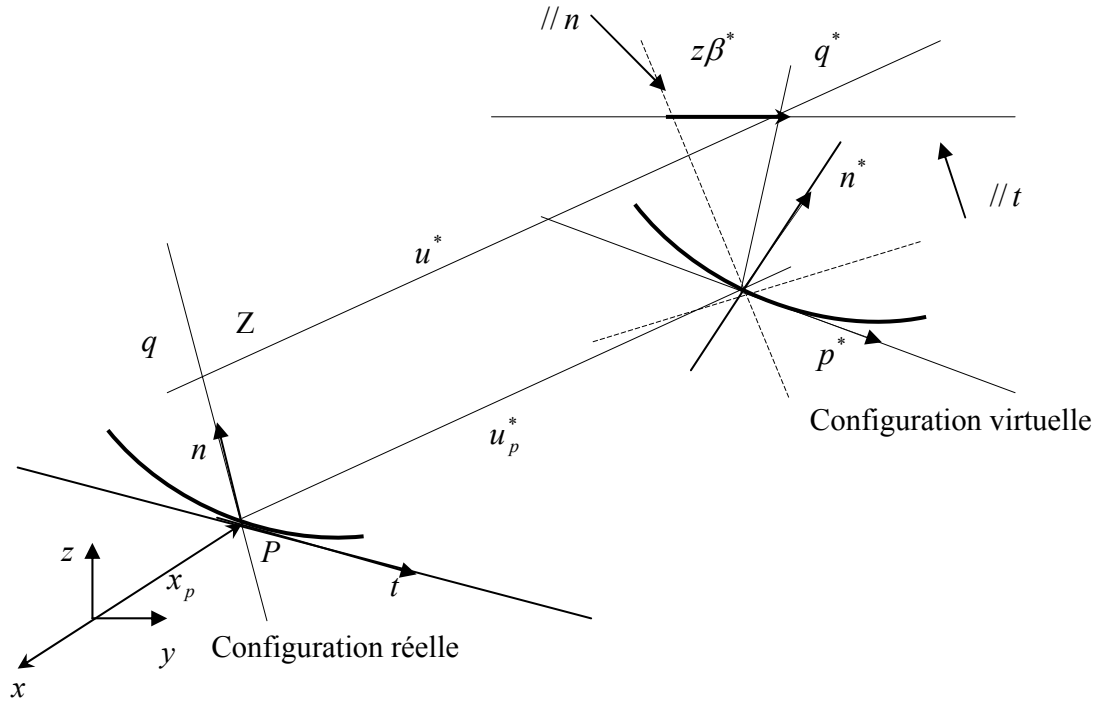


Figure I.3 configuration réelle et virtuelle

Le champ de déplacements virtuels du point  $p(x, y, z)$  est :

$$u_p^* = u^*(x, y, z)i + v^*(x, y, z)j + w^*(x, y, z)k \quad (1.10)$$

Le champ de déplacements virtuels du point  $q(x, y, z)$  est :

$$u_q^* = u_p^* + z\beta^* \quad (1.11)$$

Les déformations réelles sont :

$$\langle \varepsilon \rangle = \langle \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{xz} \rangle \quad (1.12)$$

Avec

$$\begin{cases} \varepsilon_x = u_{,x} + z\beta_{x,x} \\ \varepsilon_y = v_{,y} + z\beta_{y,y} \\ \gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} + z(\beta_{x,y} + \beta_{y,x}) \\ \gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \beta_x + w_{,y} \\ \gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} = \beta_y + w_{,y} \end{cases} \quad (1.13)$$

Ou sous la forme matricielle :

$$\{\varepsilon\} = \{e\} + z\{\chi\} + \{\gamma\} \quad (1.14)$$

$$\langle \gamma \rangle = \langle 0, 0, 0, (\beta_x + w_{,x}), (\beta_y + w_{,y}) \rangle \quad (1.15)$$

$\langle e \rangle = \langle u_{,x}, u_{,y}, (u_{,y} + v_{,x}), 0, 0 \rangle$  : Déformation réelles de membrane ;

$z\langle \chi \rangle$  : Déformation réelles de flexion

$\langle \chi \rangle = \langle \beta_{x,x}, \beta_{y,y}, (\beta_{x,y} + \beta_{y,x}), 0, 0 \rangle$  : Courbures réelles ;

$\langle \gamma \rangle$  : Déformation réelles de cisaillement transversal.

### 1.2.1.3. Principe variationnelle :

Le principe d'équilibre du solide élastique consiste à trouver les composantes de contraintes  $[\sigma]$ , de déformation  $[\varepsilon]$ , de déplacements  $\{u\}$  satisfaisant les relations suivantes :

- Les équations d'équilibre :

$$\{div[\sigma]\} + \{f_v\} = 0 \quad \text{Sur } V \quad (1.6)$$

- Relation déformations-déplacements:

$$[\varepsilon] - \frac{1}{2}([\text{gradu}] + [\text{gradu}]^T) = 0 \quad \text{Sur } V \quad (1.17)$$

- La loi de comportement :

$$\{\sigma\} = [H]\{\varepsilon\} \quad (1.18)$$

- Les conditions aux limites mécaniques :

$$-[\sigma]\{n\} + \{f_s\} = \{0\} \quad \text{Sur } S_f \quad (1.19)$$

- Les conditions aux limites géométriques :

$$\{u\} - \{\bar{u}\} = \{0\} \quad \text{Sur } S_u \quad (1.20)$$

$$S_u \cup S_f$$

$S_f$  : Partie du contour où les efforts sont imposés ;

$S_u$  : Partie du contour où les déplacements sont imposés ;

$\langle n \rangle = \langle n_x, n_y \rangle$  : La normal orientée vers l'extérieur ;

$\langle f_v \rangle$  : Vecteur des efforts par unité de surface moyenne.

On peut définir un modèle général où toutes les relations du problème d'élasticité sont représentées sous forme variationnels. Considérons, la forme intégrale suivante :

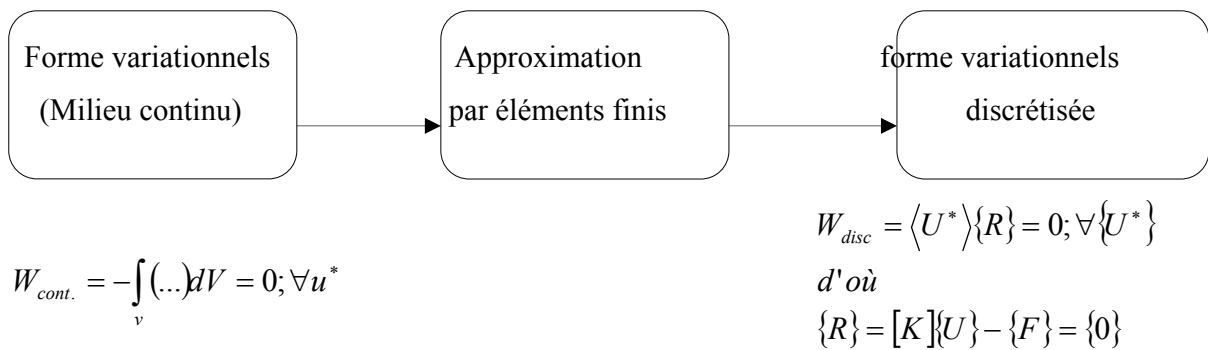
$$W = -\int_v (\langle u^* \rangle (I.6) + \langle \sigma^* \rangle (I.17) + \langle \varepsilon^* \rangle (I.18)) dV \quad (1.21)$$

Cette forme est une forme général permettant de définir les différentes expressions variationnels couramment utilisées en mécanique des solides (principe du travail virtuel en déplacement, principe du travail virtuel complémentaire en contraintes ainsi que les principes mixtes.

**1.2.1.4. Discrétisation d'un domaine par éléments finis :**

**1.2.1.4.1. Formulation générale :**

La méthode des éléments finis est une technique particulière d'approximation des fonctions solution par sous-domaines. Les inconnues notées  $\{U\}$  sont des valeurs de ces fonctions en certains points ou nœuds de chaque sous-domaine. La forme variationnels définie sur le milieu continu est ainsi représentée par une forme variationnels dite discrétisée qui fait intervenir les inconnues nodales  $\{U\}$ . Pour un problème d'élasticité linéaire :



Les différents principes variationnels pour les problèmes d'élasticité font intervenir des intégrations sur le domaine  $V$  et sa frontière :

$$W = \int_v (...)dV - \int_s (...)dS = 0 \quad (1.22)$$

Le domaine  $V$  est représenté comme un ensemble de sous-domaines  $V^e$  appelés éléments finis tels que :

$$V = \sum_e V^e \quad (1.23)$$

L'expression (I.22) peut ainsi s'écrire :

$$W = \sum_e W^e = 0 \quad (1.24)$$

Avec  $W^e = \int_{v^e} (...)dV$  Si  $V^e$  est à l'intérieur de  $V$ , ( $S^e = 0$ ) (1.25)

Où si l'élément a une frontière avec l'extérieur :

$$W = \int_v (...)dV - \int_s (...)dS \quad (1.26)$$

Avec 
$$\sum_e S^e = S \quad (1.27)$$

#### 1.2.1.4.1.1 Discrétisation :

Dans un problème d'élasticité tridimensionnelles nous avons ainsi quinze inconnues (six contraintes, six déformations, trois déplacements) et quinze relations (1.16, 17,18) avec trois conditions aux limites en chaque point de la frontière (1.19, 20).

Le problème peut être décrit en fonction des trois composantes de déplacements en introduisant les relations (1.17, 18) dans les équations d'équilibre (1.16). On obtient ainsi un système de trois équations différentielles partielles du second ordre par rapport aux coordonnées avec les conditions aux limites (1.19, 20). Ce système continu possède un nombre de degrés de liberté infini. Et puisque les systèmes continus ne peuvent en général être résolus directement. Il est nécessaire de discrétiser ces équations, c'est-à-dire de remplacer par des équations algébriques en remplaçant les fonctions continues à intégrer (1.25, ou 26) par des fonctions d'interpolation qui tiennent compte seulement des variables nodales pour chaque sous-domaines (élément).

#### 1.2.1.4.1.2 Intégration :

Les concepts de transformation géométrique et d'élément de référence simplifient la construction des fonctions d'interpolation pour des éléments compliqués. Nous développerons plus tard la technique générale de construction des fonctions d'interpolations sur un élément de référence. La transformation d'un élément de référence en élément réel est caractérisée par matrice jacobéenne.

### 1.3 Interpolation de degré élevé de membrane :

#### 1.3.1. Le verrouillage membranaire

##### 1.3.1.1. Considération générale concernant le phénomène de verrouillage

###### Membranaire :

L'étude du comportement asymptotique des coques élastiques lorsque l'épaisseur  $2\varepsilon$  tend vers zéro a fait apparaître deux types de comportement très différents suivant que la surface moyenne ; compte tenu des conditions aux limites cinématiques, admette des déplacements inextensionnels (coques dite à "*flexion pures non inhibées*" ou, plus simplement, "*non inhibée*") ou non (coques à "*flexion pures inhibées*" ou encore "*inhibées*").

Par ailleurs, l'étude classique de la convergence des approximations par élément finis lorsque le *pas de maille*  $h$  tend vers zéro est faite à  $\varepsilon$  fixé si bien que les constantes qui interviennent dans les estimations peuvent dépendre de  $\varepsilon$ .

Le verrouillage membranaire concerne l'approximation numérique par éléments finis des coques minces non inhibées. Il prend deux formes différentes mais reliées l'une à l'autre suivant que l'on s'intéresse à l'approximation de

- ✓ la limite,  $\mu^0 \in G$  lorsque  $\varepsilon \mapsto 0$ .
- ✓  $\mu^\varepsilon$  pour  $\varepsilon$  petit

Où  $G$  désigne le sous-espace des déplacements intentionnels.

Dans le premier cas, l'approximation est pratiquement impossible sauf dans le cas exceptionnels. Dans le second cas, elle est "*très difficile*" au sens qu'il faut, en général, prendre des pas de maille  $h$  petits que  $\varepsilon$  est petit. Si  $\varepsilon$  est suffisamment petit, les valeurs de  $h$  nécessaires sont alors hors de portée de la capacité des ordinateurs. Ce phénomène est assez paradoxal au sens que les espaces d'approximation  $V_h$  permettent d'approcher tout élément de  $V$  et, a fortiori, tout élément du sous-espace  $G$ . Néanmoins, le processus de pénalisation associé au passage à la limite  $\varepsilon \mapsto 0$  anihile tous les éléments qui ne trouvent pas dans  $G$ . c'est la raison pour laquelle, afin d'éviter le verrouillage, les éléments de  $G$  devraient pouvoir être approchés par des éléments de  $V_h \cap G$ , espace qui se réduit souvent à l'élément nul (ou encore qui contient très peu d'éléments).

Les considérations qui précèdent, aussi succinctes qu'elles soient, permettent de comprendre que la théorie asymptotique des coques est l'instrument privilégié pour analyser le phénomène de verrouillage. Ainsi, le verrouillage membranaire ne peut apparaître que dans les coques non inhibées.

Cette affirmation, bien que banal, permet de mettre un peu d'ordre dans l'ensemble des commentaires que l'on trouve dans la littérature.

Pour MacNeal le verrouillage est la non-uniformité de la convergence pour  $h \mapsto 0$  par rapport à  $\varepsilon$  et qualifiant de robuste une méthode d'approximation dont la convergence pour  $h \mapsto 0$  est uniforme par rapport au paramètre  $\varepsilon$ .

Cette définition, que nous adopterons dans la suite, semble tout à fait judicieuse. En effet, une méthode d'approximation en théorie de coques, minces par nature, se doit de converger correctement quelle que soit la petite épaisseur, sinon il conviendrait de modifier le pas de maille lorsque l'épaisseur diminue. Nous verrons aussi que, pour une coque quelconque, il y a généralement incompatibilité entre les flexions pures et l'espace  $V_h$  de l'approximation par éléments finis.

**1.3.1.2. Mise en équations et position du problème :**

Soit une coque encastrée suivant une partie  $\Gamma_0$  de bord, simplement appuyée suivant une autre partie  $\Gamma_1$  et libre suivant la partie restante les conditions cinématiques sont donc :

$$\begin{cases} u = 0, \frac{\partial u_3}{\partial \nu} = 0 \dots\dots sur \Gamma_0 \\ u = 0 \dots\dots\dots sur \Gamma_1 \end{cases} \tag{1.28}$$

Où  $\vec{\nu}$  Désigne la normale unitaire à la frontière. Désignerons par  $V$  l'espace des déplacements cinématiquement admissibles :

$$v = \{v = (v_1, v_2, v_3) \in H^1 \times H^1 \times H^2\} \text{ Satisfaisant} \tag{1.29}$$

Considérons le cas non couplé, soit alors respectivement  $a_0$  et  $a_1$  les formes d'énergie membranaire et de flexion ; les conditions cinématiques sont supposées telles que :

$$[a_0(v, v) + a_1(v, v)]^{1/2} \tag{1.30}$$

Soit une norme sur  $V$ , équivalente à la norme de  $V$  en tant que sous-espace fermé de  $H^1 \times H^1 \times H^2$ . ceci est le cas si  $\Omega$  est connexe et si  $\Gamma_0$  n'est pas vide. Le problème de la coque considérée, s'énonce alors sous la forme

$$\begin{aligned}
a_0(u, v) &= \int_{\varphi} A_1^{\alpha\beta\lambda\mu} \gamma_{\lambda\mu}(u) \gamma_{\alpha\beta}(v) ds. \\
a_1(u, v) &= \int_{\varphi} A_2^{\alpha\beta\lambda\mu} \rho_{\lambda\mu}(u) \rho_{\alpha\beta}(v) ds. \\
\begin{cases} \text{trouver } u^\varepsilon \in V \text{ tel que} \\ \frac{1}{\varepsilon^2} a_0(u^\varepsilon, v) + a_1(u^\varepsilon, v) = \langle f, v \rangle_{v,v} \quad \forall v \in V \end{cases} & \quad (1.31)
\end{aligned}$$

Où  $f \in V, \varepsilon \in (0, \varepsilon)$  est l où le produit de dualité est :

$$\langle f, v \rangle_{v,v} = \int_{\varphi} f^i v_i ds \quad (1.32)$$

Nous nous proposons d'étudier le comportement asymptotique de  $u^\varepsilon$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro et l'approximation de Galerkin correspondante.

Désignons par  $V_h$  (avec  $h \mapsto 0$ ) une famille de sous espaces de  $V$  tels que les  $V_h$  approchent  $V$ , c'est-à-dire tel que

$$\forall v \in V, \lim_{h \rightarrow 0} \inf_{v_h \in V_h} \|v - v_h\|_V = 0 \quad (1.33)$$

Ou, en d'autres termes,

$$\forall v \in V \text{ et } h \mapsto 0, \exists v_h \in V_h; v_h \mapsto v \text{ dans } V \text{ fort} \quad (1.34)$$

Notons que l'hypothèse (1.33) ou (1.34) est satisfaite pour un certain nombre d'approximation par éléments finis de problèmes de coques.

Considérons alors le problème approché associé à (1.30) :

$$\begin{cases} \text{trouver } u^\varepsilon \in V_h \text{ tel que} \\ \frac{1}{\varepsilon^2} a_0(u^\varepsilon, v) + a_1(u^\varepsilon, v) = \langle f, v \rangle_{v,v} \quad \forall v \in V \end{cases} \quad (1.35)$$

Et supposons que :

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ Fixé, } u_h^\varepsilon \mapsto u^\varepsilon \text{ dans } V \text{ fort} \quad (1.36)$$

Où  $u_h^\varepsilon$  et  $u^\varepsilon$  sont les solutions de (1.35) et (1.31) respectivement, ce qui est classiquement satisfait si les espaces  $V_h$  approchent  $V$  (c'est-à-dire s'ils satisfont à (1.33) ou (1.34)).

**DEFINITION 1.1 :**

Nous dirons que  $V_h$  est une approximation robuste du problème (1.31) si la convergence (1.36) est uniforme par rapport à  $\varepsilon$ , c'est-à-dire si, étant donné  $\delta$ , il existe  $h_0$  (dépendant de  $\delta$  mais pas de  $\varepsilon$ ) tel que

$$\|u_h^\varepsilon - u^\varepsilon\|_V \langle \delta \dots \text{pour } h \langle h_0, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \rangle \rangle \quad (137)$$

**Si l'approximation n'est pas robuste on dit qu'elle verrouille.**

**REMARQUE 1.2 :**

La propriété (1.37) assure qu'une approximation correcte de la solution peut être obtenue indépendamment de l'épaisseur pour un *pas de maillage suffisamment petit*. Une autre définition possible de la robustesse fait intervenir la convergence uniforme par rapport à  $\varepsilon$  et à  $\mathbf{f}$  (pour  $\mathbf{f}$  appartenant, par exemple, à la boule unité  $V'$ ). Dans ce qui suit nous adopterons la définition 1.1.

En pratique, si *le phénomène de verrouillage* apparaît, la valeur  $h_0$  doit être adaptée à chaque valeur de  $\varepsilon$ . En particulier, changer les valeur de  $\varepsilon$  pour un *pas de maille* fixé peut altérer la qualité de l'approximation.

Le théorème qui suit est la base de l'étude du verrouillage fait dans le théorème de MacNeal.

**THEOREME 1.3 :**

Sous les hypothèses qui viennent d'être énoncées, considérons les limites réitérées suivantes :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} u_h^\varepsilon \quad \text{Fort dans } V, \quad (1.38)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_h^\varepsilon \quad \text{Fort dans } V, \quad (1.39)$$

Supposons alors qu'une des deux hypothèses a) ou b) suivantes soit :

- a) les limites (1.38) et (1.39) et sont différentes,
- b) la limite (1.38) existe mais pas la limite (1.39).

Alors l'approximation  $V_h$  n'est pas robuste.

**PREUVE :**

En admettant que la convergence (1.36) soit uniforme en  $\varepsilon$  (définition 1.1), les hypothèses générales de cette section nous permettent d'appliquer le théorème classique d'uniforme convergence des fonctions continues, dont nous rappelons l'énoncé : "soit E et F deux espaces métriques, X une partie de E et  $\{f_n\}$  une suite d'applications continues de X dans F convergeant uniformément vers  $f$ . Soit à un point d'adhérence de X dans E. si pour chaque n,  $f_n(x)$  à une limite lorsque  $x \mapsto a$  par valeurs dans X et si F est complet, alors  $f(x)$  à une limite pour x tendant vers a par valeurs dans X et



$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in X}} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in X}} f(x) \right] \quad (1.40)$$

En effet, en prenant  $E = \mathbb{R}$ ,  $F = V$  (qui est un espaces complet)  $x = \varepsilon$ ,  $X = (0, \varepsilon)$ ,  $f(x) = u^\varepsilon$ ,  $f_n(x) = \{h_n\}$  (où  $h_n = \{h_n\}$  est une suite tendant vers zéro lorsque  $n$  tend vers l'infini) et enfin  $a = 0$ , (1.13) est satisfaite et prend la forme :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u^\varepsilon = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_h^\varepsilon \right] \quad (1.41)$$

Ce qui est en contradiction avec les assertions a) et b) et achève la démonstration.

Il est clair que le théorème 1.3 concerne des limites  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Néanmoins il nous donne des renseignements sur la non-uniformité de l'approximation  $u_h^\varepsilon$  lorsque  $h \rightarrow 0$  dans l'ouvert  $\varepsilon \in (0, \varepsilon)$ .

### 1.3.1.3. Processus de passage à la limite et conséquence sur le verrouillage :

Rappelons (voir II.1.3) que le sous  $G$  des flexion pures qui, rappelons-le, est défini par :

$$G = \{v; v \in V, a_0(v, v) = 0\}$$

Est lui-même un espace de Hilbert pour la topologie induite par celle de  $V$  et que nous pouvons poser le problème limite pour  $\varepsilon \rightarrow 0$  de la façon suivante :

$$\begin{cases} \text{trouver } u^0 \in G \text{ tel que} \\ a_1(u^0, v) = \langle f, v \rangle_{v,v} \quad \forall v \in G \end{cases} \quad (1.42)$$

La forme du premier membre étant continue et coercive puisque  $a_0$  s'annule sur  $G$ ,  $u^0$  existe et est unique en vertu du théorème de lax-milgram.

Définissons comme suite les opérations  $A^\varepsilon \in \varphi(V, V')$  et  $\bar{A} \in \varphi(G, G')$

$$\langle A^\varepsilon u, v \rangle_{v,v} = a_0(u, v) \quad \forall u, v \in V \quad (1.43)$$

$$\langle \bar{A} u, v \rangle_{G,G} = a_1(u, v) \quad \forall u, v \in V \quad (1.44)$$

### REMARQUE :1.4

Il découle classiquement du théorème de lax-milgram que  $A^\varepsilon$  et  $\bar{A}$  définissent des isomorphismes de  $V$  et  $G$  sur respectivement  $V'$  et  $G'$ . De plus.  $V'$  peut être décomposé comme somme directe :

$$V' = G' \oplus G^0 \tag{1.45}$$

Où  $G^0$  est l'espace polaire de  $G$

$$G^0 = \{f \in V'; \langle f, v \rangle_{v,v} = 0 \forall v \in G\} \tag{1.46}$$

On notera que la condition nécessaire et suffisante pour que  $u^0$  soit différent de 0 est que la composante de  $f$  sur  $G^0$  ne s'annule pas.

A présent, désignant par  $V_h$  une famille de sous-espaces de  $V$  approchant  $V$  au sens de (1.16), définissons pour chaque  $h$

$$G_h = G \cap V_h = \{v \in V_h; a_0(v, v) = 0\} \tag{1.47}$$

Et désignons par  $u_h^0$  la solution du problème

$$\begin{cases} \text{trouver } u_h^0 \in G_h \text{ tel que} \\ a_1(u_h^0, v) = \langle f, v \rangle_{v,v} \quad \forall v \in G_h \end{cases} \tag{1.48}$$

Alors, nous avons

**THEOREME 1.5 :**

Soit  $u^\varepsilon, u_h^\varepsilon, u^0, u_h^0$  les solutions de (1.4), (1.8), (1.15) et (1.21) respectivement. Alors,

$$u^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u^0 \quad \text{Dans } V \text{ fort} \tag{1.49}$$

$$u_h^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \dots \text{fixé}]{h \rightarrow 0} u_h^0 \quad \text{Dans } V \text{ fort} \tag{1.50}$$

**PREUVE :**

Nous reconnaissons en (1.22) le théorème (2.1.8) dont la démonstration a donc déjà été faite. La démonstration de (1.23), tout à fait analogue, est laissée au lecteur.

Le résultat (1.22) constitue la propriété fondamentale de la théorie des coques minces : *lorsque l'épaisseur tend vers zéro, la solution converge vers une solution qui est un déplacement inextensionnels, ou encore une flexion pure. Cette propriété est significative lorsque la coque est non inhibée, c'est-à-dire lorsque  $\varphi$  admet des flexions pures non nulles,  $G \neq \{0\}$ .*

Rappelons que dans le cas d'une surface inhibé, c'est-à-dire lorsque  $G = \{0\}$ , (1.22) est toujours vraie mais, bien entendu,  $u^0 = 0$ . Aussi, afin d'avoir une meilleur description du comportement asymptotique de  $u^\varepsilon$  nous avons posé  $u^\varepsilon = \varepsilon^2 v^\varepsilon$  et étudier le comportement limite de  $v^\varepsilon$  (II.1.4). Ce processus limite n'a rien à voir avec le verrouillage membranaire mais fait intervenir des couches limites.

Conformément à (1.23), on a un comportement analogue pour le problème approché dans l'espace  $V_h$  : *le verrouillage membranaire se produit lorsque  $G_h$  n'approche pas de  $G$ .* plus précisément.

**PROPOSITION : 1.6**

Supposons que l'hypothèse générales de cette section, en particulier que  $V_h$  approche de  $V$ , soient satisfaites mais que  $G_h = G \cap V_h$  défini par (1.20) n'approche pas de  $G$  (au sens de (1.6) ou (1.7). alors, l'approximation du problème (1.8) par  $V_h$  n'est pas robuste ( le verrouillage a lieu pour au moins un  $\mathbf{f}$ , par exemple pour  $\mathbf{f} = \bar{A}\bar{v}$ ...où... $\bar{A}$  est l'opérateur défini en (1.17) et  $\bar{v}$  un élément de  $G$  qui ne peut pas être approché par des éléments de  $G_h$ ).

**PREUVE :**

Considérons les problèmes (1.4) et (1.8) avec  $\mathbf{f} = \bar{A}\bar{v}$ . Vérifions que les hypothèses du théorème 1.3 sont satisfaites. D'après l'hypothèse (1.9), la limite lorsque  $h \mapsto 0$  de  $u_h^\varepsilon$  existe est égale à  $u^\varepsilon$  dont, d'après (1.22), la limite lorsque  $\varepsilon \mapsto 0$  est  $u^0$ . Mais avec les forces  $\mathbf{f}$  données,  $\mathbf{u}^0$  n'est autre que  $\bar{v}$  (se reporter à (1.17) et (1.15) si nécessaire). Il en découle que la limite réitérée  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} u_h^\varepsilon$  existe et est égale à  $\bar{v}$ . par ailleurs, la limite réitérée  $\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_h^\varepsilon$  devient, en vertu de (1.23),

$$\lim_{h \rightarrow 0} u_h^0 \quad \text{Dans } V \quad \text{fort} \quad (1.51)$$

Mais comme  $u_h^0 \in G_h \subset G$  la convergence est en fait "dans  $G$  fort". Cette limite peut ou non exister mais, dans tous les cas, elle n'est pas par hypothèse, égale à  $\bar{v}$  et le théorème 2.3 s'applique.

**REMARQUE 1.7 :**

Le verrouillage se produit, en particulier, lorsque  $G \neq \{0\}$  mais  $G_h = \{0\}$  pour tout  $h$ . dans ce cas nous avons *un verrouillage total* pour tout  $\mathbf{f}$ .

**REMARQUE 1.8 :**

Nous verrons dans la section suivante des exemples où  $v \in G_h$  implique  $v_{3h} = 0$  mais où  $G$  contient des éléments dont la troisième composante est non nulle. Il est clair que dans ces cas  $G_h$  n'approche pas  $G$  et que le verrouillage a lieu.

## 1.4 Critères de convergence :

La performance d'un modèle d'éléments finis est souvent jugée sur sa capacité de converger d'une façon monotone et rapide vers une asymptote qui est la valeur exacte du paramètre de comparaison, en fonction du nombre d'éléments, aujourd'hui, et après plus de vingt ans d'expérimentation numérique, on peut résumer les critères qui permettent de s'assurer d'une telle convergence, de la manière suivante :

### 1.4.1- Etat de déformation constante "patch teste" :

Avec le raffinement du maillage, et au-delà d'un nombre élevé d'éléments, la région idéalisée par un de ces éléments est tellement petite que les déformations deviennent quasi constantes. Afin de prévoir le comportement des éléments, AHMAD a proposé le "PATCH TESTE".

Il consiste à *discrétiser* la structure par un *nombre limité* d'éléments ; les conditions limites, ainsi que le chargement est choisi de manière à avoir un *état de déformation constant*. Si les éléments utilisés sur différents maillages *irréguliers* passent ce test, ils satisferont obligatoirement les critères de convergence cités.

### 1.4.2- Mouvement du corps rigide :


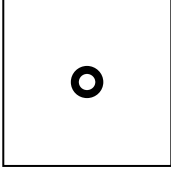
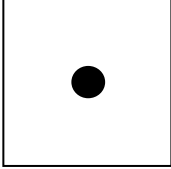
On définit le mouvement de corps rigide (ou modes rigides) comme celui durant lequel l'énergie de déformation est identiquement nulle. Une représentation correcte de ces modes est le second critère de convergence. Elle peut être assurée de trois manières :

#### 1- Soit une représentation "*implicite*" :

Le champ de déplacement doit satisfaire tous les modes rigides. La violation de l'un de ces modes entraîne un enchaînement d'erreur incontrôlable, qui réduit considérablement la capacité du modèle numérique à donner une solution acceptable. Ce choix n'est pas toujours conseillé, en particulier pour les surfaces courbes, car il conduirait à des interpolations très élevées.

#### 2- La seconde représentation est "*explicite*" :

Elle consiste à admettre le principe de superposition de deux modes complètement distincts, dont l'un est purement rigide, avec les paramètres nodaux correspondants (Translation, rotation et/ou forces et couples). Et l'autre purement déformable avec ses paramètres nodaux. Cette démarche est souvent utilisée lors de calcul élémentaire ; celui-ci est fait dans un système d'axes locaux, soit classique, soit de type *corotationnel*. Dans ce dernier, les axes sont associés au mouvement de corps rigide ; en effet, les axes sont définis par le déplacement et la rotation moyenne rigide le long de l'élément. Ce type de système d'axes largement utilisé dans les calculs non-linéaire et dynamiques.

	SERENDIP	HETEROSIS	LAGRANGE
			
INTERPOLATION DE LA FLECHE w	Serendip	Serendip	Lagrange
INTERPOLATION DES ROTATIONS $\theta_1$ ET $\theta_2$	Serendip	Lagrange	Lagrange
TYPE D'INTEGRATION POUR LE CISAILLEMENT	Réduite $2 \times 2$	Exacte $3 \times 3$ Gauss	Exacte $3 \times 3$ Gauss
NOMBRE DES MODES RIGIDES ARTIFICIELS	1	0	1



Nœud avec 3 D.D.L ( $w, \theta_1, \theta_2$ )



Nœud avec 2 D.D.L ( $\theta_1, \theta_2$ )

**Effet de l'intégration réduite sur les modes rigides dans le cas d'un élément de plaque quadrilatère.**

Enfin, il est utile de citer "*l'approche naturelle*" proposée par ARGYRIS. Elle consiste à remplacer les paramètres nodaux initiaux par la superposition de deux types de paramètres, [un symétrique et l'autre antisymétrique].

### 3-une représentation "*isoparamétrique*" :

Si on idéalise la géométrie de coque au moyen des mêmes fonctions (par exemple polynomiales) que celle qui sont utilisées pour la discrétisation du champs de déplacement (transformation isoparamétrique), tous les modes rigides sont représentés de manière exact; cette formulation est proposée par AHMAD qui a développé un élément en partant d'un modèle isoparamétrique à trois dimensions. Le modèle est réduit à deux dimensions quand on néglige les tensions normales et suppose une variation linéaire des champs à travers l'épaisseur de la coque.

#### 1.4.2- Continuité inter-élément:

Un minimum de continuité de la géométrie et du champ de déplacement doit être assuré entre les éléments. Théoriquement, dans les problèmes de flexion, une continuité  $C^1$  semble nécessaire, mais les justifications faites par SENDER [S.5] ont montré qu'il existe des "éléments délinquants", qui violent cette continuité tout en gardant une bonne convergence (vérifiant le "PATCH TEST").

Enfin, on note que, généralement, l'utilisation du système d'axes coorotationnels réduit remarquablement la discontinuité de la partie rigide du déplacement.

#### 1.4.2- Blocage de membrane :

Le dernier problème qui perturbe la convergence est le phénomène de "*blocage de membrane*"; il s'agit de l'incapacité de l'élément à représenter des déformations en mode de flexion pure, sans qu'il soit accompagné par des extensions de la fibre moyenne (énergie de membrane). Ce phénomène est détecté dans la quasi totalité des éléments de coque. Néanmoins, l'application et, par suite, la correction numérique, dépendent de la théorie de coques choisie. Dans le théorème de MACNEAL on s'intéresse particulièrement au phénomène de VERROUILLAGE TRAPEZOÏDALE d'un élément de membrane a quatre dans un champ linéaire. Cet aspect sera largement détaillé dans le prochain chapitre.

### 1.5 Conclusions :

Ce chapitre était une tentative d'illustration du choix que nous adopterons dans le développement d'un élément d'arc et d'un élément de coque. Il s'agit d'un choix par élimination. Nous venons d'exposer brièvement les différents problèmes liés à la modélisation, ainsi que les différentes solutions existantes avec leurs avantages et leurs inconvénients.

Ce tour d'horizon nous permet de conclure qu'un bon élément devrait présenter les caractéristiques suivantes :

- ✓ Pas de blocage de cisaillement.
- ✓ Pas de blocage de membrane
- ✓ Pas de modes rigides parasites.
- ✓ Formulation indépendante
- ✓ Convergence garantie vers la solution exacte.
- ✓ Pas de paramètre ou coefficients problèmes (linéaire, non-linéaire, statique, dynamique, stabilité...).
- ✓ Indépendant de l'orientation du maillage.
- ✓ Les D.D.L. correspondent aux translations et rotations (formulation déplacement).

**CHAPITRE 2**

**THEOREME DE MACNEAL**

**(NUMERIQUEMENT)**



Chapitre 2 :

## THEOREME DE MACNEAL

### 1.1 Introduction

Une mise au point du théorème concernant le verrouillage trapézoïdal des éléments de membranes à quatre-nœuds développée par MacNeal est l'objectif de ce chapitre où nous abordons les différents aspects de ce théorème, les différentes approximations et leurs adaptations à la méthode des éléments finis, et nous montrons la capacité exceptionnelle de ce théorème dans le calcul linéaire et précisément la bonne aptitude à traiter d'une façon simple le phénomène de "verrouillage trapézoïdal".

Dans ce chapitre nous avons suivi le principe de cheminement de MacNeal dans la démonstration du verrouillage quant la forme de l'élément est un trapèze isocèle.

### 2.2- Théorème de MacNeal Numériquement :

#### 2.2.1-problèmes propres à la théorie d MacNeal :

Il est évident que n'importe quel élément de membrane à quatre-nœuds avec deux degrés de liberté par noeuds, où ces derniers qui peuvent subir un verrouillage de flexion en plan où échoue un  $C^0$  patch test quand la forme de l'élément est un trapèze isocèle. Plus loin Ce résultat exclue efficacement le prolongement des contraintes linéaire possible pour de tels éléments au delà de ce qui a été déjà réalisé pour des formes rectangulaires et parallélogramme.

L'importance des éléments simples de membrane à trois et à quatre noeuds ce manifeste dans leurs capacité de représenter des formes structurales très complexes avec un nombre minimum de degrés de liberté d'une part. Et d'autre part c'est leurs tendance au verrouillage en présence des charges de flexion en plan. en effet rien ne puisse être fait pour alléger ce verrouillage dans le cas des court contraintes avec un nombre croissant de degrés de liberté connecteurs,mais beaucoup de choses sont et peuvent être faites pour l'élément analogue à quatre-nœuds qui à deux degrés de liberté supplémentaires en jeu.

Peut-être le premier élément qui a évite le verrouillage de flexion en plan, c'était l'élément rectangulaire décrit par Turner *et autres*.<sup>1</sup> dans 1956. L'action d'éviter le verrouillage pour le cas du quadrilatère général avéré être plus difficile. Jusque a récemment on l'a considéré tout à fait suffisante pour démontrer l'absence du verrouillage pour des formes rectangulaires tout en satisfaisant un essai de constant stress patch teste pour des formes arbitraires.

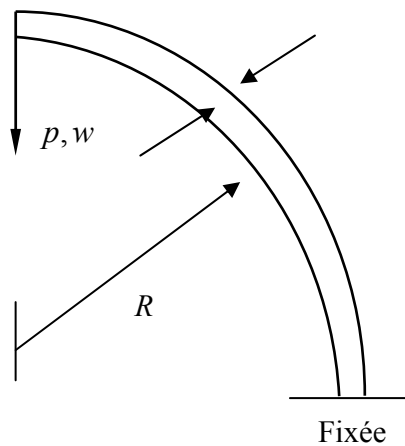
Le premier succès dans l'acquiescement à cette condition limitée a été réalisé par Pian2 avec l'effort de son élément hybride. Légèrement plus tard on a montré que la condition pourrait également être satisfaite en modifiant un élément isoparamétrique on introduisant l'intégration3 réduit pour le cisaillement seulement, ou les fonctions déplacement de bulle.<sup>4,5</sup>

Tandis que simple, la méthode d'intégration d'ordre réduit a donné des résultats moins précis pour la flexion en plan que chaque une des deux autres solutions, qui aide à l'apparition du verrouillage pour les matériaux presque incompressibles, pour enlever la dernière difficulté on exigé une autre modification pour la relation contrainte-déplacement.<sup>6</sup> MSC/NASTRAN incluent l'élément de brique pleine à huit noeuds (HEXA (8)) avec un tel dispositif.

Le verrouillage en flexion réapparaît également quand la forme de l'élément rectangulaire est tordue, comme il est montré dans figure1. Les deux seuls cas indépendants dont un rectangle peut être tordu sont le trapèze (figure1 (b)), et le biais (figure 1(c)), et toutes les tentatives de résoudre le problème de verrouillage se sont concentrées sur un cas ou un autre.

Il important de noter, comme préliminaire plus loin dans la discussion, que la définition de la flexion se confond quand le trapèze et le biais sont combinés, ou quand deux trapèzes dans la perpendiculaire sont combinés, pour donné un quadrilatère général la flexion pour un rectangle est associée La flexion pour un rectangle est associées à  $\sigma_{x,y}$  ou  $\sigma_{y,x}$ , Ce qui représente que deux possibilités des six états d'effort linéaires possibles qui sont, en conséquence, non invariables à la rotation du système de coordination Ils peuvent, cependant, être fixés à l'élément en alignant le x et y des co-ordination axes avec les côtés. Ce n'est que parce que la flexion avec cette orientation particulière a une importante application pratique, comme il est montre sur la figure1. Un quadrilatère à quatre noeuds a n'importe quelles possibilités de contrainte linéaires il est utile pour tout.

Dans le cas du quadrilatère général, le choix de l'orientation des axes est vu pour être tout à fait arbitraire quand on se rend compte que si les conditions des forces D'équilibre sont imposés, les six états de force linéaires réduites à quatre qui peuvent être représentés comme, une flexion en plan dans quatre directions également espacée,  $\{(\sigma_{x,y}, \sigma_{y,x}, \sigma_{\bar{x},\bar{y}}, \sigma_{\bar{y},\bar{x}})\}$  où  $(\bar{x}, \bar{y})$  sont orientées a  $45^\circ$  par rapport à  $(x, y)$ .



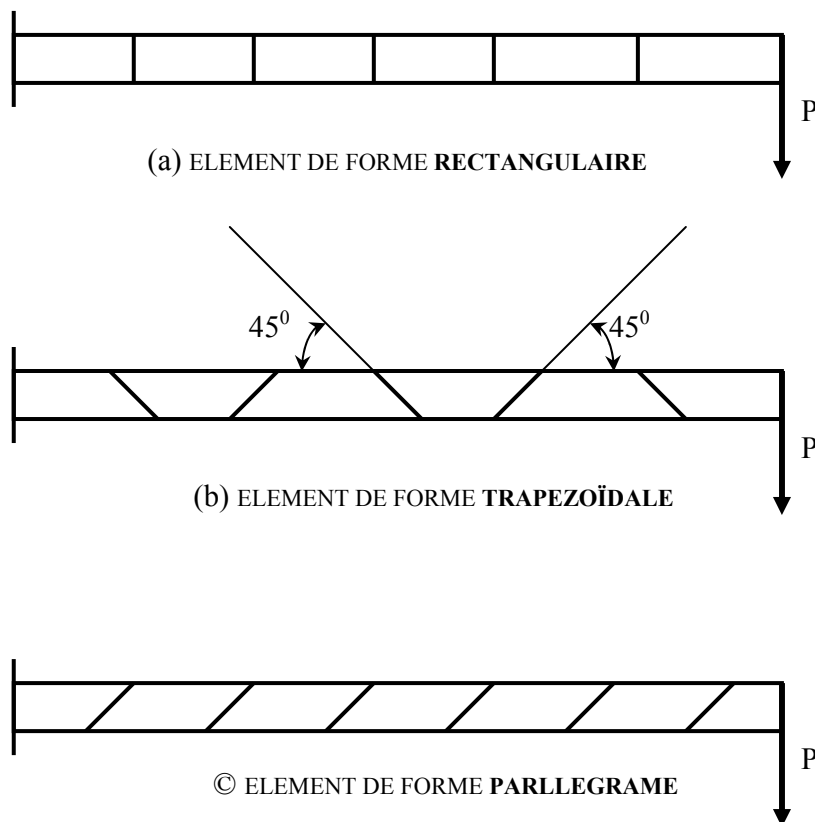
h/R	0-03	0-006
	w/P	w/P
Theory	1-000	1.000
QUAD4 membrane	0.615	0.163
QUADH membrane	1.008	1.008

FIGURE (2.1) COMPARAISON DE QUADH ELEMENT DE MEMBRANE AVEC LA THEORIE DE L'ELEMENT DE MEMBRANE QUAD4 ARC EN PORTE-A-FAUX INCURVE

La difficulté peut être résolue en définissant les composants de l'effort en ce qui concerne les coordonnées normal ( $\xi, \eta$ ) utilisé en formant les fonctions de forme de l'élément de sorte que les états de force liés au concept de la flexion en plan deviennent  $\sigma_{\xi, \eta}$ , et le  $\sigma_{\eta, \xi}$ , alternativement, les composants peuvent être définis dans un système à coordonne oblique ( $\xi, \eta$ ) où ( $\xi, \eta$ ), sont alignés avec les lignes  $\eta=0$  et  $\xi=0$  respectivement. Les deux variations ont été employés pour concevoir element<sup>7-9</sup> qui passent l'essai de constant stress patch teste et qui évite le verrouillage pour le cas particulière d'éléments parallélogramme soumi à la flexion en plan voir (figureII.1(c)).

La question reste est-il possible de définir des éléments à quatre noeuds qui évitent le verrouillage pour des formes plus générales. Le cas du trapèze isocèle est particulièrement approprié à ces deux conditions à cause de son importance pratique et parce qu'il représente l'autre mode primitif de déformation du rectangle. Les auteurs de QUADH à quatre noeuds supposent que la contrainte de l'element<sup>10</sup> ne présente aucun verrouillage pour cette forme quand l'effort de flexion est alignée avec les cotés parallèle (voir le schéma 2).L'élément, malheureusement, ne passe pas un essai de constant patch teste.

Le débat qui concerne le QUADH dans la référence 10 conclue ; que 'il est tentant de supposer qu'une difficulté pour les troubles du patch test pour le QUADH peuvent être trouvée, juste comme ils ont été trouvés pour l'élément de Wilson.<sup>5</sup> après des tentatives répétées et non réussies il ont commencé à être suspectées qu'une difficulté ne pourrait pas être trouvée. Les essais décrits ci-dessous ont été conçus pour décider si l'élément à quatre noeuds peut être conçu pour passer simultanément un essai de constant strain patch test tout en évitant un verrouillage de flexion en plan pour des formes trapézoïdales.



**FIGURE 2.2 POUTRE DROITE EN PORTE-A-FAUX DE**  
*longueur = 6.0; epaisseur = 0.2;  $\nu = 0.3$ .*

### Tip displacements using MSC/NASTRAN

HEXA (8) éléments:

0.981 (a)

0.069 (b)

0.080 (c)

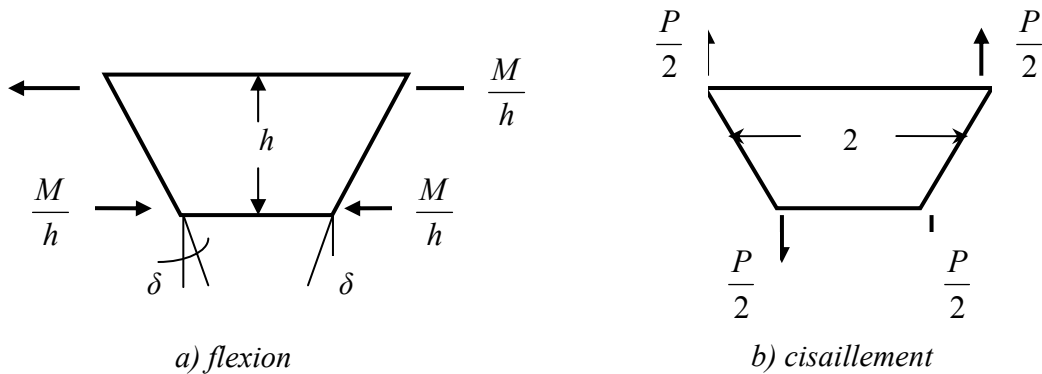
1-000 EXACT

**La question reste est-il possible** de définir un élément à quatre-nœuds qui évite le verrouillage pour des formes plus générales. Le cas du trapèze isocèle est particulièrement approprié à ces deux conditions vu son importance pratique et parce qu'il représente l'autre mode primitif de déformation du rectangle.

Les auteurs de QUADH à quatre noeuds supposé que la contrainte de l'element<sup>10</sup> ne présente aucun verrouillage pour cette forme quand l'effort de flexion est alignée avec les cotés parallèle (voir le figure. 2).L'élément, malheureusement, ne passe pas un essai de constant patch teste.

### 2.3-Le théorème : analyse et démonstration :

Considérons un élément de forme trapèze isocèle à quatre-nœuds de taille  $l$ , de longueur,  $h$ , avec un angle du trapèze  $\delta$ , soumis à des moments séparés, et une charge répartie tout au long de la partie latérale (figure 2.3).



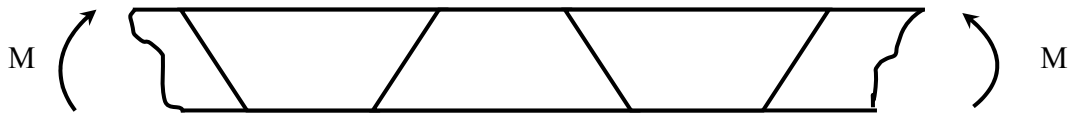
#### Les conditions de chargements de l'élément trapèze isocèle selon " MacNeal "

**FIG (2.3)**

La signification des charges représentée dans le (figure 2.3 (a)) c'est quand l'ensembles de tels éléments sont chargés de cette manière et jointif ensemble bout à bout avec des éléments alternativement inversés, ils forme une poutre droites soumise à des moments aux extrémités voir : (figure 2.4 ).

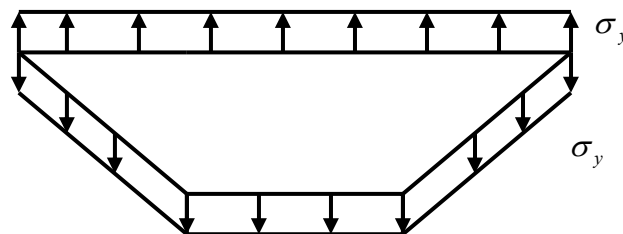
De bons résultats peuvent être réalisés pour ce cas, à condition que l'élément ait une possibilité de flexion pratique. La signification du chargement nodal sur la (figure 2.3(b)) c'est-à-dire le chargement nodal qui résulte quand l'élément est inclus dans le champ de contrainte latéral uniforme,  $\sigma_y$  voir (figure. 2.5).

Des résultats exacts peuvent être réalisés pour ce cas à condition que l'élément passe un essai patch test. Depuis l'élément et les deux conditions de charge ont un plan vertical de symétrie, le déplacement nodal résultant doit avoir la même symétrie, comme représenté sur la (figure 2.6).



POUTRE DROIT CONSTRUIT AVEC L'ELEMENT DE TRAPEZE ISOCELE ET CHARGE AVEC DES MOMENTS AUX EXTREMITES

**FIGURE (2.4)**



ÉLEMENT TRAPEZOÏDAL DANS LE CHAMP DE CONTRAINTE UNIFORME

**FIGURE (2.5)**

En contraintes planes comme en déformation planes, le champ de déplacement se réduit à ses composantes  $u$  et  $v$  suivant deux directions cartésiennes orthogonales  $x$  et  $y$ . Il suffit d'ailleurs pour les deux problèmes, de considérer que les trois composantes de contraintes en  $xy$  des déformations et des contraintes.

En contraintes planes les autres composantes des contraintes sont nulles par définition et ne contribuent donc pas au travail interne. En déformations planes, la composante des contraintes perpendiculaire au plan  $xy$  n'est pas nulle. Mais par définition. C'est la composante de la déformation qui est nulle dans cette direction, de sorte que la contrainte correspondante ne participe pas non plus au travail interne.

Le travail des forces extérieures, appliquées à l'élément sera défini par la relation :

$$(W_{ext})_e = \int_{ve} ([N]\{\bar{q}_e\})' \{\bar{b}_e\} dV + \int_{se} ([N]\{\bar{q}_e\})' \{\bar{p}_e\} dS + \{\bar{q}_e\}' \{F_e^r\}$$

$$\begin{aligned}
 &= \{\bar{q}_e\}' \left[ \int_{ve} [N]' \{\bar{b}_e\} dV + \int_{se} [N]' \{\bar{p}_e\} dS + \{\bar{F}_e^r\} \right] \\
 &= \{\bar{q}_e\}' \left[ \{\bar{F}_e^v\} + \{\bar{F}_e^s\} + \{\bar{F}_e^r\} \right]
 \end{aligned}$$

Où :

$\{\bar{b}_e\}$  : Vecteur des forces de volume.

$\{\bar{p}_e\}$  : Vecteur des forces de surface.

$\{\bar{P}_e\}$  : Vecteur des forces concentrées (en surface)

$\{\bar{F}_e^r\}$  : Vecteur représentant l'interaction entre les éléments (aux nœuds).

Le travail externe effectué sur l'élément est :

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{1}{2} \left[ \frac{2M}{h} (u_1 - u_2) + P(v_1 - v_2) \right] \\
 &= \frac{1}{2} [M\Delta\theta + P\Delta v]
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

D'où :

$\Delta\theta = 2(v_1 - v_2)/h$ , et  $\Delta v = v_1$  ; sont les déplacements correctement mesurés à s'associer à M et à P.

Si le matériel linéaire élastique est assumé, alors les déplacements peuvent être écrits comme suit en termes de charges appliquées :

$$\left\{ \begin{array}{c} \Delta\theta \\ -\Delta v \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} M \\ P \end{array} \right\} \tag{2.2}$$

D'où le principe de la réciprocité exige cela :

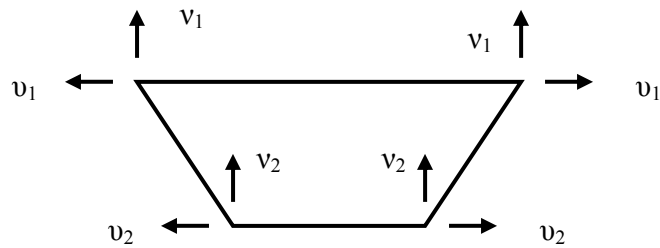
$$z_{12} = z_{21} \tag{2.3}$$

Si on considère que la matériel est isotrope avec un coefficient de poisson presque nulle ; puis la contraintes horizontal,  $\varepsilon_x$  sera nulle. Pour le chargement représenter sur la (figure 2.5) de telles sortes que le déplacement horizontal  $u_1$  et  $u_2$  soit également nulle.

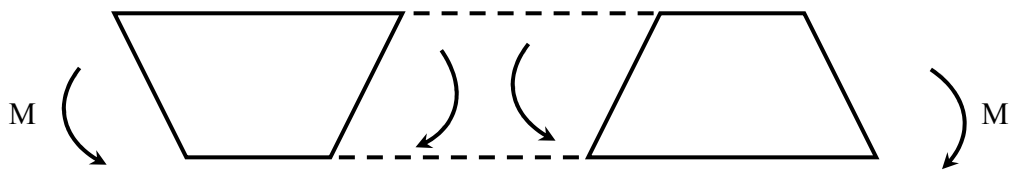
Il découle de la définition de  $\Delta\theta$  cela :

$$\Delta\theta/P \Big|_{M=0} = z_{12} = 0 \tag{2.4}$$

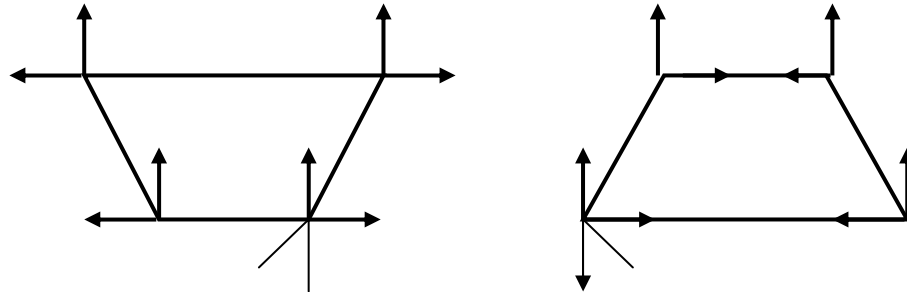




DEPLACEMENTS NODAUX POUR L'ELEMENT  
TRAPEZOÏDAL CHARGE PAR SYMETRIE  
FIGURE (2.6)



DEUX ELEMENTS TRAPEZOÏDAUX AVEC DES MOMENTS  
FIGURE (2.7)



PROPRIETE DE SYMETRIE DE DEFORMATION POUR DEUX ELEMENTS  
ADJACENTS  
FIGURE (2.8)

Après les deux éléments trapézoïdaux identiques chargés comme représenté sur la (figure 2.3 (a)) pour être rassemblé comme représenté sur le sa (figure 2.7) avec l'intention de les joindre à deux segments d'une flexion de la poutre droit. Les déformations de chaque élément doivent avoir la même propriété de symétrie que le chargement, voir (figure 2.8).

On note que les déplacements nodaux éléments fixes des deux éléments sont renversés juste comme les couples de moments libres des éléments fixes sont renversés dans (figureII.7). La seule condition supplémentaire pour se joindre est la condition de compatibilité

de contrainte, c.-à-d. l'extrémité gauche de l'élément B devrait avoir la même longueur déformée que la droite extrémité de l'élément A.

$$\text{D'où :} \quad \Delta l_A = \Delta l_B \quad (2.5)$$

$$\Delta l_A = (u_1 - u_2) \sin \delta + (v_1 - v_2) \cos \delta \quad (2.6)$$

$$\Delta l_B = (u_2 - u_1) \sin \delta + (v_2 - v_1) \cos \delta \quad (2.7)$$

L'examen des équations (2.6) et (2.7) montre cela :

$$\Delta l_A = -\Delta l_B \quad (2.8)$$

En conséquence, la seule manière dont la condition de symétrie équation (2.8) et la condition de la contrainte de compatibilité équation (2.5) peuvent être satisfait est :

$$\Delta l_A = \Delta l_B = 0 \quad (2.9)$$

Ce qui implique :

$$v_1 - v_2 = -(u_1 - u_2) \tan \delta \quad (2.10)$$

Par conséquence :

$$\frac{z_{21}}{z_{11}} = \frac{\Delta v}{\Delta \theta} \Big|_{P=0} = \frac{h (v_2 - v_1)}{2 (u_2 - u_1)} = -\frac{h}{2} \tan \delta \quad (2.11)$$

Des équations (2.3) et (2.4) on a  $z_{21} = z_{12} = 0$ , le seule cas d'où l'équation (2.11) peut être satisfaite c'est: si  $z_{11} = 0$ . Qui définit un état de pessimum de la condition de verrouillage, c.-à-d. la rotation par accroissement,  $\Delta \theta$ , en réponse au moment appliqué,  $M$ , est égale zéro. On conclut que si le coefficient de Poisson,  $\nu$ , égale a zéro et l'essai de patch test est satisfait, alors le verrouillage résulte.

Si le rapport de Poisson est différent de zéro, la valeur de  $z_1$  sera alors définie, mais de manière invraisemblablement limitée pour les éléments trapézoïdaux qui passent l'essai de patch test. Dans ce cas-ci les déplacements nodaux pour le champ de contrainte uniforme représenté sur la (figure 2.5) satisferont :

$$\Delta v = hP/EI \quad (2.12)$$

D'où l'épaisseur du groupe d'éléments est assumée, et

$$\frac{\Delta u}{\Delta v} = -\nu \tan \delta \quad (2.13)$$

De sorte que :

$$z_{22} = \frac{\Delta v}{P} \Big|_{M=0} = \frac{h}{El} \quad (2.14)$$

Et :

$$\frac{z_{12}}{z_{22}} = \frac{\Delta \theta}{\Delta v} \Big|_{M=0} = \frac{2 \Delta u}{h \Delta v} \Big|_{M=0} = -\frac{2v \tan \delta}{h} \quad (2.15)$$

La valeur de  $z_{11}$  peut être écrite :

$$z_{11} = z_{22} \frac{z_{21}}{z_{22}} \frac{z_{11}}{z_{21}} \quad (2.16)$$

D'où  $z_{12} = z_{21}$  la symétrie de la matrice de flexibilité.

La substitution des équations (2.14), (2.15) et (2.11) respectivement pour les facteurs dans l'équation (2.16) produit :

$$z_{11} = \left( \frac{h}{El} \right) \left( -\frac{2v \tan \delta}{h} \right) \left( -\frac{2}{h \tan \delta} \right) = \frac{4v}{Elh} \quad (2.17)$$

La valeur de  $z_{11}$  qui donnera la déformation de la flexion désirée des multiéléments représenté sur le schéma 4 c'est valable juste pour une poutre de Timoshenko de longueur,  $l$ , et de taille,  $h$ , c'est-à-dire :

$$\bar{z}_{11} = \frac{\Delta \theta}{M} \Big|_{P=0} = \frac{l}{EI} = \frac{12l}{Eh^3} \quad (2.18)$$

Le coefficient de la flexibilité réelle à la flexibilité prévue est :

$$\frac{z_{11}}{\bar{z}_{11}} = \frac{v}{3} \left( \frac{h}{l} \right)^2 \quad (2.19)$$

Ce qui est plus petit que l'unité pour n'importe quelle valeur de l'allongement  $l/h$ , et plus grand que  $\sqrt{v/3}$  et il diminue rapidement pour de plus grandes valeurs.

Le résultat est un cas grave de verrouillage pour la plupart des rapports d'allongements pratiques.

On peut conclure que un élément trapézoïdal à quatre noeuds échoue d'abord un essai de patch test ou gère de façon austère un verrouillage pour tous les rapports d'allongements,  $l/h$  plus grand que l'unité. Plus loin, si l'élément satisfait l'essai de patch test, la

valeur désirée de la rigidité à la flexion en plan sera réalisée seulement si  $l/h = \nu/3$ . Ces conclusions ne dépendent pas des détails de la conception interne de l'élément. Elles résultent parce que le nombre de paramètres disponibles ( $z_{11}, z_{12}, z_{21}, z_{22}$ ) est insuffisant pour fournir des possibilités de verrouillage de flexion en plan, alors que la réciprocité simultanément satisfaisante, la compatibilité de contrainte et l'essai de patch test.

Il est intéressant de se demander pourquoi une conclusion semblable ne se tient pas pour des éléments de membrane à quatre-neuds pour des formes de parallélogramme.

La raison est que les charges qui produisent des efforts dans les éléments parallélogramme sont dans une différente symétrie cyclique group<sup>11</sup>; que les charges qui produisent des efforts linéairement variables et par conséquent, contrairement au cas trapézoïdal, les deux types de chargement n'ont pas des réponses couplées. Par conséquent, les changements de conception qui affectent la réponse à un type de chargement n'affectent pas nécessairement la réponse à l'autre.

#### 2.4- Conclusions :

Le théorème qui a été présenté exclue effectivement les efforts qui améliore l'exactitude au delà de ce qu'a été déjà réalisé pour des éléments à quatre noeuds, avec deux degrés de liberté par noeud. La capacité des d'effort linéaires de tels éléments sont au mieux limitées à une flexion en plan tout au long des directions principales, des rectangles et des parallélogrammes.

C'est quand même un accomplissement impressionnant qui donne un nombre réduit de degrés de liberté. Plus loin l'amélioration de l'exactitude peut être obtenu seulement en s'ajoutant aux actions des degrés de liberté reliés.

Ajouter une rotation libre en plan à chaque noeud a montré qu'elle donne une précision supérieurs<sup>12-14</sup> aux dépens de la complexité et du temps d'exécution modérément accrus d'ordinateur.

**CHAPITRE 3**

**FORMULATION DES ELEMENTS**

**Q4 ; Q4PS ; SBQ4**



## Chapitre 3 :

## Formulation des éléments Q4 ; Q4PS ; SBQ4

**3.1 Introduction :**

Dans ce chapitre nous allons donner les différentes étapes de formulation, de type déplacement et mixte (hybride), pour l'élément quadrilatère à quatre nœuds dans le cas de contrainte planes (comportement membranaire). Ainsi nous présenterons toutes les étapes nécessaires à l'élaboration de la matrice de rigidité élémentaire et vecteur de charges, en se basant sur les principes variationnels (pour les types des formulations, déplacement et mixte). Avec l'implémentation de l'élément **Q4PS** ; nous commençons d'abord par le passage en revue d'une nouvelle famille d'éléments qui s'est distinguée ces dernières années. Il s'agit d'élément de membrane avec rotation  $\theta_z$  autour de la normale au plan moyen. Nous passons ensuite à la formulation des éléments finis correspondants. Leurs applications aux problèmes de coque, en les combinant à des éléments de flexion, et ils seront mis en évidence.

**3.2- Formulation déplacement :**

En considérant l'équilibre d'un élément de surface  $dA$  au voisinage du point  $p$ , du plan de référence  $A$ , on obtient en coordonnées cartésiennes les équations aux dérivées partielles

$$\text{suivantes :} \quad \begin{cases} \sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y} + f_x \\ \sigma_{yx,x} + \sigma_{yy,y} + f_y \end{cases} \quad (3.1)$$

Pour un problème plan (figure 3.1).

$$\text{Ou sous forme matricielle :} \quad \{div[\sigma]\} + \{f_v\} = \{0\} \quad (3.2)$$

Définies sur la surface  $A$  (figure 3.1)

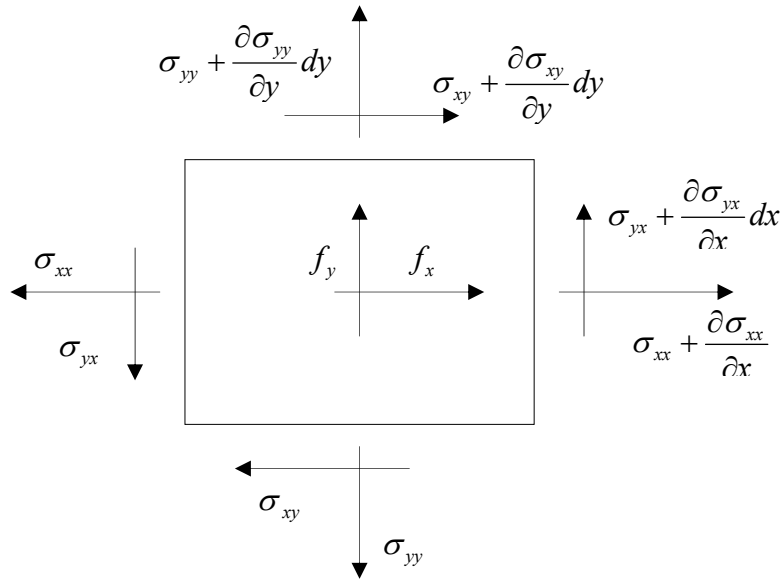


FIGURE. 3.1 EQUILIBRE D'UN ELEMENT  $dx dy$

Avec :

$-\{\sigma\}$  est le tenseur de contraintes de Cauchy au point  $P$  ;

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix}$$

$-\langle div \rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle$  : opération différentiel ;

Et par :

$$[\sigma]\{n\} = \{f_s\} \tag{3.3}$$

Définies sur la frontière  $dS$

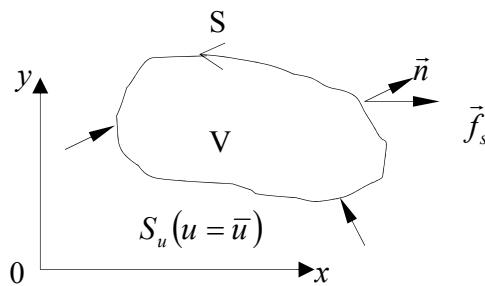


FIG. 3.2- LES DEUX PARTIES DU

$$S = S_u \cup S_f$$

$S_f$  : partie du contour de  $A$  où les efforts sont imposés.

$S_u$  : partie du contour de  $A$  où les déplacements sont imposés.

$\langle n \rangle = \langle n_x n_y \rangle$  : La normal orienté vers l'extérieure ;

$\langle f_s \rangle = \langle f_{sx} f_{sy} \rangle$  : Sollicitation sur la frontière ;

$\langle f_v \rangle = \langle f_{vx} f_{vy} \rangle$  : Vecteur des efforts par unité de surface moyenne suivant les deux directions  $x$  et  $y$  ;

### 3.2.1- présentation général :

Une forme variationnels associée aux relations d'équilibre est obtenue par la méthode des résidus pondérés [4].

Où on choisit comme fonctions de pondération des déplacements virtuels  $u^*$  et  $v^*$ .

$$W = \int \langle u^* v^* \rangle \{ \{ div[\sigma] \} + \{ f_v \} \} dV \quad (3.4)$$

Avec :  $dV = h dA$  Et  $h$  constant.

Pour tout champs de déplacement virtuels  $\langle u^* \rangle$  les conditions aux limites sur  $S_f$  sont données par (3.3). En intégrant (3.4) par partie et représentant (3.3) sous forme variationnels nous obtenons la forme faible  $W$  :

$$W = W_{int} - W_{ext} \quad \forall \langle u^* \rangle \quad (3.5)$$

$$W = \int_V (u^*_{,x} \sigma_{xx} + v^*_{,y} \sigma_{yy} + (u^*_{,y} + v^*_{,x}) \sigma_{xy}) dV \quad (a) \quad (3.6)$$

Qui est, le travail des forces intérieures ou l'énergie de déformation.

Et :

$$W_{ext} = \int_V \langle u^* \rangle \{ f_v \} dV + \int_{sf} \langle u^* \rangle \{ f_s \} dS + \int_{su} \langle u^* \rangle \{ \sigma(n) \} dS + \int_{su} \{ \sigma^*(n) \} (\{ u \} - \{ \bar{u} \}) dS \quad (b)$$

Qui est, le travail des forces extérieures.

$dV$  : Élément de volume  $V$  ;

$dS$  : Élément de surface ;

$$\langle \sigma(n) \rangle = \langle \sigma_{xn} \sigma_{yn} \rangle = [\sigma] \{ n \}.$$

Sur la frontière  $S_u$  les déplacements sont imposés, si nous considérons un champs de déplacement virtuel cinématiquement admissible, c'est-à-dire :



$$\langle u^* \rangle = \langle 0 \rangle \text{ Et } \{u\} = \{\bar{u}\} \text{ sur } S_u$$

Le travail des forces extérieures d'un élément de volume est :

$$W_{ext}^e = \int_{V^e} \langle u^* \rangle \{f_v\} dV + \int_{S_f^e} \langle u^* \rangle \{f_s\} dS \quad (b')$$

Si l'élément de volume  $V^e$  a une frontière avec l'extérieur.

$$\text{Et par :} \quad W_{ext}^e = \int_{V^e} \langle u^* \rangle \{f_v\} dV \quad (b'')$$

Si  $V^e$  est à l'intérieur de  $V$ .

En effectuant une intégration selon l'épaisseur :

$$\int_{-t}^t \{f_v\} dz = \int_{-t}^t \begin{Bmatrix} f_{vx}(x, y, z) \\ f_{vy}(x, y, z) \end{Bmatrix} dz = h \begin{Bmatrix} f_{sx}(x, y) \\ f_{sy}(x, y) \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

$h$  : L'épaisseur de la plaque.

Nous considérons dans ce qui suit  $f_{sx}(x, y), f_{sy}(x, y)$  constantes et nous les noterons  $f_x, f_y$ .

$$\text{Donc :} \quad \int_{-t}^t \{f_v\} dz = h \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} = h \{f\} \quad (3.8)$$

Où :  $\{f\}$  est le vecteur des efforts par unité de surface moyenne suivant les deux directions  $x$  et  $y$ . D'après (III.6-a) l'expression de l'énergie interne pour l'élément de volume  $V^e$  donnée par :

$$W_{int}^e = \int_{V^e} \langle e^* \rangle \{\sigma\} dV \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \text{Où :} \quad -\langle e^* \rangle &= \langle u_{,x}^* v_{,y}^* u_{,y}^* + v_{,x}^* \rangle \\ -\langle \sigma \rangle &= \langle \sigma_x \sigma_y \sigma_{xy} \rangle \end{aligned}$$

$$\text{Et puisque :} \quad \int_{-t}^t \{\sigma\} dz = \{N_m\}$$

L'expression de l'énergie interne devient :

$$W_{int}^e = \int_{A^e} \langle e^* \rangle \{N_m\} dA \quad (3.10)$$

Et le travail des efforts extérieurs :

$$W_{ext}^e = \int_{A^e} \langle u^* \rangle h \{f\} dA \quad (3.11)$$

$$\text{Où : } \begin{cases} \{N_m\} = [H_m]\{e\} & (a) \\ \{e\} = [B_m]\{u_n\} & (b) \\ \langle e^* \rangle = \langle u_n^* \rangle [B_m]^T & (c) \\ \{u^*\} = [N]\{u_n^*\} & (d) \end{cases} \quad (3.12)$$

En introduisant les formules (III.12-a, b, c et d) dans (III.10-12) on aura :

$$W_{\text{int}}^e = \int_{A^e} (\langle u_n^* \rangle [B_m]^T [H_m] [B_m] \{u_n\}) dA \quad (3.13)$$

$$W_{\text{ext}}^e = \int_{A^e} (\{u_n^*\} [N]^T h \{f\}) dA \quad (3.14)$$

D'après (III-13) et (III-14) l'expression discrétisé de  $W^e$  est ;

$$W^e = \langle u_n^* \rangle ([k] \{u_n\} - \{f_m\}) \quad (3.15)$$

- La matrice de rigidité de l'élément membranaire :

$$[k^e] = \int_{A^e} ([B_m]^T [H_m] [B_m]) dA \quad (3.16)$$

- Le vecteur charges membranaire équivalentes :

$$\{f_m\} = \int_{A^e} h [N]^T \{f\} dA \quad (3.17)$$

### 3.2.2- Présentation algébrique :

Puisque la méthode des éléments finis est une technique d'approximation des fonctions solution par sous-domaines c'est-à-dire remplacer le volume  $V$  par un ensemble d'éléments  $V^e$  de formes relativement simples.

$$V = \sum V^e \quad (3.18)$$

$V^e$  Est défini par les coordonnées  $X^e$  (coordonnées cartésiennes).

$$\langle x^e \rangle = [N(x)] \{x_n^e\} \quad (3.19)$$

$$\text{Avec : } - \langle x^e \rangle = \langle xy \rangle$$

$$- \langle x_n^e \rangle = \langle x_1 y_1 \dots x_n y_n \rangle$$

$$\text{Et : } [N(x)] = \begin{bmatrix} \dots & N_i(x) & 0 & \dots \\ \dots & 0 & N_i(x) & \dots \end{bmatrix} \quad i = \overline{1, n} \quad (3.20)$$

Et puisque les fonctions d'interpolation  $N(x)$  dépendent des coordonnées des nœuds de l'élément et sont donc différentes pour chaque élément ; on introduit la notion d'élément de référence.

Cet élément est défini par les coordonnées paramétriques  $(\xi) = (\xi, \eta)$ , ou les fonctions  $N(\xi)$  sont indépendantes de la géométrie de l'élément réel  $V^e$ .

Les mêmes fonctions  $N(\xi)$  peuvent donc être utilisées pour tous les éléments possédant les mêmes éléments de référence caractérisé par :

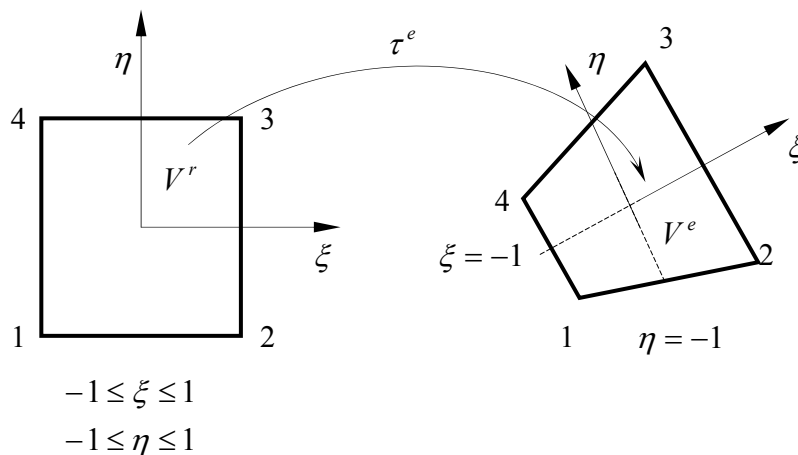
- Sa forme ;
- Ses nœuds géométriques,
- Ses nœuds d'interpolation.

Si les nœuds géométriques sont confondus avec les nœuds d'interpolation, l'élément est dit isoparamétrique est utilisé pour faciliter la tâche du point de vue calcul numérique.

Pour cela, toutes les approximations faites sur l'élément réel seront remplacées par les approximations faites sur l'élément de référence.

La transformation  $\tau^e$  définit les coordonnées de chaque point de l'élément réel à partir des coordonnées du point correspondant de l'élément de référence.

$$\tau^e : \xi \rightarrow x^e = x^e(\xi)$$



**FIG. 3.3 EXEMPLE DE TRANSFORMATION D'UN ELEMENT**

**3.2.2.1- Formulation paramétrique :**

Pour l'élément de référence la géométrie est décrit par :

$$\langle x \rangle = [\bar{N}] \{x_n\} \quad (3.21)$$

Où :

- $\langle x \rangle = \langle x(\xi, \eta), y(\xi, \eta) \rangle$ ;
- $[\bar{N}]$ : Matrice d'interpolation géométrique ;
- $\{x_n\}$ : Vecteur position des nœuds géométriques ;

Et les déplacement sont données par :

$$\{u\} = [N] \{u_n\} \quad (3.22)$$

Où :

- $\langle u_n \rangle = \langle u(\xi, \eta), v(\xi, \eta) \rangle$  est le vecteur déplacement nodal ;
- $[N]$  est la matrice d'interpolation.

Pour notre étude les éléments qu'on utilise sont des éléments iso paramétriques c'est-à-dire :

$$N(\xi) = \bar{N}(\xi)$$

Pour un élément quadrilatère à quatre (fig. 3.3), les fonctions d'interpolation sont définies en fonction des coordonnées paramétriques par :

$$\begin{cases} N_1(\xi, \eta) = \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4}, \frac{\partial N_1}{\partial \xi} = -\frac{(1-\eta)}{4}, \frac{\partial N_1}{\partial \eta} = -\frac{(1-\xi)}{4} \\ N_2(\xi, \eta) = \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4}, \frac{\partial N_2}{\partial \xi} = \frac{(1-\eta)}{4}, \frac{\partial N_2}{\partial \eta} = -\frac{(1+\xi)}{4} \\ N_3(\xi, \eta) = \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4}, \frac{\partial N_3}{\partial \xi} = \frac{(1+\eta)}{4}, \frac{\partial N_3}{\partial \eta} = \frac{(1+\xi)}{4} \\ N_4(\xi, \eta) = \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4}, \frac{\partial N_4}{\partial \xi} = -\frac{(1+\eta)}{4}, \frac{\partial N_4}{\partial \eta} = \frac{(1-\xi)}{4} \end{cases} \quad (3.23)$$

La transformation de l'élément réel à l'élément de référence est assurée par la transformation suivant :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.24)$$

Avec :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Où :  $[J]$  est déterminée en fonction des coordonnées nodales de l'élément par :

$$[J] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

La transformation inverse est assurée par la matrice  $[j]$  telle que :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = [j] \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (3.27)$$

Où :

- $[J]$  est dite matrice jacobéenne ;
- $[j]$  est dite matrice jacobéenne inverse.

### 3.2.2.2 Matrice de rigidité et vecteur force sur l'élément de référence :

Les expressions (3.16) s'écrivent, si l'on utilise une intégration sur l'élément de référence  $A^r$  :

$$[k_m] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_m]^T [H_m] [B_m] \det(J) d\xi d\eta \quad (3.28)$$

$$\text{Et : } [f_m] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N]^T \{f\} h \det(J) d\xi d\eta \quad (3.29)$$

L'intégration est faite numériquement par schéma  $2 \times 2$  points de Gauss (pour un élément quadrilatère à quatre nœuds), les expressions (3.28 et 3.29) deviennent :

$$[k_m] = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 [B_m(\xi_i, \eta_i)]^T [H_m] [B_m(\xi_i, \eta_i)] \omega_i \omega_j \det(J) \quad (3.30)$$

$$\text{Et : } \{f_m\} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 h [N(\xi_i, \eta_i)]^T \{f\} \omega_i \omega_j \det(J) \quad (3.31)$$

Où :

- $\omega_i, \omega_j$  Sont les coefficient de pondération aux points d'intégration  $\xi_i, \eta_j$
- $\{f_m\}$  Est le vecteur charges équivalentes extérieures ;
- $\{f\}$  Est le vecteur des efforts par unité de surface moyenne.

**3.3- Formulation mixte (hybride) :**

Un élément est dit mixte si les degrés de liberté sont de type déplacement et contraintes. Différentes formulations variationnels permettent de définir des éléments mixtes. Dans cette section on considère une formulation variationnels, faisant intervenir les déplacements et leurs premières dérivées et les contraintes (mais pas leurs dérivées).

Ce type de modèle permet de choisir une approximation  $C^0$  pour les déplacements et une approximation  $C^{-1}$  (discontinue par élément) pour les contraintes.

En éliminant les contraintes au niveau de chaque élément (condensation statique) on obtient des matrices et vecteurs élémentaires en fonction des déplacements nodaux.

- $C^0$  : La fonction  $u(x)$  est seule continue sur les frontières entre les éléments ;
- $C^{-1}$  :  $u(x)$  est continue à l'intérieur d'un élément et discontinue d'un élément à l'autre ;
- $C^\alpha$  :  $u(x)$  et ses dérivées jusqu'à  $(\alpha)$  sont continues sur les frontières entre les éléments.

**3.3.1-Présentation générale :**

Comme dans le principe du travail virtuel nous pouvons construire une forme faible en contraintes voir (\*.\*) en modifiant (3.6).

\* une dimension 
$$\int_{x_1}^{x_2} \psi \frac{\partial u}{\partial x} dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \psi}{\partial x} u dx + (\psi u) \Big|_{x_1}^{x_2} \tag{a} \quad (*.*)$$

\*deux dimensions 
$$\int_A \psi \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad dy = - \int_A \frac{\partial \psi}{\partial x} u dx \quad dy + \oint_S \psi u dS$$

$$= - \int_A \frac{\partial \psi}{\partial x} u dx \quad dy + \oint_S \psi u dS \tag{b}$$

$$\int_A \psi \frac{\partial u}{\partial y} dy = - \int_A \frac{\partial \psi}{\partial y} u dx dy + \oint_S \psi u m dS \tag{c}$$

\*trois dimensions

$$\int_V \psi \frac{\partial u}{\partial x} dx dy dz = - \int_V \frac{\partial \psi}{\partial x} u dx dy dz + \oint_S \psi n_x u dS \quad (d)$$

Après intégration par parties du premier terme de l'intégrale on obtient :

$$\begin{aligned} W &= \int_V \left( (u_{,x}^* \sigma_x + v_{,y}^* \sigma_y + (u_{,y}^* + v_{,x}^*) \sigma_{xy}) - \langle u^* \rangle \{f_v\} \right) dV \\ &\quad - \int_{S_f} \langle u^* \rangle \{f_s\} dS - \int_{S_u} \langle u^* \rangle \{\sigma(n)\} ds - \int_{S_u} \{\sigma^*(n)\} (\langle u \rangle - \langle \bar{u} \rangle) dS \\ &\quad - \int_V (\sigma_x^* (e_x - u_{,x}) + \sigma_y^* (e_y - u_{,y}) + \sigma_{xy}^* (2e_{xy} - u_{,y} + v_{,x})) dV \\ &\quad - \int_V \langle e^* \rangle (\{\sigma\} - [H]\{e\}) dV = 0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

Si les relations de comportement sont satisfaites explicitement nous avons :

$$\{e\} = [H]^{-1} \{\sigma\} \quad (3.33)$$

Sur la frontière  $S_u$  les déplacements sont imposées, si nous considérons un champs de déplacement virtuel cinématiquement admissible, c'est-à-dire :

$$\langle u^* \rangle = \langle 0 \rangle \text{ Et } \{u\} = \langle \bar{u} \rangle \quad \text{sur } S_u$$

En introduisant les relations (II.33) dans les relations (III.32) nous obtenons :

$$\begin{aligned} W &= \int_V \left( \langle e^* \rangle \{\sigma^*\} \{e\} - \langle \sigma^* \rangle [H]^{-1} \{\sigma\} - \{f_v\} \right) dV \\ &\quad - \int_{S_f} \langle u^* \rangle \{f_s\} dS \end{aligned} \quad (3.34)$$

Où :

- $\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_x \sigma_y \sigma_{xy} \rangle$ ;
- $\langle e \rangle = \langle u_{,x} v_{,y} u_{,y} + v_{,x} \rangle$ ;
- $\langle u \rangle = \langle u, v \rangle$ ;
- $\langle \sigma^* \rangle, \langle e^* \rangle, \langle u^* \rangle$  On la même structure que  $\langle \sigma \rangle, \langle e \rangle, \langle u \rangle$  ;

Et si l'élément n'a pas de frontière avec l'extérieur ; la forme du travail élémentaire devient :

$$W^e = W_{int}^e - W_{ext}^e \quad (3.35)$$

Avec :

$$W_{int}^e = \int_{V^e} \left( \langle e^* \rangle \{\sigma\} + \{\sigma^*\} \{e\} - \langle \sigma^* \rangle [H]^{-1} \{\sigma\} \right) dV \quad (3.36)$$

$$\text{Et :} \quad W_{ext}^e = \int_{V^e} \langle u^* \rangle \{f_v\} dV \quad (3.37)$$

[H]: Matrice d'élasticité donnée par :

$$[H] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

La matrice de rigidité [k] peut être construite en considérant l'expression (3.36)

Considérant les approximations suivantes :

$$\begin{cases} \{u\} = [N]\{u_n\} & (a) \\ \{e\} = [B_m]\{u_n\} & (b) \\ \{\sigma\} = [P]\{\sigma_n\} & (c) \\ \{x\} = [N]\{x_n\} & (d) \end{cases} \quad (3.38)$$

Les matrices [N], [B<sub>m</sub>] et [P] sont données par  $\{u\} = [N]\{u_n\}$  et (3.23) respectivement.

- $\langle u_n \rangle = \langle u_1 v_1 w_1, \dots \rangle$ : Les *ddl* déplacement associés aux nœuds des éléments ;
- $\langle \sigma_n \rangle = \langle \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \rangle$ : Les contraintes locales (définies sur un seul élément) éliminés au niveau élémentaire ;
- [P] : Matrice d'approximation des contraintes dans les éléments mixtes.

On définit ainsi les approximations des variables virtuelles :

$$\begin{cases} \{u^*\} = [N]\{u_n^*\} & (a) \\ \{e^*\} = [B_m]\{u_n^*\} & (b) \\ \{\sigma^*\} = [P]\{\sigma_n^*\} & (c) \end{cases} \quad (3.39)$$

L'expression (III.35) devient :

- L'énergie interne :

$$W_{int}^e = \int_{V^e} \langle u_n^* \rangle [B_m]^T [P] \{\sigma_n\} + \{\sigma_n^*\} [B_m]^T [P] \{u_n\} - [P]^{-1} [H]^{-1} [P] \{\sigma_n\} \rangle dV \quad (3.40)$$

- Le travail des efforts extérieurs :

$$W_{ext}^e = \int_{V^e} \langle u_n^* \rangle [N]^T \{f_v\} dV \quad (3.41)$$

L'expression discrétisée de (3.35) après une intégration sur l'épaisseur :

$$W^e = \langle u_n^* : \sigma_n^* \rangle \left( \begin{bmatrix} [0] & [b]^T \\ [b] & -[a] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_n \\ \sigma_n \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} f_m \\ 0 \end{Bmatrix} \right) \quad (3.42)$$



Avec :

$$\begin{cases} [b]^T = \int_{A^e} [B_m]^T [P] h dA \\ [a] = \int_{A^e} [P]^T [H]^{-1} [P] h dA \\ \{f_m\} = \int_{A^e} [N]^T \{f\} h dA \end{cases} \quad (3.43)$$

Les contraintes  $\{\sigma\}$  sont locales (définies sur un seul élément). L'équation (3.42) conduit à :

$$\langle \sigma_n^* \rangle ([b]\{u_n\} - [a]\{\sigma_n\}) = 0 \quad (3.44)$$

D'où :

$$\{\sigma_n\} = [a]^{-1} [b]\{u_n\} \quad (3.45)$$

L'expression de  $W^e$  après élimination des variables  $\{\sigma_n\}$  s'écrit ainsi :

$$W^e = \langle u_n^* \rangle ([k]\{u_n\} - \{f_m\}) \quad (3.46)$$

Avec :

$$[k] = [b]^T [a]^{-1} [b] \quad (3.47)$$

Les expressions en un point d'un élément sont obtenues par (3.39-c)

Les relations suivantes permettent d'obtenir les contraintes aux nœuds (discontinues d'un élément à l'autre) :

$$\{\sigma(\xi)\} = [P(\xi)]\{\sigma_n\} = [P][a]^{-1} [b]\{u_n\} \quad (3.48)$$

### 3.3.2-Présentation algébrique :

La matrice de rigidité est donnée par (3.47). Une intégration numérique de  $2 \times 2$  point de gauss est utilisée pour l'intégration de la matrice de rigidité.

$$[b]^T = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 [B(\xi_i, \eta_j)]^T [P(\xi_i, \eta_j)] \omega_i \omega_j \det(J) \quad (3.49)$$

$$\text{Et : } [a] = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 [P(\xi_i, \eta_j)]^T [H_m]^{-1} [P(\xi_i, \eta_j)] \omega_i \omega_j \det(J) \quad (3.50)$$

Ainsi, le vecteur charges membranaires équivalentes extérieures est :

$$\{f_m\} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 [N(\xi_i, \eta_j)]^T \{f\} h \omega_i \omega_j \det(J) \quad (3.51)$$

### 3.3.3-Implémentation de l'élément Q4PS :

L'élément Q4PS est un élément quadrilatère à deux *ddl* par nœud. La matrice de rigidité de cet élément est donnée par (3.47) où les matrices  $[B_m]$  et  $[P]$  sont données par :

$$\text{Où :} \quad [B_m] = \begin{bmatrix} \dots & c_i & 0 & \dots \\ \dots & 0 & d_i & \dots \\ \dots & d_i & c_i & \dots \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} c_i &= J_{22}N_{i,\xi} - J_{12}N_{i,\eta} \\ d_i &= -J_{21}N_{i,\xi} + J_{11}N_{i,\eta} \end{aligned} \quad i = \overline{1,4}$$

L'élément hybride PIAN-SUMIHARA (Q4PS) base sur une description des contraintes en fonction des coordonnées paramétriques  $\xi$  et  $\eta$  :

$$\begin{Bmatrix} \sigma^{\xi\xi} \\ \sigma^{\eta\eta} \\ \sigma^{\xi\eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \eta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \xi \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{Bmatrix} \quad (3.53)$$

Où  $\sigma^{\xi\xi}$ ,  $\sigma^{\eta\eta}$  et  $\sigma^{\xi\eta}$  sont les composantes des contraintes dans la base  $\xi, \eta$ .

On utilise en suite la transformation matricielle :

$$\begin{aligned} [\sigma] &= [J]^T [\sigma^{\xi\eta}] [J] \\ [\sigma^{\xi\eta}] &= \begin{bmatrix} \sigma^{\xi\xi} & \sigma^{\xi\eta} \\ \sigma^{\xi\eta} & \sigma^{\eta\eta} \end{bmatrix}; [\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.54)$$

Où  $[J]$  est évalué en  $\xi = \eta = 0$

Et finalement :

$$\{\sigma\} = [P]\{\sigma_n\} \quad (3.55)$$

Avec :

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1^2\eta & a_2^2\xi \\ 0 & 1 & 0 & b_1^2\eta & b_2^2\xi \\ 0 & 0 & 1 & a_1b_1\eta & a_2b_2\xi \end{bmatrix}$$

Et :  $\langle \sigma_n \rangle = \langle \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \rangle$

$$a_1 = \frac{(x_{21} + x_{34})}{4}; \quad b_1 = \frac{(y_{21} + y_{34})}{4};$$

$$a_2 = \frac{(x_{32} + x_{41})}{4}; \quad b_2 = \frac{(y_{32} + y_{41})}{4};$$

Avec :

$$x_{ij} = x_i - x_j \quad ; \quad y_{ij} = y_i - y_j$$

- Les expressions de la matrice  $[k]$  et du vecteur  $\{f\}$  sont données par les deux expressions (3.47) et (3.26).

Toute cette théorie illustrant l'élément Q4PS est mise en oeuvre dans un sous programme appelé ELEM02, inséré dans le code MEF en suivant ses règles de programmation.

**3.3.1-Formulation de l'élément SBQ4 :**

**3.3.1.1-Description des éléments SBQ4 :**

La figure IV.1 montre la géométrie de élément **SBQ4** et les variables cinématiques nodales correspondantes. A chaque nœud ( i ) de ddl  $U_i$  et  $V_i$  est attribuée une rotation additionnelle notée  $\theta_{zi}$ .

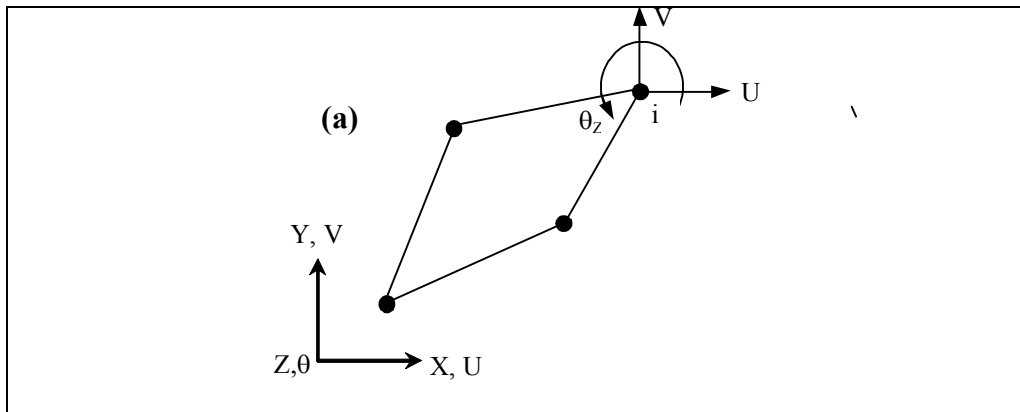


Figure 3. 4 : Eléments SBQ4 distordus avec inconnues nodales de rotation

**3.3.1.2- Formulation variationnelle des éléments "SBQ4" :**

Considérons l'élément quadrilatéral de la (figure 3.4a). Les trois composantes cartésiennes du champ de déformation dans le plan d'un point P de l'élément sont données par :

$$\epsilon_x = U_{,x} = (\partial U / \partial x) \quad ; \quad \epsilon_y = V_{,y} \quad ; \quad \gamma_{xy} = U_{,y} + V_{,x} \tag{3.56a,b,c}$$

U, V : composantes du déplacement respectivement dans les directions x et y.

Les équations (3.56) doivent au minimum représenter le mouvement d'un corps rigide.

Donc, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= 0 \\ \varepsilon_y &= 0 \\ \gamma_{xy} &= 0\end{aligned}\tag{3.56a, b, c}$$

L'intégration de (3.56) permet d'obtenir une solution particulière :

$$U_R = a_1 - a_3 y \tag{3.57a}$$

$$V_R = a_2 + a_3 x \tag{3.57b}$$

Et la vraie rotation  $\theta_z$  de l'élasticité plane sera donnée par [TIM 51] :

$$\theta_z = \frac{1}{2}(V_{,x} - U_{,y}) = a_3 \tag{3.58}$$

Les équations (3.56) et (3.58) représentent le champ de déplacement correspondant au mouvement du corps rigide (MCR).

L'élément **SBQ4** possède quatre (respectivement trois) nœuds et trois ddl par nœud ( $U$ ,  $V$  et  $\theta_z$ ). Le champ de déplacement doit contenir douze (respectivement neuf) constantes indépendantes. Trois d'entre elles ( $a_1$ ,  $a_2$  et  $a_3$ ) sont déjà utilisées pour représenter le MCR, il en reste donc neuf (respectivement six) ( $a_4, a_5, \dots, a_i)_{i=12(9)}$  pour représenter approximativement la déformation dans l'élément, tout en vérifiant l'équation de compatibilité (3.59) suivante :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \tag{3.59}$$

Pour **SBQ4** :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= a_4 + a_6 y + a_{10} y^2 + 2a_{11} xy^3 \\ \varepsilon_y &= a_7 + a_8 x - a_{10} x^2 - 2a_{11} yx^3 \\ \gamma_{xy} &= 2a_5 + 2a_6 x + 2a_8 y + 2a_9 y + 2a_{12} x\end{aligned}\tag{3.60 a, b, c}$$

En substituant (3.60) dans (3.56), et après intégration nous obtenons (pour **SBQ4**) :

$$\begin{aligned}U_S &= a_4 x + a_5 y + a_6 xy + a_8 \frac{y^2}{2} + a_9 y^2 + a_{10} xy^2 + a_{11} x^2 y^3 \\ V_S &= a_5 x + a_6 \frac{x^2}{2} + a_7 y + a_8 xy - a_{10} x^2 y - a_{11} y^2 x^3 + a_{12} x^2 \\ \theta_z &= -a_9 y - 2a_{10} xy - 3a_{11} x^2 y^2 + a_{12} x\end{aligned}\tag{3.61 a, b, c}$$

Le champ de déplacement final pour **SBQ4** sera obtenu par combinaison de (3.58) et (3.61) :

$$\begin{aligned}
 U &= a_1 - a_3 y + a_4 x + a_5 y + a_6 xy + a_8 \frac{y^2}{2} + a_9 y^2 + a_{10} xy^2 + a_{11} x^2 y^3 \\
 V &= a_2 + a_3 x + a_5 x + a_6 \frac{x^2}{2} + a_7 y + a_8 xy - a_{10} x^2 y - a_{11} y^2 x^3 + a_{12} x^2 \quad (3.62 \text{ a, b, c}) \\
 \theta_z &= a_3 - a_9 y - 2a_{10} xy - 3a_{11} x^2 y^2 + a_{12} x
 \end{aligned}$$

Remarquons que, les fonctions de déplacement finales contiennent des termes quadratiques et cubiques permettant ainsi le changement de courbure.

La matrice de déformation [Q] (**SBQ4**) s'obtient en substituant les équations (3.62) dans (3.56) :

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & y^2 & 2xy^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 0 & -x^2 & -2x^3 y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2x & 0 & 2y & 2y & 0 & 0 & 2x \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

La matrice de rigidité élémentaire [K<sub>e</sub>] de **SBQ4** s'obtient ainsi en suivant les techniques habituelles de la méthode des éléments finis.

$$[K_e] = [A^{-1}]^T [K_0] [A^{-1}] \quad (3.64a)$$

$$\text{Avec :} \quad [K_0] = \iint_S [Q]^T [D] [Q] dx dy \quad (3.64b)$$

La construction de la matrice [A] pour **SBQ4** est décrite en annexe A.

### 3.3.1.3- Evaluation automatique de la matrice [ K<sub>0</sub> ] :

Si on adopte la formulation classique, deux problèmes peuvent se présenter: problème de distorsion géométrique pour certains éléments finis de degré élevé (perte de précision) et problème de blocage ou verrouillage ("locking") de membrane pour le cas des éléments finis de degré peu élevé. L'adoption d'un modèle de déformation [BEL 97] suivi par une méthode d'intégration purement analytique permette d'éviter ces deux problèmes.

Etant donné que la matrice [A] et son inverse peuvent être évaluées numériquement, on réalise alors que l'évaluation de l'intégrale (3.64b) devient la clé du problème.

Sachant que, pour certains éléments, une trop grande distorsion peut conduire à des résultats numériques erronés en particulier dans le calcul du jacobien. Nous avons formulé pour cela une expression générale, facile à mettre en œuvre numériquement, et permettant l'évaluation de façon automatique de la matrice  $[K_0]$  quel que soit le degré du polynôme (3.62) et la distorsion de l'élément (figure3.2).

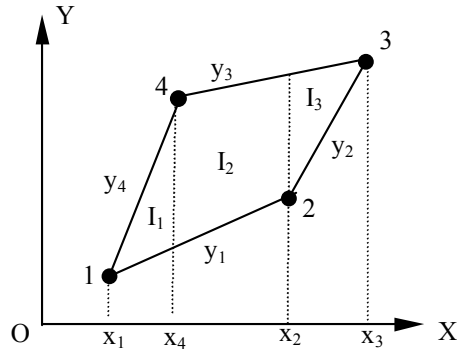


Figure 3.2: Element SBQ4

$$I = I_1 + I_2 + I_3 \tag{3.65}$$

Où:

$$I_1 = \int_{x_1}^{x_4} \int_{y_1}^{y_4} x^\alpha y^\beta dx dy$$

$$I_2 = \int_{x_4}^{x_2} \int_{y_1}^{y_3} x^\alpha y^\beta dx dy \tag{3.66a, b, c}$$

$$I_3 = \int_{x_2}^{x_3} \int_{y_2}^{y_3} x^\alpha y^\beta dx dy$$

Ce qui revient à calculer des intégrales doubles de la forme suivante :

$$I = \iint_S C \cdot x^\alpha y^\beta dx \cdot dy \tag{3.67}$$

C : constante

y : l'ordonnée de la droite d'équation  $y = ax + b$

$$y^2 = (ax + b)^2 = 1a^2x^2 + 2abx + 1b^2 \tag{3.68a,b,c}$$

$$y^3 = (ax + b)(ax + b)^2 = 1a^3x^3 + 3a^2bx^2 + 3ab^2x + 1b^3$$

On aboutit à une forme générale de  $y^\beta$  :

$$y^\beta = \sum_{k=1}^{\beta+1} C(k) \cdot a^{\beta+1-k} \cdot b^{k-1} \cdot x^{\beta+1-k} = \sum_{k=1}^{\beta+1} C(k) \cdot a^{k-1} \cdot b^{\beta+1-k} \cdot x^{k-1} \tag{3.69}$$

C(k) : Coefficients fonction de  $\beta$  (voir tableau 3.56), soit par exemple :

si  $\beta=1$  on aura 2 coefficients (voir (3.68a)).

si  $\beta=2$  on aura 3 coefficients (voir (3.68b)).

Si  $\beta=3$  on aura 5 coefficients voir

y : l'ordonnée de la droite d'équation : ( y = ax + b).

	C(k) <sub>k=1,6</sub>					
	C(1)	C(2)	C(3)	C(4)	C(5)	C(6)
$\beta=0$	1	-	-	-	-	-
$\beta=1$	1	1	-	-	-	-
$\beta=2$	1	2	1	-	-	-
$\beta=3$	1	3	3	1	-	-
$\beta=4$	1	4	6	4	1	-
$\beta=5$	1	5	10	10	5	1

TABLEAU 3. 1 : COEFFICIENTS C(k) RELATIVE A LA RELATION (3.73)

D'où :

$$\int y^\beta dy = \frac{1}{\beta+1} y^{\beta+1} = \frac{1}{\beta+1} (ax+b)^{\beta+1} = \frac{1}{\beta+1} \sum_{k=1}^{\beta+2} C(k) \cdot a^{k-1} \cdot b^{\beta+2-k} \cdot x^{k-1} \quad (3.70)$$

Donc

$$\int_{y_i}^{y_j} y^\beta dy = \frac{1}{\beta+1} \sum_{k=1}^{\beta+2} C(k) \cdot (a_j^{k-1} \cdot b_j^{\beta+2-k} - a_i^{k-1} \cdot b_i^{\beta+2-k}) \cdot x^{k-1} \quad (3.71)$$

$$\iint x^\alpha y^\beta dx \cdot dy = \int_m^n \frac{1}{\beta+1} \sum_{k=1}^{\beta+2} C(k) \cdot (a_j^{k-1} \cdot b_j^{\beta+2-k} - a_i^{k-1} \cdot b_i^{\beta+2-k}) \cdot x^{k+\alpha-1} \cdot dx \quad (3.72)$$

$$\iint x^\alpha y^\beta dx \cdot dy = \frac{1}{\beta+1} \sum_{k=1}^{\beta+2} \frac{1}{k+\alpha} C(k) \cdot (a_j^{k-1} \cdot b_j^{\beta+2-k} - a_i^{k-1} \cdot b_i^{\beta+2-k}) \cdot (x_n^{k+\alpha} - x_m^{k+\alpha}) \quad (3.73)$$

Pour notre cas (SBQ4) :

$$I = \sum_{p=1}^3 I_p \quad (3.74)$$

L'expression générale de  $I_p$  pour un quadrilatère (SBQ4) :

$$I_p = \frac{C}{\beta + 1} \sum_{k=1}^{\beta+2} \frac{1}{k + \alpha} \cdot C(k) (a_j^{k-1} \cdot b_j^{\beta+2-k} - a_i^{k-1} \cdot b_i^{\beta+2-k}) (x_n^{k+\alpha} - x_m^{k+\alpha}) \quad (3.75)$$

Soit donc l'expression de I pour un triangle (SBT3) :

$$I = \sum_{P=1}^2 I_p \quad (3.76)$$

Le tableau 3.2 donne les résultats obtenus avec le maillage régulier. Le cas de charge consistant (cc1) fournit la solution exacte ; l'erreur est très faible pour le cas de charge inconsistant cc2 (mais...bien pratique !).

Cas de charge	Présent élément SBQ4			Présent élément SBT3			Ibrahimbegovic et al. [IBR 93]		
	V <sub>B</sub>	θ <sub>zB</sub>	σ <sub>xA</sub>	V <sub>B</sub>	θ <sub>zB</sub>	σ <sub>xA</sub>	V <sub>B</sub>	ψ <sub>B</sub>	σ <sub>xA</sub>
<b>1 : Couple</b>	1,0	0,2	30,0	1,0	0,2	30,0	1,0	0,2	30,0
<b>2 : Moments</b>	1,0067	0,202	30,0	0,993	0,219	30,1	1,0067	0,2017	30,0
<b>Thé. des poutres Réf. [IBR 93]</b>	<b>1,0</b>	<b>0,2</b>	<b>30,0</b>	<b>1,0</b>	<b>0,2</b>	<b>30,0</b>	<b>1,0</b>	<b>0,2</b>	<b>30,0</b>

TABLEAU 3.2 : FLEXION PURE D'UNE CONSOLE ; MAILLAGE REGULIER.

### 3.4- Conclusion :

En effectuant des tests d'évaluation, sur les éléments, on remarque que : les trois éléments convergent vers la solution exacte, mais on remarque aussi que la convergence vers la solution de référence est très rapide pour l'élément Q4PS par rapport à l'élément Q4, et c'est pour le même degré de liberté, cela illustre la différence entre les deux formulations, déplacement et mixte.

La distorsion géométrique a une influence considérable sur l'élément Q4PS (50% de différence entre le maillage avec distorsion impliquant le même nombre de ddl).

Pour la modélisation par éléments finis des structures complexes, divers éléments peuvent être utilisés : poutres, membranes, éléments de solide, plaques et coques. Ces éléments construits selon la formulation classique ne partagent pas, en général, les mêmes degrés de liberté nodaux, ce qui complique l'élaboration d'un modèle compatible. Pour résoudre ce problème, nous proposons dans ce chapitre le développement de nouvel élément fini **SBQ4**



(quadrilatère à 4 nœuds et 3 ddl/nœud), simple, stable, fiable, peu coûteux en temps de calcul et beaucoup moins sensible aux distorsions géométriques. Ce type d'élément est également adapté à l'analyse des problèmes généraux d'élasticité plane.

# **CHAPITRE 4**

## **VALIDATION ET APPLICATION**



## Chapitre 4 :

## Validation et application

**4.1 Introduction :**

La recherche en éléments finis de plaque en membrane tenant compte de la rotation dans le plan, se poursuit de façon très active aussi bien pour les éléments triangulaires et quadrangulaires que pour les éléments en forme de secteur. Les exigences croissantes sur la performance de ces éléments, suscitent aujourd'hui une évolution considérable des méthodes de validation ([BAT 92, AYA 93, IBR 93a, SZE 92, BEL 98a,...]).

**4.2.1- Cas d'une poutre simple :**

Ce problème a été traité par Ibrahimbegovic, Taylor et Wilson [IBR 90] afin de tester la performance de cet élément en se basant sur deux types de formulations, mixte et en déplacement.

Soit une poutre simple déformée en flexion pure (figure 4.1). Deux cas de charge sont considérés, consistant et inconsistant. On impose un nombre minimum de conditions pour éliminer les mouvements rigides. La poutre est modélisée par six éléments rectangulaires (maillage régulier) ou trapézoïdaux (maillage distordu). Par raison de symétrie, seule la moitié de la poutre est considérée.

Les résultats obtenus pour les deux cas de charge (cc1 et cc2) comparés à la solution exacte donnée par la théorie des poutres sont reportés sur le tableau (4.1).

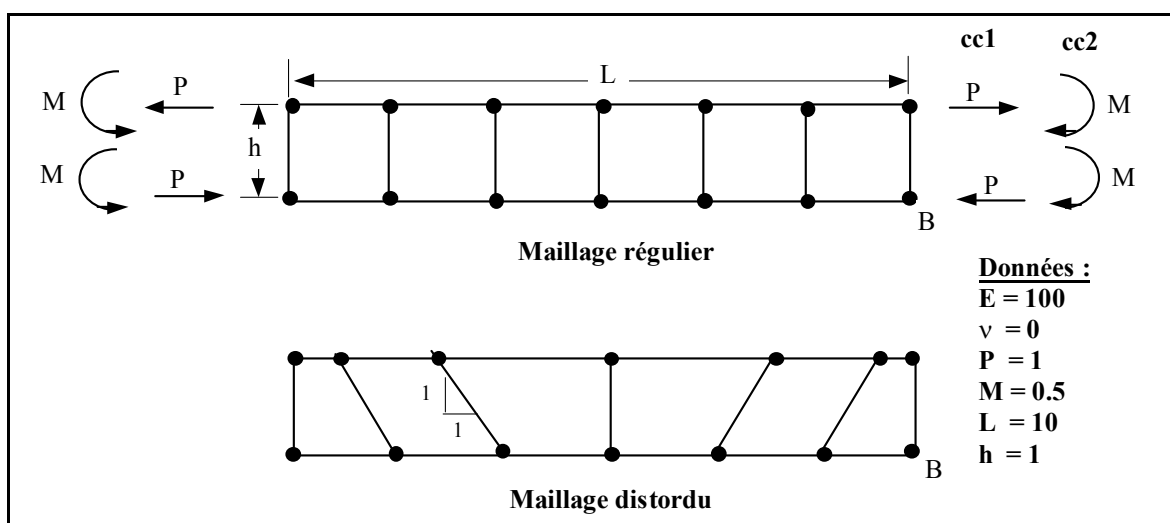


FIGURE 4.1 : POUTRE SIMPLE; DONNEES ET MAILLAGES.

Formulation	Maillage	Cas de Charge	Déplacement Vertical	Rotation en B
Mixte-type [IBR 90]	Rég.	cc1	1,50000	0,60000
Mixte-type [IBR 90]	Dist.	cc1	1,14185	0,57255
Mixte-type [IBR 90]	Rég.	cc2	1,50000	0,62070
Mixte-type [IBR 90]	Dist.	cc2	1,39220	0,50612
Displ-type [IBR 90]	Rég.	cc1	1,50000	0,60000
Displ-type [IBR 90]	Dist.	cc1	1,14045	0,57247
Displ-type [IBR 90]	Rég.	cc2	1,50000	0,62070
Displ-type [IBR 90]	Dist.	cc2	1,39200	0,49508
Taylor et Simo [TAY 85]	Rég.	cc1	1,50000	1,20000
Taylor et Simo [TAY 85]	Dist.	cc1	1,14195	1,10485
Taylor et Simo [TAY 85]	Rég.	cc2	1,50000	2,18980
Taylor et Simo [TAY 85]	Dist.	cc2	1,39300	2,30490
Notre élément <b>SBQ4</b>	Rég.	cc1	1,50000	0,60000
Notre élément <b>SBQ4</b>	Dist.	cc1	1,50000	0,59300
Notre élément <b>SBQ4</b>	Rég.	cc2	1,51000	0,61000
Notre élément <b>SBQ4</b>	Dist.	cc2	1,51000	0,61000
D'après la théorie des poutres			<b>1,50000</b>	<b>0,60000</b>

TABLEAU 4.1 : FLEXION PURE D'UNE POUTRE SIMPLE; RESULTATS.

Pour les deux cas cc1 et cc2, les résultats de **SBQ4** sont en accord avec la solution exacte (théorie des poutres). Ces résultats confirment la bonne performance du présent élément **SBQ4**.

La valeur de la rotation en B obtenue par l'élément de Taylor et Simo [TAY 85] est complètement erronée et cela est dû à l'existence d'un mode de rotation parasite [IBR 90].

#### 4.2.2- Poutre console élancée de MacNeal :

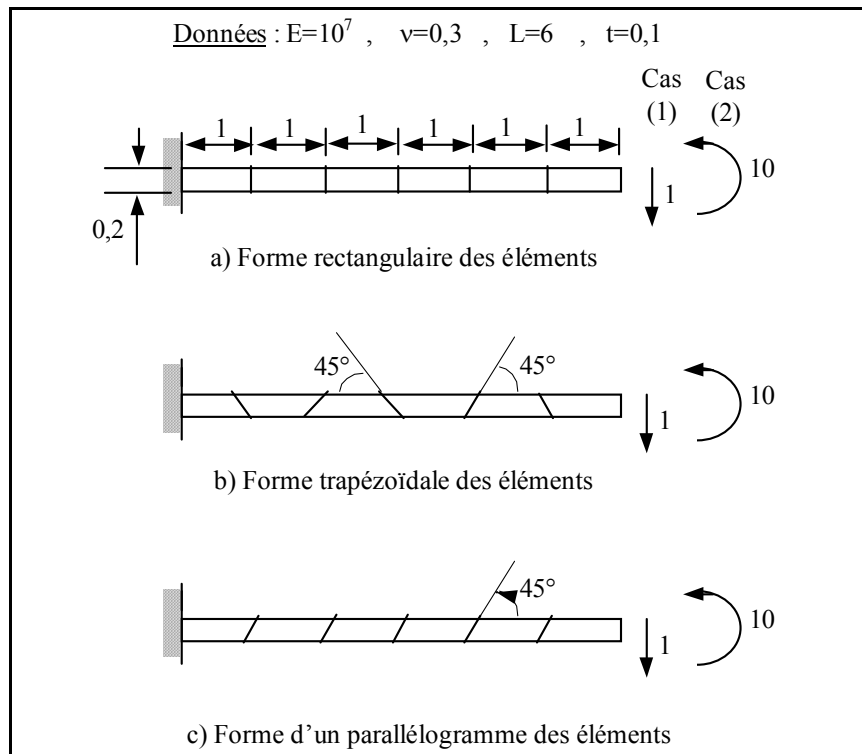
Considérons l'exemple de la poutre console élancée de MacNeal et Harder [MAC 85] à section rectangulaire (6 x 2 x 1) déformée en flexion pure par un moment d'extrémité ( $M=10$ ) et par une charge appliquée à l'extrémité libre ( $P=1$ ).

La console est modélisée par six éléments de membrane rectangulaires (figure 4.2a), trapézoïdaux (figure 4.2b) et parallélogrammes (figure 4.2c).

MacNeal [MAC 87] affirme que la forme trapézoïdale des éléments finis membranaires à quatre nœuds sans degrés de liberté de rotation (à champs linéaires) gère un verrouillage même si ces éléments vérifient le patch-test. Il a qualifié ce problème de "verrouillage trapézoïdal".

**REMARQUE :** Cette règle ne s'applique pas pour les éléments finis à modèle en déformation.

Les résultats obtenus pour **SBQ4** sont comparés à ceux obtenus avec d'autres éléments quadrilatéraux connus (tableau 4.2).



**FIGURE 4.2 : POUTRE CONSULE ELANCEE DE MACNEAL. DONNEES ET MAILLAGES.**

Élément	Flexion pure			Force de cisaillement à l'extrémité libre		
	Régulier	Trapézoïdale	Parallèle	Régulier	Trapézoïdale	Parallèle
Q4	0,093	0,022	0,031	0,093	0,027	0,034
PS5β	1,000	0,046	0,726	0,993	0,052	0,632
AQ	0,910	0,817	0,881	0,904	0,806	0,873
MAQ	0,910	0,886	0,890	0,904	0,872	0,884
Q4S [MAC 89]	-	-	-	0,993	0,986	0,988
07β	1,000	0,998	0,992	0,993	0,988	0,985
<b>SBQ4</b>	0,989	0,988	0,988	0,964	0,950	0,950
<b>Théorie des poutres</b>	<b>1,000 (0,270)</b>			<b>1,000 (0,1081)</b>		

**TABEAU 4.2 : POUTRE CONSULE ELANCEE DE MACNEAL ; DEPLACEMENT NORMALISE A L'EXTREMITE LIBRE.**

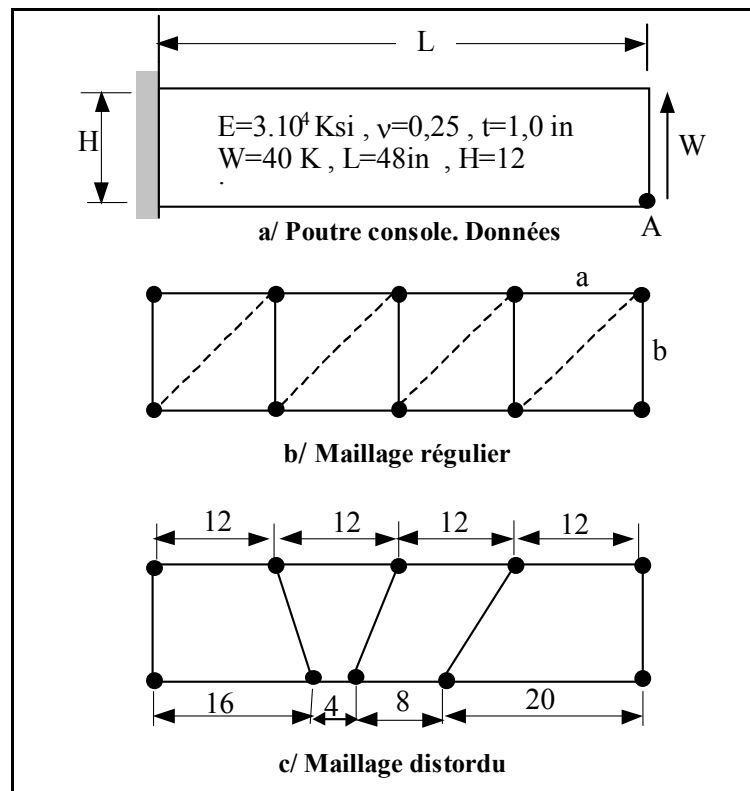
A travers ces trois cas de maillages (figures 4.2a, 4.2b et 4.2c), nous avons mis en évidence l'efficacité du présent élément **SBQ4**. Les résultats obtenus pour les éléments Q4 et PS5 $\beta$  (tableau 4.2) montrent bien le problème de verrouillage trapézoïdal signalé par MacNeal et al [MAC 87].

En conclusion, nous pouvons dire que l'élément **SBQ4** est très performant pour ce type de problème dominé par la flexion. Il demeure stable aux distorsions géométriques.

#### 4.2.2- Poutre console courte d'Allman :

##### 4.2.2.1- Performance de SBQ4 :

Nous nous sommes permis de lier cet exemple au nom d'Allman. Il s'agit d'évaluer le déplacement vertical  $V_A$  à l'extrémité libre d'une console courte (figure 4.3) soumise à une charge verticale uniforme (de résultante  $W$ ).



**FIGURE 4.3: POUTRE CONSOLE COURTE D'ALLMAN ; DONNEES ET MAILLAGES.**

Ce test est considéré par les chercheurs comme un outil de validation des éléments plans. Il permet d'examiner l'aptitude d'un élément de type membrane à simuler des problèmes dominés par la flexion. Le présent élément **SBQ4** est comparé à :

- l'élément Q4 classique.
- éléments robustes M-type et D-type de Ibrahimégovic et al [IBR 90].
- l'élément de MacNeal [MAC 88].
- l'élément de Allman [ALL 88b].
- l'élément de Pian et al PS5 $\beta$  [PIA 84].
- l'élément de Cook et al AQ [COO 86] (s'inspirant de l'élément triangulaire d'Allman [ALL 84]).
- l'élément de Yunus et al MAQ [YUN 89].
- l'élément de Lin et al Q4R $\beta$  [LIN 90].
- l'élément de MacNeal et al Q4S [MAC 89].
- l'élément de MacNeal et al réf. [MAC 88].
- l'élément de Sze et al 07 $\beta$  [SZE 92].
- l'élément de Sze et al 07 $\beta^*$  [SZE 92].
- la solution analytique (exacte) donnée par Timoshenko et Goodier [TIM 51] :
- 

$$V_A = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{(4 + 5\nu)}{2EH} PL = 0,3553 \quad (4.1)$$

Les résultats obtenus pour les deux cas de maillage (régulier et distordu) sont reportés sur le tableau 4.3.

Dans le cas du maillage régulier (figure 4.3b), les résultats obtenus pour **SBQ4** sont performants et comparables à la solution analytique donnée par la théorie des poutres. Pour le cas du maillage distordu (figure 4.3c), la très bonne performance de l'élément **SBQ4** se confirme. Les résultats correspondants sont plus précis que les résultats des autres éléments (voir tableau 4.3).

Formulation/ Elément	Maillage	Déplacement vertical normalisé en A
Q4	Rég.	0,679
Q4	Dist.	0,596
PS5 $\beta$	Rég.	0,978
PS5 $\beta$	Dist.	0,925
AQ	Rég.	0,918
AQ	Dist.	0,947
MAQ	Rég.	0,918
MAQ	Dist.	0,952
QR4b	Rég.	0,978
QR4b	Dist.	0,977
Q4S	Rég.	0,978
Q4S	Dist.	0,976
07 $\beta$	Rég.	0,978
07 $\beta$	Dist.	0,978
07 $\beta^*$	Rég.	0,978
07 $\beta^*$	Dist.	0,978
Type-mixte [IBR 90]	Rég.	0,969
Type-mixte [IBR 90]	Dist.	0,863
Type-déplacement [IBR 90]	Rég.	0,969
Type-déplacement [IBR 90]	Dist.	0,862
MacNeal et Harder [MAC 88]	Rég.	0,959
MacNeal et Harder [MAC 88]	Dist.	0,838
Allman [ALL 88b]	Rég.	0,852
Allman [ALL 88b]	Dist.	-
Notre élément <b>SBQ4</b>	Rég.	0,987
Notre élément <b>SBQ4</b>	Dist.	0,983
<b>Solution exacte d'après [TIM 51] :</b>		<b>1,000</b> <b>(0,3553)</b>

**TABLEAU 4.3 : POUTRE CONSOLE COURTE D'ALLMAN. DEPLACEMENT VERTICAL AU POINT A NORMALISE.**

Vu l'importance pratique de ce problème (figure 4.3b), nous avons jugé nécessaire d'étudier la sensibilité du présent élément **SBQ4** en faisant varier le rapport d'aspect "a/b".

Plusieurs rapports d'aspect "a/b" sont considérés dans cette étude, et dans tous les cas "b" est pris constant (deux rangées d'éléments suivant Y), tandis que "a" varie pour donner :

$$\frac{a}{b} = 1, 2, 3, 4 \text{ et } 8. \quad (4.2)$$

Les résultats du déplacement vertical maximal sont comparés avec ceux d'Allman [ALL 88b] (tableau 4.3).



a/b	$\frac{V_A}{V_{\text{exacte}}}$	
	Notre élément <b>SBQ4</b>	[ALL 88b]
1	1,01	0,95
2	0,97	0,91
3	0,95	0,87
4	0,92	0,77
8	0,75	—

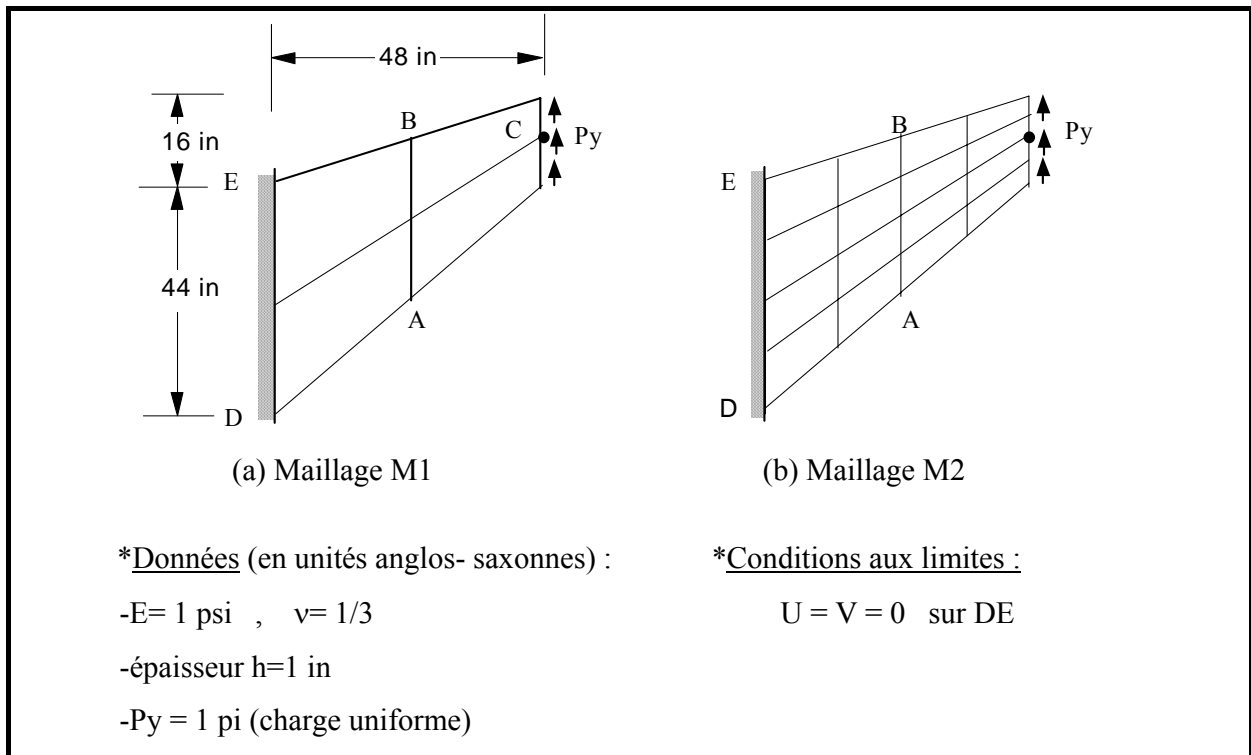
**TABEAU 4.4 : POUTRE CONSOLE COURTE D’ALLMAN, DEPLACEMENTS NORMES.**

Les résultats obtenus par **SBQ4** (tableau 4.4) sont plus frappants pour un élancement a/b très grands. Sa très bonne performance se confirme.

**4.3.1-Etude du panneau fuselé de Cook :**

Le panneau fuselé de la figure 4.4 est fixé sur le bord gauche DE et est soumis à un chargement de cisaillement distribué uniformément le long du bord droit en C. Il s’agit de calculer le déplacement vertical au point C et les contraintes principales (maximale et minimale) aux points A et B respectivement. Les contraintes principales  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont calculées de façon classique :

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \left( (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\sigma_{xy}^2 \right)^{1/2} \tag{4.3}$$



**FIGURE 4.4 : PANNEAU FUSELE DE COOK. DONNEES ET MAILLAGES.**

Ce problème a été proposé et résolu par Cook [COO 87] et Bergan et al. [BER 85] au milieu des années 80. Deux types de maillage sont considérés: un maillage M1 grossier et un autre M2 plus fin (figures 4.4a et 4.4). Les résultats obtenus avec notre élément **SBQ4** sont comparés à ceux obtenus avec d'autres éléments quadrilatéraux connus (voir tableau 4.5).

Eléments	Maillage M1 (2 x 2)			Maillage M2 (4 x 4)		
	$V_C$	$\sigma_{\max A}$	$\sigma_{\min B}$	$V_C$	$\sigma_{\max A}$	$\sigma_{\min B}$
Q4 standard	0,496	0,437	0,533	0,766	0,756	0,719
AQ [COO 86]	0,890	0,780	0,900	0,965	0,936	1,010
Réf. [ALL 88b]	0,848	0,771	0,856	0,953	0,956	0,997
FRQ [AYA 93]	0,914	0,741	0,775	0,973	0,932	0,985
PS5 $\beta$ [PIA 84]	0,884	0,786	0,771	0,963	0,950	0,924
MAQ [YUN 89]	0,890	0,779	0,886	0,965	0,941	0,967
QR4b [LIN 90]	0,941	0,879	1,059	0,980	0,990	0,997
Réf. [BER 85]	0,852	0,720	0,898	0,938	0,902	0,849
Réf. [IBR 90]	0,865	-	-	0,962	-	-
Réf. [SIM 89]	0,884	-	-	0,963	-	-
07 $\beta$ [SZE 92]	0,945	0,835	1,069	0,981	0,982	1,012
07 $\beta^*$ [SZE 92]	0,945	0,835	1,069	0,981	0,982	1,012
<b>SBQ4</b> (notre élément)	0,990	0,780	0,910	1,003	0,950	1,039
<b>Maillage 32 x 32</b>	<b>1,000</b>	<b>1,000</b>	<b>1,000</b>	<b>1,000</b>	<b>1,000</b>	<b>1,000</b>
<b>Réf. [BER 85]</b>	<b>(23,90)</b>	<b>(0,236)</b>	<b>(-0,201)</b>	<b>(23,90)</b>	<b>(0,236)</b>	<b>(-0,201)</b>

**TABLEAU 4.8 : DEPLACEMENT  $V_C$  ET CONTRAINTES  $\sigma_{\max A}$  ET  $\sigma_{\min B}$  NORMALISEES.**

Avec un maillage raffiné M2, de très bons résultats sont obtenus ; en effet, les déplacements et les contraintes sont proches de la solution de référence pour tous les éléments quadrilatéraux à l'exception de Q4 (tableau 4.5). Même avec un maillage grossier M1, l'élément **SBQ4** permet d'obtenir une très bonne approximation du déplacement  $V_C$  (erreur environ 1 %). Les contraintes extrêmes  $\sigma_{\max A}$  et  $\sigma_{\min B}$  sont en général assez bonnes.

#### 4.3.2-Flexion plane d'une poutre encastree :

Il s'agit d'évaluer le déplacement vertical  $V_A$  à l'extrémité libre d'une poutre encastree soumise à une charge verticale uniforme (figure 4.5).

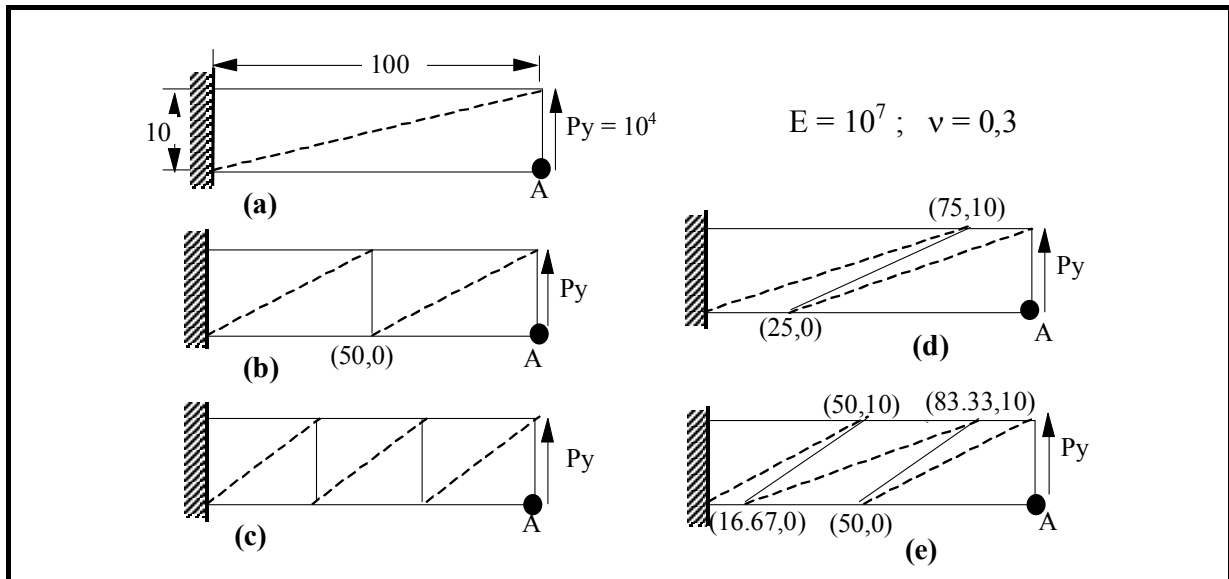


FIGURE 4.5 : MAILLAGES REGULIERS ET DISTORDUS

Ce problème a été traité par Batoz et Dhatt dans leur ouvrage [BAT 90a] afin de tester les performances des éléments CST, LST, Q4, Q4WT [WIL 73, TAY 76], Q4PS [PIA 84 ou KAR 87] et Q8. Récemment Ayad [AYA 93] a fait une étude similaire pour tester la fiabilité de ces nouveaux éléments FRQ et FRT basés sur le concept "Fibre Plane en Rotation".

Les résultats obtenus pour différents maillages sont reportés sur le tableau IV.9.

#### 4.3.1.1-Commentaires: maillages sans distorsions (Figures 4.5 a, 4.5b et 4.5c) :

- Les résultats obtenus pour **SBQ4** sont performants et comparables à l'élément robuste Q8 en terme du nombre total de ddl.

#### 4.3.1.2- Commentaires : maillages avec distorsions (figures .4.5 d et 4.5 e) :

- La très bonne performance de l'élément **SBQ4** se confirme. Les résultats correspondants sont plus précis que les éléments FRQ, Q4WT, Q4PS et Q8.
- Similaire à celle de **SBQ4**, la très bonne performance de l'élément **SBT3** se confirme. Les résultats correspondants sont plus précis que les éléments FRT, CST, Q8 et sont aussi comparables à l'élément LST en terme du nombre total de ddl.

Figure	FRQ	FRT	Q8	Q4	Q4WT	Q4PS	LST	CST	SBT3	SBQ4
	IR :2x2	IR :1P H	IE :3x3	IE : 2x2 PG			IE :3PH	IE :1PH	IA	IA
2.16a	2,76* (12)**	2,32 (12)	3,03 (16)	0,10 (8)	3,03 (8)	3,03 (8)	3,00 (18)	0,05 (8)	2,8846 (12)	2,87 (12)
2.16b	3,44 (18)	2,92 (18)	3,70 (26)	0,38 (12)	3,78 (12)	3,78 (12)	3,70 (30)	0,13 (12)	2,8993 (18)	3,59 (18)
2.16c	3,56 (24)	3,07 (24)	3,84 (36)	0,75 (16)	3,92 (16)	3,92 (16)	3,84 (42)	0,25 (16)	2,9289 (24)	3,75 (24)
2.16d	1,09 (18)	1,99 (18)	0,64 (26)	0,12 (12)	0,30 (12)	0,49 (12)	3,02 (30)	0,06 (12)	2,9155 (18)	2,97 (18)
2.16e	1,61 (24)	2,02 (24)	1,76 (36)	0,22 (16)	1,79 (16)	1,94 (16)	3,09 (42)	0,10 (16)	2,9660 (24)	3,41 (24)
<b>Référence (Théorie des poutres) : <math>V_A = 4,03</math></b>										

\* $V_A$ : Déplacement vertical en A ; IE: Intégration exacte ; PG: Point de Gauss  
 \*\*NDLT: Nombre de ddl totaux ; IR: Intégration réduite ; IA : Intégration analytique

**TABLEAU 4.6 : POUTRE EN FLEXION PLANE, DEPLACEMENT  $V_A$ . COMPARAISON AVEC DIFFERENTS ELEMENTS**

En conclusion, nous pouvons dire que l'élément **SBQ4** est très performant pour ce type de problème dominé par la flexion. Les résultats correspondants sont très proches de ceux obtenus avec les maillages réguliers.

#### 4.4-Conclusion :

Tout en permettant de combiner divers éléments finis les uns avec les autres dans les structures complexes, l'adjonction de degré de liberté de rotation  $\theta_z$  permet aussi d'améliorer la précision sans augmenter le nombre de nœuds et de supprimer les difficultés liées au fameux sixième degré de liberté des coques.

De très bons résultats sont obtenus. **SBQ4** est particulièrement robuste (riche en membrane), beaucoup plus simplifié et plus performant que les éléments traditionnels. L'élément **SBT3** est également performant. Actuellement les éléments finis à modèle de déformation gagnent du terrain, ne serait-ce que parce qu'ils permettent d'enrichir le champ des déplacements par des termes d'ordre élevé sans introduction de nœuds intermédiaires.

**CHAPITRE 5**

**CONCLUSION ET**

**RECOMENDATIONS**



## Chapitre 5 :

### Conclusions et recommandations

#### 5.1- Conclusions générales :

Dans ce travail nous avons abordé l'analyse des structures en plaques (comportement membranaire en flexion), par éléments finis de type déplacement et mixtes.

Pour la partie de membrane avec la formulation déplacement, notre choix a été porté sur le quadrilatère  $Q_4$  à huit degré de liberté. Et l'élément de Pian-sumihara baptisé  $Q_4PS$  pour la formulation hybride. Cet élément a rang correct et constitue un bon élément d'élasticité plane à quatre nœuds et a huit ddl qui donne de bonne résultats pour le problème de flexion plane ainsi qu'un bon comportement vis-à-vis la distorsion géométrique par rapport à l'élément  $Q_4$  (qui présente un mauvais comportement pour le même problème) d'après les testes d'évaluation.

Il est évident que n'importe éléments de membrane à quatre-nœuds avec deux degrés de liberté par nœuds, où ces derniers qui peuvent subir un verrouillage de flexion en plan où échouent un  $C^0$  patch test quand la forme de l'élément est un trapèze isocèle. Plus loin Ce résultat exclue efficacement le prolongement des contraintes linéaire possible pour de tels éléments au delà de ce qui a été déjà réalisé pour des formes rectangulaires et parallélogramme.

MacNeal affirme que la forme trapézoïdale des éléments finis membranaires à quatre nœuds sans degrés de liberté de rotation (à champs linéaires) gère un verrouillage même si ces éléments vérifient le patch-test. Il a qualifié ce problème de "verrouillage trapézoïdal".

Les éléments finis à champs linéaire quelque soit le modèle d'éléments finis utiliser (à l'exception le modèle déformation) ; gère un verrouillage même si ces éléments vérifient le patch-test.

Tout en permettant de combiner divers éléments finis les uns avec les autres dans les structures complexes, l'adjonction de degré de liberté de rotation  $\theta_z$  permet aussi d'améliorer la précision sans augmenter le nombre de nœuds et de supprimer les difficultés liées au fameux sixième degré de liberté des coques.

De très bons résultats sont obtenus. **SBQ4** est particulièrement robuste (riche en membrane). Actuellement les éléments finis à modèle de déformation gagnent du terrain,

ne serait-ce que parce qu'ils permettent d'enrichir le champ des déplacements par des termes d'ordre élevé sans introduction de nœuds intermédiaires.

**REFERENCES**

**BIBLIOGRAPHIQUES**



## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] K.J DATHE and E. WILSON  
"numerical methods in finite element analysis"  
Prentice Hall, 1976.
- [2] R.D.COOK  
"concepts and applications of finite element analysis"  
John Wiley and Sons, 1974.
- [3] R.H GALLAGHER  
" Introduction aux éléments finis"  
Editions pluralis, 1976.
- [4] " cours d'éléments finis"  
Institut de génie civil université de Biskra, 2002-2003.
- [5] E.HINTON, E.M. SALONEN and N. BICANIC  
" A study of locking phenomena in isoperimetric elements"  
Third MEFELAP Conference.  
Brunel university, Ixbridge, 1978.
- [6] M.J.TURNER, R.W.COUGH, H.C. MAR TIN and I.J. TOPP.  
" Stiffness and deflection analysis of complex structures"  
J. Aero Sci, 23, 23-805-823 (1956)
- [7] T.H.H. PIAN,  
" Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distributions"  
AIAAJ. J. 2, 1333 (1964).

- [8] E.L WILSON, R.L. TAYLOR, W.P DOHERTY and J.GHBOUSSI,  
 " Computer methods in structural mechanics"  
 Academic press, New York and London, 1973, pp.43-57
- [9] R.H. MACNEAL,  
 " Derivation of finite element stiffness matrices by assumed strain distribution"  
 Nucl. Eng. Des, 70,3-12 1685-1695 (1984)
- [10] J.ROBINSON,  
 " four-noded quadrilateral stress membrane element with rotational stiffness"  
 Int.j. numer. Methods eng, 16,1567-1595 (1980)
- [11] R.L. HARDER and R.H. MACNEAL,  
 " A new membrane option for the QUAD4"  
 MSC/NASTTRAN User Conference, Pasadena, California, March 1985.
- [12] J.BATOZ, G.DHATT.  
 " Modélisation des structures par éléments finis "  
 Volume 1 : solides élastiques
- [13] O.C. ZIENKIEWICZ.  
 " la méthode des éléments finis appliquée a l'art de l'ingenieur"  
 Edition française, Ediscience, paris France.
- [14] O.C. ZIENKIEWICZ. R.L TAYLOR.  
 " the finite element method"  
 Volume 1 : Basic formulation and linear problem.
- [15] AHMED BIA  
 " Mécanique des structures"  
 Volume 3 Embarec Press, El oued, Algeria

