

Université Mohamed Khider – Biskra
Faculté des Sciences et de la technologie
Département : Génie Electrique
Ref :



جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم و التكنولوجيا
قسم:.....
المرجع:.....

Thèse présentée en vue de l'obtention
Du diplôme de
Doctorat en sciences en : Génie Électrique

Spécialité (Option) : Electricité Industrielle

Intitulé.
**Modélisation et Optimisation Physico-géométrique des
Dispositifs de Chauffage Par Induction.**

Présentée par :
Mohamed REZIG

Soutenue publiquement le

Devant le jury composé de :

Président	Mohamed Toufik BEN CHOUIA	Professeur	Université de Biskra
Rapporteur	Kamel SRAIRI	Professeur	Université de Biskra
Examineurs	Mohamed Lotfi KHENE	Maitre conférence A	Université de Biskra
	Djamel RAHEM	Professeur	Université de Oum El Bouaghi
	Samir BENDIB	Maitre conférence A	Université de Batna
	El Aid ZALOUMA	Maitre conférence A	Université d'El Oued

*La valeur d'un homme tient dans sa
capacité à donner et non dans sa capacité à
recevoir.*

Albert Einstein

Mathématicien, Physicien, Scientifique (1879 - 1955)

Liste des Travaux Scientifiques

- ✚ **M. Rezig** , K. Srairi , M. Feliachi and L.Alloui “New Designs Systems for Induction Cooking Devices For Heating Performances Improving”; **J. Appl. Eng. Sci. Technol. (2017) 3(2): 91-96** , FST , university of Biskra

Publications Internationales

- ✚ **M. Rezig**, K. Srairi, L.Alloui “Modeling and optimization of a Geometrique induction Cooking for Improving the Temperature“, **Interaltional journal of Materials Engineering**, 2011 P1-5 DOI:10.5923/j-ijme.20110101.01.

Publications Nationales

- ✚ **M. Rezig** et K. Srairi "Optimisation Géométrique d'un Dispositif de Cuisson par Induction" **Revue des Sciences et de la Technologie –RST – Volumes 2 N° 1 / Janvier 2011**

Conférences Internationales

- ✚ **M. Rezig**, K. Srairi, S. M. Mimoune and A. Allag, “Optimal Design for Induction Heating Cooker“, **The 3rd International Conference on Electrical Engineering Design and Technologies ICEEDT'09**, Oct. 31- Nov. 02, **2009** in Sousse, Tunisia.
- ✚ **M. Rezig** et K. Srairi, “Optimisation Géométrique d'un Dispositif de Cuisson par Induction “,**6th International Conference on Electrical Engineering** ,11- 13 October 2010 Batna-Algerie
- ✚ **M. Rezig** et K. Srairi “ A New Design Induction Cooking To improve Their Heating Performances “ **the first International Conference on Electrical Engineering (ICEEB'14)** on December 07-08th, 2014 in Biskra, Algeria.
- ✚ **M.Rezig**, K.Srairi et .M.Feliachi , “ Modélisation d'une Nouvelle Topologie de la cuisson par induction pour améliore les performances thermique ‘’**4^{eme} Colloque Sur l'Inductique CI'2015**, Jijel, 10-11 June 2015, Algeria.

Tout d'abord je tiens à remercier Monsieur **Mebarek Bahri**, Professeur à l'université de Biskra et directeur du laboratoire (LMSE) pour la confiance qu'il m'a fait on m'accueillant comme doctorant, Je remercie Monsieur **M. Feliachi**, Professeur d'universités de St-Nazaire, Université de Nantes de m'avoir accueilli dans le centre De Recherche Et De Transfert De Technologie (CRTT).

J'adresse mes sincères remerciements à:

- ✚ Monsieur **K. Srairi** , Professeur au génie électrique a l'université de Biskra ,d'avoir bien voulu assurer la direction de cette thèse. Ses nombreux conseils, ses grandes qualités humaines, ainsi que la confiance qu'il m'a témoignée, ont permis l'accomplissement de ce travail, dans d'excellentes conditions,
- ✚ Monsieur, **ML. Khene** Professeur au génie électrique a l'université de Biskra pour ses grandes qualités humaines, et auprès de qui j'ai trouvé aides, réconfort, et conseils éclairés, tout au long de ce travail,
- ✚ Monsieur **M.T. Ben Chouia**, Professeur au génie électrique a l'université de Biskra, de l'honneur qu'il me fait, en acceptant de présider le jury de cette thèse,
- ✚ Monsieur **Dj.Rahem** , Professeur à l'Université de Oum El Bouaghi, d'avoir accepté la tâche de rapporteur de cette thèse,
- ✚ Monsieur **S. Bendib**, Maitre de Conférence A à l'Université Batna, d'avoir accepté de faire partie du jury,
- ✚ Monsieur **E.A Zalouma**, Maitre de Conférence A à l'Université Batna, d'avoir accepté de faire partie du jury,
- ✚ Un grand merci à **L.Alloui** et **M.S Mimoune** , qui par leurs aide précieuse m'a soulagée de nombreuses fois! Merci pour votre disponibilité et votre dévouement, mais surtout pour votre amitiés
- ✚ Que l'ensemble du personnel du LMSE, Génie Electricque et faculté FST soient assurés de mon amicale reconnaissance.

Je profite des quelques lignes qui me restent pour remercier ma Femme de m'avoir toujours soutenu.

J'ai souvent l'impression d'être chanceuse dans ce monde... Merci !

DEDICACES

A mes chers Parents, ma Femme,

A mes enfants Ritadje , Hala racile et Jaha nizar

Mes sœurs et Mes frères

A toute ma famille

A mes Amis

Nomenclature

\vec{H}	Vecteur champ magnétique	[A/m]
\vec{E}	Vecteur champ électrique	[V/m]
\vec{B}	Vecteur induction magnétique	[T]
A	Potentiel vecteur magnétique	[T. m]
\vec{D}	Vecteur induction électrique (vecteur déplacement électrique)	[C/m ²]
\vec{J}_c	Vecteur densité du courant électrique de conduction	[A/m ²]
μ	Perméabilité magnétique	[H /m]
ρ	Densité volumique de charges électriques	[C/m ³]
ϵ	Permittivité diélectrique	[F/m]
ν	Réductivité magnétique	[m/H]
\vec{g}	Vecteur vitesse des pièces conductrices susceptible de ce déplacé	[m/s]
σ	Conductivité électrique	[S/m]
\vec{J}_{ex}	Densité du courant d'excitation (source)	[A/m ²]
f	Fréquence	[Hz]
ω	Pulsation	[rd/s]
μ_0	Perméabilité magnétique du vide	[H/m]
μ_r	Perméabilité relative magnétique	[H/m]
ϵ	Permittivité diélectrique	[F/m]
ϵ_0	Permittivité absolue du vide	[F/m]
ϵ	Permittivité relative du milieu	[F/m]
Ω	Domaine d'étude électromagnétique	[m ²]
Γ	Frontière du domaine d'étude électromagnétique	[m]
$\vec{J}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	Densité des courants de déplacement négligeable à basse fréquence	[A/m ²]
$\vec{\sigma} \cdot \vec{E}$	Densité des courants induits par variation du champ électrique	[A/m ²]
$\vec{\sigma}(\vec{g} \wedge \vec{B})$	Densité des courants induits par mouvement	[A/m ²]
T_1	La température absolue	[°K]
A_1	: L'aire de la surface	[m ²],
β	La constante de STEPHAN –BOLTZMANN dont la valeur, avec les unités choisies, est de l'ordre de 4.88×10^{-8}	Kcal / (h.m ² .(°K) ⁴)]
Q_c	Le flux de chaleur par convection	[Kcal /h]
ΔT	La différence entre la température de la surface T_s et celle du fluide T_∞ loin de la surface.	°C
h_c	L'unité de conductance thermique moyenne de convection (souvent appelé	Kcal / (h.m ² .°C)

	coefficient Superficiel de transmission de chaleur d'échange de chaleur par convection)	
k	Conductivité thermique du matériau	[W/(m.°K)]
ρ	Masse volumique	[Kg/m ³]
P_r	Pression	[Pa]
\vec{q}	Sources des flux de conduction	[W/m ²]
ρ	Masse volumique	[Kg/m ³]
∂	Vitesse des pièces où des fluides en mouvement, fonction de l'espace, et supposée connue	[m/s]
\vec{B}_{re}	Vecteur induction magnétique rémanente	[T]
δ	Epaisseur de peau	[m]

TABLE DES MATIERES

LISTE DES TRAVAUX CONCERNANT LE TRAVAIL DE THESE

INDEX DES FIGURES

INDEX DES TABLEAUX

INTRODUCTION GENERALE	1
-----------------------	---

CHAPITRE I : ETAS DE L'ART SUR SYSTEMES DE CHAUFFAGES PAR INDUCTION

I.1. HISTORIQUE	9
I.2. INTRODUCTION	10
I.3. PRINCIPE DE LA CUISSON PAR INDUCTION	11
I.4. CARACTERISTIQUES DU CHAUFFAGE PAR INDUCTION	15
I.4.1. L'effet de peau	15
I.4.2. Puissance transmise à la charge	16
I.5. APPLICATIONS DU CHAUFFAGE PAR INDUCTION	17
I.5.1. Le réchauffage avant formage des métaux	17
I.5.2. Le chauffage des liquides	17
I.5.3. Le traitement thermique	18
I.5.3.1. La trempe superficielle	18
I.5.3.2. Les traitements thermiques dans la masse	18
I.5.4. La fusion	18
I.5.4.1. Les fours à induction canal	18
I.5.4.2. Les fours à creuset	19
I.5.5. Brasage	19
I.5.6. Collage de métaux et de corps non-métalliques	19
I.5.7. L'induction dans les industries agro-alimentaires	19
I.5.8. Plasma inductif	19
I.5.9. Autres applications	20
I.6. AVANTAGES ET INCONVENIENTS DU CHAUFFAGE PAR INDUCTION	20
I.6.1 Avantages	20
I.6.2 Inconvénients	20
I.7. CONCLUSION	21

CHAPITRE II : MODELISATION DES PHENOMENES ELECTROMAGNETIQUES THERMIQUE MCV

II.1.	INTRODUCTION	24
II.2.	LES MODELES MATHEMATIQUES EN ELECTROMAGNETISME	24
II.2.1.	Equations générales de MAXWELL	24
II.2.2.	Interprétation physique des équations Electromagnétiques	25
III.2.2.1.	équation de couplage électromagnétique	25
III.2.2.2.	Les équations de conservation	29
III.2.2.3.	Loi de comportement des matériaux (Milieux physiques)	30
II.3.	FORMULATION DES EQUATIONS ELECTROMAGNETIQUES	31
II.3.1	Le Modèle Electrostatique	31
II.3.2	Le Modèle Electrocinétique	32
II.3.3	Le Modèle Magnétostatique	32
III.3.3.1	Le Modèle Magnétostatique scalaire	32
III.3.3.2	Le Modèle Magnétostatique vectoriel	33
III.3.4	Le Modèle Magnétodynamique	33
II.4.	FORMULATION DE L'EQUATION MAGNETODYNAMIQUE	34
II.5.	MODES DE TRANSMISSION DE LA CHALEUR	38
II.6.	NOTIONS FONDAMENTALES DE CODUCTION THERMIQUE	38
III.6.1	Le régime non-stationnaire (Dynamique)	38
III.6.2	La température	39
III 6.3	La conductivité thermique	39
II.7.	LES LOIS FONDAMENTALES DE TRANSMISSION DE LA CHALEUR	40
II.7.1	Quantité de chaleur transmise par rayonnement	40
II.7.2	Flux de chaleur transmis par convection	41
II.7.3	Densité de flux de chaleur : flux de chaleur	42
II.8.	EQUATION DE LA THERMIQUE	43
II.9.	LE MODELE CYLINDRIQUE AXISYMETRIQUE EN ELECTROMAGNETISME ET EN THERMIQUE	45
II.10.	DIFFERENTES TECHNIQUES DE RESOLUTION DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES	49
II.10.1	Méthode des différences finies (MDF)	49
II.10.2	Méthode des éléments finis (MEF)	50

II.10.3	Méthode des intégrales de frontières (MIF)	51
II.10.4	Méthode des circuits couplés (MCC)	51
II.10.5	Méthode des volumes finis (MCV)	52
II.11.	CONCLUSION	54

CHAPITRE III : MODELES NUMERIQUES ET COUPLAGE ELECTROMAGNETIQUE-THERMIQUE.

III.1.	INTRODUCTION	57
III.2.	RESOLUTION DES EQUATIONS ELECTROMAGNETIQUE ET DE LA THERMIQUE PAR LA METHODE DES VOLUMES FINIS	57
	III.2.1 Discrétisation de l'équation magnétodynamique linéaire en régime harmonique	59
	III.2.2 Discrétisation de l'équation de diffusion de la chaleur	63
III.3.	METHODES DE RESOLUTION DES SYSTEMES D'EQUATIONS ALGEBRIQUES	76
	III.3.1 Méthodes directes	76
	III.3.2 Méthodes itératives	76
	III.3.2.1 Méthode de Jacobi	76
	III.3.2.2 Méthode de gauss Seidel	77
	III.3.2.3 Méthode de relaxation	77
III.4.	LE COUPLAGE ELECTROMAGNETIQUE-THERMIQUE	78
III.5.	CALCUL DES PARAMETRES DU COUPLAGE ELECTROMAGNETIQUE-THERMIQUE	79
III.6.	LES MODELES DU COUPLAGE EXISTANT	80
	III.6.1 Modèle du couplage direct (fort)	80
	III.6.2 Modèle du couplage alterné (faible)	80
	III.6.3 Modèle du couplage basé sur la technique de la paramétrisation	82
	III.6.3.1 Principe du modèle du couplage basé sur la technique de la paramétrisation	82
III.7.	CONCLUSION	88

CHAPITRE IV EVALUATION DES RESULTATS DE SIMULATION

IV.1	APPLICATION N°1 : CUISSON A INDUCTION.	91
IV.1.1	Description du Dispositif de Chauffage	91
IV.1.2	Représentation du modèle adopté dans la modélisation	92
IV.1.3	MODELES DES PROPRIETES PHYSIQUES	92
IV.1.4	<i>Données électromagnétiques</i>	93
IV.1.4.1	- Perméabilité magnétique relative	93
IV.1.4.2	- Résistivité électrique	93
IV.1.5	<i>Données thermiques</i>	94
IV.1.6	Etude du comportement électromagnétique et thermique	96
IV.1.6.1	Définition du modèle géométrique	96
1- cas :	à Trois inducteurs	96
IV.1.6.2	Résultats des simulations des comportements électromagnétique et thermique du dispositif du chauffage par induction doté de trois inducteurs	96
2- cas :	à six inducteurs	100
IV.1.6.3	Résultats des simulations des comportements électromagnétique et thermique du dispositif du chauffage par induction doté de six inducteurs .	101
IV.1.6.4	Interprétation des résultats électromagnétiques et thermique.	104
IV.1.6.5	Evolution de la densité de la puissance moyenne en fonction de la température.	104
IV.2.	APPLICATION N°2 : NOUVELLES TOPOLOGIES	106
IV.2.1	Description d'une nouvelle topologie des dispositifs de chauffage.	106
IV.2.2	Description de nouvelle topologie pour es dimensions différentes dimensions des trous.	110
IV.3.	CONCLUSION	112

CONCLUSION	131
BIBLIOGRAPHIE	133
ANNEXES	137
RESUME	

INDEX DES FIGURES

Fig.I.1.	Eléments constitufs d'une cuisson par induction	11
Fig. I.2.	Principe du chauffage par induction	12
Fig. I.3	La géométrie axisymétrique de la cuisson à induction	13
Fig.II.1	Trois nœuds du Maillage à une dimension.	49
Fig.II.2	Un domaine d'étude discrétisé en éléments finis.	50
Fig.II.3	Maillage du domaine d'étude	52
Fig.II.4	Discrétisation en volumes finis dans le cas monodimensionnel	52
Fig.III.1	Maillage du domaine d'étude	58
Fig.III.2	Description d'un volume fini de l'équation électromagnétique - thermique	58
Fig.III.3	Description d'un volume fini de l'équation de diffusion de la chaleur	63
Fig.III.4	Interface entre deux éléments d'un volume fini	68
Fig.III.5	Demi-volume à côté des nœuds limites	71
Fig.III.6	Diagramme de classification des différents modèles du couplage électromagnétique-thermique.	86
Fig.III.7	Les différents modèles du couplage électromagnétique- thermique (a) : MCD, (b) : MCA, (c) : MCP	87
Fig. IV.1	Modèle géométrique du dispositif.	92
Fig. IV.2	Variation de la résistivité électrique de l'acier inoxydable en fonction de la température.	94
Fig. IV.3	Variation de la conductivité thermique de l'acier inoxydable en fonction de la température.	95
Fig. IV.4	Variation de la chaleur spécifique de l'acier inoxydable en fonction de la température.	95
Fig. IV.5	Variation radiale du module du potentiel vecteur magnétique A	98
Fig. IV.6	Répartition du module du potentiel vecteur magnétique A dans le plan (r, z) pour T = 300 °K.	98
Fig. IV.7.	Lignes équipotentielles A pour T = 300 °K.	99
Fig. IV.8	La répartition du module de la densité de la puissance induite dans la plan(r,z) pour T =300 °K.	99
Fig. IV.9	La répartition du module de la température T .	100
Fig. IV.10	Modèle géométrique adopté pour l'étude électromagnétique.	101
Fig. IV.11	Variation radiale du module du potentiel vecteur magnétique A , à six inducteurs.	102

Fig. IV.12	Lignes équipotentielle A à six inducteurs	103
Fig. IV.13	La répartition du module de la température T à six inducteurs	103
Fig. IV.14	Modèle géométrique adopté pour l'étude électromagnétique- Thermique à plaque percée	107
Fig. IV.15	La répartition du module de vecteur potentiel A pour une plaque conventionnelle	107
Fig. IV.16	La répartition du module de vecteur potentiel A pour une plaque percée.	108
Fig. IV.17	La répartition de la Température pour une plaque conventionnelle.	108
Fig. IV.18	La répartition de la Température pour une plaque percée.	109
Fig. IV.19	La répartition du module du champ électrique pour une plaque conventionnelle.	109
Fig. IV.20	La répartition du module du champ électrique pour une plaque conventionnelle.	110
Fig. IV.21	Evolution de la température pour des différentes dimensions pour une fréquence $f= 50$ KHz	111
Fig. IV.22	Evolution de la température pour des différentes dimensions pour une fréquence $f= 50$ KHz	111

INDEX DES TABLEAUX

Tableau .II.1	Ordre de grandeur de la conductivité thermique pour diverses substances	39
Tableau .II.1	Ordre de grandeur des coefficients d'échange de chaleur par convection.	41
Tableau IV.1.	Propriétés géométriques du dispositif du chauffage par induction à trois inducteurs	91
Tableau IV.2.	Propriétés géométriques du dispositif du chauffage par induction à six inducteurs	100

**Introduction
Générale**

Introduction Générale

I.1 Problématique

Dans les applications du chauffage par induction, la résistivité électrique et la perméabilité magnétique relative de la pièce à traiter dépendent fortement de la nature du matériau et des conditions imposées (température, intensité du champ magnétique). Au-dessus de la température de Curie, cette influence est fortement non-linéaire ce qui entraîne une variation de la profondeur de pénétration et la densité de puissance. Dans tout problème de chauffage par induction, nous cherchons à obtenir un rendement thermique élevé et une répartition correcte de la chaleur dans la pièce à traiter. L'inducteur est la partie essentielle d'une installation de chauffage par induction. Sa forme et sa position par rapport à la pièce dépendent, dans une certaine mesure, du critère choisi :

- Maximum d'énergie;
- Régularité de la répartition de la chaleur dans la plaque;

I.2 Objectif

Dans le but d'améliorer la mise en œuvre de la cuisson par induction dans notre vie quotidienne de ce fait ; une large réflexion visant une bonne étude de l'uniformité de la température dans la plaque et une bonne disposition des inducteurs afin de transmettre le maximum d'énergie au utilisation a un grand pourcentage, toujours de prétendre la sécurité et d'économiser de l'énergie la plus possible. Ainsi la distribution de la température du chauffage et le taux de refroidissement est utilisée pour une bonne évaluation aux usagers.

Dans le même contexte, on doit donner les précisions suivantes :

- ✚ La cuisson par induction ;
- ✚ Modélisation électromagnétique thermique couplé,
- ✚ Uniformité de la température,
- ✚ Economie de l'énergie,
- ✚ Aspect de sécurité,
- ✚ Refroidissement plus rapide.

Mon travail se concrétise par la modélisation et l'optimisation des systèmes de chauffage par induction (utilisation domestique), ce dernier qui occupe aujourd'hui une place primordiale dans la recherche, la cuisson par induction constitue l'objectif même de la recherche.

De ce fait et vu l'importance ; de la cuisson dans notre vie quotidienne, en cherche toujours d'économiser de l'énergie et de la sécurité de mise en œuvre que je basant mes recherche :

- Une description prospective ; de la cuisson et une uniformité de la Température dans une Pièce Métallique à partir de la disposition des inducteurs.
- La réflexion du problème a porté sur les aspects (une bonne sécurité et une énergie plus économique et refroidissement des plaques le plus rapide possible)

Ce travail de la modélisation et l'optimisation physico géométrique des dispositifs de chauffage par induction, en particulier, l'étude de l'optimisation physique et/ou géométrie pour améliorer et uniformiser la température de la cuisson par induction, on proposant plusieurs géométries de la cuisson. Dans ce travail ; j'ai modélisé les différentes formes et optimiser la géométrie de la plaque chauffante percée (de la nouvelle topologie) en la comparant avec celle conventionnelle pour l'application du problème d'amélioration de la distribution de la température du dispositif.

I.3. Introduction

Dans le chauffage par induction, on cherche toujours à obtenir des températures élevées, localisées et avec un rendement élevé.

L'analyse thermo- électromagnétique est réalisée à partir de la résolution des équations aux dérivées partielles qui régissent les phénomènes thermo-électromagnétiques. Il s'agit de l'équation de la chaleur pour le champ de température et des équations de Maxwell pour le champ électromagnétique. Les équations de Maxwell se trouvent largement simplifiées si on profite de la symétrie géométrique du dispositif étudié. Le choix de la grandeur électromagnétique en découle. Dans notre cas, le dispositif à étudier présentant une symétrie axisymétrique, la grandeur naturelle à choisir est le potentiel vecteur magnétique et la température.

Les équations du champ thermo-électromagnétique sont fortement couplées. Les caractéristiques physiques, perméabilité, conductibilité électrique et conductibilité thermique dépendent de la température. Le niveau de température atteint dépend du courant injecté ou du champ magnétique appliqué. Il existe aujourd'hui des codes de calcul par la méthode des Volumes finis VCM qui peut résoudre des équations électro magnéto thermiques couplées. C'est le cas d'un code de calcul bidimensionnel développé et implémenter sous l'environnement Matlab, utilisé dans ce travail.

Dans ce travail ; on s'intéresse à d'étudier la modélisation des problèmes magnétodynamiques et thermiques par la méthode MCV, Les problèmes magnétodynamiques et thermiques sont étroitement liés, ce qui implique de résoudre le problème couplé magnéto-thermique, cette analyse sera réalisée à partir de la résolution des équations aux dérivées partielles qui régissent les phénomènes magnétiques et thermiques des systèmes.

On peut ainsi en modifiant la géométrie de l'inducteur ; source d'énergie électromagnétique, ainsi la forme de la plaque de la cuisson, déterminer la forme des zones à chauffer. Par action sur la fréquence du champ électromagnétique, il est possible d'agir sur la profondeur de pénétration des courants de Foucault et par conséquent sur l'épaisseur traitée.

Description Du Travail

Cette description traduit l'ensemble des travaux faites ; telles qu'elles sont énoncées dans les différentes parties qui suivent. Il s'agit donc d'une description des activités « prescrites ».

Notre analyse du travail pendant cette période a conduit à distinguer quatre grandes étapes et des résultats :

Dans la première partie de cette thèse ; On présente les principes, les caractéristiques d'un système de chauffage par induction magnétique (cuisson par induction) et ces applications.

Dans la deuxième partie les phénomènes physiques et les interactions entre ces phénomènes intervenant dans les systèmes inductifs sont présentés. Ensuite, les systèmes de chauffage par induction sont choisis pour expliciter les phénomènes physiques : le phénomène électromagnétique issu des équations de Maxwell et des lois des milieux, l'équation de transfert thermique, Les termes d'interaction entre phénomènes sont mis en évidence : termes sources, propriétés physiques, propriétés thermique en fonction de la température. Les facteurs importants et influents pour les termes de couplage sont mis en évidence en appliquant la méthode MCV pour résoudre le problème des dérivées partielles :

Dans la troisième partie, Nous présentons la méthode des volumes finis ; utilisée pour la résolution des deux équations aux dérivées partielles, Ainsi nous proposons de décrire les modèles numériques optés pour la résolution des équations mathématiques finales décrivant l'évolution spatiale et temporelle des phénomènes physiques présents dans les dispositifs de chauffage par induction. Après les formulations électromagnétiques et thermiques d'un système de chauffage par induction, les modèles du couplage électromagnétique thermique et nous proposons notre propre modèle basé sur la technique de la paramétrisation, Il importe, en électromagnétisme, de tenir compte des variations des propriétés physiques en fonction de la température, parmi lesquelles nous citerons :

La Quatrième partie est consacrée à la modélisation numérique et aux résultats de simulations de notre travail. L'objectif de cette partie est double, qui sera basé sur la technique de la paramétrisation. Tout d'abord nous avons confronté les résultats obtenus par des applications conventionnels de la cuisson par induction. Nous avons abordé le cas de deux conceptions trois et six inducteurs, puis le deuxième deux nouvelles conceptions géométrique sont présentés afin de normaliser la distribution de la température au fond de la plaque chauffée pour les appareils de chauffage de petites inductions, d'où le but de notre étude était de déterminer la position de la bobine optimale et l'amplitude et la fréquence optimales de courant électrique pour atteindre la température désirée dans une plaque en acier inoxydable. La méthode des volumes finis modélisation numérique en combinaison avec une optimisation géométrique de la plaque perforée en la comparant à celle pleine.

En conclusion nous présentons les avantages et les inconvénients de chacun des conceptions géométriques. Finalement après amélioration des résultats pour ces nouvelles

topologie et conception de tel cuisson ; nous a donner des résultats très satisfaisantes au niveau de la répartition de la température et ils sont répondues aux problèmes poser.

Chapitre 1

Introduction **Aux** **S**ystèmes De **C**hauffages **P**ar **I**nduction

I.1.	HISTORIQUE	9
I.2.	INTRODUCTION	10
I.3.	PRINCIPE DE LA CUISSON PAR INDUCTION	11
I.4.	CARACTERISTIQUES DU CHAUFFAGE PAR INDUCTION	15
	I.4.1. L'effet de peau	15
	I.4.2. Puissance transmise à la charge	16
I.5.	APPLICATIONS DU CHAUFFAGE PAR INDUCTION	17
	I.5.1. Le réchauffage avant formage des métaux	17
	I.5.2. Le chauffage des liquides	17
	I.5.3. Le traitement thermique	18
	I.5.3.1. La trempe superficielle	18
	I.5.3.2. Les traitements thermiques dans la masse	18
	I.5.4. La fusion	18
	I.5.4.1. Les fours à induction canal	18
	I.5.4.2. Les fours à creuset	19
	I.5.5. Brasage	19
	I.5.6. Collage de métaux et de corps non-métalliques	19
	I.5.7. L'induction dans les industries agro-alimentaires	19
	I.5.8. Plasma inductif	19
	I.5.9. Autres applications	20
I.6.	AVANTAGES ET INCONVENIENTS DU CHAUFFAGE PAR INDUCTION	20
	I.6.1 Avantages	20
	I.6.2 Inconvénients	20
I.7.	CONCLUSION	21

Ce chapitre est consacré à la présentation une revue bibliographie des chauffages par induction (cuisson par induction) et leurs applications ; ainsi après un rappel historique du chauffage. Nous citons le principe ; les caractéristiques, équipement d'un système de chauffage électromagnétique magnétique, sa structure géométrie, et en dernier lieu ses applications.

I.1 HISTORIQUE

Le phénomène d'induction magnétique fut découvert par le physicien anglais Michael Faraday en 1831. C'est dans les années 1900 que l'on commence à utiliser l'induction comme procédé de chauffage de pièces en métal, mais il est très limité à cause des faibles puissances disponibles. En 1922 ; l'évènement des générateurs dynamiques le rend plus efficace et des études sur le chauffage par induction montrent que l'on peut chauffer différentes parties d'une pièce sans chauffer les autres en jouant sur la fréquence, la puissance ainsi que les paramètres des matériaux tels que la résistivité électrique et la perméabilité magnétique relative. Ainsi a pris naissance le traitement superficiel par induction. Plus tard dans les années 1960, l'arrivée des générateurs statiques avec les semi-conducteurs permet l'utilisation de plus grandes puissances et fréquences. Aujourd'hui, le chauffage par induction est un procédé industriel bien maîtrisé dans un grand nombre de domaines, tels que la fonderie, le soudage ou le durcissement [WANSER 95].

En 1831, Faraday découvre le phénomène d'induction dont les lois sont précisées par Foucault en 1851. Vers 1860, Maxwell propose une théorie générale de l'électromagnétisme classique qui pose les fondements de la théorie moderne. En 1885, les premières recherches sur les effets thermiques commencèrent, mais les principes de base du chauffage par induction ont été compris et appliqués dans les processus industriels depuis les années 1920 [BYUN 00].

A partir de 1925, l'effet de peau due à une concentration périphérique des courants de Foucault dans les masses métalliques élargit considérablement les applications du chauffage par induction.

En 1957, les américains ont développé un dispositif d'électronique de puissance à base de thyristor, marquant le début de la révolution technologique du chauffage par induction. A partir de 1980 et grâce à l'évolution de la technologie les systèmes de chauffage par induction sont devenus très complexes et très courants. Aujourd'hui, le recours aux techniques de simulations numériques a permis de substituer le calcul à une large part des essais [DEVELEY 08][BYUN 98].

I.2 INTRODUCTION

Le chauffage par induction est couramment employé dans différentes branches de l'activité humaine. Les facilités de réglage et de mise marche automatique, l'absence de combustion et de dégagement de gaz toxiques, la propreté des appareils, sont autant d'avantages du chauffage par induction [MAMMAR 04].

Grâce aux recherches des vingt dernières années, de nombreux procédés industriels nécessitant des opérations de chauffage font appel à des dispositifs de chauffage par induction. Les applications sont très nombreuses, qu'il s'agisse de traitement thermique de surface, de fusion, soudage, brasage, etc. [KAGIMOTO 10].

Le chauffage par induction électromagnétique fait partie des techniques électrothermiques qui permettent de chauffer un matériau sans contact direct avec une source d'énergie électrique [FELIACHI 91] [The Maths Works 92][DEVELEY 08][SARENI 92]. Quelle que soit la nature des applications industrielles, le chauffage par induction présente un certain nombre d'avantages intrinsèques qui explique son développement croissant [MOHAMMADI 03]. Par rapport aux techniques classiques, le chauffage par induction est précis grâce à un contrôle de la température, du temps et de la vitesse de chauffage de la pièce à traiter. Cela se traduit par une amélioration de la qualité et de la productivité.

Dans ce chapitre nous présentons dans un premier temps l'étude bibliographique les éléments qui constituent le système de chauffage par induction ; à savoir, les matériaux, les différents types d'inducteurs et leurs schémas équivalents proposés. Nous parlerons brièvement sur les différentes topologies destinés au chauffage par induction, leurs techniques de modélisation. Enfin, nous évoquerons l'état de l'art des principales lois de commande. [MENG 09].

Les applications sont très nombreuses, qu'il s'agisse de traitement thermique de surface, de forgeage, de collage par polymérisation ou encore d'applications domotiques (exemple : cuisson par induction) et ménagères.

Cependant, la mise au point d'installations de chauffage par induction n'est pas chose aisée. Les inducteurs sont encore bien souvent dimensionnés de façon empirique [MENG 09], sur la base de l'expérience acquise par le constructeur, et le profil de puissance à injecter dans la pièce, obtenu par essais successifs [NUNS 93]. Les campagnes d'essais sont cependant longues et coûteuses.

Aussi la conception assistée par ordinateur, basée sur la simulation numérique des phénomènes magnétiques et thermiques mis en jeu [Zhang 15], présente des avantages certains en termes de coût, de délai et d'optimisation, pour la mise au point des procédés de chauffage par induction. La prédiction du comportement magnéto-thermique de l'ensemble pièce à chauffer.

L'inducteur permet à la fois l'optimisation du dimensionnement électrique et mécanique de l'inducteur, ainsi que du profil de puissance nécessaire au traitement de la pièce, La distribution de température est quant à elle, un facteur clé de prédiction de l'efficacité du traitement thermique [Meng 12].

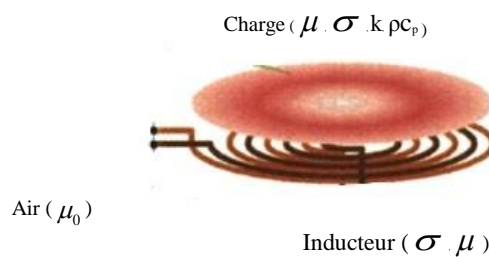


Figure I.1. Eléments constitutifs d'une cuisson par induction

Le chauffage par induction magnétique, dans l'élaboration ou la transformation, en particulier de l'acier, a connu une large utilisation dans les différentes branches de l'industrie moderne, vu ses caractéristiques très attrayantes du point de vue technologique : chauffage rapide, choix de la zone d'envoi de la puissance suivant la fréquence du générateur ou les caractéristiques physiques de l'élément à chauffer et une pollution moindre de l'environnement.

Le chauffage par induction consiste à envoyer, par voie électromagnétique, de l'énergie à l'intérieur ou à la surface des matériaux à chauffer ; en mettant en jeu trois phénomènes physiques successifs [Alloui 03] :

- Transfert d'énergie de l'inducteur au corps à chauffer par voie électromagnétique,
- Transformation en chaleur dans le corps, de l'énergie électrique par effet JOULE,
- Transmission de la chaleur par conduction thermique, dans la masse, et par convection dans son environnement.

I.3 PRINCIPE DU CUISSON PAR INDUCTION

Le chauffage par induction est une application directe de deux lois physiques, la loi de LENZ et l'effet JOULE toute substance conductrice de l'électricité plongée dans un champ magnétique variable (créée par une bobine inductrice ou inducteur) est le siège de courants électriques induits ou courant de Foucault. Ces courants dissipent de la chaleur par effet Joule dans la substance où ils ont pris naissance. Afin de transmettre la plus grande partie de l'énergie à la pièce à traiter, plusieurs paramètres sont à prendre en considération [BECHA 01] [AZZAOUÏ 02] :

- la disposition respective des inducteurs et des pièces (couplage, longueurs respectives),
- La fréquence d'alimentation et l'effet de peau qui caractérisent la répartition des courants induits dans la pièce plus la fréquence augmente, plus les courants induits se concentrent en surface.

Cette notion fondamentale est déterminée par la profondeur de pénétration encore appelée épaisseur de peau, les propriétés magnétiques (perméabilité relative), électriques (résistivité) et thermiques (conductibilité) des pièces à chauffer, variant pour la plupart avec la température, le type d'inducteur (figure I.1) (géométrie, nature du conducteur, technologie) [BECHA 01].

Cette méthode permet de chauffer directement une pièce par l'intermédiaire du champ magnétique créé par une source froide (le bobinage), contrairement, par exemple, au chauffage par résistante où la source (la résistance) est chaude. Cette méthode présente donc les avantages suivants [AURIOL 97] :

- Un très bon rendement,
- Une faible inertie de chauffage,
- La possibilité de contrôler la répartition de l'échauffement dans l'épaisseur de la pièce par le réglage de la fréquence (dû à l'effet de peau),
- Un réglage fin de la puissance dissipée dans la pièce grâce à l'alimentation du bobinage par un système d'électronique de puissance (généralement un onduleur à résonance).

Ces divers avantages font que le système de chauffage par induction (figure I.2), est très utilisé dans l'industrie et domestique, tel que la cuisson par induction, présente un modèle d'espace d'état analytique calculé à bon marché d'une casserole située sur une plaque à induction. Ce modèle permet de calculer les flux de chaleur principaux qui se déroulent dans

le système et, en conséquence, il peut jouer un rôle clé pour améliorer l'efficacité de système.

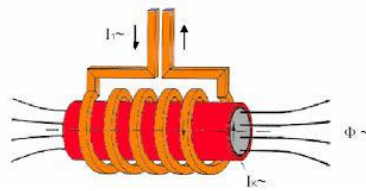


Figure I.2 Principe du chauffage par induction.

La cuisson par induction fonctionne, par définition, grâce à des inducteurs placés sous forme de bobines à différentes géométries (figure I.3), en dessous d'une plaque. Les inducteurs agissent comme des aimants produisant un champ électromagnétique qui se concentre sur la pièce à chauffer. Le tout circule alors dans un circuit fermé.

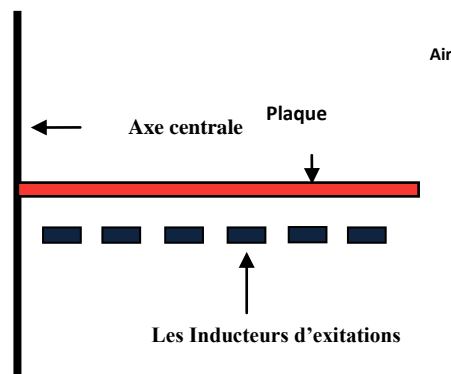


Figure I.3 La géométrie axisymétrique de la cuisson à induction

Sécurité et économie sont donc les 2 grands avantages que présente la cuisson par induction, des mots somme toute rassurants pour un outil de travail à l'origine de bons nombres d'accidents domestiques. [FELIACHI 91]

Le chauffage par induction électromagnétique fait partie des techniques électrothermiques qui permettent de chauffer un matériau sans contact direct avec une source d'énergie électrique. Il consiste à plonger le corps à chauffer dans un champ électromagnétique variable dans le temps, et à dissiper sous forme de chaleur l'énergie entrant dans le corps. Il se distingue cependant nettement des autres techniques (infrarouge et micro-ondes) par la nature des matériaux chauffés et par la bande de fréquence électrique utilisée, c'est-à-dire par la profondeur de pénétration et par les densités de puissance de chauffage obtenues. En effet, de par son principe, il ne s'applique qu'aux

matériaux conducteurs de l'électricité, c'est-à-dire aux matériaux de résistivité électrique comprise entre 10^{-8} W.m (cuivre) et 10^{-1} W.m (verres fondus). La bande de fréquence employée est comprise entre la fréquence industrielle de 50 Hz et quelques mégahertz, si bien que les profondeurs de pénétration s'étagent entre quelques micromètres et quelques centimètres. Les densités de puissance surfacique peuvent atteindre 10^5 kW/m² [DEVELEY 00].

■ On peut caractériser les performances de cette technique de chauffage par le produit fréquence-puissance et en suivre ainsi l'évolution. Depuis l'époque où le chauffage par induction faisait appel aux groupes tournants, ce produit a notablement augmenté. En effet, ces premiers générateurs ont été peu à peu remplacés par des convertisseurs statiques et, jusqu'à ces dernières années, le produit fréquence-puissance était classiquement de 100 à 1 000 kHz.kW. Actuellement, la tendance forte est d'augmenter la fréquence et la puissance des installations. On peut arriver ainsi à des valeurs fréquence-puissance de l'ordre de 250 000 kHz.kW (Comme c'est le cas, pour le soudage au défilé des tubes d'acier ou des torches à plasma inductif de forte puissance) [DEVELEY 00].

Tout cela suppose un développement parallèle des matériels électrotechniques nécessaires tels que les condensateurs, les transformateurs, les inducteurs refroidis par l'eau, le câblage anti-inductif dit couramment « aselfique », etc., qui constituent la technologie moderne du chauffage par induction.

■ Comme dans tout problème de chauffage, la puissance nécessaire au type de traitement thermique recherché est imposée par la masse à chauffer, la température à atteindre et le temps de chauffe. Pour l'ingénieur chargé de concevoir ou de conduire une installation de chauffage par induction, les questions à résoudre sont d'ordre électromagnétique pour optimiser le transfert de puissance entre la source et le matériau, puis d'ordre thermique pour connaître le champ de température et son évolution dans le temps [DEVELEY 00].

■ Une fois définie la puissance nécessaire, trois étapes sont en général à franchir.

En premier lieu, se pose la question du choix de la fréquence de travail. En effet, ce choix conditionne la profondeur de pénétration et permet donc de localiser la source thermique plus ou moins au voisinage de la surface du matériau. De ce choix dépend la nature du générateur à utiliser.

En second lieu, il faut assurer la maîtrise du transfert entre l'inducteur et le matériau de façon à obtenir la puissance injectée nécessaire au traitement recherché. Cette étape permet de définir la forme et la constitution de l'inducteur, puis l'adaptation correcte de l'inducteur au générateur [DEVELEY 00].

Enfin, il faut s'assurer que l'évolution des températures et leurs répartitions dans le matériau correspondent bien au but recherché. Bien que cette dernière étape relève plus de considérations thermiques qu'électromagnétiques, elle ne doit pas être négligée. La réussite de l'opération de chauffage en dépend. [DEVELEY 08]

I.4 CARACTERISTIQUES DU CHAUFFAGE PAR INDUCTION

Deux grandeurs caractérisent fortement l'efficacité thermique et énergétique de l'induction : l'effet de peau et la puissance transmise à la charge à chauffer.

I.4.1 L'EFFET DE PEAU

L'effet de peau caractérise la répartition des courants induits dans la pièce à chauffer. Quand une substance conductrice de l'électricité est soumise à un champ magnétique variable, la densité des courants induits dans la substance décroît, à partir de la surface. C'est ces non-uniformités de la densité des courants induits qui est traduite sous l'appellation d'effet de peau, dont la grandeur caractéristique est la profondeur de pénétration du champ magnétique ou épaisseur de peau [AURIOL 97], [DEVELEY 97].

Dans le cas d'un conducteur plan, elle est exprimée par :

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{\pi f \mu_0 \mu_r \sigma}} \quad (\text{I.1})$$

La profondeur de pénétration dépend donc de :

- La fréquence du champ variable,
- La nature du matériau à chauffer du point de vue perméabilité magnétique (μ), et conductivité électrique (σ),
- La température de la pièce à chauffer ($\sigma(T)$).

En effet, cette profondeur d'après l'équation (I.1), diminue quand la fréquence ou l'une des propriétés physiques du matériau (μ, σ) augmente.

I.4.2 PUISSANCE TRANSMISE A LA CHARGE

cas d'un système physiquement linéaire

La puissance de chauffage induite, dans un conducteur plan, a pour expression [DEVELEY 97] :

$$P_C = \rho \frac{H_s^2}{\delta} S \quad (I.2)$$

Où, H_s : La valeur efficace du champ magnétique à la surface (S) du conducteur.

Si on remplace δ par son expression, on trouve

$$P_C = \rho H_s^2 \sqrt{\pi f \mu_o \mu_r \sigma} S \quad (I.3)$$

Cette formule montre que la puissance dépend du carré du champ magnétique, c'est à dire du carré de l'intensité du courant créant ce champ, de la fréquence, de la perméabilité magnétique, et de la conductivité électrique du milieu à chauffer.

Influence des paramètres du matériau

La formule précédente montre que cette puissance augmente avec la résistivité ρ la perméabilité ($\mu = \mu_r \mu_o$) et de la fréquence f .

Influence de la fréquence

La fréquence f joue un rôle primordial d'autant plus que c'est un paramètre à la disposition de l'utilisateur. Nous pouvons ainsi, en choisissant bien la valeur de la fréquence entre 50 Hz et 10 MHz, faire varier la profondeur de pénétration. Nous comprenons donc que le choix de la fréquence est essentiel avant toute opération de chauffage inductif [DEVELEY 97].

L'augmentation de la fréquence augmente la puissance transmise à la charge. Il faut cependant se rappeler que l'augmentation de la fréquence s'accompagne également d'une diminution de la profondeur de pénétration, ce qui peut conduire alors à un chauffage trop

intense dans une épaisseur trop faible. Cette propriété est utilisée pour des chauffages très rapides lors des traitements thermiques superficiels [DEVELEY 97].

Cas général

Dans un cas général, la densité volumique de la puissance instantanée dissipée par effet JOULE peut être exprimée, en fonction de la densité des courants induits, par l'expression suivante [DEVELEY 97] :

$$p(t) = \frac{1}{\sigma} |J(t)|^2 \quad (\text{I.4})$$

J : est la densité instantanée des courants induits.

Ainsi, la puissance totale dissipée par effet JOULE au niveau de la pièce à chauffer sera :

$$P_{\text{tot}} = \iiint_V p(t) dV \quad (\text{I.5})$$

dV : est l'élément de volume.

I.5 APPLICATIONS DU CHAUFFAGE PAR INDUCTION

Grâce aux progrès des inducteurs et des générateurs, les applications du chauffage par induction sont très variées. Parmi ces applications (figure I.2), nous citerons :

I.5.1 LE RECHAUFFAGE AVANT FORMAGE DES METAUX

Le chauffage d'un métal dans la masse facilite sa déformation plastique.

Parmi les produits susceptibles d'être chauffés avant déformation, on distingue les brames et les billettes.

Des pièces de géométries généralement simples, sont portées, de façon homogène, à un niveau de température de 450 à 550 °C pour les alliages d'aluminium, de 750 à 900°C pour les alliages cuivreux, et de l'ordre de 1100 à 1300°C pour les aciers [1].



Figure.1.4 Réchauffage avant formage



Fig.1.5. Réchauffage avant forgeage

I.5.2 LE CHAUFFAGE DES LIQUIDES

Nous pouvons citer, par exemple, les réacteurs chimiques utilisés pour la fabrication des peintures et des vernis, dans l'industrie pétrolière et dans l'industrie pharmaceutique.

I.5.3 LE TRAITEMENT THERMIQUE

On distingue le traitement thermique superficiel ou trempe et le traitement dans la masse. Ces applications nécessitent souvent l'utilisation des hautes fréquences (typiquement 50 à 400 KHz) [NUNS 93].

I.5.3.1 la trempe superficielle

Ces dernières années, la fabrication mécanique de grandes séries, en particulier, dans l'industrie automobile, ont vu un développement considérable d'un traitement de qualité constitué d'un chauffage superficiel par induction.

Les traitements de surface couvrent des opérations très diverses :

- Galvanisation,
- Dégraissage, découpage, séchage,
- Revêtements divers (verniss, plastifications, peintures,...etc.).

L'effet de peau est important dans un chauffage superficiel, les densités de puissances utilisées doivent être très élevées pour que le temps de chauffage sera court, ainsi, la zone à traiter restera localisée.

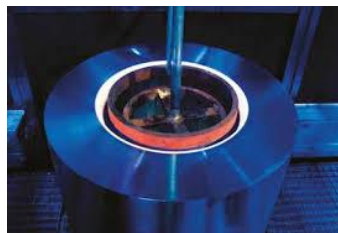


Figure I.6. La trempe superficielle

I.5.3.2 les traitements thermiques dans la masse

Ce type de traitement permet de traiter uniformément une pièce de géométrie simple ou bien une zone bien précise de la pièce.

On trouve les applications suivantes :

- Forgeage, estampage,
- Recuit.

I.5.4 LA FUSION

La fusion par induction est un procédé dans lequel le métal ou l'alliage est fondu sous forme liquide dans un four à induction pour ensuite être versé dans un moule habituellement. Les fours de fusion sont, soit du type dit à canal, soit du type dit à creuset [COEVOET 97].



Figure I.7. Fusion par induction

I.5.4.1 les fours à induction canal

De points de vue électrique, le four à canal est équivalent à un transformateur avec un circuit magnétique fermé, dont le canal, constituerait l'enroulement secondaire.

Il est généralement alimenté à une fréquence relativement élevée.

Le four à canal se caractérise par une puissance spécifique faible et la nécessité de conserver en permanence du métal liquide dans la veine.

Le four à canal est donc un appareil, spécifique adapté à assurer le maintien de l'état de la charge à une température précise [COEVOET 97].

I.5.4.2 les fours à creuset

Les fours à induction à creuset peuvent être intégrés dans des enceintes sous vide ou sous atmosphère contrôlée, permettant d'obtenir certains alliages difficiles ou impossibles à obtenir dans l'air.

I.5.5 BRASAGE

Le brasage est la réunion des pièces d'un même métal ou de métaux différents par l'intermédiaire d'un métal d'apport plus faible, il est utilisé par exemple dans les éléments de radiateurs.



Figure I.8. Brasage

I.5.6 COLLAGE DE METAUX ET DE CORPS NON-METALLIQUES

Le collage devient une méthode d'assemblage industriel de plus en plus courante.

Ce collage concerne aussi bien l'assemblage de différents métaux que celui de métaux et de corps non métalliques (métal-verre à titre d'exemple). On le rencontre en particulier dans l'industrie automobile. [COEVOET 97].



Figure I.9. Collage de Métaux

I.5.7 L'INDUCTION DANS LES INDUSTRIES AGRO-ALIMENTAIRES

L'induction électromagnétique, ne peut chauffer que des matériaux conducteurs de l'électricité.

Dans le domaine de l'agro-alimentaire, l'induction ne peut donc chauffer les différents produits à cuire que par l'intermédiaire d'un support métallique, qui transmettra ensuite l'énergie reçue, avec un rendement lié directement à la nature thermique de ce support métallique.

I.5.8 PLASMA INDUCTIF

Les gaz deviennent conducteurs à haute température (≥ 5000 °K) et on peut donc les chauffer par induction.

Les plasmas inductifs sont surtout utilisés pour la fabrication de films optiques de haute qualité ; dans la neutralisation des déchets nucléaires, dans la fabrication des composants électroniques et dans le soudage des poudres métalliques [COEVOET 97].

I.5.9 AUTRES APPLICATIONS

- Traitement des déchets nucléaires,
- Fabrication de semi-conducteurs et de fibres optiques,
- Percement de petits trous dans des blocs de bois,
- Thermoformage des plastiques,
- Graphitisation (balais de machines électriques).

I.6 Avantages et Inconvénients du chauffage par induction

I.6.1 Avantages

La chaleur inductive permet :

- De régler la chaleur à diffuser de manière précise. La chaleur se transmet beaucoup plus rapidement le long de l'objet qu'une chaleur par convection traditionnelle ;
- De chauffer des parties inaccessibles, comme par exemple des morceaux de métal, encastrés dans du bois, du PVC, ou dans d'autres matériaux.

- Une économie d'espace que les installations pour chaleur par convection dans la mesure où la chaleur est présente elle-même dans la matière, la radiation thermique est alors très petite ;
- De meilleures conditions de travail sans saleté ni fumée par rapport aux installations traditionnelles de chauffage ;
- D'avoir une rentabilité beaucoup plus importante, conditionnée par une moindre perte de chaleur et d'émission.

I.6.2 Inconvénients

- Lors de mauvaises manipulations, d'autres objets peuvent être involontairement chauffés. Pour y remédier, on utilise le procédé d'émulsion ou le refroidissement par eau ;
- Des coûts d'acquisition élevés pour les fortes puissances ;
- Des champs électromagnétiques peuvent apparaître ce qui peut alors perturber l'environnement, lorsque les isolations sont mauvaises ou bien lorsqu'il y a une protection HF. [DEVELEY 08]

I.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté, le principe, les caractéristiques, ces avantages et inconvénients et ses applications industrielles. Dans le chapitre suivant se base sur les formulations mathématiques celles qui sont appropriées à leur problème et de les mettre en œuvre.

Chapitre 2

Modélisation Des Phénomènes
Electromagnétiques Thermique MCV

II.1.	INTRODUCTION	24
II.2.	LES MODELES MATHEMATIQUES EN ELECTROMAGNETISME	24
II.2.1.	Equations générales de MAXWELL	24
II.2.2.	Interprétation physique des équations Electromagnétiques	25
III.2.2.1.	équation de couplage électromagnétique	25
III.2.2.2.	Les équations de conservation	29
III.2.2.3.	Loi de comportement des matériaux (Milieux physiques)	30
II.3.	FORMULATION DES EQUATIONS ELECTROMAGNETIQUES	31
II.3.1	Le Modèle Electrostatique	31
II.3.2	Le Modèle Electrocinétique	32
II.3.3	Le Modèle Magnétostatique	32
III.3.3.1	Le Modèle Magnétostatique scalaire	32
III.3.3.2	Le Modèle Magnétostatique vectoriel	33
III.3.4	Le Modèle Magnétodynamique	33
II.4.	FORMULATION DE L'EQUATION MAGNETODYNAMIQUE	34
II.5.	MODES DE TRANSMISSION DE LA CHALEUR	38
II.6.	NOTIONS FONDAMENTALES DE CODUCTION THERMIQUE	38
III.6.1	Le régime non-stationnaire (Dynamique)	38
III.6.2	La température	39
III.6.3	La conductivité thermique	39
II.7.	LES LOIS FONDAMENTALES DE TRANSMISSION DE LA CHALEUR	40
II.7.1	Quantité de chaleur transmise par rayonnement	40
II.7.2	Flux de chaleur transmis par convection	41
II.7.3	Densité de flux de chaleur : flux de chaleur	42
II.8.	EQUATION DE LA THERMIQUE	43
II.9.	LE MODELE CYLINDRIQUE AXISYMETRIQUE EN ELECTROMAGNETISME ET EN THERMIQUE	45
II.10.	DIFFERENTES TECHNIQUES DE RESOLUTION DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES	49
II.10.1	Méthode des différences finies (MDF)	49
II.10.2	Méthode des éléments finis (MEF)	50
II.10.3	Méthode des intégrales de frontières (MIF)	51
II.10.4	Méthode des circuits couplés (MCC)	51
II.10.5	Méthode des volumes finis (MCV)	52
II.11.	CONCLUSION	54

II.1 INTRODUCTION

Pour le fonctionnement des systèmes de chauffages par induction nécessitent une connaissance des phénomènes électromagnétiques et thermiques à la fois ; qui régissent l'évolution spatio-temporelle d'un tel phénomène.

Un tel problème, fait appel à deux types d'environnement. Il s'agit de :

- L'environnement magnétique,
- L'environnement thermique.

Ces deux environnements se basent sur des équations sont :

- Les équations de J. C. MAXWELL pour l'électromagnétisme,
- L'équation de diffusion de la chaleur pour la thermique.

Les équations de base à résoudre, pour la modélisation des phénomènes électromagnétiques, sont les équations de Maxwell. Nous débuterons par un rappel de ces équations et nous en extrairons les équations qui permettent le calcul des grandeurs physiques concernées en magnétodynamique.

La suite de ce chapitre va consister à exposer les différentes formulations mathématiques développées sur la base de ces équations et ce n'est que lorsque ces formulations auront été définies en détail, avec leur principales propriétés, que nous présenterons leurs discrétisations afin de les résoudre numériquement.

ENVIRONNEMENT ELECTROMAGNETIQUE

II.2 LES MODELES MATHEMATIQUES EN ELECTROMAGNETISME

II.2.1 EQUATIONS GENERALES DE MAXWELL

Les phénomènes électromagnétiques qui apparaissent dans les dispositifs électrotechniques sont régis par les équations de MAXWELL, des lois constitutives des matériaux. Nous les résumons comme suit [SABONNADIÈRE88] :

- Equations de MAXWELL :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\text{rot}} \vec{H} = \vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (\text{II.1})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\text{div}} \vec{B} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.2})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (\text{II.3})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\text{div}} \vec{D} = \rho \end{array} \right. \quad (\text{II.4})$$

- Lois constitutives des milieux

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{B} = \mu(\vec{H}) \cdot \vec{H} \quad \text{Où} \quad \vec{H} = \nu(\vec{B}) \vec{B} \\ \vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E} \end{array} \right. \quad (\text{II.5})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E} \end{array} \right. \quad (\text{II.6})$$

A ces équations, doit être associée la loi d'OHM généralisée

$$\vec{J}_c = \vec{J}_{\text{ex}} + \sigma \cdot \vec{E} + \sigma (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \quad (\text{II.7})$$

II.2.2 INTERPRETATION PHYSIQUE DES EQUATIONS ELECTROMAGNETIQUE

II.2.2.1 équation de couplage électromagnétique

- Loi d'induction de FARADAY

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Cette équation exprime le couplage électrique- magnétique en régime dynamique et où la variation temporelle de \vec{B} détermine le $\vec{\text{rot}} \vec{E}$, mais ceci ne suffit pas pour déterminer complètement \vec{E} .

Démonstration :

Quand un conducteur se déplace dans un champ magnétique, en coupant des lignes de flux, une force électromotrice (F.e.m) est induite dans ce conducteur [**EDMINISTER 85**], tel que :

$$e = \int_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Où (C) est une boucle fermée (circuit).

De la même manière, une (F.é.m.) est aussi induite, si le flux Φ varie dans le temps à travers un circuit fixe, tel que :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \text{Où} \quad \Phi = f(x, y, z, t),$$

$$\text{Alors} \quad e = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Où (S) est une surface s'appuyant sur le contour (C).

Dans les deux cas, la force électromotrice induite (e) et le taux de la variation temporelle du flux magnétique ($\frac{d\Phi}{dt}$) sont liés par la loi de FARADAY de la manière suivante :

$$\int_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

D'après le théorème de STOCKES (voir Annexe I), nous avons :

$$\int_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

On obtient :

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Ainsi, nous aurons :

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

- Théorème d'AMPERE

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J}_C + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Cette équation exprime la dépendance du champ magnétique de la densité du courant total (conduction + déplacement).

Cette relation peut être interprétée comme étant le taux de variation spatiale du champ en fonction du taux de mouvement des charges.

Démonstration :

L'énoncé général du théorème d'AMPERE indique que l'intégrale curviligne de la composante tangentielle du vecteur champ magnétique \vec{H} , le long d'un contour fermé (C), est égale au courant encerclé par ce contour [EDMINISTER 85]. Soit :

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = I$$

(S) : est la surface qui s'appuie sur le contour(C),

\vec{J} : est la densité du courant.

Selon le théorème de STOCKES, nous avons :

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{H} \cdot d\vec{S}$$

$$\text{Donc } \int_C \text{rot } \vec{H} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

$$\text{D'où : } \text{rot } \vec{H} = \vec{J}$$

• Continuités du courant : densité du courant de déplacement

Le courant total I traversant une surface (S) fermée, est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} I = \int_C \vec{J} \cdot d\vec{S} = - \frac{dQ}{dt} \\ dQ = \rho \cdot dV \end{array} \right.$$

Où :

dQ : Élément de charge,

dV : Élément de volume.

$$\text{D'où } I = -\frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot dV)$$

On divise par l'élément de volume ΔV , on obtient :

$$\frac{\oint \vec{J} \cdot d\vec{S}}{\Delta V} = -\frac{\frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot dV)}{\Delta V}$$

Si $\Delta V \rightarrow 0$, le membre de gauche de l'équation tend, par définition, vers $\text{div } \vec{J}$ (la divergence de la densité du courant; théorème d'OSTROGRADSKI - GREEN), tandis que celui de la droite tend vers $-\frac{\partial \rho}{\partial t}$. Par conséquent : $\text{div } \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$

C'est l'équation de continuité du courant, pour des champs statiques [7] :

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J}$$

Cette densité due au mouvement de charges réelles, (électrons, protons et ions), est appelée densité du courant de conduction (J_c).

Si : $\text{rot } \vec{H} = \vec{J}_c$ reste valable pour les champs dépendants du temps, il vient alors que [8] :

$$\text{div } \vec{J}_c = \text{div}(\text{rot } \vec{H}) \Rightarrow \text{div } \vec{J}_c = 0$$

Une contradiction avec l'équation de continuité du courant ($\text{div } \vec{J}_c = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$) apparaisse c'est pourquoi, MAXWELL, fut amené, à postuler que :

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J}_c + \vec{J}_D$$

Où, \vec{J}_D est la densité du courant de déplacement définie par :

$$\vec{J}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

On aura alors :

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{J}_c &= \text{div}(\text{rot } \vec{H}) - \text{div } \vec{J}_D \\ &= 0 - \text{div}\left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) \end{aligned}$$

$$= - \frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \vec{D})$$

$$= - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

II.2.2.2 Les équations de conservation

- Divergence de l'induction magnétique

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

Cette relation traduit mathématiquement le fait que les seules sources de champ magnétique sont les courants électriques, et il n'existe pas de charge magnétique; c'est pourquoi les lignes du champ sont toujours fermées sur elles-mêmes. Elles forment des boucles. Ces boucles n'ont ni point de départ, ni point d'arrivée, ni point de convergence, d'où la nomination d'induction conservative (champ conservatif).

- Théorème de GAUSS

$$\text{div } \vec{D} = \rho$$

Une charge électrique est source d'un champ électrique; autrement dit, les lignes de champs électriques commencent et se terminent autour des charges électriques [VANDER VORST 85].

Démonstration

L'énoncé général du théorème de GAUSS indique que la charge totale $Q(V)$ contenue dans un volume V , limité par la surface fermée $S(V)$, est égale au flux du vecteur déplacement électrique \vec{D} sortant de la surface $S(V)$. C'est à dire :

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{int}}(V)$$

$$= \int_V \rho \cdot dV$$

D'après le théorème d'OSTROGRADSKI – GREEN (voir Annexe I), nous avons :

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div } \vec{D} \cdot dV$$

D'où :

$$\int_V \operatorname{div} \vec{D} \cdot dV = \int_V \rho \cdot dV$$

Ainsi

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

II.2.2.3 Loi de comportement des matériaux (Milieux physiques)

- Induction et champ électriques

Pour tout champ électrique, dans un milieu isotrope, de permittivité ϵ , nous avons :

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E}$$

Où $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$;

Cette équation d'écrit la relation entre le vecteur induction électrique \vec{D} et le vecteur champ électrique \vec{E} . Elle est linéaire si ϵ est constante.

Dans le cas des conducteurs non-polarisés, nous avons :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \quad ; \quad \epsilon_0 = \frac{1}{36 \cdot \pi \cdot 10^9} \text{ [F/m]}$$

La détermination de \vec{D} de l'équation (III.6) et $\operatorname{rot} \vec{E}$ de l'équation (II.3) détermine complètement \vec{E} .

- Induction et champ magnétiques

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$$

$\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$;

$$\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ [H/m]},$$

Dans le cas d'un aimant permanent, nous avons :

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} + \vec{B}_{re}$$

\vec{B}_{re} : Vecteur induction magnétique rémanente [T].

L'équation (II.5) détermine la relation entre le champ magnétique et l'induction magnétique. Cette relation donne la courbe d'aimantation $B = f(H)$.

Une variation de \vec{H} conduit à une variation de l'induction \vec{B} , on trouve par la suite le cycle d'hystérésis dont la forme se diffère d'un matériau à un autre; donc d'un dispositif électrotechnique à un autre.

II.3 FORMULATION DES EQUATIONS ELECTROMAGNETIQUES

Tous les phénomènes électromagnétiques que l'on veut généralement étudier aux siens des dispositifs électrotechniques sont régis par quatre équations aux dérivées partielles de MAXWELL et par les trois relations du milieu considéré. Nous disposerons alors du système des sept équations. Ces équations décrivent globalement tous les phénomènes électromagnétiques, mais suivant les dispositifs que l'on étudie, certains phénomènes deviennent négligeables; Les équations se découpent donnant alors des modèles plus simples [SABONNADIÈRE]

Par ailleurs, dans le cadre de notre travail, seul le modèle magnétodynamique sera considéré et détaillé, de fait de son adaptation à la modélisation des systèmes de chauffage par induction.

II.3.1 LE MODELE ELECTROSTATIQUE

Dans ce modèle, le champ \vec{E} est produit par des charges stationnaires qui ne varient pas en termes de répartition, et de valeur avec le temps. Ce modèle est régi par les équations suivantes [SABONNADIÈRE] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0} \quad ; \quad \text{Car } \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \\ \vec{\text{div}} \vec{D} = \rho \\ \vec{D} = \epsilon \vec{E} \end{array} \right.$$

La relation : $\vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}$ permet de définir une fonction auxiliaire U appelée potentiel scalaire électrique, tel que : $\vec{E} = -\text{grad} U$

Ce modèle se ramène alors à l'équation suivante :

$$\operatorname{div}(\varepsilon \vec{\operatorname{grad}} U) + \rho = 0$$

II.3.2 LE MODELE ELECTRODYNAMIQUE

Ce modèle est utilisé dans l'étude de la répartition du courant électrique de conduction dans des conducteurs isolés soumis à des différences de potentiel continues [SABONNADIÈRE].

Il est régi par les équations :

$$\begin{cases} \vec{\operatorname{rot}} \vec{E} = 0 \\ \vec{\operatorname{div}} \vec{J} = 0 \\ \vec{J} = \sigma \vec{E} \end{cases}$$

La relation : $\vec{\operatorname{rot}} \vec{E} = 0$; implique qu'il existe encore un potentiel électrique scalaire U (tension électrique), tel que : $\vec{E} = -\vec{\operatorname{grad}} U$

Le modèle se ramène alors à :

$$\operatorname{div}(\sigma \vec{\operatorname{grad}} U) = 0$$

II.3.3 LE MODELE MAGNETOSTATIQUE

Dans ce modèle, le terme $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ de l'équation (III.3) est nul. Ceci s'explique par le fait que le champ magnétique est produit par des sources indépendantes du temps [SABONNADIÈRE].

Dans le cas de ce modèle, deux sortes de formes, peuvent l'exprimer. Il s'agit de :

II.3.3.1 le Modèle Magnétostatique scalaire

Dans ce cas, les courants électriques sont nuls, il vient alors que les champs ne dépendent pas du temps. D'après les équations (II.1) et (II.2), on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\text{rot}} \vec{H} = \vec{0} \\ \text{div} \vec{B} = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Courants nuls} \\ \text{Induction conservative} \end{array}$$

Avec la loi du milieu, $\vec{B} = \mu \vec{H} + \vec{B}_{re}$

\vec{H} Dérive d'un potentiel scalaire magnétique Φ , d'où la nomination du modèle magnétostatique scalaire, tel que :

Le modèle se ramène alors à l'équation :

$$\text{div}(\mu \text{grad} \Phi) = \text{div} \vec{B}_{re}$$

II.3.3.2 Le Modèle Magnétostatique vectoriel

Dans le modèle magnétostatique vectoriel, les courants électriques ne sont pas nuls. Il vient alors que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\text{rot}} \vec{H} = \vec{J} \\ \text{div} \vec{B} = 0 \end{array} \right.$$

Avec la loi du milieu : $\vec{B} = \mu \vec{H} + \vec{B}_{re}$

La relation $\text{div} \vec{B} = 0$, permet de définir une fonction vectoriel \vec{A} appelée potentiel vecteur magnétique [6], tel que :

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} \tag{II.8}$$

D'où le système d'équations :

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot} \vec{A} \right) = \vec{J} + \text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \vec{B}_{re} \right)$$

II.3.4 LE MODELE MAGNETODYNAMIQUE

Ce modèle s'applique aux dispositifs électromagnétiques dans lesquels les sources du courant ou tension sont dépendantes du temps, ainsi, les champs électrique et magnétique seront alors couplés par la présence des courants induits (ou courants de FOUCAULT)[**SABONNADIÈRE**].

Le potentiel vecteur \vec{A} joue un rôle primordial, où la connaissance de \vec{A} implique la connaissance de tous les autres grandeurs physiques où :

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

En termes d'équations, nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\text{rot}} \vec{H} = \vec{J} \\ \vec{B} = \text{rot } \vec{A} \end{array} \right.$$

A ces équations, nous ajoutons les lois caractéristiques au milieu

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{B} = \mu \vec{H} \\ \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \end{array} \right.$$

C'est à partir de ces équations de base de ce modèle que nous pouvons déterminer l'équation décrivant l'évolution des phénomènes électromagnétiques dans un dispositif où l'ensemble des champs présents sont en fonction explicite ou implicite de l'espace et du temps.

L'utilisation de ce modèle est très répandue dans l'étude des machines électriques, des dispositifs du chauffage par induction, des transformateurs, ... etc.

II.4 FORMULATION DE L'EQUATION MAGNETODYNAMIQUE

- Une formulation de potentiel vecteur magnétique : les raisons de ce choix

Pour le calcul numérique, différents choix de variables d'état aboutissant à des formulations différentes sont possibles. Les formulations en potentiels en particulier, sont toute fois mieux adaptées aux éléments finis.

Par ailleurs, dans le cadre du chauffage par induction, les avantages présentés par ce type de formulation sont nombreux :

- Elle permet d'imposer des sources électriques proches des procédés réels (densités de courant – différences de potentiels),
- La réaction d'induit est directement prise en compte,
- La grandeur utile pour le chauffage, à savoir, la densité de puissance induite, est directement liée à la variable d'état, bénéficiant ainsi d'un maximum sur la précision.

En se basant sur les équations de J. C. MAXWELL, on peut formuler l'équation qui décrit l'évolution spatiale- temporelle des phénomènes électromagnétiques.

Nous avons :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Avec : $\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A}$

On obtient:

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\text{rot}} \vec{A})$$

$$= -\vec{\text{rot}} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$$

$$\Rightarrow \vec{\text{rot}} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0} \Rightarrow \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ est un champs conservatif, il dérive donc d'un potentiel scalaire électrique U,

tel que :

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\text{grad}} U \Rightarrow \vec{E} = -\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\text{grad}} U \right) \quad (\text{II.9})$$

A partir de l'équation (III.1) et de l'équation (III.5) nous avons :

$$\vec{\text{rot}} \left(\frac{1}{\mu} \vec{B} \right) = \vec{J}$$

A partir des équations (III.7), (III.8), et (III.9) nous avons :

$$\Leftrightarrow \vec{\text{rot}} \left(\frac{1}{\mu} \vec{\text{rot}} \vec{A} \right) = \vec{J}_{\text{ex}} + \sigma \cdot \vec{E} + \sigma (\nabla \wedge \vec{A})$$

$$\Leftrightarrow \text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot} \vec{A} \right) = \vec{J}_{\text{ex}} - \sigma \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \text{grad} U \right) + \sigma (\vec{\mathcal{G}} \wedge \text{rot} \vec{A})$$

$$\Leftrightarrow \text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot} \vec{A} \right) + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \sigma \text{grad} U - \sigma (\vec{\mathcal{G}} \wedge \text{rot} \vec{A}) = \vec{J}_{\text{ex}}$$

Le potentiel vecteur \vec{A} ne peut pas être défini par la seule condition $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$; on doit fixer sa divergence pour assurer l'unicité de la solution de l'équation aux dérivées partielles (E.D.P).

On ajoute alors la condition $\text{div} \vec{A} = 0$; appelée Jauge de COULOMB [SABONNADIÈRE].

Nous obtenons ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot} \vec{A} \right) + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \sigma \text{grad} U - \sigma (\vec{\mathcal{G}} \wedge \text{rot} \vec{A}) = \vec{J}_{\text{ex}} \\ \text{div} \vec{A} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.10})$$

Les termes $-\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ et $\sigma (\vec{\mathcal{G}} \wedge \text{rot} \vec{A})$ représentent les densités des courants induits.

Ils traduisent le caractère dynamique dans le temps et dans l'espace des phénomènes électromagnétiques, tandis que le terme $(-\sigma \text{grad} U)$ décrit la densité du courant dépendante des conditions électriques imposées aux extrémités des conducteurs.

U peut être considéré comme nul [SABONNADIÈRE]. Nous observons que la relation (II.10) définissant une équation locale qui devra être systématiquement adaptée à la région à laquelle s'applique.

Enfin, la définition complète du problème magnétodynamique doit prendre en compte les conditions aux limites du type :

-DIRICHLET dans son cas général : $A = A_0$

-NEUMANN (homogène) dans son cas particulier : $\frac{\partial A}{\partial n} = 0$

Dans le cas où la pièce à chauffer est immobile par rapport à l'inducteur et U est considérée uniformément nulle, l'équation (II.10) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\text{rot}}(\nu \vec{\text{rot}} \vec{A}) + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{J}_{\text{ex}} \\ \text{div} \vec{A} = 0 \end{array} \right. ; \nu = \frac{1}{\mu} : \text{rélectivité magnétique} \quad (\text{II.11})$$

- Cas de dispositifs alimentés en courant harmonique

On suppose que la perméabilité μ ne dépend pas de l'induction magnétique; si les courants d'excitation sont de nature alternative, on peut utiliser une représentation de FRESNEL pour modéliser leur variation temporelle.

L'utilisation des nombres complexes permet alors de remplacer le terme :

$$\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{Par} \quad i\omega \sigma \vec{A}$$

$$\omega = 2\pi f$$

Avec i : Unité imaginaire ($i^2 = -1$),

ω : Pulsation des sources [rd/s].

D'ou l'équation (III.11) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\text{rot}}(\nu \vec{\text{rot}} \vec{A}) + i\omega \sigma \vec{A} = \vec{J}_{\text{ex}} \\ \text{div} \vec{A} = 0 \end{array} \right.$$

- Cas de dispositifs alimentés en courant transitoire

Dans le cas d'une alimentation en courant transitoire, le traitement du système d'équations caractéristiques, nécessite une décritisation en pas à pas dans le temps (échantillonnage temporel).

Si un algorithme du type EULER explicite est adopté, nous aurons : à chaque pas de temps Δt_i [9] :

$$J_i = \frac{J_i - J_{i-1}}{\Delta t_i}$$

Ainsi :

$$\Rightarrow \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{A_i - A_{i-1}}{\Delta t_i}$$

L'expression de la dérivée $(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t})$ doit être alors remplacée dans le système d'équation (II.11)

et, les calculs auront être effectués à chaque pas du temps (Δt_i).

ENVIRONNEMENT THERMIQUE

II.5 MODES DE TRANSMISSION DE LA CHALEUR

Le transfert d'énergie aura lieu à chaque fois qu'un gradient de température existe à l'intérieur d'un système, ou, lorsque deux systèmes à températures différentes sont mis en contact [KREITH 67].

Le transfert de chaleur reconnaît généralement trois modes de transmission de la chaleur. Il s'agit de la transmission par conduction, convection et rayonnement [KREITH 67]. Ces modes de transfert de la chaleur peuvent être présents, dans un procédé, d'une manière séparée, combinée deux à deux ou ensemble à la fois.

Conduction

La conduction est un phénomène au moyen duquel la chaleur s'écoule à l'intérieur d'un milieu (solide, liquide ou gazeux) d'une région à haute température vers une autre à basse température ; ou entre différents milieux mis en contact.

Convection

La convection est un mode de transport d'énergie par l'action combinée de la conduction, de l'accumulation de l'énergie et du mouvement du milieu.

En effet, la convection est le mécanisme le plus important de transfert d'énergie entre une surface solide et un liquide ou un gaz, donc un fluide dans le cas le plus général.

Rayonnement

Le rayonnement est le mécanisme par lequel la chaleur se transmet d'un corps à haute température vers un autre à basse température, lorsque ces corps sont séparés dans l'espace ou même lorsqu'un vide les sépare.

II.6 NOTIONS FONDAMENTALES DE CONDUCTION THERMIQUE

II.6.1 LE REGIME NON-STATIONNAIRE (DYNAMIQUE)

Les transferts de chaleur évoluaient au cours du temps, de telle sorte que les températures, les flux et, bien entendu, les propriétés thermiques seraient variables pendant un temps suffisamment long [KREITH 67][KHEZZAR 88].

II.6.2 LA TEMPERATURE

Si la température reste bien définie en tout point M (repéré par ses coordonnées spatiales (x, y, z)), cette température va évoluer avec le temps de sorte qu'à l'instant t, la température en ce point M est [CRABOL 89] :

$$T_M = f(x, y, z, t) = T(x, y, z, t)$$

Il existe un gradient de température qui fait intervenir les dérivées spatiales de cette fonction température, tel que, en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\text{grad}} T = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k}$$

Où \vec{i} , \vec{j} , et \vec{k} sont les vecteurs unitaires des axes de coordonnées cartésiennes.

II.6.3 LA CONDUCTIVITE THERMIQUE

La conductivité thermique des divers matériaux employés dans l'industrie varie d'une manière très sensible d'une substance à une autre [KREITH 67].

Ainsi k exprimée en [Kcal/(h.m.°C)] est de l'ordre de 6×10^{-3} pour les gaz à la pression atmosphérique, de 1.5×10^{-1} pour les liquides et atteint la valeur de 3.5×10^2 pour le cuivre pur.

Les matériaux ayant une conductivité thermique élevée sont appelés les conducteurs ; tandis que, les matériaux de faible conductivité se rapportent aux isolants thermiques.

En général, la conductivité thermique varie avec la température.

Le tableau II.1 donne, pour diverses substances, l'ordre de grandeur de la conductivité thermique k.

Substance	k en Kcal/(h.m.°C)
Gaz à la pression atmosphérique	0.006 – 0.15
Matériaux isolants	0.030 – 0.18
Liquides non-métalliques	0.075 – 0.60
Solides non-métalliques (briques, pierre à bâtir, béton)	0.030 – 2.2
Métaux liquides	7.50 - 67
Alliages	12.0 - 104
Métaux purs	45.0 - 350

Tableau II.1 Ordre de grandeur de la conductivité thermique pour diverses substances.

Note: 1Kcal/h =1.163 W

II.7 LES LOIS FONDAMENTALES DE TRANSMISSION DE LA CHALEUR

On donnera un aperçu préliminaire des équations fondamentales relatives à chacun des trois modes de transmission de la chaleur.

II.7.1 QUANTITE DE CHALEUR TRANSMISE PAR RAYONNEMENT

La quantité d'énergie quittant une surface sous forme de chaleur rayonnée dépend de la température absolue et de la nature de cette surface [KREITH 67].

L'énergie Q_r rayonnée par unité de temps, par une surface d'un corps noir au radiateur intégral est donnée par :

$$Q_r = \beta \cdot A_1 \cdot T_1^4 \quad [\text{Kcal / h}] \quad (\text{II.13})$$

Où :

A_1 : L'aire de la surface [m^2],

T_1 : La température absolue [$^{\circ}\text{K}$]

β : La constante de STEPHAN –BOLTZMANN dont la valeur, avec les unités choisis, est de l'ordre de 4.88×10^{-8} Kcal / (h.m².(°K)⁴).

L'examen de l'équation (II.13) montre que la quantité de chaleur transmise par rayonnement, à partir d'un corps noir, dont la surface est portée à une température supérieure à zéro absolu, est proportionnelle à la quatrième puissance de la température absolue.

La quantité de chaleur effective transmise d'un corps gris (émettent une intensité de rayonnement plus faible que celle des corps noirs) à la température T_1 à un corps noir à T_2 entourant le premier est :

$$Q_r = \beta \cdot A \cdot \varepsilon (T_1^4 - T_2^4) \quad (\text{II.14})$$

Où ε est le facteur d'émission de la surface grise, égale au rapport de l'intensité rayonnée par le corps gris à celle émise par le corps noir à la même température.

II.7.2 FLUX DE CHALEUR TRANSMIS PAR CONVECTION

Le flux de chaleur transmis par convection entre une surface et un fluide peut être évalué par la relation suivante (loi de NEWTON) [KREITH 67] :

$$Q_c = h_c A \Delta T \quad (\text{II.15})$$

Dans laquelle

Q_c : Le flux de chaleur par convection [Kcal /h],

A : L'aire de la surface de transmission de chaleur [m^2],

ΔT : La différence entre la température de la surface T_s et celle du fluide T_∞ loin de la surface en $^\circ\text{C}$,

h_c : L'unité de conductance thermique moyenne de convection (souvent appelé coefficient Superficiel de transmission de chaleur d'échange de chaleur par convection) en Kcal / (h.m². $^\circ\text{C}$).

La valeur numérique de h_c , dans un système, dépend de la forme géométrique de la surface, de la vitesse, et également des propriétés physiques du fluide, et souvent même de la différence de température ΔT .

Le tableau II.2 donne, à titre d'information générale, l'ordre de grandeur du coefficient moyen d'échange de chaleur par convection qu'on rencontre dans la technique industrielle.

Condition	h_c en Kcal / (h.m ² .°C)
Air, convection libre	5 - 25
Vapeur d'eau surchauffée au air, convection forcée	25 - 250
Huiles, convection forcée	50 - 1500
Eau, convection forcée	250 - 10000
Eau en ébullition	2500 - 50000
Vapeur d'eau, condensation	5000 -100000

Tableau II.2 Ordre de grandeur des coefficients d'échange de chaleur par convection.

Note: 1Kcal/h =1.163W

II.7.3 DENSITE DE FLUX DE CHALEUR : FLUX DE CHALEUR

Il est possible de définir le vecteur densité de flux de chaleur en chaque point du corps étudié, qui est la quantité de chaleur (flux de chaleur) par unité de surface, et possède les unités W/m², c'est la loi de FOURIER. Ce vecteur est proportionnel au gradient de la température T, et orienté dans le sens opposé au gradient de la température [KREITH 67][KHEZZAR 88]:

$$\vec{q} = -k \vec{\text{grad}}T \quad (\text{II.16})$$

Ce vecteur est maintenant fonction du temps et varie en général avec celui-ci. la conductivité thermique du matériau n'est pas une constante, mais, une fonction de la température pour toutes les phases. Elle dépend de la pression aussi pour les liquides que pour les gaz [KHEZZAR 88].

Comme le deuxième principe de la thermodynamique [KREITH 67] implique, nécessairement, que la chaleur s'écoule des points les plus chauds vers les points les plus froids, le flux serait donc positif lorsque le gradient de température est négatif.

Le vecteur \vec{q} permet d'évaluer le flux de chaleur à travers une surface (S) quelconque par la relation suivante [CRABOL 89] :

$$\phi = \iint_S \vec{q} \cdot \vec{n} \cdot dS \quad (\text{II.17})$$

Où pour une surface élémentaire :

$$\delta\phi = \vec{q} \cdot \vec{n} \cdot dS \quad (\text{II.18})$$

Où \vec{n} est le vecteur unitaire normal à (S) en tout point M, centre d'un élément de surface dS.

Bien entendu, ce flux de chaleur ϕ ou $\delta\phi$ est lui-même fonction du temps et varie au fur et à mesure que le phénomène qui provoque ce transfert est en évolution.

II.8 EQUATION DE LA THERMIQUE

Pour un fluide compressible, ou pour un solide, ou dans le cas d'un gaz compressible, on négligeant l'échauffement provoqué par la dissipation visqueuse, l'équation générale de propagation de la chaleur fondée sur l'enthalpie h s'écrit [MEKIDECHE 93], [CHENTOUF 94] :

$$\rho \frac{dh}{dt} = \frac{dP_r}{dt} - \text{div}(\vec{q}) + P_s - q_r \quad (\text{II.19})$$

Tels que :

$$\text{Comme} \quad \frac{dh}{dt} = \left(\frac{\partial h}{\partial P_r} \right)_T \frac{dP_r}{dt} + \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_{P_r} \frac{dT}{dt}$$

Avec :

$$\left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_{P_r} = c_p \quad c' \text{ est la capacité calorifique à pression constante } [J/(K \cdot g^\circ K)],$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial P_r} \right)_T = \frac{1}{\rho} (1 - \beta \cdot T)$$

ρ : désigne la masse volumique

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right) : \text{ c'est la constante de STEPHAN-BOLTZMANN}$$

L'équation (II.19) peut s'écrire :

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \beta T \frac{dP_r}{dt} + \text{div}(k \text{ grad} T) + P_s + q_r \quad (\text{II.20})$$

Avec :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\text{grad}} T$$

$$\frac{dP_r}{dt} = \frac{\partial P_r}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\text{grad}} P_r$$

Tels que :

\vec{v} : Vitesse des pièces ou des fluides en mouvement, fonction de l'espace, et supposée connue [m/s],

$\beta T \frac{dP_r}{dt}$: Terme qui représente le travail de dilatation.

L'équation (II.20) peut s'écrire alors de la manière suivante :

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\text{grad}} T \right) = \beta T \left(\frac{\partial P_r}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\text{grad}} P_r \right) + \text{div}(\vec{k} \cdot \vec{\text{grad}} T) + P_s + q_r \quad (\text{II.21})$$

Dans le cas où le transfert de chaleur serait purement conductif, ce qui est le cas dans le chauffage par induction, en négligeant la chaleur rayonnée, l'équation (II.21) prend la forme :

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\text{grad}} T \right) = \text{div}(\vec{k} \cdot \vec{\text{grad}} T) + P_s \quad (\text{II.22})$$

Le champ de température T doit vérifier le modèle classique de diffusion de la chaleur suivant l'équation (II.22).

A cette dernière relation, doivent être associées, les conditions aux limites appropriées au problème physique à traiter. Il s'agit de la :

- Condition de DIRICHLET dans son cas général : T connue sur la frontière,
- Condition de NEUMANN (homogène) dans son cas particulier : $k \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_s = 0$, (pas d'échange avec l'extérieur : notamment sur les axes de symétrie),
- Condition de FOURIER : $-k \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_s = q_0$, (le flux de chaleur échangé est connu),

- Condition de NEWTON : $q = h_c(T_s - T_a)$, (cas d'un flux de chaleur échangé par convection avec une zone de température ambiante),
- $q = \varepsilon\beta(T_s^4 - T_a^4)$ (cas d'un flux échangé par rayonnement avec une zone de température ambiante T_a , où ε , β , T_s et T_a désignent respectivement, l'émissivité du corps, la constante de STEPHAN-BOLTZMANN ($\beta = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$), les températures absolues de la surface rayonnante et celle du milieu ambiant).

II.9 LE MODELE CYLINDRIQUE AXISYMETRIQUE EN ELECTROMAGNETISME ET EN THERMIQUE

Une grande partie de problèmes magnétiques peut être traité en bidimensionnel, ce qui est le cas du problème des systèmes sur lesquels nous appliquerons notre modèle de couplage proposé.

Rappelons brièvement l'existence des deux types de systèmes bidimensionnels : ceux infiniment longs alimentés suivant une direction (oz), et ceux à symétrie de révolution alimentés selon la direction ($o\varphi$).

Dans le premier cas, le champ électrique \vec{E} n'a qu'une composante suivant la direction infiniment longue (oz). Le champ magnétique, \vec{B} quant à lui, présente deux composantes suivant (or) et ($o\varphi$) dans le plan perpendiculaire à \vec{J}_{ex} (densité des courants sources), impliquant ainsi une composante pour le potentiel vecteur magnétique \vec{A} suivant la direction (oz).

Dans le deuxième cas, les courants \vec{J}_{ex} , sont dirigés suivant l'angle φ du système de coordonnées cylindriques (r, φ, z), le champ magnétique possède alors deux composantes, l'une suivant la direction (or), et l'autre suivant la direction (oz), imposant ainsi pour le potentiel une seule composante A_φ (désignée par la suite A). Ainsi, les dispositifs de chauffage par induction comportent généralement une symétrie de révolution qui préconise l'utilisation des coordonnées cylindriques axisymétriques. Lorsque les pièces à chauffer présentent une telle symétrie, il arrive fréquemment que le procédé de chauffage consiste à faire tourner la pièce dans un inducteur, de façon à homogénéiser le champ de température sur tout le pourtour.

Dans une telle configuration, l'hypothèse d'une modélisation axisymétrique est séduisante, puisqu'elle suppose que l'inconnue est invariante par rotation et prend donc en compte, implicitement, l'hypothèse d'homogénéité de la température due à la rotation.

Problème électromagnétique

Rappelons l'équation magnétodynamique (II.11), dans le cas où la pièce à chauffer serait immobile par rapport à l'inducteur.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot}(\text{vrot } \vec{A}) + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{J}_{\text{ex}} \\ \text{div } \vec{A} = 0 \end{array} \right.$$

Lorsque le courant est orienté suivant la direction (ϕ) , il s'agit de la composante azimuthale (A_ϕ) du vecteur \vec{A} . Dans une telle configuration, les courants sont perpendiculaires au plan d'étude, (r, z) .

Les différentes grandeurs vectorielles s'écrivent alors de manière suivante :

$$\vec{J}_{\text{ex}} : \begin{cases} 0 & \vec{e}_r \\ J_\phi & \vec{e}_\phi \\ 0 & \vec{e}_z \end{cases} \quad \vec{E} : \begin{cases} 0 & \vec{e}_r \\ E_\phi & \vec{e}_\phi \\ 0 & \vec{e}_z \end{cases} \quad \vec{A} : \begin{cases} 0 & \vec{e}_r \\ A_\phi & \vec{e}_\phi \\ 0 & \vec{e}_z \end{cases} \quad \vec{B} : \begin{cases} B_r & \vec{e}_r \\ 0 & \vec{e}_\phi \\ B_z & \vec{e}_z \end{cases} \quad \vec{H} : \begin{cases} H_r & \vec{e}_r \\ 0 & \vec{e}_\phi \\ H_z & \vec{e}_z \end{cases}$$

Comme le vecteur \vec{A} est confondu avec sa composante A_ϕ , sa divergence est donc naturellement nulle (la jauge de COULOMB $\text{div } \vec{A} = 0$).

Sachant qu'en coordonnées cylindriques axisymétriques; nous avons :

$$\vec{\text{rot}} \vec{A} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & rA_\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{A} = \frac{1}{r} \left(-\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{1}{r} \cdot 0 \right) \vec{e}_\varphi + \frac{1}{r} \left(-\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} \right) \vec{e}_z$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{A} = \frac{1}{r} \left(-\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left(-\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} \right) \vec{e}_z$$

et

$$\vec{\text{rot}}(\nu \vec{\text{rot}} \vec{A}) = \left[-\frac{\partial}{\partial r} \left(\nu \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \right] \vec{e}_\varphi$$

Remplaçant la grandeur $rA_\varphi = rA$ par la grandeur A^* l'équation électromagnétique (II.11), prene la forme :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial A^*}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\nu \frac{\partial A^*}{\partial r} \right) - \frac{\sigma}{r} \frac{\partial A^*}{\partial t} = -J_{\text{ex}} \quad (\text{II.23})$$

$A^* = A^*(r, z, t)$, est le potentiel vecteur magnétique modifié.

C'est une équation aux dérivées partielles, décrivant le comportement d'un dispositif cylindrique axisymétrique. Sous l'hypothèse que les matériaux sont linéaires, et que les sources d'alimentation sont sinusoïdales, les formulations magnétodynamiques peuvent être résolues en utilisant la notation complexe, permettant ainsi la prise en compte du terme dérivée $\frac{\partial A^*}{\partial t}$ et son remplacement par l'expression $i\omega A^*$, d'où l'équation :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial A^*}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial A^*}{\partial r} \right) - i \omega \frac{\sigma}{r} A^* = -J_{ex} \\ A^* = r A_\varphi \end{cases} \quad (\text{II.24})$$

Problème thermique

Rappelons le modèle classique de diffusion de la chaleur par conduction (II.22), avec une vitesse de la pièce nulle ($\vartheta = 0$),

$$\text{div}(\vec{k} \text{grad} T) + P_s = \rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)$$

La température, indépendante de la variable d'espace (φ), autorise une étude dans le plan de symétrie (r, z) du dispositif.

Comme :

$$\vec{\text{grad}} T = \frac{\partial T}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{e}_z \quad (\text{Voir Annexe I})$$

et

$$\text{div}(\vec{k} \text{grad} T) = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (kr \frac{\partial T}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial z} (rk \frac{\partial T}{\partial z}) \right) \quad (\text{Voir Annexe I})$$

L'équation de la conduction (II.22) prend alors la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + P_s = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II.25})$$

Avec $T = T(r, z, t)$.

II.10 DIFFERENTES TECHNIQUES DE RESOLUTION DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

Il existe deux grandes catégories de méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles mathématiques caractérisant les problèmes physiques, lorsqu'il s'agit de calculer des effets dont les causes (densité du courant (tension), densité de la puissance dissipée) sont connues à l'avance. Ces méthodes sont :

- Les méthodes analytiques,
- Les méthodes numériques.

Les méthodes analytiques, s'avèrent d'application très difficile dès que la complexité de la géométrie s'accroît et que certains matériaux, dans des conditions de fonctionnement optimales, présentent des non-linéarités physiques, donc mathématiques [CHENTOUF 94] [SADIKU 92].

L'apparition des ordinateurs, de grandes puissances, a mis en valeur l'intérêt des méthodes dites numériques. Celles ci font appel à des techniques de discrétisation.

Ces méthodes numériques transforment les équations aux dérivées partielles (EDP) à des systèmes d'équations algébriques dont la solution fournit une approximation de l'inconnue en différents points situés aux nœuds du réseau géométrique correspondant à la discrétisation. Parmi ces méthodes, nous citons la méthode des différences finies, la méthode des éléments finis, la méthode des volumes finis, la méthode des intégrales de frontières et la méthode des circuits couplés,...etc.

II.10.1 METHODE DES DIFFERENCES FINIES (MDF)

La MDF consiste à transformer par un développement en série de TAYLOR l'opérateur différentiel en un opérateur aux différences [CHENTOUF 94], [PISKOUNOV 80], [EUVRARD 87].

Considérons le cas d'une équation à une dimension dont l'inconnue est A , le maillage étant établi sur la figure II.1

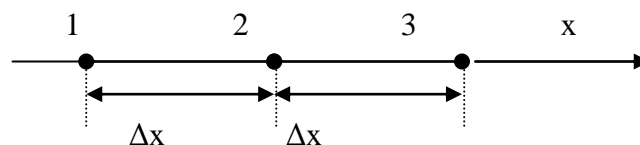


Figure II.1 Trois nœuds du Maillage à une dimension.

Le développement en série de Taylor au voisinage du nœud n°2 donne :

$$A_1 = A_2 - \Delta x \left(\frac{dA}{dx} \right)_2 + \frac{1}{2} (\Delta x)^2 \left(\frac{d^2A}{dx^2} \right)_2 - \dots + \frac{(-1)^n}{n!} (\Delta x)^n \left(\frac{d^n A}{dx^n} \right)_2$$

$$A_3 = A_2 + \Delta x \left(\frac{dA}{dx} \right)_2 + \frac{1}{2} (\Delta x)^2 \left(\frac{d^2A}{dx^2} \right)_2 + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} (\Delta x)^n \left(\frac{d^n A}{dx^n} \right)_2$$

En se limitant au troisième terme, on déduit de ces équations :

$$\left(\frac{dA}{dx} \right) = \frac{A_3 - A_1}{2\Delta x} \quad \text{et} \quad \left(\frac{d^2A}{dx^2} \right) = \frac{A_1 - 2A_2 + A_3}{(\Delta x)^2}$$

En substituant ces dérivées dans l'équation différentielle on obtient l'équation aux différences finies au nœud 2. C'est une combinaison linéaire de l'inconnue au point considéré et aux points voisins.

La méthode aux différences finies permet d'obtenir des résultats satisfaisants dans de nombreux problèmes comme elle possède la simplicité de la formulation numérique, mais elle reste limitée aux configurations à géométrie régulière, donc, relativement trop simple.

II.10.2 METHODE DES ELEMENTS FINIS (MEF)

La méthode des éléments finis est très puissante pour la résolution des équations aux dérivées partielles (EDP) surtout dans les géométries complexes et quelques soient les conditions physiques de fonctionnements [MEKIDECHE 93].

A la différence avec la MDF, la MEF consiste à utiliser une approximation simple de l'inconnue pour transformer les EDP en équations algébriques.

Toute fois, cette méthode ne s'applique pas directement aux EDP, mais à une formulation intégrale qui est équivalente au problème à résoudre, en utilisant l'une des deux approches suivantes [TOUZOT 84], [CHENTOUF 94].

- La méthode variationnelle qui consiste à minimiser une fonctionnelle qui représente généralement, l'énergie du système étudié. Cette méthode n'est donc applicable que si on connaît une fonctionnelle équivalente au problème différentiel que l'on veut résoudre.
- La méthode des résidus pondérés ou méthode projective qui consiste à minimiser le résidu induit par l'approximation de la fonction inconnue.

A l'une ou à l'autre des deux méthodes, on associe une subdivision du domaine d'étude, en éléments simples, appelés éléments finis, comme il est indiqué sur la figure II.2, et à approximer la fonction inconnue sur chaque élément par des fonctions d'interpolation. Ces fonctions sont généralement des polynômes de Lagrange de degré un, ou deux.

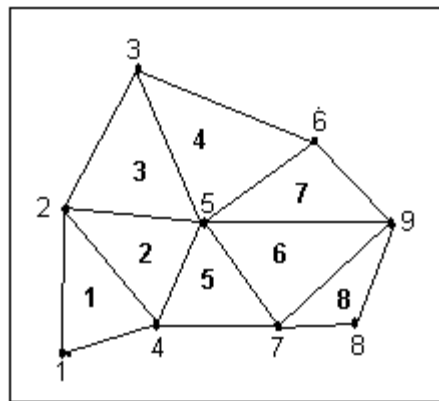


Figure II.2 Un domaine d'étude discrétisé en éléments finis.

II.10.3 METHODE DES INTEGRALES DE FRONTIERES (MIF)

Lorsqu'on utilise la MDF ou la MEF, on calcule les variables inconnues dans tout le domaine. La MIF permet de ramener le maillage à la frontière du domaine. Ainsi, le calcul des valeurs de l'inconnue sur les frontières du domaine suffit pour obtenir la solution en tout point du domaine [CHENTOUF 94].

Pour ramener le problème sur les frontières, la MIF utilise le théorème de d'OSTROGRADSKI- GREEN. Cette méthode peut être intéressante pour l'étude de structure 3D ou lorsque l'air ou les milieux passifs occupent une grande partie du domaine d'étude.

Cependant, cette méthode a l'inconvénient de conduire à un système algébrique à matrice pleine (pas de termes nuls). Ceci augmente le temps utilisateur, donc le coût de calcul.

II.10.4 METHODE DES CIRCUITS COUPLES (MCC)

La MCC permet de fournir la solution d'une EDP par une expression intégrale du type loi de BIOT et SAVARD.

Dans ce cas, on associe à la forme intégrale de la solution, une subdivision de l'inducteur en spires élémentaires [COEVOET 97], [CHENTOUF 94].

En appliquant les lois de KIRCHOFF à ces circuits élémentaires, on aboutit à un système d'équations algébriques dont la solution conduit à la distribution des densités du courant.

La MCC peut être couplée à une méthode numérique de discrétisation type MEF ou MDF de la charge.

II.10.5 METHODE DES VOLUMES FINIS (MCV)

La MCV se déduit à partir de la MDF. Le domaine d'étude (Ω) est subdivisé en volumes élémentaires de telle manière que chaque volume entoure un nœud du maillage (celui des différences finies).

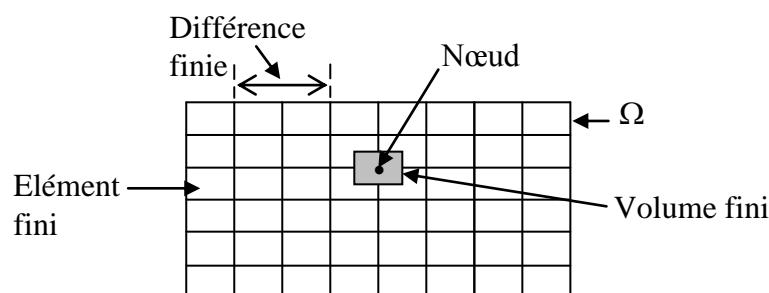


Figure II.3 Maillage du domaine d'étude.

L'EDP est intégrée sur chacun des volumes élémentaires.

Pour calculer l'intégrale sur ce volume élémentaire, la fonction inconnue est représentée à l'aide d'une fonction d'approximation (linéaire, exponentielle) entre deux nœuds consécutifs. Ensuite, la forme intégrale est discrétisée dans le domaine d'étude [COEVOET 97], [CHENTOUF 94], [PATANKAR 80].

Grâce à un libre choix de la fonction de liaison entre nœuds consécutifs, la procédure conduit à une solution plus précise que celle fournie par la MDF.

Exemple Illustratif :

Considérons l'équation de conduction, en régime permanent (stationnaire), mono-dimensionnel :

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) + P_s = 0 \quad (\text{II.26})$$

T : Température, k : Conductivité thermique P_s : Densité de la source de chaleur.

Pour discrétiser cette équation, le domaine d'étude est subdivisé en un nombre finis de nœuds. Ce domaine est ensuite divisé en éléments de volume dont chacun contient un nœud, comme il est indiqué sur la figure II.4.

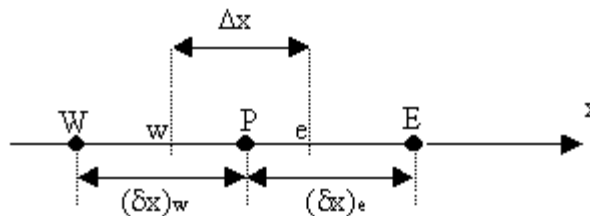


Figure II.4 Discrétisation en volumes finis dans le cas mono-dimensionnel.

Les lignes en tirés représentent les interfaces entre les éléments. Pour le problème à une dimension, on suppose une épaisseur unité suivant la direction (oy) et (oz).

Ainsi, le volume d'un élément est $\Delta x \times 1 \times 1$. Si on intègre l'équation (II.26) sur l'élément de volume correspondant au nœud P, on obtient :

$$\int_w^e \frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) dx + \int_w^e P_s dx = 0$$

Soit :

$$\left(k \frac{dT}{dx}\right)_e - \left(k \frac{dT}{dx}\right)_w + \int_w^e P_s dx = 0 \quad (\text{II.27})$$

Avec l'approximation d'une variation linéaire de T entre deux nœuds voisins, l'équation (II.27) s'écrit :

$$\frac{k_e (T_E - T_P)}{(\delta x)_e} - \frac{k_w (T_P - T_W)}{(\delta x)_w} + \bar{P}_s \Delta x = 0 \quad (\text{II.28})$$

Où \bar{P}_s est la valeur moyenne de P_s dans l'élément de volume. k_e la conductivité thermique à l'interface (e).

On met l'équation (II.28) sous la forme suivante :

$$a_p T_p = a_e T_E + a_w T_W + b$$

Où

$$a_e = \frac{k_e}{(\delta x)_e}, a_w = \frac{k_w}{(\delta x)_w}, a_p = a_e + a_w \text{ et } b = \bar{P}_s \Delta x$$

Si la discrétisation du domaine comporte N nœuds, on est alors ramené à un système de N équations à N inconnues. Il s'agit des valeurs nodales de T.

II.11 Conclusion

A partir des lois de base caractérisant les phénomènes électromagnétiques et thermiques présents dans les dispositifs de chauffage par induction, des modèles mathématiques ont été établis, dans leurs formes générales. Ensuite, et en liaison avec le type d'applications à traiter, le cas cylindrique axisymétrique considéré comme un cas particulier, a été détaillé. Une fois, ces modèles mathématiques établis.

Chapitre 3

Les **M**odèles **N**umériques Et **C**ouplages **D**es **P**hénomènes

III.1.	INTRODUCTION	57
III.2.	RESOLUTION DES EQUATIONS ELECTROMAGNETIQUE ET DE LA THERMIQUE PAR LA METHODE DES VOLUMES FINIS	57
	III.2.1 Discrétisation de l'équation magnétodynamique linéaire en régime harmonique	59
	III.2.2 Discrétisation de l'équation de diffusion de la chaleur	63
III.3.	METHODES DE RESOLUTION DES SYSTEMES D'EQUATIONS ALGEBRIQUES	76
	III.3.1 Méthodes directes	76
	III.3.2 Méthodes itératives	76
	III.3.2.1 Méthode de Jacobi	76
	III.3.2.2 Méthode de gauss Seidel	77
	III.3.2.3 Méthode de relaxation	77
III.4.	LE COUPLAGE ELECTROMAGNETIQUE-THERMIQUE	78
III.5.	CALCUL DES PARAMETRES DU COUPLAGE ELECTROMAGNETIQUE-THERMIQUE	79
III.6.	LES MODELES DU COUPLAGE EXISTANT	80
	III.6.1 Modèle du couplage direct (fort)	80
	III.6.2 Modèle du couplage alterné (faible)	80
	III.6.3 Modèle du couplage basé sur la technique de la paramétrisation	82
	III.6.3.1 Principe du modèle du couplage basé sur la technique de la paramétrisation	82
III.7.	CONCLUSION	88

III.1 INTRODUCTION

Nous présentons dans ce chapitre la méthode des volumes finis ; utilisée pour la résolution des deux équations aux dérivées partielles, Ainsi nous proposons de décrire les modèles numériques optés pour la résolution des équations mathématiques finales décrivant l'évolution spatiale et temporelle des phénomènes physiques présents dans les dispositifs de chauffage par induction. Après les formulations électromagnétiques et thermiques d'un système de chauffage par induction, les modèles du couplage électromagnétique thermique et nous proposons notre propre modèle basé sur la technique de la paramétrisation, Il importe, en électromagnétisme, de tenir compte des variations des propriétés physiques en fonction de la température, parmi lesquelles nous citerons :

- La réductivité magnétique relative,
- La résistivité électrique.

En thermique, on doit tenir compte des variations de la capacité calorifique et de la conductivité thermique en fonction de la température .ainsi que Les méthodes de résolutions des systèmes algébriques seront aussi présentées.

III.2 RESOLUTION DES EQUATIONS ELECTROMAGNETIQUE

ET DE LA THERMIQUE PAR LA METHODE DES VOLUMES FINIS

La méthode des éléments finis (MEF) est la méthode la plus utilisée pour la résolution des équations aux dérivées partielles. Sa mise en œuvre, par contre est assez compliquée.

Nous avons donc opté pour la méthode des volumes finis (MVF) qui, selon plusieurs auteurs [CHENTOUF 94], [PATANKAR 80] donne de meilleures convergences pour les équations de conduction avec un terme de vitesse.

De plus, elle est moins difficile à réaliser est simple à concevoir que la méthode des éléments finis (MEF).

La méthode des volumes finis à connu un essor considérable non seulement pour la modélisation en mécanique des fluides, mais aussi pour la modélisation d'autres branches de l'ingénierie scientifique : transfert thermiques, électromagnétisme...etc. L'analyse mathématique de la méthode des volumes finis à récemment permis de développer les principes fondamentaux qui font d'elle une méthode de discrétisation performante.

La méthode des volumes finis peut être vue comme étant une variante de la méthode de collocation par sous-domaines [CHENTOUF 94]. Le domaine d'étude (Ω) est divisé en un nombre d'éléments. Chaque élément contient quatre nœuds du maillage. Un volume fini entoure chaque nœud du maillage (Figure III.1). L'équation au dérivé partielle (EDP) est intégrée dans chacun des volumes élémentaires. Pour calculer l'intégrale sur ce volume élémentaire, la fonction inconnue est représentée à l'aide d'une fonction d'approximation (linéaire, exponentielle...) entre deux nœuds consécutifs.

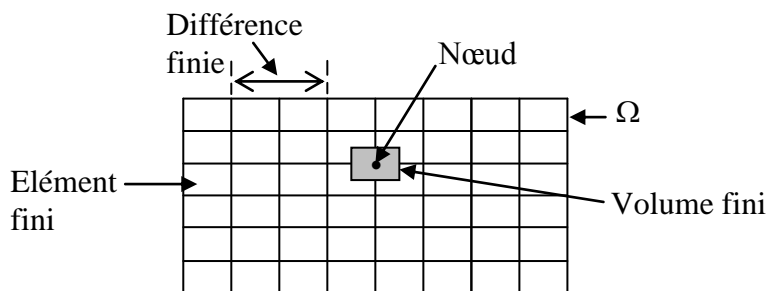


Figure III.1 Maillage du domaine d'étude.

Description d'un volume fini

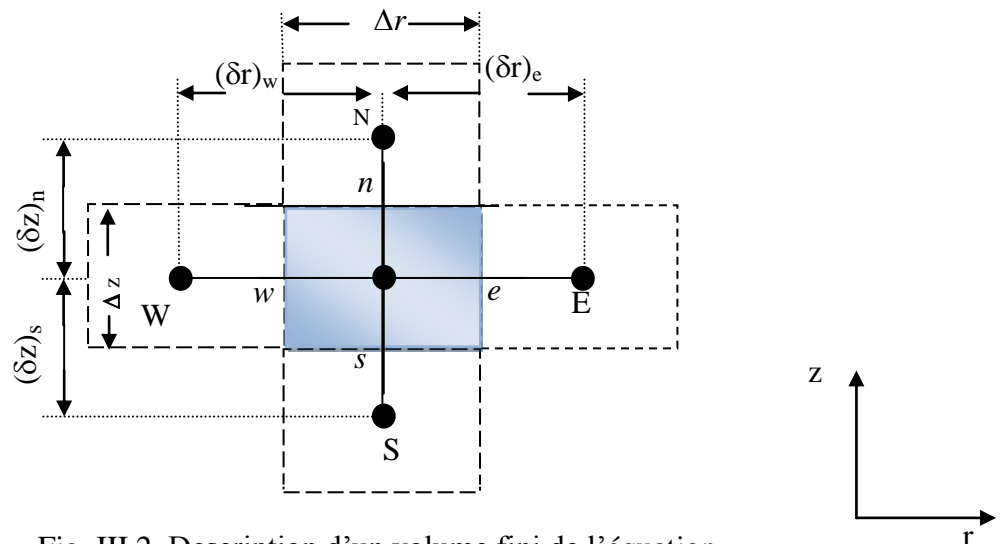


Fig. III.2. Description d'un volume fini de l'équation électromagnétique - thermique

Chaque nœud principal P est entouré par quatre nœuds voisins : celui du nord N , du sud S , de l'est E et celui de l'ouest W .

Le volume fini est délimité par les points (e : est, w : ouest, n : nord, s : sud) [PATANKAR 80].

III.2.1 DISCRETISATION DE L'EQUATION MAGNETODYNAMIQUE LINEAIRE EN REGIME HARMONIQUE

Rappelons l'équation magnétodynamique linéaire, en régime harmonique :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial A^*}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial A^*}{\partial r} \right) - i \omega \frac{\sigma}{r} A^* = -J_{ex}$$

La projection de cette équation aux dérivées partielles sur une base de fonctions de projection β_i , et son intégration sur le volume fini, correspondant au nœud P, donne :

$$\iint_{zr} \beta_i \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial A^*}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial A^*}{\partial r} \right) \right] r dr dz = \iint_{zr} \beta_i \left[i \omega \frac{\sigma}{r} A^* - J_{ex} \right] r dr dz \quad (III.1)$$

β_i est la fonction de projection choisie égale à $1/r$

Rappelons que pour la méthode des éléments finis, $\beta_i = \alpha_i / r$, α_i est la fonction d'interpolation dans le cas de la méthode projective de GALERKINE.

Après substitution de l'expression de β_i , L'équation (III.1), prene la forme suivante :

$$\iint_{zr} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial A^*}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial A^*}{\partial r} \right) \right] dr dz = \iint_{zr} \left[i \omega \frac{\sigma}{r} A^* - J_{ex} \right] dr dz \quad (III.2)$$

L'intégrale de la partie gauche de l'équation (III.2) sur le volume fini, délimité par les frontières (e, w, s, n) est :

$$\iint_{sw}^{ne} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial A^*}{\partial z} \right) dr dz + \iint_{sw}^{ne} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial A^*}{\partial r} \right) dr dz \quad (III.3)$$

Après intégration nous aurons :

$$\left[\left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial A^*}{\partial z} \right)_n - \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial A^*}{\partial z} \right)_s \right] \Delta r + \left[\left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial A^*}{\partial r} \right)_e - \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial A^*}{\partial r} \right)_w \right] \Delta z$$

Avec :

$$r_e = r_P + \frac{\Delta r}{2}, \quad r_w = r_P - \frac{\Delta r}{2}, \quad \Delta r = r_e - r_w$$

$$z_n = z_p + \frac{\Delta z}{2}, z_s = z_p - \frac{\Delta z}{2}, \Delta z = z_n - z_s.$$

Un profil linéaire à été choisi exprimant la variation de A^* entre les nœuds voisins.

Le résultat obtenu est constitué uniquement de valeurs nodales. Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned} & \left[\frac{v_n}{r_n} \frac{(A_N^* - A_P^*)}{(\delta z)_n} - \frac{v_s}{r_s} \frac{(A_P^* - A_S^*)}{(\delta z)_s} \right] \Delta r + \left[\frac{v_e}{r_e} \frac{(A_E^* - A_P^*)}{(\delta r)_e} - \frac{v_w}{r_w} \frac{(A_P^* - A_W^*)}{(\delta r)_w} \right] \Delta z \\ &= \frac{v_n \Delta r}{r_n (\delta z)_n} A_N^* + \frac{v_s \Delta r}{r_s (\delta z)_s} A_S^* + \frac{v_e \Delta z}{r_e (\delta r)_e} A_E^* + \frac{v_w \Delta z}{r_w (\delta r)_w} A_W^* - \left(\frac{v_n \Delta r}{r_n (\delta z)_n} + \frac{v_s \Delta r}{r_s (\delta z)_s} + \frac{v_e \Delta z}{r_e (\delta r)_e} + \frac{v_w \Delta z}{r_w (\delta r)_w} \right) A_P^* \end{aligned}$$

Posons :

$$b_n = \frac{v_n \Delta r}{r_n (\delta z)_n}, b_s = \frac{v_s \Delta r}{r_s (\delta z)_s}, b_e = \frac{v_e \Delta z}{r_e (\delta r)_e}, b_w = \frac{v_w \Delta z}{r_w (\delta r)_w}$$

Ainsi, on obtient :

$$\Rightarrow b_e A_E^* + b_w A_W^* + b_n A_N^* + b_s A_S^* - (b_e + b_w + b_n + b_s) A_P^* \quad (\text{III.4})$$

L'intégrale de la partie droite de l'équation (III.2) sur le volume fini, délimité par les frontières (e, w, s, n) est :

$$\begin{aligned} & \int_{sw}^{ne} \left[i \omega \frac{\sigma}{r} A^* - J_{ex} \right] dr dz = i \omega \sigma_p (\ln r)_w^e \Delta z A_P^* - J_{ex} \Delta r \Delta z \\ &= i \omega \sigma_p (\ln r_e - \ln r_w) \Delta z A_P^* - J_{ex} \Delta r \Delta z \\ &= i \omega \sigma_p \ln \left(\frac{r_e}{r_w} \right) \Delta z A_P^* - J_{ex} \Delta r \Delta z \\ &= i \omega \sigma_p \ln \left(\frac{(r_p + \frac{\Delta r}{2})}{(r_p - \frac{\Delta r}{2})} \right) \Delta z A_P^* - J_{ex} \Delta r \Delta z \\ &= i \omega \sigma_p \ln \left(\frac{r_p (1 + \frac{\Delta r}{2r_p})}{r_p (1 - \frac{\Delta r}{2r_p})} \right) \Delta z A_P^* - J_{ex} \Delta r \Delta z \end{aligned}$$

$$= i\omega \sigma_p \left[\ln \left(1 + \frac{\Delta r}{2r_p} \right) - \ln \left(1 - \frac{\Delta r}{2r_p} \right) \right] \Delta z A_p^* - J_{ex} \Delta r \Delta z$$

or, le développement de la fonction $\ln(1+x)$ est donnée par : $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots (-1)^n \frac{x^{(n+1)}}{n+1}$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \iint_{sw}^{ne} \left[i\omega \frac{\sigma}{r} A^* - J_{ex} \right] dr dz &= i\omega \sigma_p \left[\frac{\Delta r}{2r_p} - \left(-\frac{\Delta r}{2r_p} \right) \right] \Delta z A_p^* - J_{ex} \Delta r \Delta z \\ &= i\omega \frac{\sigma_p}{r_p} \Delta r \Delta z A_p^* - J_{ex} \Delta r \Delta z \end{aligned} \quad (III.5)$$

La substitution des deux expressions trouvées (III.4), (III.5) dans l'équation (III.2) donne l'équation algébrique suivante :

$$\begin{aligned} b_e A_E^* + b_w A_W^* + b_n A_N^* + b_s A_S^* - (b_e + b_w + b_n + b_s) A_p^* &= i\omega \frac{\sigma_p}{r_p} \Delta r \Delta z A_p^* - J_{ex} \Delta r \Delta z \\ \Rightarrow \left(b_e + b_w + b_n + b_s + i\omega \frac{\sigma_p}{r_p} \Delta r \Delta z \right) A_p^* &= b_e A_E^* + b_w A_W^* + b_n A_N^* + b_s A_S^* + J_{ex} \Delta r \Delta z \end{aligned}$$

Posons :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{v_n \Delta r}{r_n (\delta z)_n}, \quad b_s = \frac{v_s \Delta r}{r_s (\delta z)_s}, \quad b_e = \frac{v_e \Delta z}{r_e (\delta r)_e}, \quad b_w = \frac{v_w \Delta z}{r_w (\delta r)_w} \\ b_p &= b_e + b_w + b_n + b_s + i\omega \frac{\sigma_p}{r_p} \Delta r \Delta z, \quad d_p = J_{ex} \Delta r \Delta z \end{aligned}$$

Ainsi, l'équation algébrique finale s'écrit alors sous la forme :

$$b_p A_p^* = b_e A_E^* + b_w A_W^* + b_n A_N^* + b_s A_S^* + d_p \quad (III.6)$$

Avec :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{v_n \Delta r}{r_n (\delta z)_n}, \quad b_s = \frac{v_s \Delta r}{r_s (\delta z)_s}, \quad b_e = \frac{v_e \Delta z}{r_e (\delta r)_e}, \quad b_w = \frac{v_w \Delta z}{r_w (\delta r)_w} \\ b_p &= b_e + b_w + b_n + b_s + i\omega \frac{\sigma_p}{r_p} \Delta r \Delta z, \quad d_p = J_{ex} \Delta r \Delta z \end{aligned}$$

Si la discrétisation du domaine comporte N nœuds, on est amené à étudier un système de N équations à N inconnues.

La forme matricielle de ce système d'équation s'écrit sous la forme :

$$[M+iL]\{A^*\} = \{F\}$$

Où :

$[M+iL]$: Matrice coefficients,

$\{A^*\}$: Vecteur inconnu,

$\{F\}$: Vecteur source.

Conditions aux limites

Dans l'étude précédente, nous avons établi les équations des nœuds internes. Pour les limites du domaine d'étude, il existe deux façons d'introduire les conditions aux limites :

- Condition de DIRICHLET : cette condition impose les valeurs de A aux bords du domaine d'étude. Ces valeurs sont prises nulles par la considération de l'infini physique.
- Condition mixte de DIRICHLET-NEUMANN : elles sont utilisées dans le cas où le système à étudier présente des plans de symétrie. Le problème mixte de DIRICHLET-NEUMANN impose les valeurs de A nulles aux bords infinies du domaine d'étude (Ω) et celles de $\frac{\partial A}{\partial n} = 0$ au niveau des plans de symétrie (plans de coupes) où n représente la normale au plan de coupe.

Difficultés liées aux conditions aux limites

Ce problème se pose essentiellement lors de la définition du domaine d'étude de l'équation électromagnétique.

Mathématiquement, ce domaine est infini puisque tout point de l'espace subit l'influence d'une distribution de courant située dans celui-ci.

Le fait d'imposer des frontières finies pour fermer ce domaine et d'annuler la valeur du potentiel ou du flux sur celles-ci, peut fortement influencer la résolution.

Le test le plus couramment consiste à faire un premier calcul en annulant la valeur du potentiel A sur les frontières de fermeture (conditions de DIRICHLET), puis d'effectuer un second calcul en annulant la valeur du potentiel vecteur magnétique sur ces frontières (condition de NEUMANN homogène).

Si les résultats de ces deux résolutions sont identiques, le domaine d'étude choisi est bien correct.

III.2.2 DISCRETISATION DE L'EQUATION DE DIFFUSION DE LA CHALEUR

Rappelons l'équation de diffusion de la chaleur en régime transitoire (non-stationnaire) :

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rk \frac{\partial T}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial z} (k \frac{\partial T}{\partial z}) + P_s$$

Pour résoudre cette équation, nous appliquons la méthode des volumes finis.

On intègre cette équation dans le temps et dans l'espace, sur le volume fini, correspondant au nœud P, et délimité par les frontières (e, w, s, n), ((voir figure III.2), description d'un volume fini, décrite précédemment).

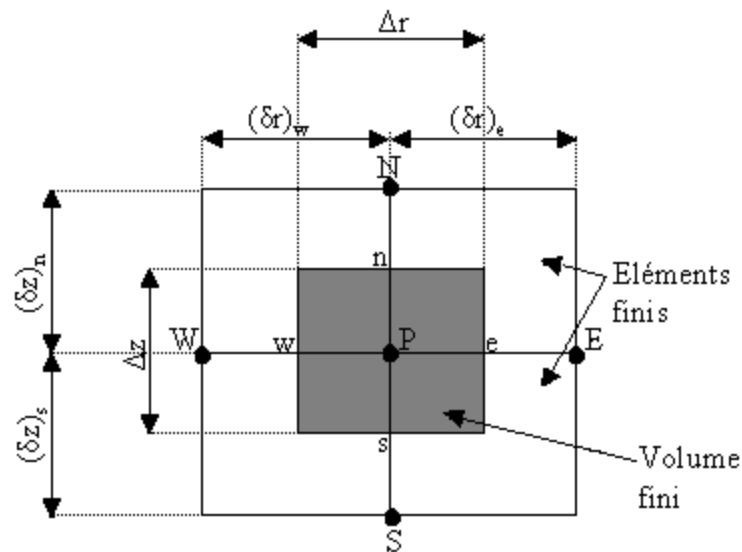


Figure III.3 Description d'un volume fini de l'équation de diffusion de la chaleur

$$\int_t^{(t+\Delta t)} \int_s^e \int_w^n \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} r dr dz dt = \int_t^{(t+\Delta t)} \int_s^e \int_w^n \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rk \frac{\partial T}{\partial r}) \right) r dr dz dt + \int_t^{(t+\Delta t)} \int_s^e \int_w^n \frac{\partial}{\partial z} (k \frac{\partial T}{\partial z}) r dr dz dt +$$

$$\int_t^{(t+\Delta t)} \int_s^e \int_w P_s r dr dz dt$$

Soit :

$$A = \int_t^{(t+\Delta t)} \int_s^e \int_w \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} r dr dz dt$$

$$B = \int_t^{(t+\Delta t)} \int_s^e \int_w \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rk \frac{\partial T}{\partial r}) \right) r dr dz dt$$

$$C = \int_t^{(t+\Delta t)} \int_s^e \int_w \frac{\partial}{\partial z} (k \frac{\partial T}{\partial z}) r dr dz dt$$

$$D = \int_t^{(t+\Delta t)} \int_s^e \int_w P_s r dr dz dt$$

$P_s(T)$: est la source de chaleur, fonction de la température T.

Nous intégrons chaque terme (A, B, C, D) dans l'espace :

$$\begin{aligned} A &= \int_t^{(t+\Delta t)} \int_s^e \int_w \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} r dr dz dt = \int_t^{(t+\Delta t)} \rho c_p (z)_s^n \left(\frac{r^2}{2} \right)_w^e \frac{\partial T}{\partial t} dt \\ &= \rho c_p (z_n - z_s) \left(\frac{r_e^2}{2} - \frac{r_w^2}{2} \right) \int_t^{(t+\Delta t)} \frac{\partial T}{\partial t} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \int_t^{(t+\Delta t)} \int_s^e \int_w \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rk \frac{\partial T}{\partial r}) \right) r dr dz dt = \int_t^{(t+\Delta t)} \left(rk \frac{\partial T}{\partial r} \right)_w^e (z)_s^n dt \\ &= \int_t^{(t+\Delta t)} \left(\left(rk \frac{\partial T}{\partial r} \right)_e - \left(rk \frac{\partial T}{\partial r} \right)_w \right) (z_n - z_s) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= \int_t^{(t+\Delta t)} \int_s^e \int_w \frac{\partial}{\partial z} (k \frac{\partial T}{\partial z}) r dr dz dt = \int_t^{(t+\Delta t)} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right)_s^n \left(\frac{r^2}{2} \right)_w^e dt \\ &= \int_t^{(t+\Delta t)} \left(\left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right)_n - \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right)_s \right) \left(\frac{r_e^2}{2} - \frac{r_w^2}{2} \right) dt \end{aligned}$$

$$D = \int_t^{(t+\Delta t)} \int_{s_w}^n \int_{r_e}^e P_s r dr dz dt = \int_t^{(t+\Delta t)} P_s \left(\frac{r^2}{2} \right)_w^e (z)_s^n dt$$

$$= \int_t^{(t+\Delta t)} P_s \left(\frac{r_e^2}{2} - \frac{r_w^2}{2} \right) (z_n - z_s) dt$$

Avec :

$$r_e = r_P + \frac{\Delta r}{2}, r_w = r_P - \frac{\Delta r}{2} \Rightarrow \frac{r_e^2}{2} - \frac{r_w^2}{2} = r_P \Delta r$$

$$z_n = z_P + \frac{\Delta z}{2}, z_s = z_P - \frac{\Delta z}{2} \Rightarrow z_n - z_s = \Delta z$$

Avec un profil linéaire, choisi, exprimant ainsi la variation spatiale de la température (T) entre les nœuds voisins. Les termes (A, B, C, D) prennent les formes suivantes :

Terme A :

$$A = \rho c_p r_P \Delta r \Delta z \int_t^{(t+\Delta t)} \frac{\partial T}{\partial t} dt$$

Terme B :

$$B = \int_t^{(t+\Delta t)} \left[r_e k_e \frac{(T_E - T_P)}{(\delta r)_e} - r_w k_w \frac{(T_P - T_W)}{(\delta r)_w} \right] \Delta z dt$$

$$= \int_t^{(t+\Delta t)} \left[\left(\frac{k_e r_e \Delta z}{(\delta r)_e} \right) T_E + \left(\frac{k_w r_w \Delta z}{(\delta r)_w} \right) T_W - \left(\left(\frac{k_e r_e \Delta z}{(\delta r)_e} \right) + \left(\frac{k_w r_w \Delta z}{(\delta r)_w} \right) \right) T_P \right] dt$$

Posons :

$$a_e = \frac{k_e r_e \Delta z}{(\delta r)_e}, a_w = \frac{k_w r_w \Delta z}{(\delta r)_w}$$

Ainsi :

$$B = \int_t^{(t+\Delta t)} \left[a_e T_E + a_w T_W - (a_e + a_w) T_P \right] dt$$

Terme C :

$$C = \int_t^{(t+\Delta t)} \left[k_n \frac{(T_N - T_P)}{(\delta z)_n} - k_s \frac{(T_P - T_S)}{(\delta z)_s} \right] r_P \Delta r dt$$

$$= \int_t^{(t+\Delta t)} \left[\left(\frac{k_n r_P \Delta r}{(\delta z)_n} \right) T_N + \left(\frac{k_s r_P \Delta r}{(\delta z)_s} \right) T_S - \left(\left(\frac{k_n r_P \Delta r}{(\delta z)_n} \right) + \left(\frac{k_s r_P \Delta r}{(\delta z)_s} \right) \right) T_P \right] dt$$

Posons :

$$a_n = \frac{k_n r_p \Delta r}{(\delta z)_n}, \quad a_s = \frac{k_s r_p \Delta r}{(\delta z)_s}$$

Ainsi :

$$C = \int_t^{(t+\Delta t)} [a_n T_N + a_s T_S - (a_n + a_s) T_p] dt$$

Terme D :

$$D = \int_t^{(t+\Delta t)} P_s r_p \Delta r \Delta z dt$$

L'intégration des termes (A, D) dans le temps donne :

Terme A :

$$\begin{aligned} A &= \rho c_p r_p \Delta r \Delta z \int_t^{(t+\Delta t)} \frac{\partial T}{\partial t} dt = \\ &= \rho c_p r_p \Delta r \Delta z (T_p - T_p^0) \end{aligned}$$

T_p^0 : La température au pas précédent à l'instant $t = t_0$

Terme D :

$$D = P_s r_p \Delta r \Delta z \Delta t$$

Pour l'intégration des termes (B, C) dans le temps, nous appliquons la formule suivante [18] :

$$\int_t^{(t+\Delta t)} T_p dt = \left[f T_p + (1-f) T_p^0 \right] \Delta t$$

(IV.6)

Avec :

Δt : Le pas de temps adopté pour la discrétisation temporelle,

f : Le facteur appartenant à l'intervalle $[0,1]$,

T_p^0 : La température au pas de temps précédent à l'instant $t = t_0$

Les termes (B, C) deviennent :

Terme B :

$$\begin{aligned} B &= \int_t^{(t+\Delta t)} [a_e T_E + a_w T_W - (a_e + a_w) T_P] dt \\ &= a_e [f T_E + (1-f) T_E^0] \Delta t + a_w [f T_W + (1-f) T_W^0] \Delta t - (a_e + a_w) [f T_P + (1-f) T_P^0] \Delta t \end{aligned}$$

Terme C :

$$\begin{aligned} C &= \int_t^{(t+\Delta t)} [a_n T_N + a_s T_S - (a_n + a_s) T_P] dt \\ &= a_n [f T_N + (1-f) T_N^0] \Delta t + a_s [f T_S + (1-f) T_S^0] \Delta t - (a_n + a_s) [f T_P + (1-f) T_P^0] \Delta t \end{aligned}$$

D'où l'équation discrète prene alors la forme suivante :

$$\begin{aligned} \rho c_p r_p \Delta r \Delta z (T_P - T_P^0) &= a_e [f T_E + (1-f) T_E^0] \Delta t + a_w [f T_W + (1-f) T_W^0] \Delta t + \\ & a_n [f T_N + (1-f) T_N^0] \Delta t + a_s [f T_S + (1-f) T_S^0] \Delta t - \\ & (a_e + a_w + a_n + a_s) [f T_P + (1-f) T_P^0] \Delta t + P_s r_p \Delta r \Delta z \Delta t \end{aligned}$$

Pour la simplicité et les satisfactions physiques, une formulation implicitement de l'équation discrète précédente est nécessaire, le facteur f prene alors la valeur 1 (f=1) [PATANKAR 80], ainsi l'équation précédente devient :

$$\begin{aligned} \rho c_p r_p \Delta r \Delta z (T_P - T_P^0) &= a_e T_E \Delta t + a_w T_W \Delta t + a_n T_N \Delta t + a_s T_S \Delta t - (a_e + a_w + a_n + a_s) T_P \Delta t + \\ & P_s r_p \Delta r \Delta z \Delta t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow [\rho c_p r_p \Delta r \Delta z + (a_e + a_w + a_n + a_s) \Delta t] T_P &= [a_e T_E + a_w T_W + a_n T_N + a_s T_S] \Delta t + P_s r_p \Delta r \Delta z \Delta t + \\ & \rho c_p r_p \Delta r \Delta z T_P^0 \end{aligned}$$

La division par le pas de temps Δt , nous permettons d'écrire :

$$\begin{aligned} \left[\frac{\rho c_p r_p \Delta r \Delta z}{\Delta t} + (a_e + a_w + a_n + a_s) \right] T_P &= [a_e T_E + a_w T_W + a_n T_N + a_s T_S] + P_s r_p \Delta r \Delta z + \\ & \frac{\rho c_p r_p \Delta r \Delta z}{\Delta t} T_P^0 \end{aligned}$$

Posons :

$$a_{0P} = \frac{\rho c_p r_p \Delta r \Delta z}{\Delta t}$$

$$a_p = a_e + a_w + a_n + a_s + a_{0P}$$

$$b = P_s r_p \Delta r \Delta z + a_{0P} T_p^0$$

Ainsi, l'équation algébrique finale peut être écrite sous une forme, et où seules les valeurs nodales apparaissent, son expression, sous forme condensée est donnée par :

$$a_p T_p = a_e T_e + a_w T_w + a_n T_n + a_s T_s + b \quad (\text{III.7})$$

Où :

$$a_e = \frac{k_e r_e \Delta z}{(\delta r)_e}$$

$$a_w = \frac{k_w r_w \Delta z}{(\delta r)_w}$$

$$a_n = \frac{k_n r_p \Delta r}{(\delta z)_n}$$

$$a_s = \frac{k_s r_p \Delta r}{(\delta z)_s}$$

$$a_{0P} = \frac{\rho c_p r_p \Delta r \Delta z}{\Delta t}$$

$$a_p = a_e + a_w + a_n + a_s + a_{0P}$$

$$b = P_s r_p \Delta r \Delta z + a_{0P} T_p^0$$

De la même manière que dans le cas électromagnétique, si la discrétisation du domaine comporte N nœuds, on est amené à résoudre un système de N équations, à N inconnues.

Conductivité thermique à l'interface

Considérons l'interface (e) entre deux nœuds P et E de la figure (III.4)

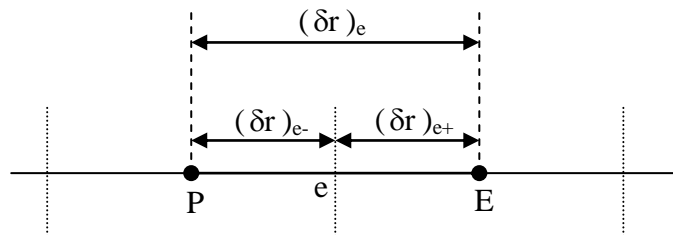


Figure III.4 Interface entre deux éléments d'un volume fini.

Si on suppose une variation linéaire de la conductivité thermique en fonction de la température $k(T)$, entre les nœuds P et E [CHENTOUF 94], [PATANKAR 80], on peut écrire :

$$k_e = \beta_e k_E + (1 - \beta_e) k_P \quad (\text{III.8})$$

Où le facteur d'interpolation β_e est donné par le rapport :

$$\beta_e = \frac{(\delta r)_{e-}}{(\delta r)_e} \quad (\text{III.9})$$

Si $(\delta r)_{e-} = (\delta r)_{e+}$, cas d'un maillage régulier il vient alors que $\beta_e = 0,5$, ainsi, k_e sera la moyenne arithmétique de k_E et k_P , ce qui n'est pas correcte si on est dans une région où la conductivité thermique est fortement variable en fonction de la température. Dans ces conditions cette approximation peut conduire à une mauvaise estimation du flux de chaleur sur cette interface [18] :

$$q_e = - \frac{k_e (T_E - T_P)}{(\delta r)_e} \quad (\text{III.10})$$

Il existe une autre approche plus correcte, pour évaluer la conductivité thermique à l'interface. Cette approche consiste à considérer les deux éléments de volume adjacents comme deux matériaux de conductivités thermiques différentes.

Une analyse à une dimension, sans terme source, conduit à l'expression suivante :

$$q_e = - \frac{(T_E - T_P)}{\frac{(\delta r)_{e-}}{k_P} + \frac{(\delta r)_{e+}}{k_E}} \quad (\text{III.11})$$

La combinaison des équations (IV.9), (IV.10) et (IV.11) donne :

$$k_e = \left(\frac{\beta_e}{k_P} + \frac{(1 - \beta_e)}{k_E} \right)^{-1}$$

Dans le cas où l'interface (e) serait placé au milieu entre P et E, c'est à dire $\beta_e = 0,5$, nous avons :

$$k_e^{-1} = 0,5 (k_P^{-1} + k_E^{-1}) \quad \text{D'où} \quad k_e = \frac{2 k_P k_E}{k_P + k_E}$$

De la même manière, et par analogie, nous déduisons pour les autres coefficients : k_e, k_w, k_n, k_s

$$k_e = \frac{2 k_p k_E}{k_p + k_E} \quad (\text{III.12})$$

$$k_w = \frac{2 k_p k_W}{k_p + k_W} \quad (\text{III.13})$$

$$k_n = \frac{2 k_p k_N}{k_p + k_N} \quad (\text{III.14})$$

$$k_s = \frac{2 k_p k_S}{k_p + k_S} \quad (\text{III.15})$$

Conditions aux limites

L'équation de diffusion de la chaleur, doit être associée aux conditions aux limites appropriées au problème physique à traiter. Il s'agit de la :

- Condition de DIRICHLET : la température T est connue sur la frontière.

- Condition de NEUMANN homogène : $k \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_s = 0$

(Valable dans le cas où il n'y a pas d'échange thermique avec l'extérieur : notamment sur les axes de symétrie)

- Condition de FOURIER : $q = -k \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_s$

(Valable dans le cas où le flux de chaleur échangé est connu)

- Condition de NEWTON : $q = h_c (T - T_{\text{amb}})$

(Valable dans le cas d'un flux de chaleur échangé par convection avec une zone de température ambiante T_{amb})

- $q = \varepsilon \beta (T^4 - T_{\text{amb}}^4)$

(valable dans le cas d'un flux échangé par rayonnement avec une zone de température ambiante T_{amb} où h_c, ε et β désignent, respectivement, le coefficient de convection, l'émissivité du corps et la constante de STEPHAN-BOLTZMAN $\beta = 5.67 \times 10^{-8} \text{ Wm}^2 \cdot \text{K}^4$).

L'équation discrète aux points limites

Si la température T est connue sur la frontière, c'est la condition de DIRICHLET (à titre d'exemple la valeur de T_P est connue, voir Figure III.5), nous n'avons pas besoin d'une équation discrète en ce point (P).

Nous devons formuler l'équation discrète aux points limites quand la température en ces points est bien entendue inconnue.

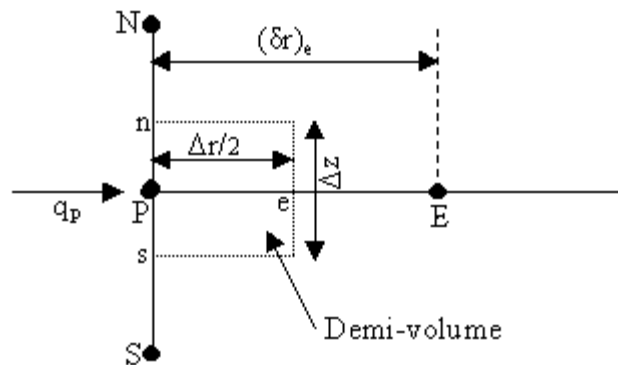


Figure III. 5. Demi-volume à côté des nœuds limites.

Pour trouver l'équation discrète au point (P), nous devons intégrer l'équation de diffusion de la chaleur (III.25) sur le demi-volume $\frac{\Delta V}{2}$ de la figure IV.4. Ainsi :

$$\int_t^{(t+\Delta t)} \int_s^e \int_P \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} r dr dz dt = \int_t^{(t+\Delta t)} \int_s^e \int_P \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rk \frac{\partial T}{\partial r}) \right) r dr dz dt + \int_t^{(t+\Delta t)} \int_s^e \int_P \frac{\partial}{\partial z} (k \frac{\partial T}{\partial z}) r dr dz dt + \int_t^{(t+\Delta t)} \int_s^e \int_P P_s r dr dz dt$$

Avec :

$$z_n = z_P + \frac{\Delta z}{2}, z_s = z_P - \frac{\Delta z}{2} \Rightarrow z_n - z_s = \Delta z$$

$$r_e = r_P + \frac{\Delta r}{2}$$

Après intégration , dans l'espace nous aurons :

$$\int_t^{(t+\Delta t)} \rho c_p (z_n - z_s) \left(\frac{r^2}{2} \right)_p^e \frac{\partial T}{\partial t} dt = \int_t^{(t+\Delta t)} \left(\left(r k \frac{\partial T}{\partial r} \right)_e - \left(r k \frac{\partial T}{\partial r} \right)_p \right) (z_n - z_s) dt +$$

$$\int_t^{(t+\Delta t)} \left(\left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right)_n - \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right)_s \right) \left(\frac{r^2}{2} \right)_p^e dt +$$

$$\int_t^{(t+\Delta t)} P_s \left(\frac{r^2}{2} \right)_p^e (z_n - z_s) dt$$

Avec :

$$(z_n - z_s) = \Delta z$$

$$\left(\frac{r^2}{2} \right)_p^e = \left(\frac{r_e^2}{2} - \frac{r_p^2}{2} \right)$$

$$= \frac{\left(r_p + \frac{\Delta r}{2} \right)^2}{2} - \left(\frac{r_p^2}{2} \right)$$

$$= r_p \frac{\Delta r}{2} + \frac{\Delta r^2}{8}$$

$$\approx r_p \frac{\Delta r}{2}$$

Puisque $\frac{\Delta r^2}{8}$ est négligeable devant les autres termes, [EUVRARD 87].

Nous aurons, alors :

$$\rho c_p r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z \int_t^{(t+\Delta t)} \frac{\partial T}{\partial t} dt = \int_t^{(t+\Delta t)} \left(\left(r k \frac{\partial T}{\partial r} \right)_e - \left(r k \frac{\partial T}{\partial r} \right)_p \right) \Delta z dt + \int_t^{(t+\Delta t)} \left(\left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right)_n - \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right)_s \right) r_p \frac{\Delta r}{2} dt +$$

$$\int_t^{(t+\Delta t)} P_s r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z dt$$

Avec :

$$q_p = -k_p \frac{\delta T}{\delta r} \quad (\text{Flux de chaleur échangé, connu (condition de FOURIER)}).$$

Avec un profil linéaire exprimant la variation de la température T entre les nœuds voisins, nous aurons :

$$\rho c_p r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z \int_t^{(t+\Delta t)} \frac{\partial T}{\partial t} dt = \int_t^{(t+\Delta t)} \left[r_e k_e \frac{(T_E - T_P)}{(\delta r)_e} + r_p q_p \right] \Delta z dt +$$

$$\int_t^{(t+\Delta t)} \left[k_n \frac{(T_N - T_P)}{(\delta z)_n} - k_s \frac{(T_P - T_S)}{(\delta z)_s} \right] r_p \frac{\Delta r}{2} dt + \int_t^{(t+\Delta t)} P_s r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z dt$$

Après intégration, dans le temps, et une formulation implicite de l'équation discrète précédente, nous aurons :

$$\rho c_p r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z (T_P - T_P^0) = \left(\frac{k_e r_e \Delta z \Delta t}{(\delta r)_e} \right) T_E + \left(\frac{k_n r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z \Delta t}{(\delta z)_n} \right) T_N + \left(\frac{k_s r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z \Delta t}{(\delta z)_s} \right) T_S -$$

$$\left[\left(\frac{k_e r_e \Delta z \Delta t}{(\delta r)_e} \right) + \left(\frac{k_n r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z \Delta t}{(\delta z)_n} \right) + \left(\frac{k_s r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z \Delta t}{(\delta z)_s} \right) \right] T_P +$$

$$r_p \Delta z q_p \Delta t + P_s r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z \Delta t$$

Soit les notations suivantes :

$$A_1 = \left[\rho c_p r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z + \left(\frac{k_e r_e \Delta z \Delta t}{(\delta r)_e} \right) + \left(\frac{k_n r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z \Delta t}{(\delta z)_n} \right) + \left(\frac{k_s r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z \Delta t}{(\delta z)_s} \right) \right] T_P$$

$$A_2 = \left(\frac{k_e r_e \Delta z \Delta t}{(\delta r)_e} \right) T_E + \left(\frac{k_n r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z \Delta t}{(\delta z)_n} \right) T_N + \left(\frac{k_s r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z \Delta t}{(\delta z)_s} \right) T_S$$

$$A_3 = r_p \Delta z q_p \Delta t + P_s r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z \Delta t + \rho c_p r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z T_P^0$$

D'où :

$$\Rightarrow A_1 = A_2 + A_3$$

La division de chaque terme (A_1 , A_2 , A_3) par le pas de temps Δt , donne :

$$B_1 = B_2 + B_3$$

Tel que :

$$B_1 = \left[\frac{\rho c_p r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z}{\Delta t} + \left(\frac{k_e r_e \Delta z}{(\delta r)_e} \right) + \left(\frac{k_n r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z}{(\delta z)_n} \right) + \left(\frac{k_s r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z}{(\delta z)_s} \right) \right] T_P$$

$$B_2 = \left(\frac{k_e r_e \Delta z}{(\delta r)_e} \right) T_E + \left(\frac{k_n r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z}{(\delta z)_n} \right) T_N + \left(\frac{k_s r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z}{(\delta z)_s} \right) T_S$$

$$B_3 = r_p \Delta z q_p + P_s r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z + \frac{\rho c_p r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z}{\Delta t} T_P^0$$

Posons

$$a_e = \frac{k_e r_e \Delta z}{(\delta r)_e}$$

$$a_n = \frac{k_n r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z}{2(\delta z)_n}$$

$$a_s = \frac{k_s r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z}{2(\delta z)_s}$$

$$a_{0P} = \frac{\rho c_p r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z}{2\Delta t}$$

$$a_p = a_e + a_n + a_s + a_{0P}$$

$$b = P_s r_p \Delta r \Delta z + a_{0P} T_P^0 + r_p \Delta z q_p$$

Ainsi, l'équation algébrique prend alors la forme suivante :

$$a_p T_P = a_e T_E + a_n T_N + a_s T_S + b \quad (\text{III.16})$$

où :

$$a_e = \frac{k_e r_e \Delta z}{(\delta r)_e}$$

$$a_n = \frac{k_n r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z}{2(\delta z)_n}$$

$$a_s = \frac{k_s r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z}{2(\delta z)_s}$$

$$a_{0P} = \frac{\rho c_p r_p \frac{\Delta r}{2} \Delta z}{2\Delta t}$$

$$a_p = a_e + a_n + a_s + a_{0P}$$

$$b = P_s r_p \Delta r \Delta z + a_{0P} T_P^0 + r_p \Delta z q_p$$

Condition de NEUMANN :

En annulant, la valeur du flux de chaleur q_p , dans le cas où il n'y a pas d'échange thermique avec l'extérieur notamment sur les axes de symétrie (condition de NEUMANN homogène : $k \frac{\delta T}{\delta n} = 0$).

Dans ce cas l'équation algébrique s'écrit alors sous la forme suivante :

$$a_p T_p = a_e T_E + a_n T_N + a_s T_S + b \quad (\text{III.17})$$

où :

$$a_e = \frac{k_e r_e \Delta z}{(\delta r)_e}$$

$$a_n = \frac{k_n r_p \Delta r}{2(\delta z)_n}$$

$$a_s = \frac{k_s r_p \Delta r}{2(\delta z)_s}$$

$$a_{0p} = \frac{\rho c_p r_p \Delta r \Delta z}{2\Delta t}$$

$$a_p = a_e + a_n + a_s + a_{0p}$$

$$b = P_s r_p \Delta r \Delta z + a_{0p} T_p^0$$

Condition de NEUTON :

Dans le cas où il y a échange avec l'extérieur, le flux de chaleur q_p , échangé par convection libre avec une zone de température ambiante (T_{amb}) est spécifié en terme de coefficient d'échange h_c (coefficient de convection) et de la température ambiante.

$$q_p = h_c (T_p - T_{amb})$$

Après substitution de l'expression de q_p dans l'équation (III.16), nous obtenons l'équation algébrique discrète suivante :

$$a_p T_p = a_e T_E + a_n T_N + a_s T_S + b \quad (\text{III.18})$$

Où :

$$a_e = \frac{k_e r_e \Delta z}{(\delta r)_e}$$

$$a_n = \frac{k_n r_p \Delta r}{2(\delta z)_n}$$

$$a_s = \frac{k_s r_p \Delta r}{2(\delta z)_s}$$

$$a_{op} = \frac{\rho c_p r_p \Delta r \Delta z}{2\Delta t}$$

$$a_p = a_e + a_n + a_s + a_{op} - r_p \Delta z h_c$$

$$b = P_s r_p \Delta r \Delta z + a_{op} T_p^0 - r_p \Delta z h_c T_{amb}$$

Remarque

Dans le cas où la charge à chauffer est pleine et lorsque la fréquence de travail est classée parmi les hautes fréquences, le flux de chaleur est égal à zéro au centre de cette dernière et il est à spécifier que :

$$q_p = h_c (T_p - T_{amb}) \text{ Restera valable } q' \text{ aux limites de cette charge.}$$

III.3 METHODES DE RESOLUTION DES SYSTEMES D'EQUATIONS ALGEBRIQUES

Pour la résolution des systèmes d'équations algébriques linéaires, il existe deux grandes catégories de méthodes [BOUMAH RAT 83] :

- Les méthodes directes
- Les méthodes itératives

III.3.1 METHODES DIRECTES

Ces méthodes conduisent à une solution en un nombre fini d'étapes (éventuellement grand), cependant, comme l'ordinateur représente chaque nombre par un ensemble limité de digits, les méthodes directes sont précises mais demandent beaucoup d'espace mémoire et de temps de calcul.

III.3.2 METHODES ITERATIVES

Pour les matrices d'ordre élevé, comportant de nombreux éléments nuls (matrice creuse), on utilise les méthodes itératives qui font passer d'un estimé $X^{(k)}$ de la solution à un autre estimé

$X^{(k+1)}$ de cette solution, s'il y a convergence, la solution ne pourrait être atteinte qu'après un nombre d'itérations. Parmi ces méthodes, nous citons :

III.3.2.1 Méthode de JACOBI

Elle est basée sur la transformation du système $[A][X]=[B]$ en

$$X_i^{(k+1)} = \left[b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j^k \right] / a_{ii} \quad ; (i \neq j), i=1, \dots, n \quad (\text{III.19})$$

On estime une valeur arbitraire initiale X_i^0 pour $(k=0)$, le calcul sera arrêté si

$\left| X_i^{(k+1)} - X_i^k \right| < \varepsilon$ Dans le cas d'une précision absolue et $\frac{\left| X_i^{(k+1)} - X_i^k \right|}{X_i^k} < \varepsilon$ Dans le cas d'une précision relative.

ε : Précision imposée par l'utilisateur.

III.3.2.2 Méthode de GAUSS SEIDEL

Cette méthode consiste à transformer le système $[A][X]=[B]$ en :

$$X_i^{(k+1)} = \left[b_i - \sum_{j=1}^{(i-1)} a_{ij} X_j^{(k+1)} - \sum_{j=(i+1)}^n a_{ij} X_j^k \right] / a_{ii} \quad ; i=1, \dots, n \quad (\text{III.20})$$

En donnant aux inconnues X_i^k des valeurs arbitraires initiales X_i^0 (pour $k = 0$)

Le processus sera arrêté si :

$\left| X_i^{(k+1)} - X_i^k \right| < \varepsilon$ Dans le cas d'une précision absolue et $\frac{\left| X_i^{(k+1)} - X_i^k \right|}{X_i^k} < \varepsilon$ Dans le cas d'une précision relative.

ε : Précision imposée par l'utilisateur

III.3.2.3 Méthode de relaxation

Pour améliorer la rapidité de la convergence, si on est sûr qu'il n'y a pas divergence, dans le cas des méthodes itératives, on utilise un facteur de relaxation α tel que :

$$X_1^{(k+1)} = X_1^k + \alpha (X_1^{(k+1)} - X_1^k) \quad (\text{III.21})$$

Conclusion sur les méthodes itératives

Les méthodes itératives sont généralement préférées par rapport aux méthodes dites directes, pour les grands systèmes $[A][X]=[B]$ à matrice creuse parce qu'elles ne modifient pas la matrice de rigidité $[A]$ et que dans un grand nombre d'application, cette matrice $[A]$ est creuse et présente une structure particulière (triangulaire) ce qui lui permet de ne pas être mémoriser explicitement et assurer pratiquement la convergence.

Dans les méthodes élémentaires, la méthode de GAUSS-SEIDEL est préférée à celle de JACOBI, parce qu'elle consomme moins de mémoire et converge souvent plus vite.

La méthode de relaxation est généralement beaucoup plus rapide que celle de GAUSS-SEIDEL, même si le facteur optimal α est réglé expérimentalement selon l'aspect physique du problème à traiter.

III.4 LE COUPLAGE ELECTROMAGNETIQUE-THERMIQUE

La température est la principale variable à déterminer lors de la modélisation d'un système de chauffage par induction, et où les équations électromagnétique et thermique sont couplées.

A première vue, la variable température est obtenue après la résolution de l'équation de la thermique. Or, dans cette équation, la densité de puissance induite dans la charge (induit) est à son tour une fonction de cette même température et bien entendu des caractéristiques électromagnétiques du système, ce qui constitue le lien entre ces deux phénomènes physiques. Ainsi, dans l'étude des systèmes de chauffage par induction, les équations caractérisant l'évolution spatiale-temporelle des phénomènes électromagnétiques et thermiques, ne peut être résolues séparément, et nécessitent absolument un traitement par un modèle mathématique numérique couplé.

Parmi les modèles mathématico-numériques utilisées pour la modélisation des phénomènes électromagnétiques et thermiques couplés, nous citons :

- Le modèle de couplage direct,
- Le modèle de couplage alterné,
- Le modèle de couplage utilisant la technique de la paramétrisation, que nous proposons dans le cadre de ce travail.

Avant d'entamer la présentation de chacun de ces modèles, nous avons jugé utile de présenter tout d'abord un aperçu sur le calcul du paramètre du couplage : la puissance induite par effet JOULE dans la charge à chauffer. Cette puissance assure d'une part le couplage physique entre l'électromagnétisme et la thermique, et le couplage mathématico-numérique à la base du modèle du couplage alterné et celui basé sur la technique de la paramétrisation d'autre part.

III.5 CALCUL DES PARAMETRES DU COUPLAGE ELECTROMAGNETIQUE-THERMIQUE

Si les équations électromagnétique et thermique, physiquement couplés, sont résolues indépendamment dans les méthodes utilisant le couplage alterné ou la technique de paramétrisation, que nous allons les décrire par la suite, leur interdépendance est rappelée par l'estimation d'un terme de contribution.

Dans le cadre d'un couplage électromagnétique-thermique, ce terme est désigné par la densité de puissance induite $p(t)$, qui représente un apport d'énergie en thermique dû aux courants induits. Cette densité de puissance induite se calcule selon la relation suivante :

$$p(t) = \frac{1}{\sigma(T)} J_{ind}^2 \quad (III.22)$$

Où J_{ind} est la densité du courant induit créée dans le matériau conducteur. Il s'exprime en termes de potentiel vecteur magnétique \vec{A} , en régime harmonique, comme suit :

$$\vec{J}_{ind} = -i \sigma(T) \omega \vec{A} \quad (III.23)$$

Le terme de couplage des deux phénomènes physiques, représentant la densité de la puissance moyenne dissipée sur une période, s'écrit alors comme suit :

$$p = \frac{1}{2} \sigma(T) \omega^2 A A^* \quad (III.24)$$

A^* est le conjugué du potentiel vecteur magnétique A dans un espace complexe.

Il est clair que le terme source thermique dépend de façon indirecte de la température par le biais de la conductivité électrique σ .

III.6 LES MODELES DU COUPLAGE EXISTANT

Les phénomènes physiques couplés aboutissent à des équations que généralement l'on ne sait pas résoudre analytiquement. Pour leur analyse, nous faisons alors appel à des méthodes de résolution numérique, citées précédemment, telle la méthode des volumes finis que nous avons sélectionnés pour notre étude.

Jusqu'à présent, la résolution des systèmes couplés a été réalisée en particulier à l'aide de deux méthodes : l'une dite de couplage direct dit fort, l'autre dite de couplage alterné dit faible.

III.6.1 MODELE DU COUPLAGE DIRECT (FORT)

Dans ce modèle du couplage, le problème est considéré dans sa globalité : l'ensemble des équations le régissant est résolu dans un même et unique système d'équations, où le couplage apparaît sous forme de termes croisés dans la matrice issue de la formulation numérique [FELICHI 97][FELIACHI 91].

Cette méthode s'appuie sur un maillage unique, décrivant l'ensemble du problème et réalisé pour que toutes les particularités physiques, comme celles du fort gradient, soient considérées.

Cette technique de couplage présente l'avantage de ne pas nécessiter de transfert de données ni d'interpolation, donc moins d'erreurs et une grande précision sur les résultats.

Toutefois, plusieurs facteurs sont à l'origine du temps de calcul très longs et d'une occupation mémoire importante. Ainsi, l'usage d'un maillage unique, adapté simultanément aux différents domaines physiques, conduit très vite à un système global de taille importante : l'affinage d'un maillage, par exemple, peut être nécessaire dans un domaine mais correspondre à un sur-maillage dans un autre. Par ailleurs, le système étant global, une seule base de

temps doit être utilisée pour résoudre le système, mais l'emploi d'une base de temps définie à partir de la plus petite des constantes de temps du système conduit à des calculs prohibitifs si celles-ci diffèrent fortement : de l'ordre de la seconde en électromagnétique et de la milliseconde en thermique [AZZAOUI 02].

Le modèle du couplage direct (MCD) peut être avantageusement utilisé dans le cas de problèmes fortement couplés [FELICHI 97].

III.6.2 MODELE DU COUPLAGE ALTERNE (FAIBLE)

La modélisation qui utilise ce modèle de couplage alterné (MCA) permet de résoudre séparément les problèmes électromagnétique et thermique. Le couplage se fait alors par le transfert des données de l'un des deux problèmes vers l'autre [FELICHI 97][MOLFINO 90].

Cette technique de couplage permet l'usage de plusieurs maillages adaptés à chaque domaine physique. De cette façon, il est possible d'ignorer ou de conserver des régions en fonction de leur influence et d'affiner des zones du maillage où le gradient peut être important, sans pour autant surcharger les autres. Ainsi, dans une modélisation électromagnétique-thermique, le maillage thermique doit être suffisamment affiné pour décrire une forte évolution du gradient de température, le maillage électromagnétique, quant à lui, ne nécessite pas autant de soin : sachant que les grandeurs électromagnétiques évoluent lentement, peu d'éléments sont nécessaires [AZZAOUI 02].

Toutefois, une attention égale doit être portée à la réalisation des différents maillages, en vue d'approximer de manière correcte les grandeurs du couplage ; Ainsi, dans un couplage électromagnétique-thermique, le maillage de la partie thermique doit permettre une approximation convenable non seulement de la température, mais aussi de la densité de puissance induite.

La décomposition du problème complet, permettant ainsi l'emploi de plusieurs maillages adaptés, conduit à des systèmes d'équations de tailles raisonnables.

Cependant, l'inconvénient majeur de ce modèle est lié au transfert des informations de couplage. Ainsi, dans les zones où la variation des propriétés physiques est rapide (voisinage de la température de Curie), le pas de temps de discrétisation doit être relativement petit, l'utilisation du MCA nécessite alors un transfert fréquent des données de l'un des problèmes

électromagnétiques ou thermiques vers l'autre, ce qui n'est pas une opération aisée. Aussi, dans le cas de fortes non-linéarités, le MCA nécessite l'emploi d'un superviseur permettant d'automatiser le couplage entre les phénomènes électromagnétiques et thermiques [AZZAOUI 02].

Enfin, le MCA ne tient pas compte du couplage réel qui existe entre les deux phénomènes physiques, et par le transfert fréquent des informations, ce couplage engendre des erreurs d'interpolation et des pertes au niveau de la précision.

Pour surmonter ce problème, nous devons, à titre d'exemple, diminuer considérablement le pas de calcul, ceci nous convergera vers le modèle du couplage direct avec tous ses avantages et ses inconvénients.

En vue de palier les inconvénients de chacun des modèles précédents, nous envisageons d'élaborer un troisième modèle de couplage dont l'originalité est d'appliquer la technique de la paramétrisation utilisée jusque-là dans le couplage électromagnétique-mécanique [SRAIRI 98], donc, pour le traitement des équations à caractère global.

III .6.3 MODELE DU COUPLAGE BASE SUR LA TECHNIQUE DE LA PARAMETRISATION

Le modèle de couplage des équations électromagnétique et thermique que nous proposons dans le cadre de ce travail est un modèle basé sur la technique de la paramétrisation. Cette méthode consiste à calculer des valeurs de paramètres à l'aide de la méthode des volumes finis.

L'objectif de ce modèle de couplage est de considérer, comme terme source de l'équation thermique, la fonction $P_s(T, J_{ex})$ décrivant les variations de la densité de la puissance moyenne dissipée par effet JOULE suivant la température T et la densité de courant d'excitation J_{ex} .

Le couplage électromagnétique-thermique basé sur la technique de la paramétrisation, reste entièrement invisible pour l'utilisateur qui n'est tenu d'effectuer qu'une seule opération de création de dépendance $P_s(T, J_{ex})$ permettant de résoudre le problème électromagnétique-thermique couplé.

III.6.3.1 Principe du modèle du couplage basé sur la technique de la paramétrisation.

La résolution du système d'équations électromagnétique et thermique nécessite la connaissance de la densité volumique de puissance moyenne P_s fonction du potentiel vecteur magnétique \vec{A} et de la densité du courant d'excitation J_{ex} .

La méthode utilisant la technique de la paramétrisation consiste alors à paramétrer le terme de couplage P_s à partir de la résolution de l'équation électromagnétique en utilisant la méthode des volumes finis pour une série de valeurs discrètes de la température T , et du courant d'excitation J_{ex} , extraites de leurs plages de variation physique.

Démarche

Le couplage électromagnétique-thermique par la technique de la paramétrisation peut être effectué dans trois principales étapes. Ces étapes sont :

Première étape : Etude électromagnétique

Pour une valeur de température donnée, les propriétés électromagnétiques $\sigma(T)$ et $\mu(T)$ sont parfaitement définies par l'expérience.

Dès lors, pour une valeur de la densité du courant d'excitation préalablement fixée. La résolution de l'équation électromagnétique, exprimée en terme de potentiel vecteur magnétique \vec{A} , est effectuée pour une température donnée T en utilisant la méthode des volumes finis. De ce premier résultat, est alors extraite la puissance totale P_{tot} , évaluée sur toute la charge à chauffer. Ce dernier résultat intervient ensuite directement dans l'évaluation des sources de chaleur.

En rappelant qu'à haute fréquence, la densité de puissance reste presque entièrement localisée dans l'épaisseur de peau où se développent les courants induits, notre démarche dans le traitement du problème magnétodynamique consiste seulement à estimer la densité de puissance moyenne dissipée dans la charge à chauffer, relative à une température donnée T .

La même démarche est à répéter pour différentes valeurs discrètes de la température T appartenant à l'intervalle $[T_{amb}, T_{max}]$. Ces deux bornes de la température (T_{amb}, T_{max}) sont choisies conformément à la réalité physique.

Si nous prenons à titre d'exemple, le cas de chauffage par induction du cuivre, tout en gardant ces caractéristiques de l'état solide, la borne inférieure T_{amb} peut être choisie comme étant la température ambiante, tandis que T_{max} ne peut dépasser la température de Curie et à la limite $T=T_{Curie}=708^{\circ}\text{C}$.

Deuxième étape: Evaluation des paramètres du couplage

Il est alors possible, à partir des couples (T, P_s) , de construire une courbe $P_s=f(T)$ donnant la densité de puissance moyenne dissipée, comme étant une fonction de la température T , pour une valeur de densité de courant d'excitation donnée J_{ex} , tel que f est une fonction d'interpolation dont l'ordre est à déterminer en se basant sur le critère de différence minimale absolue ou relative entre les points issus de la paramétrisation et ceux des résultats d'interpolation. Pour utiliser les résultats de la paramétrisation $P_s(T)$, donc les injecter dans l'équation de la thermique et calculer par la suite la distribution de la température, une interpolation numérique s'impose pour donner une expression analytique adéquate à la variation de la puissance en fonction de la température. Ceci nous permet de déterminer avec grande précision et haute qualité la valeur de la densité de la puissance induite moyenne P_s pour n'importe quelle valeur de la température T appartenant bien entendu à l'intervalle $[T_{amb}, T_{max}]$.

Ces deux étapes peuvent être répétées pour différentes valeurs de la densité du courant d'excitation J_{ex} , appartenant à une plage de variation donnée.

Cette technique permet ainsi de générer un réseau de courbes $P_s=f(T, J_{ex})$ rendant compte, pour différentes valeurs du courant d'excitation, de l'évolution de la densité de puissance moyenne en fonction de la température.

Troisième étape: Partie thermique

Suite à la réalisation des deux précédentes étapes, il suffit de résoudre l'équation de la thermique au terme source $P_s = f(T, J_{ex})$. Une combinaison de différentes méthodes et techniques numériques de pas à pas dans le temps sera nécessaire au traitement de problèmes transitoires

Constataions

- Le modèle du couplage utilisant la technique de la paramétrisation est basé sur la détermination d'une densité de puissance moyenne P_s localisée dans l'épaisseur de peau de la charge à chauffer. Dans le cadre de notre travail, cette fonction est calculée à partir de la résolution, en utilisant la méthode des volumes finis, de l'équation électromagnétique pour une gamme de températures données et correspondant à une alimentation électrique fixée (courant d'excitation). Ensuite, la fonction P_s servira de terme source pour l'équation de la thermique. Ainsi, une modification des propriétés thermiques (capacité calorifique c_p , conductivité thermique k ,...etc.) ne concerne que le problème thermique et ne nécessite pas un nouveau calcul électromagnétique.
- Dans le cas de la méthode utilisant le couplage alterné, où chaque équation du système est résolue indépendamment de l'autre, le report des valeurs des termes de couplage entre les équations se fait par tabulation, directe ou indirecte. En effet, la propriété à reporter peut être directement tabulée et reprise dans le problème suivant ou bien calculée dans le problème suivant comme fonction d'autres propriétés tabulées.
- L'avantage de la technique de la paramétrisation envisagée réside dans le fait de pouvoir s'affranchir de la précédente démarche, qui consiste à tabuler, au niveau de l'équation de la magnétodynamique, les grandeurs σ (conductivité électrique) et \vec{A} (potentiel vecteur magnétique) pour être ensuite introduites dans l'équation de la thermique comme propriétés ne dépendant plus que de l'espace.
- La méthode de couplage par la technique de la paramétrisation permet ainsi de découpler entièrement les deux phénomènes physiques et de ne s'intéresser plus qu'à un problème

thermique après l'exploitation du problème magnétodynamique en termes de densité de la puissance, dépendante de la température.

- La technique de couplage par la paramétrisation autorise l'utilisation de maillages différents et adaptés à chacun des problèmes, magnétiques et thermiques, il s'agit d'une souplesse non permise dans le modèle du couplage direct [SRAIRI 98], ou encore le modèle du couplage alterné qui nécessite alors un processus réversible. Le couplage paramétrique est simple à utiliser.
- Ainsi, et en se basant sur ce qu'à été présenté dans ce chapitre, nous pouvons illustrer les algorithmes du couplage, et classer les différents modèles du couplage électromagnétique-thermique : le direct, l'alterné, et celui basé sur la technique de la paramétrisation, du point de vue, lenteur, précision absolue et complexité d'une part et rapidité, précision relative aux problèmes à traiter et simplicité d'autre part, par le diagramme suivant (Figure III.6) :

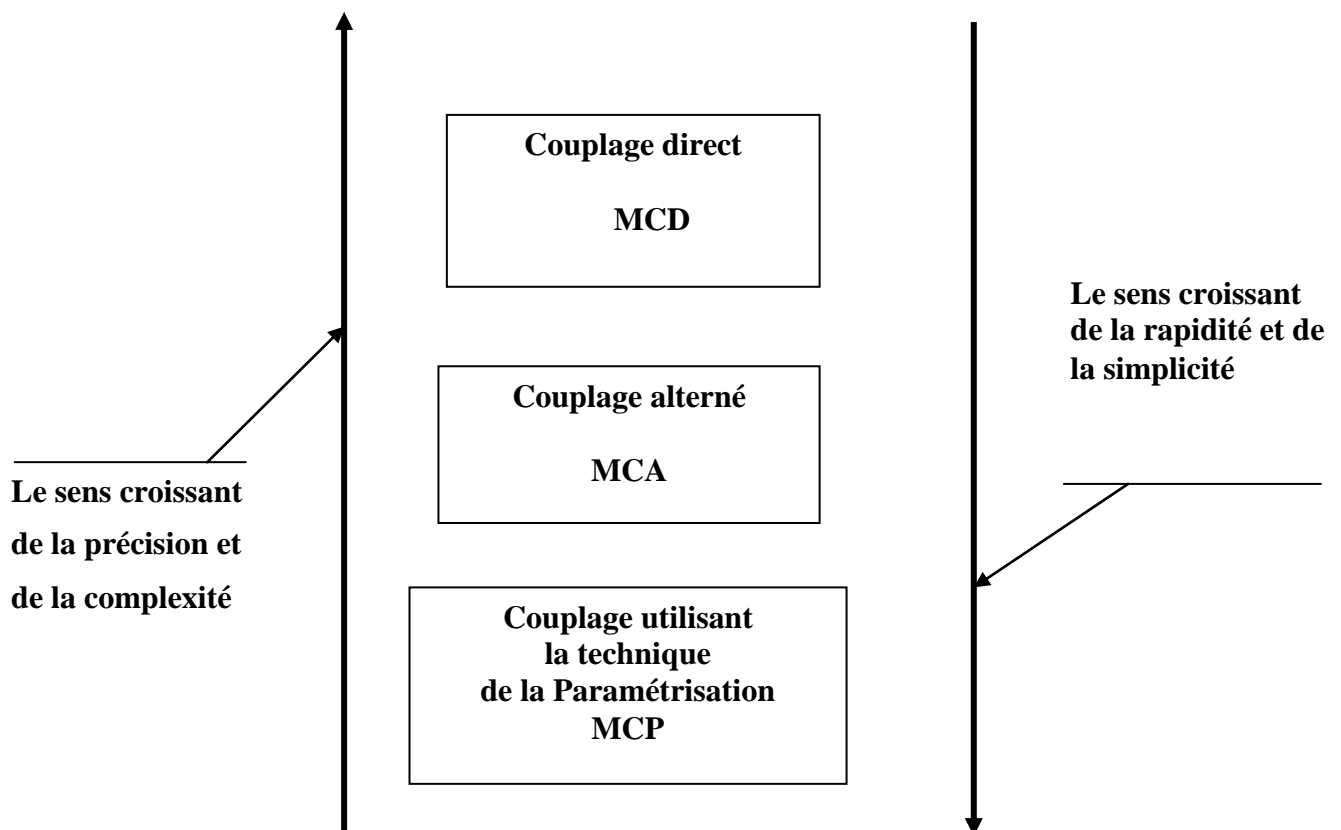


Figure III.6 Diagramme de classification des différents modèles du couplage électromagnétique-thermique.

I-

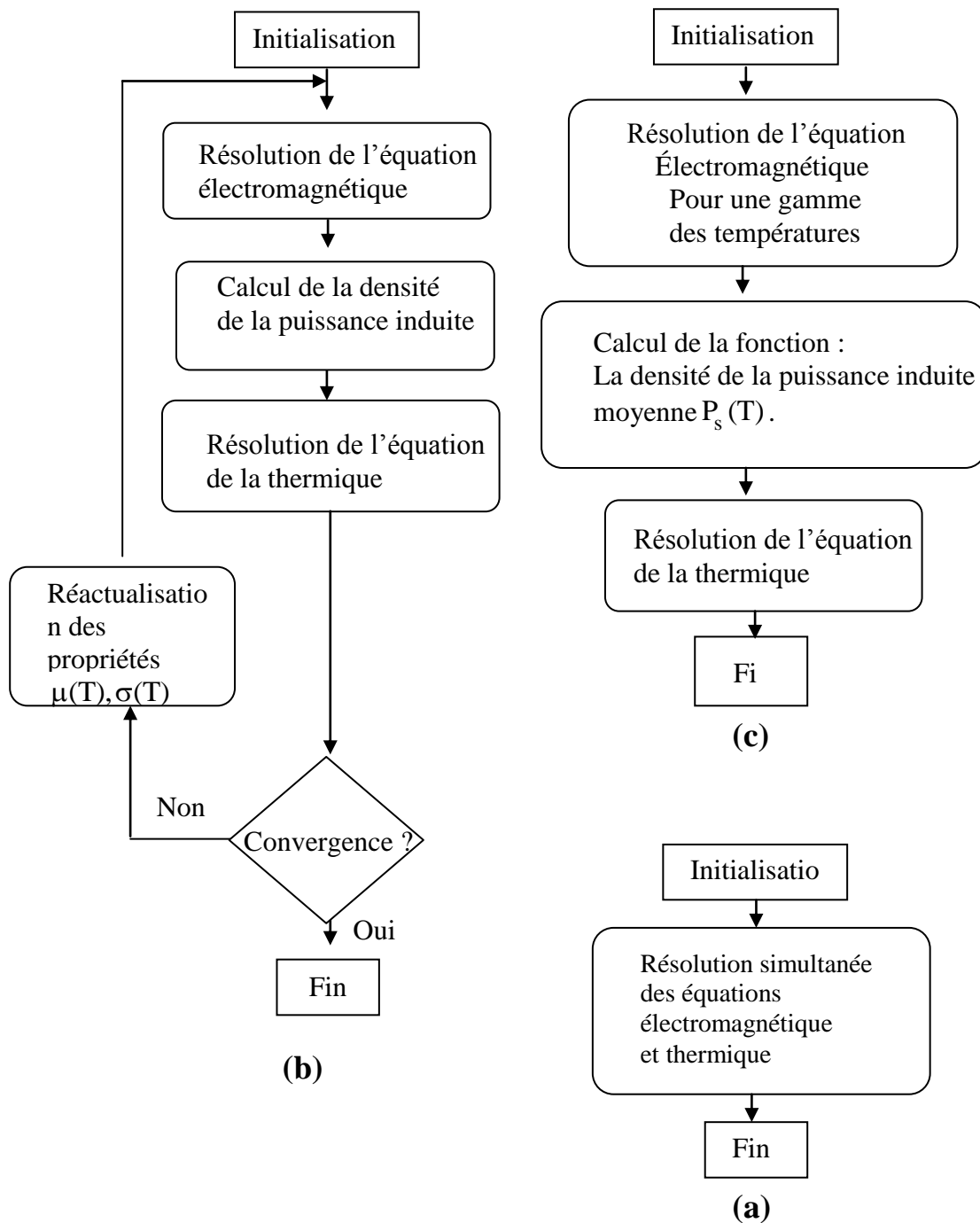


Figure III.7. Les différents modèles du couplage électromagnétique- thermique
(a) : MCD, (b) : MCA, (c) : MCP

III. 7 CONCLUSION

La modélisation numérique des systèmes de chauffage à induction constitue l'outil de base pour la conception de ces systèmes. Cette modélisation passe par la résolution numérique des équations des champs décrivant les phénomènes physiques et leur couplage.

Le modèle du couplage utilisant la technique de la paramétrisation est simple à utiliser par rapport aux deux autres modèles du couplage, le direct et l'alterné. Son principal avantage réside dans le découplage mathématique des deux problèmes électromagnétique et thermique physiquement couplés.

Chapitre 4

Evaluation Des Résultats De Simulations Des Modèles De Chauffage Par Induction

IV.1	APPLICATION N°1 : CUISSON A INDUCTION.	91
IV.1.1	Description du Dispositif de Chauffage	91
IV.1.2	Représentation du modèle adopté dans la modélisation	92
IV.1.3	MODELES DES PROPRIETES PHYSIQUES	92
IV.1.4	Données électromagnétiques	93
IV.1.4.1	- Perméabilité magnétique relative	93
IV.1.4.2	- Résistivité électrique	93
IV.1.5.	Données thermiques	94
IVI.1.6	Etude du comportement électromagnétique et thermique	96
IVI.1.6.1	Définition du modèle géométrique	96
1- cas :	à Trois inducteurs	96
IVI.1.6.2	Résultats des simulations des comportements électromagnétique et thermique du dispositif du chauffage par induction doté de trois inducteurs	96
2- cas :	à six inducteurs	100
IVI.1.6.3	Résultats des simulations des comportements électromagnétique et thermique du dispositif du chauffage par induction doté de six inducteurs .	101
IV.1.6.4	Interprétation des résultats électromagnétiques et thermique.	104
IV.1.6.5	Evolution de la densité de la puissance moyenne en fonction de la température.	104
IV.2.	APPLICATION N°2 : NOUVELLES TOPOLOGIES	106
IV.2.1	Description d'une nouvelle topologie des dispositifs de chauffage.	106
IV.2.2	Description de nouvelle topologie pour es dimensions différentes dimensions des trous.	110
IV.3.	CONCLUSION	112

Nous présentons dans le présent chapitre les résultats des simulations du code de calcul développé et implémenté sous environnement Matlab, dédié principalement à la modélisation des systèmes de chauffage par induction. Les résultats des simulations présente le caractère magnétique et thermique de trois systèmes de chauffage par induction où nous proposons à travers nos simulations, le meilleur système de chauffage par induction qui offre une meilleure répartition de la température, offrant ainsi, des meilleurs conditions thermiques pour le chauffage.

IV.1 APPLICATION N°1 : CHAUFFAGE PAR INDUCTION (CUISSON A INDUCTION)

IV.1.1 DESCRIPTION DU DISPOSITIF DE CHAUFFAGE

Le système de chauffage par induction étudié comporte trois parties principales qui sont, les inducteurs, alimentés en courant alternatif à haute fréquence, considérés comme source du champ magnétique du dispositif, la pièce à chauffé conçu à partir d'un matériau conducteur, leurs propriétés géométriques sont résumés dans le tableau ci-dessous[BYUN 00] :

<u>Les inducteurs :</u>	
Caractéristiques	Dimensions
Inducteur1	0.0070 m
Inducteur2	0.0070 m
Inducteur3	0.0070 m
Epaisseur	0.0006 m
<u>Pièce à chauffer (charge)</u>	
Caractéristiques	Dimensions
Diamètre	0.0950 m
Epaisseur	0.0012 m

Tableau IV.1. Propriétés géométriques du dispositif du chauffage par induction à trois inducteurs

IV.1.2 REPRESENTATION DU MODELE ADOPTE DANS LA MODELISATION

La figure IV.1 présente le dispositif du chauffage par induction étudié. Ce dernier composé de trois inducteurs placés en dessous de la pièce à chauffer conçue à partir d'un matériau conducteur de l'électricité (Acier inoxydable, aluminium). Afin de limiter le domaine de calcul, nous avons considéré que le système est entouré par une boîte d'air, où dans c'est limites considérées comme lointaines, on impose des conditions aux limites de type Dirichlet. Dans le modèle présenté et en raison de la symétrie axiale du dispositif, seule une représentation bidimensionnelle du système sera considérée[BYUN 00].

Le schéma ci-dessous présente le dispositif en coupe, dans le plan (r, z) .

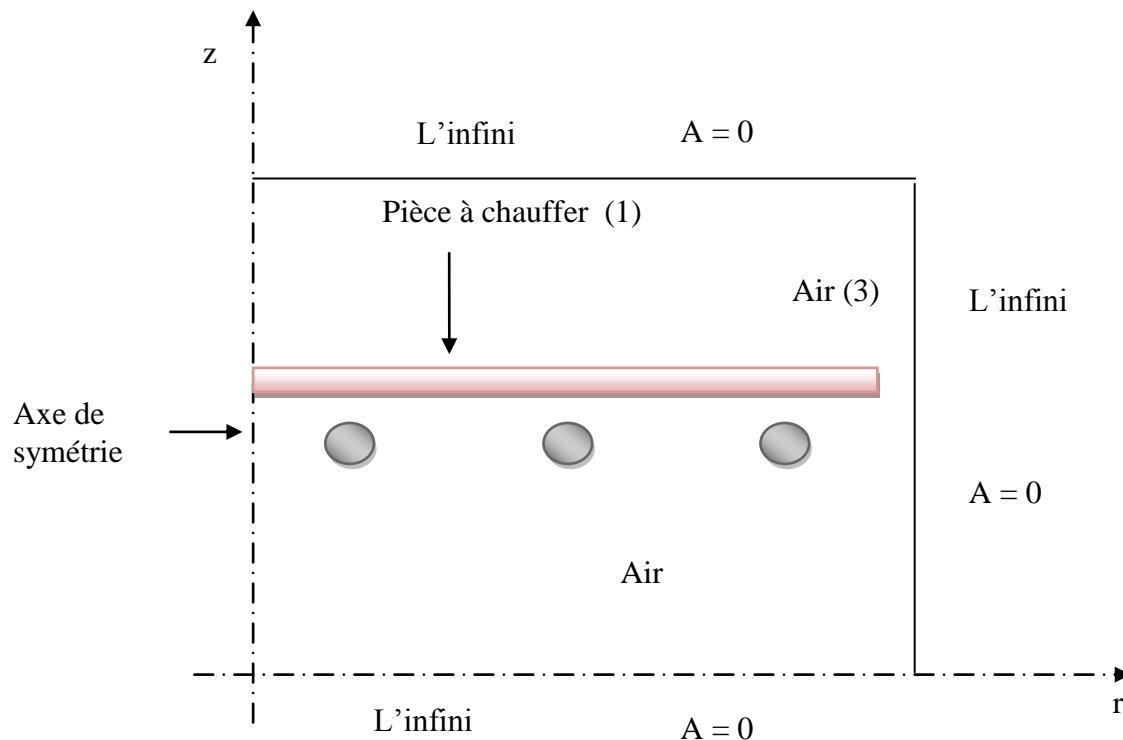


Figure IV.1. Modèle géométrique du dispositif.

IV.1.3 MODELES DES PROPRIETES PHYSIQUES

Pour la modélisation des systèmes de chauffage par induction, il faut résoudre simultanément les deux problèmes, électromagnétique et thermique. Or dans ce type de problème, les propriétés physiques des matériaux dépend à la fois, du champ magnétique et de la température. Il s'agit donc d'un problème fortement non-linéaire. Dans le cadre de notre travail, nous avons pris en

considération la dépendance des propriétés des matériaux adoptés, en particulier la pièce à chauffer, en fonction de la température. Dans le modèle développé, nous avons adopté des relevés expérimentaux [BECHA 01] de la dépendance en température de certains paramètres électrique et thermique de la pièce à chauffer, tel-que, la résistivité électrique, la conductivité thermique et enfin, la chaleur spécifique. Ces relevés expérimentaux ont été implémenté dans le modèle développé sous forme d'équations algébriques décrivant la variation en température des paramètres physiques de la pièce à chauffer [BYUN 00].

La partie ci-dessous résumé l'ensemble des données des propriétés magnétique et thermique adoptées :

IV.4.1. Données électromagnétiques

IV.4.1.1 Perméabilité magnétique relative

Dans les dispositifs de chauffage par induction, généralement la pièce à chauffer est conçue à partir d'un matériau amagnétique (cuivre, aluminium, Acier inoxydable, etc...). Dans ce cas, la perméabilité magnétique relative du matériau est prise égale à l'unité $\mu_r = 1$. Ainsi, la variation de l'induction magnétique \vec{B} en fonction du champ magnétique \vec{H} est exprimée linéairement par la relation suivante :

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} .$$

IV.4.1.2. Résistivité électrique

Pour une température donnée, généralement la résistivité de la pièce à chauffer est constante, cependant durant le processus du chauffage par induction, caractérisé par une élévation importante la température dans un temps très réduit, la résistivité électrique des matériaux conducteur, utilisés pour concevoir la pièce à chauffer est fortement non-linéaire dépendante de la température intérieur. Pour résoudre correctement les problèmes électromagnétique et thermique, il est nécessaire de prendre en compte la dépendance en température des paramètres physiques de la pièce à chauffer.

La figure IV.2 présente la variation de la résistivité électrique en température de l'acier inoxydable dans une marge de température T comprise entre 0 °K et 1200 °K [Becha 01]. La loi de variation de la résistivité électrique a été décrite par des expressions analytiques, fonctions de l'inconnue T (voir Annexe II).

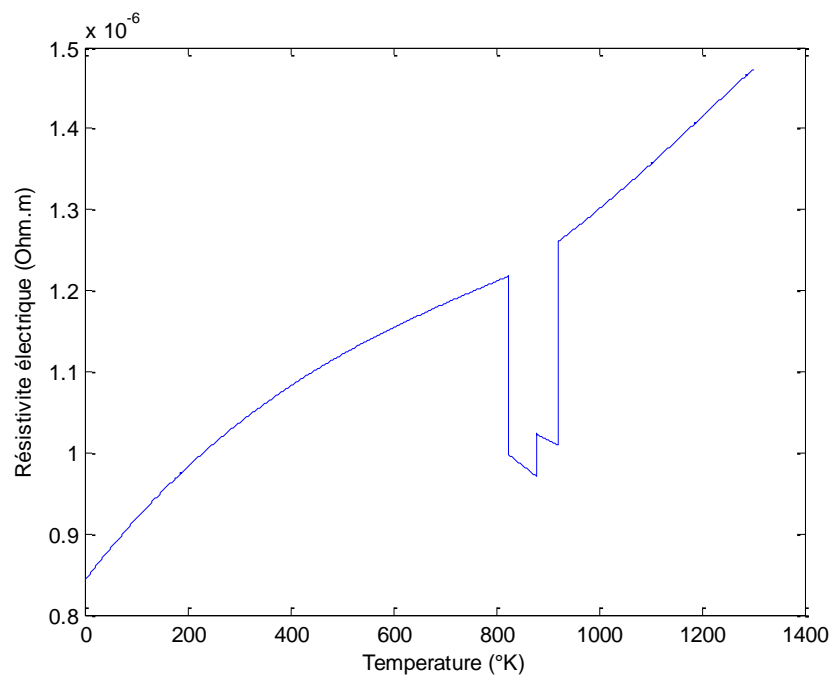


Figure IV.2. Variation de la résistivité électrique de l'acier inoxydable en fonction de la température [Becha 01].

IV.1.5. Données thermiques

Il est de même et puisque il s'agit d'un problème de modélisation d'un système de chauffage par induction où la température de la pièce à chauffer augmente rapidement dans le temps, il est nécessaire de prendre en compte la variation en température des paramètres physiques thermiques, tels-que : la conductivité thermique k et la chaleur spécifique ρc_p . Les lois de variation relatives aux propriétés thermiques k et ρc_p ont été décrites par des expressions analytiques [Becha01], fonctions de l'inconnue intérieur de la pièce à chauffer (voir Annexe II). Les figures Fig.IV.2 et Fig.IV.3. Présentent respectivement les lois de variation de la conductivité thermique et de la chaleur spécifique de l'acier inoxydable dans une gamme de température comprise entre 0 °K et 1400 °K.

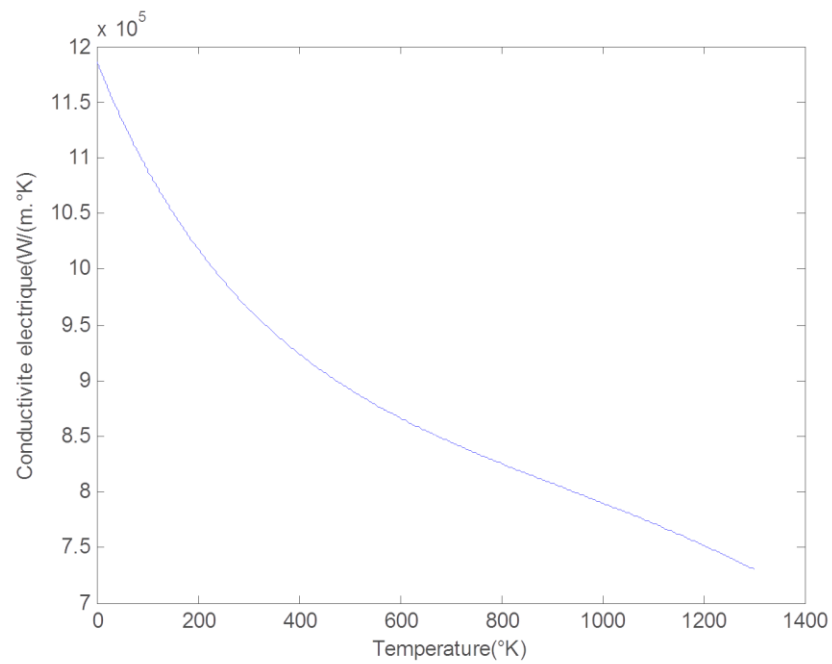


Figure IV.3. Variation de la conductivité thermique de l'acier inoxydable en fonction de la température.

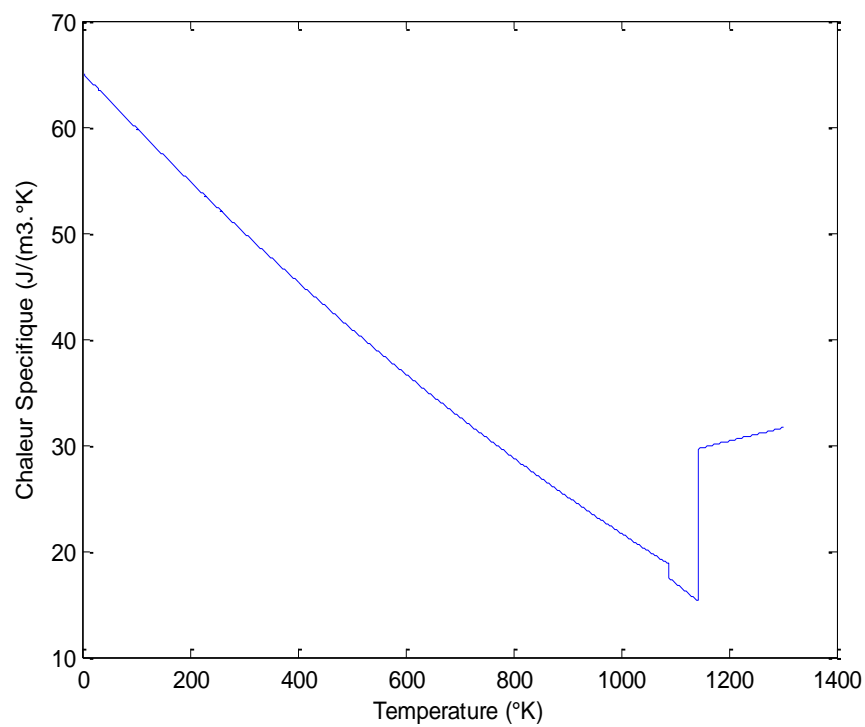


Figure IV.4. Variation de la chaleur spécifique de l'acier inoxydable en fonction de la température.

Dans le code de calcul développé est implémenté sous environnement Matlab, où la méthode des volumes finis est adoptée comme méthode de résolution des équations aux dérivées partielles caractéristique aux phénomènes physiques à traiter. Le mode de couplage alterné est adopté afin de résoudre séparément les problèmes électromagnétique et thermique. Pour prendre en considération la dépendance en température des divers paramètres physiques décrits précédemment, nous avons implémenté des modèles analytiques des propriétés physiques qui traduisent correctement leur dépendance en température où à chaque pas de temps de résolution et à chaque itération, nous actualisons la valeur de la température dans chaque modèle qui traduit chaque paramètre physique. Ainsi nous obtenons pas à pas dans le temps et à chaque itération, la nouvelle valeur de chaque paramètre physique.

IV.1.6. ETUDE DU COMPORTEMENT ELECTROMAGNETIQUE ET THERMIQUE

IV.1.6.1 Définition du modèle géométrique

1- cas : à Trois inducteurs

Comme présenté précédemment, nous avons modélisé les comportements magnétique et thermique d'un dispositif de chauffage par induction présenté en Fig.IV.1. Celui-ci comporte un inducteur considéré comme la source du champ électromagnétique du dispositif du chauffage par induction. Dans un premier temps, nous avons considéré que celui-ci est divisé en trois inducteurs, la densité de courant source est de 10^6 A/m^2 . Le but de répartir l'inducteur du dispositif en trois est d'obtenir une répartition uniforme de la température, ceci présente un avantage majeur pour les applications du chauffage par induction utilisée souvent pour la cuisson.

IV.1.6.2 Résultats des simulations des comportements électromagnétique et thermique du dispositif du chauffage par induction doté de trois inducteurs :

La partie ci-dessous présente les résultats des simulations des comportements électromagnétique et thermique du dispositif du chauffage par induction doté de trois inducteurs. Les résultats présentés sont respectivement :

- La variation radiale, et la répartition dans le plan (r, z) , du module du potentiel vecteur magnétique A , pour une gamme de fréquence $f = [20, 50, 90] \text{ KHz}$
- La variation radiale, et la répartition dans le plan (r, z) , du module de la densité des courants induits dans la charge,

- La variation radiale, et la répartition dans le plan (r, z) , du module de la densité de la puissance induite dans la charge,
- Lignes équipotentiels A ,
- La variation et la répartition du module de la température, pour une gamme de fréquence $f = [20, 50, 90]$ KHz

Pour bien éclaircir, et examiner pour discuter les différences entre les valeurs de ces courbes, nous avons choisi de les regrouper. Ainsi, Pour une température T de 300 °K , la variation radiale du module : du potentiel vecteur magnétique A , de la densité des courants induits, et de la densité de la puissance induite dans la charge sont présentés en Annexe III.2.

Les figures IV.5, IV.6., IV.7., présentent la variation spatiale du potentiel magnétique A pour où nous avons présenté sa variation radiale sur la figure IV.5, la répartition bidimensionnelle du module du potentiel vecteur magnétique A pour une gamme de fréquences $f = [20, 50, 90]$ KHz puis dans le plan (r, z) dans la figure IV.6. Et les lignes équipotentiels A dans la figure IV.7. Selon le profil présenté on peut dire que le potentiel magnétique A n'est pas réparti uniformément où il est plus important au-dessus du premier inducteur avec une valeur maximale de 6.5×10^{-5} . Au dessus du deuxième inducteur et le troisième inducteur, le potentiel magnétique A atteint une valeur maximale respectivement de 3.5 et de 4. Selon cette répartition on peut dire que le système de chauffage par induction conçu à partir de trois inducteur offre une répartition non-uniforme du potentiel magnétique, ceci peut influencer sur son rendement thermique aussi sur sa qualité de chauffage, pour vérifier ceci, nous avons tracé sur les figures IV. 8 et IV.9 respectivement, la répartition du module de la densité de la puissance induite dans le plan (r, z) pour $T = 300\text{°K}$ et la répartition bidimensionnel de la température T pour une gamme de fréquences $f = [20, 50, 90]$ KHz, qui atteinte une valeur maximale non uniforme 450 K° . Selon le profil de la densité de puissance induite dans la plaque à chauffer, on peut dire que celle-ci, n'est que l'image de la répartition du champ magnétique dans la pièce à chauffer, où la répartition de sa densité n'est pas uniforme, elle est importante au-dessus du premier inducteur avec un maximum de $5 \times 10^7 \text{w/m}^3$. Cette densité offre aussi une répartition non-uniforme de la température à l'intérieur de la plaque à chauffer, où elle atteint un maximum de 300 °K au-dessus du premier inducteur.

A travers cette analyse par la présentation des résultats de simulation des comportements magnétique et thermique du système de chauffage par induction conçu à partir de trois inducteurs, on peut dire que celui-ci ne présente pas les meilleures performances du point de vue

électromagnétique et surtout thermique. Pour cela nous avons cherché à améliorer ces performances en agissant sur la conception de celui-ci, en particulier sur la conception de l'inducteur, pour cela nous présentons dans la partie ci-dessous, les résultats des simulations d'un système de chauffage par induction conçu à partir de six inducteurs.

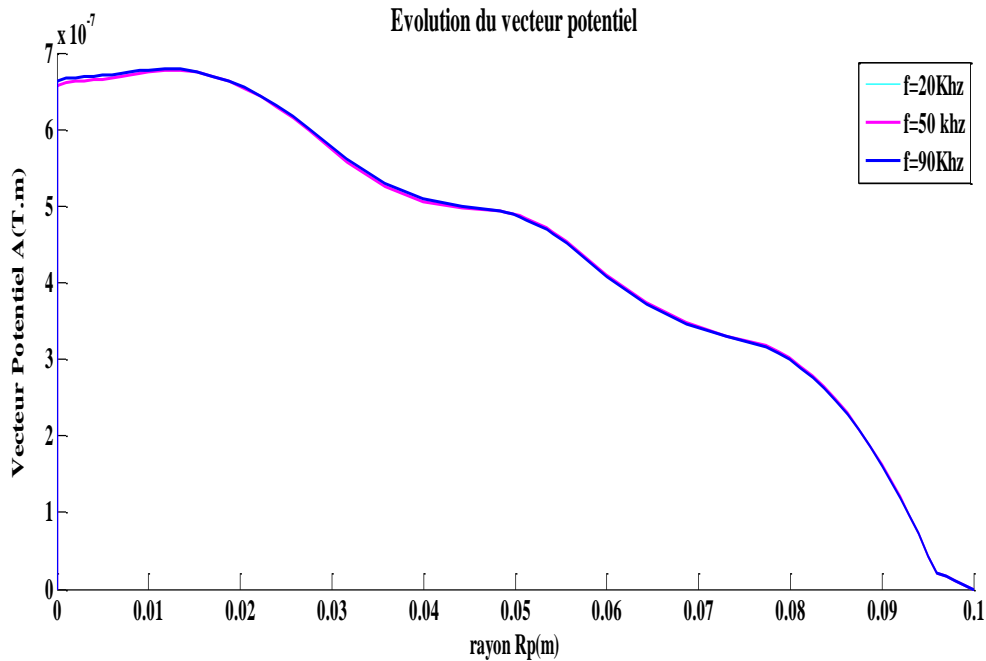


Figure IV.5. Variation radiale du module du potentiel vecteur magnétique A

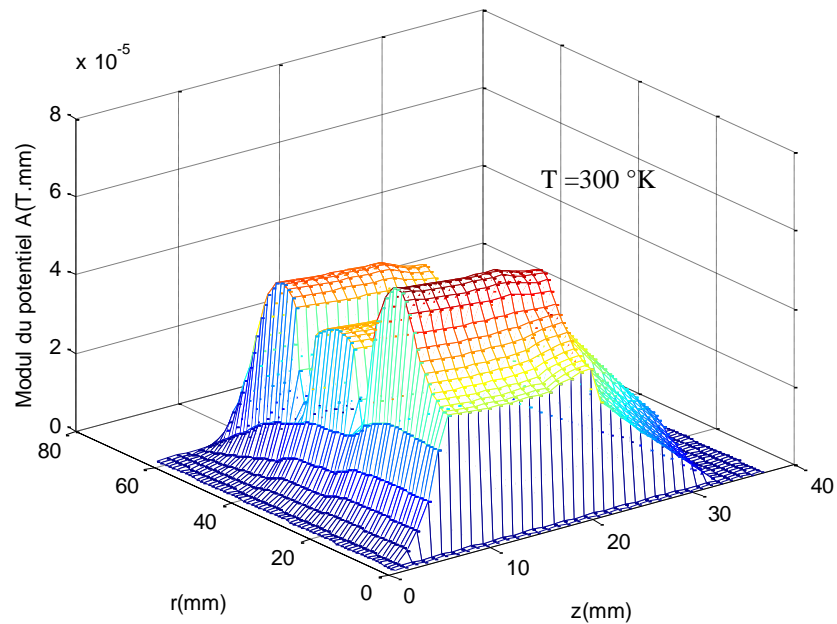


Figure IV.6. Répartition du module du potentiel vecteur magnétique A dans le plan (r, z) pour T = 300 °K.

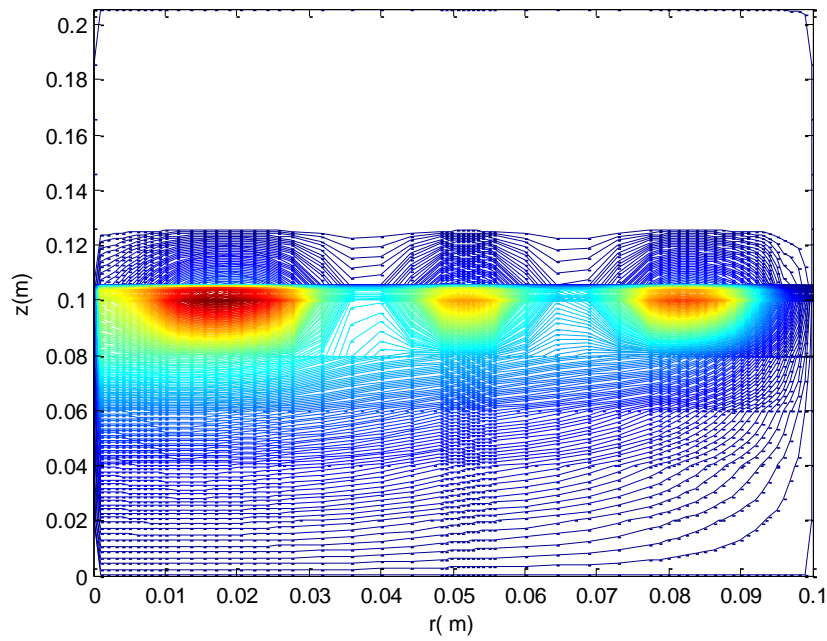


Figure IV.7 Lignes équipotentielles A pour $T = 300 \text{ }^\circ\text{K}$.

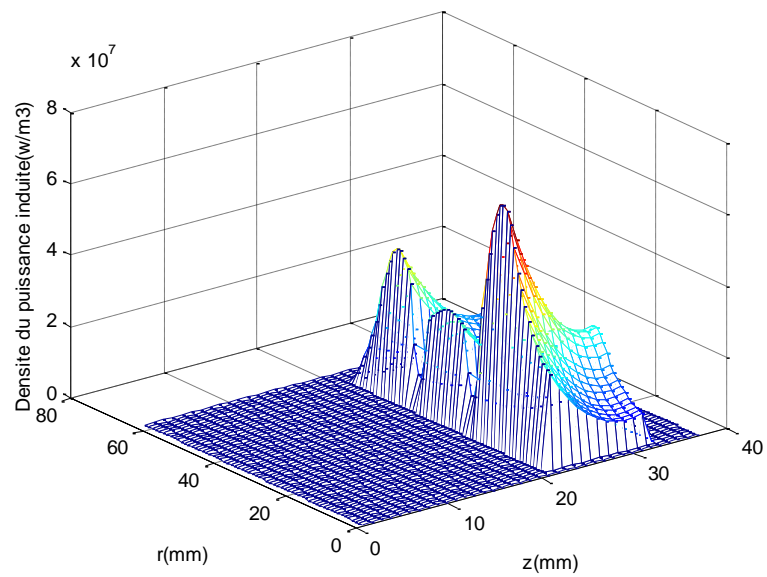


Figure VI.8. La répartition du module de la densité de la puissance induite dans la plan(r,z) pour $T = 300 \text{ }^\circ\text{K}$.

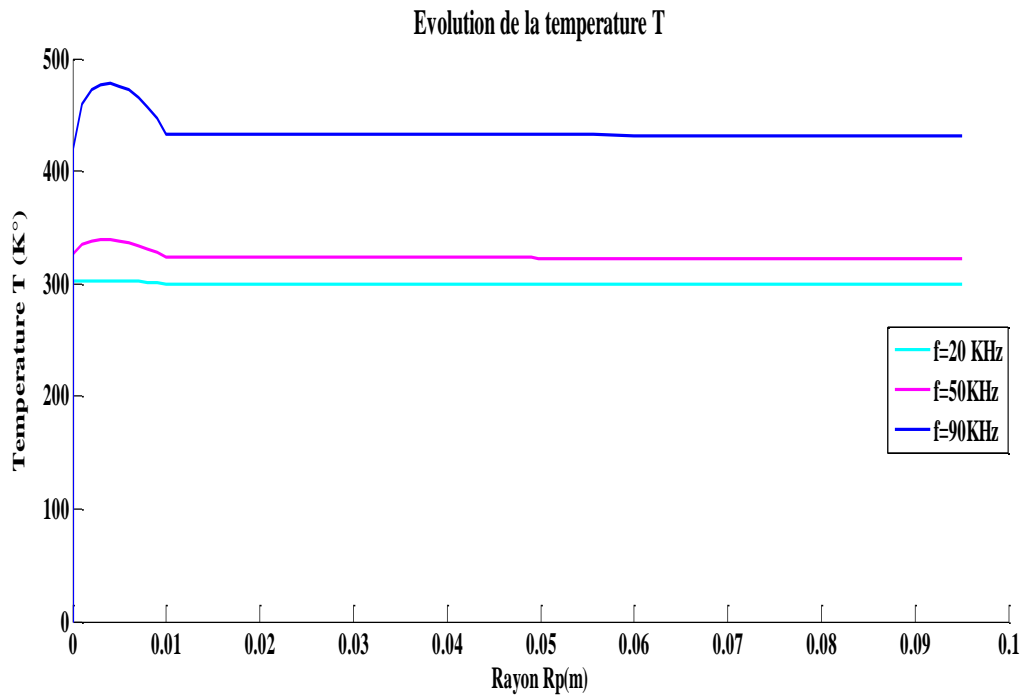


Figure IV.9. La répartition du module de la température T .

2- cas : à six inducteurs

Dans ce cas nous allons modéliser les comportements magnétique et thermique d'un dispositif de chauffage par induction à six présenté en Fig. IV.10, de même densité de courant source est de 10^6 A /m². Le but de répartir l'inducteur du dispositif en six est d'obtenir une répartition plus uniforme et homogène de la température, ceci présent un avantage majeur pour les applications du chauffage par induction utilisée souvent pour la cuisson domestique.

Caractéristiques	Dimensions
Inducteurs	0.10 m
Épaisseur (inducteurs excitations)	0.04 m
Épaisseur (plaque-inducteurs Excitation)	0.06 m
Epaisseur (inducteurs-inducteurs)	0.40 m
Pan	0.95 m
Epaisseur	0.12 m

Tableau IV.2. Propriétés géométriques du dispositif du chauffage par induction à six inducteurs

IVL1.6.3 Résultats des simulations des comportements électromagnétique et thermique du dispositif du chauffage par induction doté de six inducteurs :

La figure ci-dessous représente le système de chauffage par induction conçu à partir de six inducteurs placés en dessous de la pièce à chauffer et répartis le long de la pièce à chauffer. Dans le but de vérifier les performances et voir les avantages du système proposé, nous avons modélisé son comportement électromagnétique et thermique.

La figure IV.13. Présente la répartition de la température au sein de la pièce à chauffer. Selon ces résultats on peut dire qu'il y a une grande différence entre la répartition de la température de la pièce à chauffer pour un système à six inducteurs comparé à celle d'un système doté de trois inducteurs. En effet, selon la Fig. IV.13. On peut dire que le profil de la température est largement amélioré, en répartition et en valeur, en effet, la répartition de la température est plus uniforme avec un profil plus constant à l'intérieur de la pièce, aussi la valeur de la température atteint une valeur plus importante de 530°K. Le profil de la température est amélioré par l'amélioration du profil du champ magnétique dans la fig. IV.11. En effet, selon la Fig. IV.12. Qui présente les lignes équipotentielles du potentiel magnétique A, on remarque que le champ magnétique se répartit d'une manière plus uniforme, ceci est obtenu par une meilleure configuration des inducteurs du système de chauffage par induction.

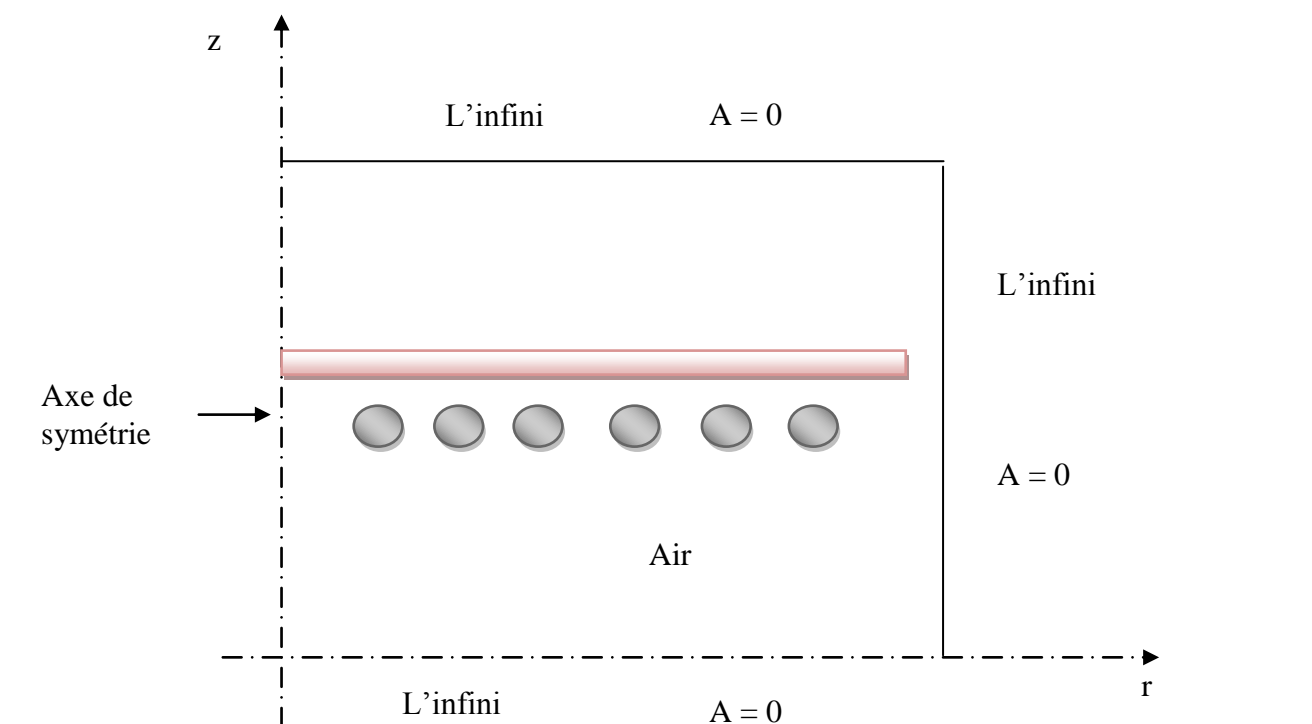


Figure IV.10. Modèle géométrique adopté pour l'étude électromagnétique.

Pour bien éclaircir, et examiner pour discuter les différences entre les valeurs de ces courbes, nous avons choisi de les regrouper. Ainsi, Pour une température T de $300\text{ }^\circ\text{K}$, la variation radiale du module : du potentiel vecteur magnétique A , de la densité des courants induits, et de la densité de la puissance induite dans la charge sont présentés en Annexe III.2.

La partie ci-dessous présente les résultats des simulations des comportements électromagnétique et thermique du dispositif du chauffage par induction doté de six inducteurs. Les résultats présentés sont respectivement :

- La variation radiale, et la répartition dans le plan (r, z) , du module du potentiel vecteur magnétique A , pour une gamme de fréquence $f = [20, 50, 90]$ KHz
- Lignes équipotentielles A ,
- La variation et la répartition du module de la température, pour une gamme de fréquence $f = [20, 50, 90]$ KHz

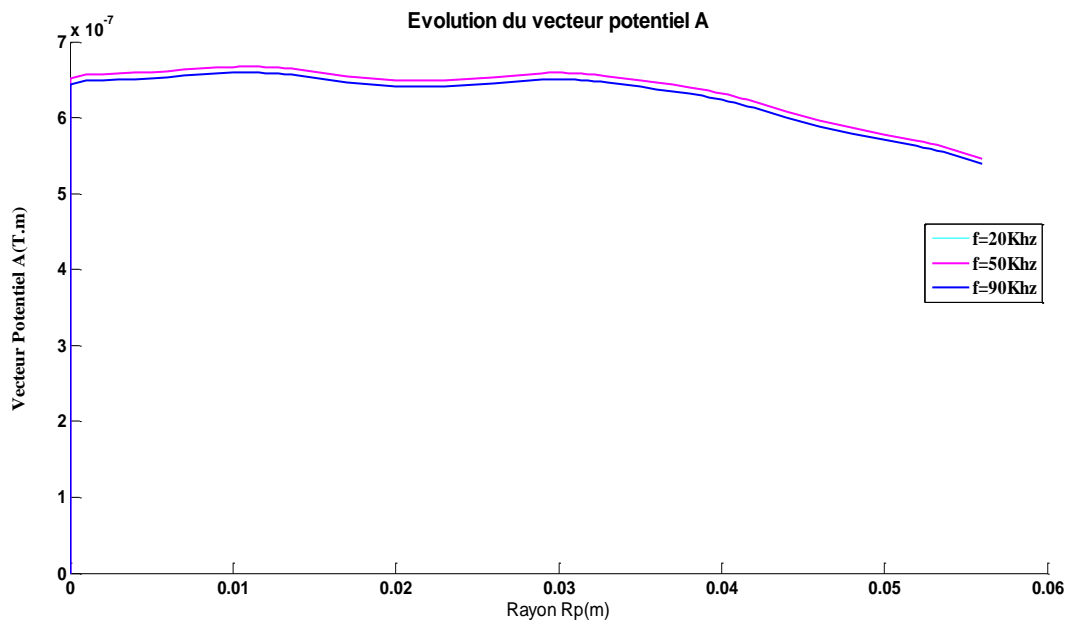


Figure IV.11. Variation radiale du module du potentiel vecteur magnétique A .

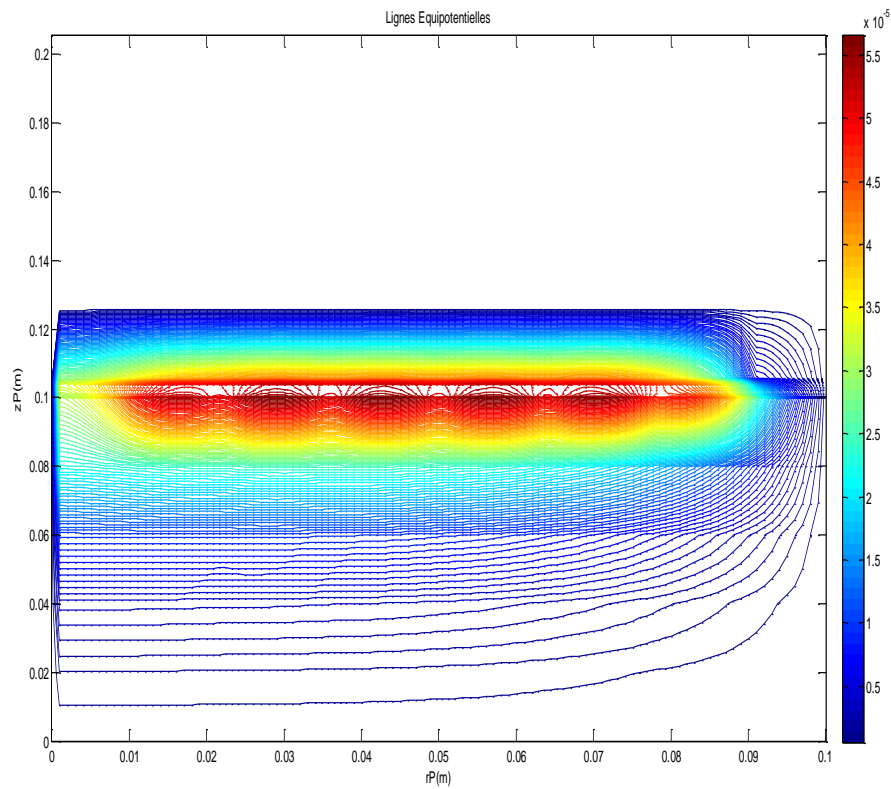


Figure IV.12. Lignes équipotentielles A à six inducteurs

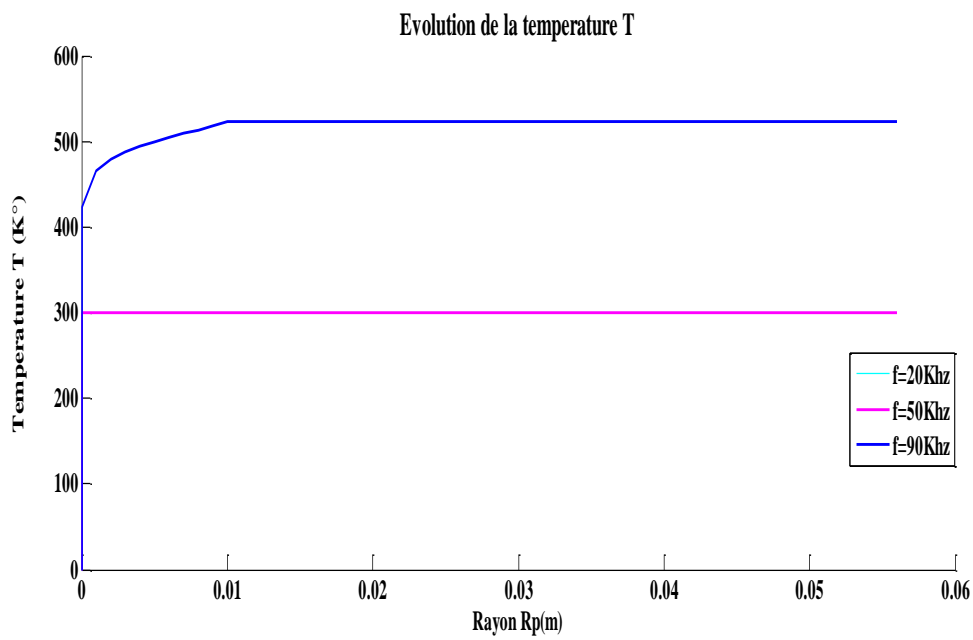


Figure IV.13. La répartition du module de la température T à six inducteurs

IV.1.6.4. Interprétation des résultats électromagnétiques et thermique

Pour la température $T=300^{\circ}\text{K}$ et pour une valeur de densité de courant inducteur, fixe : $J_s = J_{ex} = 1 \times 10^6 \text{ A/m}^2$, et gamme de fréquences de travail égale $f = [20, 50, 90] \text{ KHz}$, le terme de potentiel vecteur A , densité du courant induit et la densité de la puissance induite sont effectuées, de ces résultats sont alors extraits la puissance totale P_{tot} , évaluée sur toute la pièce à chauffer, ainsi la densité volumique de puissance moyenne P_s pour servi de source au problème thermique.

D'après le modèle de variation de la résistivité en fonction de la température, désignée par l'inconnue T (figure IV.2, l'expression analytique est donnée en Annexe II), on voit bien d'après les figures obtenues que :

- On augmentant la température, la résistivité augmente qui aboutit à une diminution de la conductivité électrique, les pics du potentiel vecteur A augmentent, la densité des courants induits diminue et la densité de la puissance induite augmente.

- Il y a un déplacement des lignes de champs en direction de la paroi extérieur de tube (charge) à cause de la valeur élevée de la fréquence de fonctionnement.

- Pour une valeur égale à zéro de la conductivité électrique ($\sigma = 0$), la courbe du module du potentiel vecteur A passe bien par l'origine (figure IV.3., voir Annexe III.1),

IVI.1.6.5. Evolution de la densité de la puissance moyenne en fonction de la température

Lors de l'exploitation du problème magnétique, les sources de chaleur ont été évaluées pour différentes valeurs discrètes de température, cette démarche à pour objectif de créer un fichier de points ($P_s(T)$, T) faisant correspondre à chaque valeur de température T , extraite de la plage de variation $[T_{amb}, T_{max}]$, préalablement fixée, une densité de puissance $P_s(T)$.

Le tableau ci-dessous présente la variation de la densité de la puissance moyenne $P_s(T)$ en fonction de la température.

T(°K)	293	298	400	500	600	700	800	900
P _{tot} (KW)	2.1644	2.1723	2.3196	2.4330	2.5373	2.6189	2.6872	2.6424
P _s (MW/m ³)	10.252	10.290	10.987	11.525	12.019	12.405	12.729	12.516

T(°K)	950	960	970	980	1000	1100	1200	1255
P _{tot} (KW)	2.7485	2.7547	2.7609	2.7673	2.7802	2.8502	2.9296	2.9770
P _s (MW/m ³)	13.019	13.048	13.078	13.108	13.169	13.501	13.877	14.101

La figure IV.7 présente la caractéristique P_s(T) décrivant l'évolution de la densité de la puissance moyenne en fonction de la température.

Par interpolation numérique, la loi de variation P_s(T), effectuée à partir du logiciel ORIGIN a été définie comme suit :

- T ≤ 800 °K

$$P_s(T) = 6.7399e6 + 18034.9756 \times T - 27.62503 \times T^2 + 0.0272 \times T^3 - 1.14361e-5 \times T^4$$

- 800 °K < T ≤ 950 °K

$$P_s(T) = 3.462e6 + 10060 \times T$$

- 950 °K < T ≤ 1255 °K

$$P_s(T) = 6.19936e6 + 21024.6215 \times T - 28.53515 \times T^2 + 0.01877 \times T^3 - 4.29189e-6 \times T^4$$

- T > 1255 °K

$$P_s(T) = 14.101 \times 10^6$$

IVL2 APPLICATION N°2 : NOUVELLES TOPOLOGIES

IV.2.1 DESCRIPTION D'UNE NOUVELLE TOPOLOGIE DES DISPOSITIFS DE CHAUFFAGE.

Généralement dans les systèmes de chauffage par induction (la cuisson domestique) conventionnelle ; la répartition de la température au sein d'une pièce à chauffer est non-uniforme offrant ainsi, des points où la température est très élevées et qui se localisent dans des différentes régions de la plaque. Ceci présente des inconvénients majeurs par rapport à la cuisson d'une part, d'autre part, il aboutit progressivement à une dégradation de la plaque à chauffer. Pour améliorer les systèmes de chauffage par induction dédié principalement à la cuisson, nous avons proposé une nouvelle topologie des systèmes de chauffage par induction, où nous avons proposé un système de chauffage par induction avec une plaque de chauffage percée, cette technique permet considérablement d'améliorer le processus du chauffage par induction. En effet ce système permet :

- A un échauffement centralisé ;
- De diminué de façon modérer la température en dehors des zones non utilisable pour le système,
- Obtenir un dispositif de dimension inférieur à la plaque.

Cette nouvelle conception géométrique est présentée dans la Fig.IV.1.13. cette nouvelle topologie du système de chauffage par induction doit normaliser la distribution de la température de la plaque a chauffé d'un part, d'économisé la quantité du métal utilisé pour concevoir la pièce à chauffer, aussi de renforcé l'échange thermique avec le milieu extérieur, ceci permet l'accélération du refroidissement naturel après avoir terminé le processus du cuisson. Pour mener une étude comparative d'un système de chauffage par induction classique et celui doté d'une plaque percé, nous avons modélisé leurs comportements, magnétique et thermique. Les Figures IV. Présentent l'évolution de la température T et le vecteur potentiel magnétique A pour une gamme de fréquence $f = [15-20-30-40-50-90]$ KHz où la densité de courant source est fixée à une densité de courant de 1.10^6 A /m².

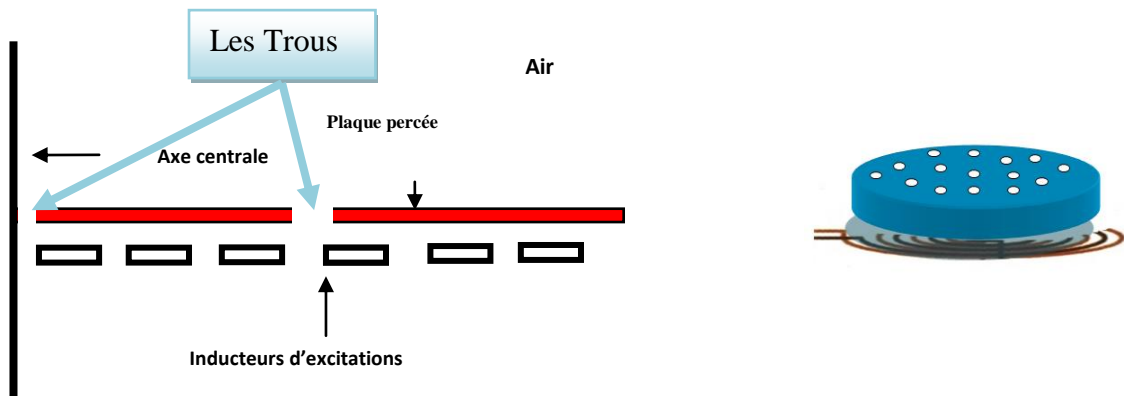


Figure IV.14. Modèle géométrique adopté pour l'étude électromagnétique-Thermique à plaque percée

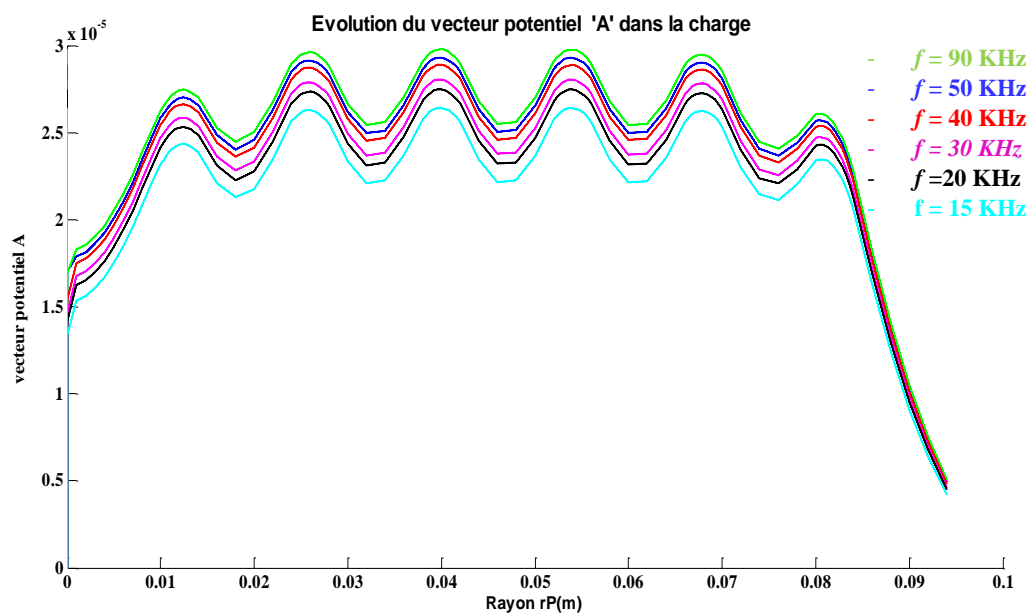


Figure IV.15. La répartition du module de vecteur potentiel A pour une plaque conventionnelle

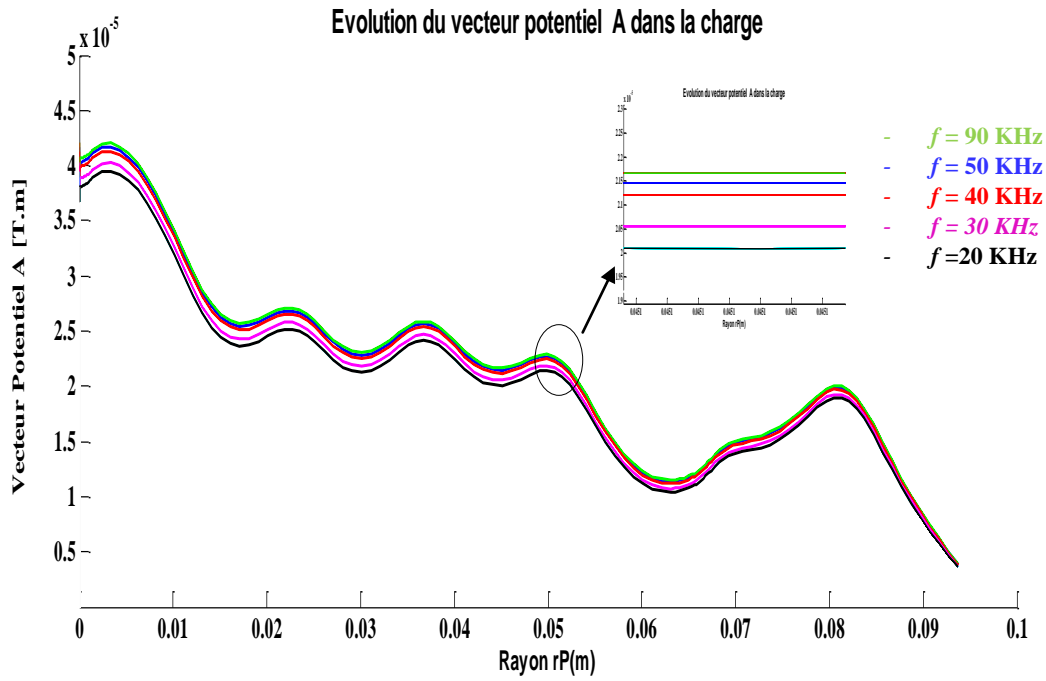


Figure IV.16. La répartition du module de vecteur potentiel A pour une plaque percée

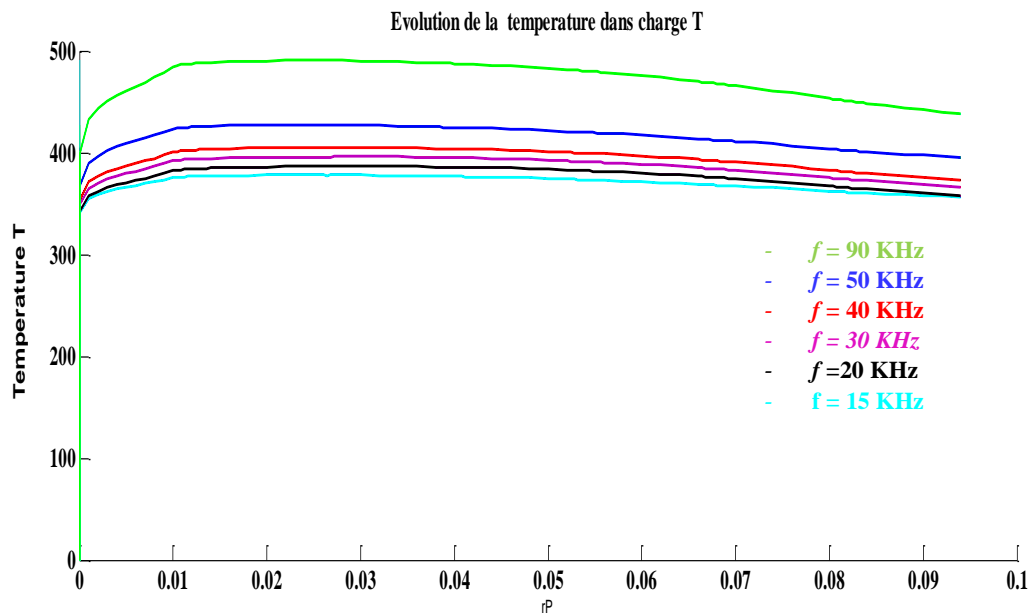


Figure IV.17. La répartition de la Température pour une plaque conventionnelle

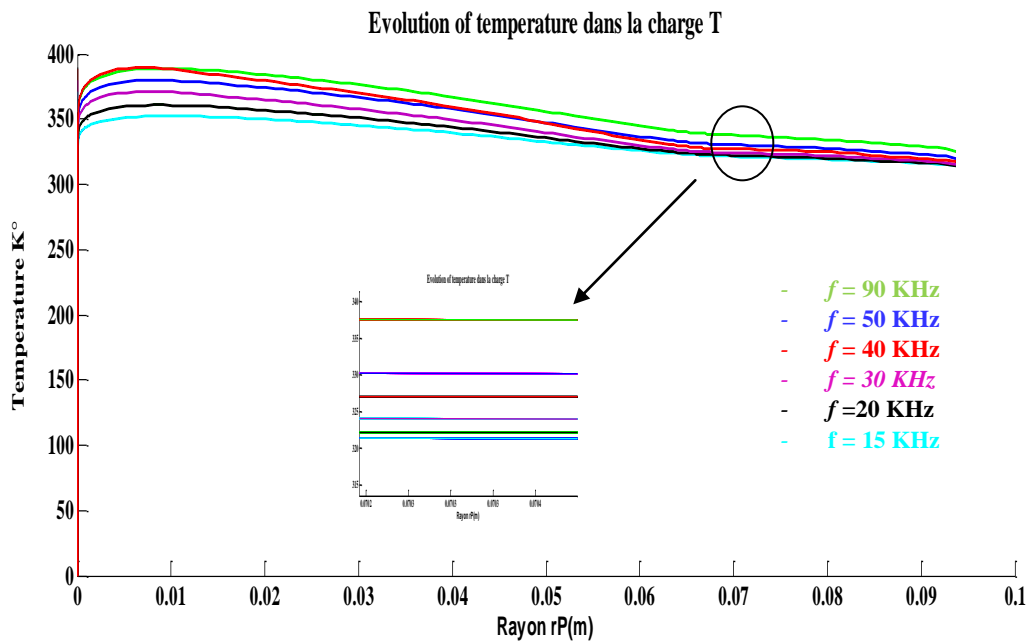


Figure IV.18. La répartition de la Température pour une plaque percée.

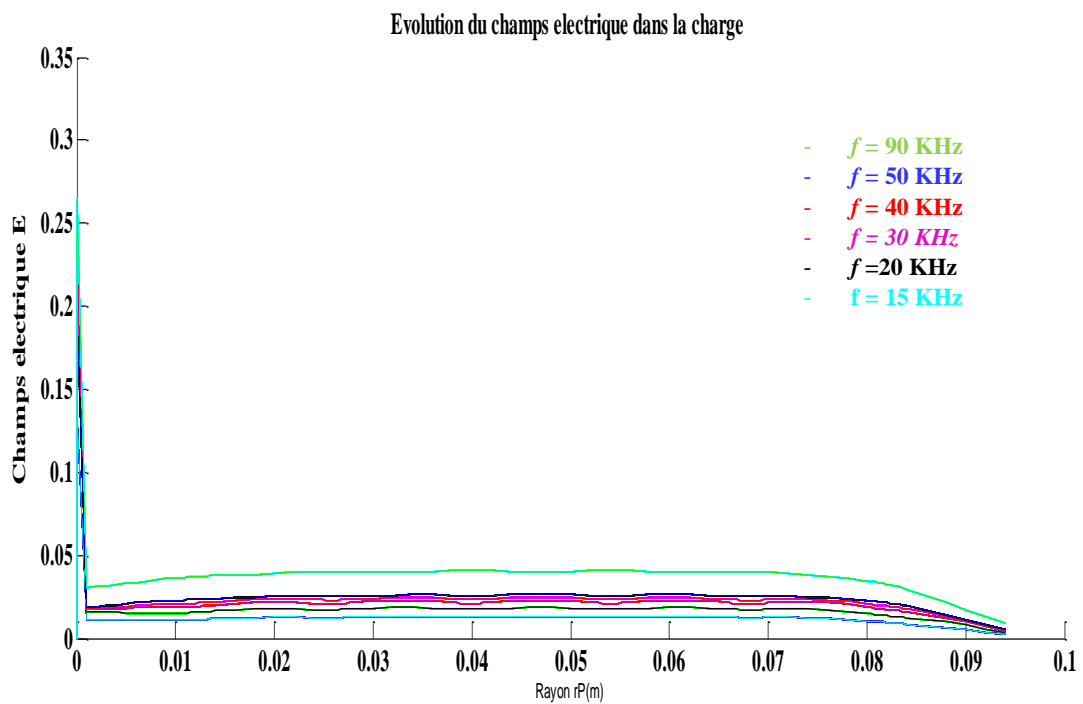


Figure IV.19. La répartition du module du champ électrique pour

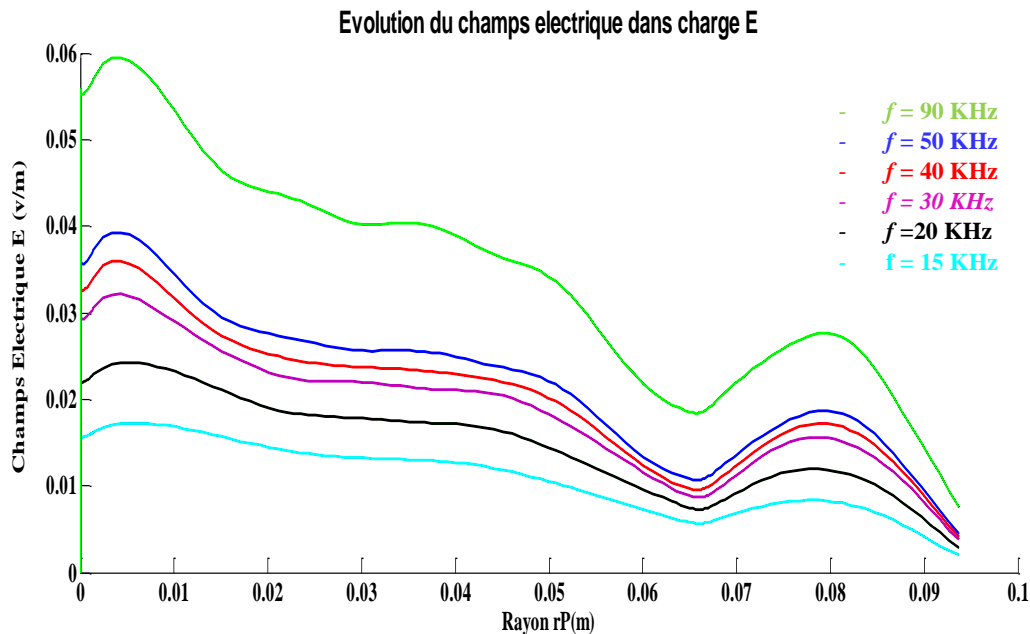


Figure IV.20. La répartition du module du champ électrique pour une plaque conventionnelle

IV.2.2 DESCRIPTION DE NOUVELLE TOPOLOGIE POUR ES DIMENSIONS DIFFERENTES DIMENSIONS DES TROUS.

Sur la base des analyses théoriques précédentes, il est entendu que la bobine d'induction a considérablement un impact indirect sur le processus de chauffage et la distribution thermique. Le format de la bobine doit être bien conçu pour équilibrer l'efficacité du chauffage et la distribution thermique uniforme. Dans cette recherche, la configuration basée sur six bobines et le système de casserole de perçage est adoptée en tirant parti de ses performances exceptionnelles de distribution thermique uniforme et de son efficacité de chauffage acceptable.

Nous présentant dans la partie suivante une analyse de simulation sur des différentes dimensions des trous pour des fréquences 50KHz et 90KHz afin de voir la distribution de la température dans l'enceinte de la casserole. Dans la figure IV.20. et la figure. IV.21, on peut facilement conclure qu'il y a une localisation intense de la température, au-delà on cherche la

géométrie optimale du trou du bac en prenant trois dimensions différentes: $d_1 = 0,8$ mm, $d_2 = 1,2$ mm et $d_3 = 2$ mm l'illustration indique qu'au-delà des grandes dimensions, on perd des matériaux et on perd la régulation et l'uniformité de la forme de la température.

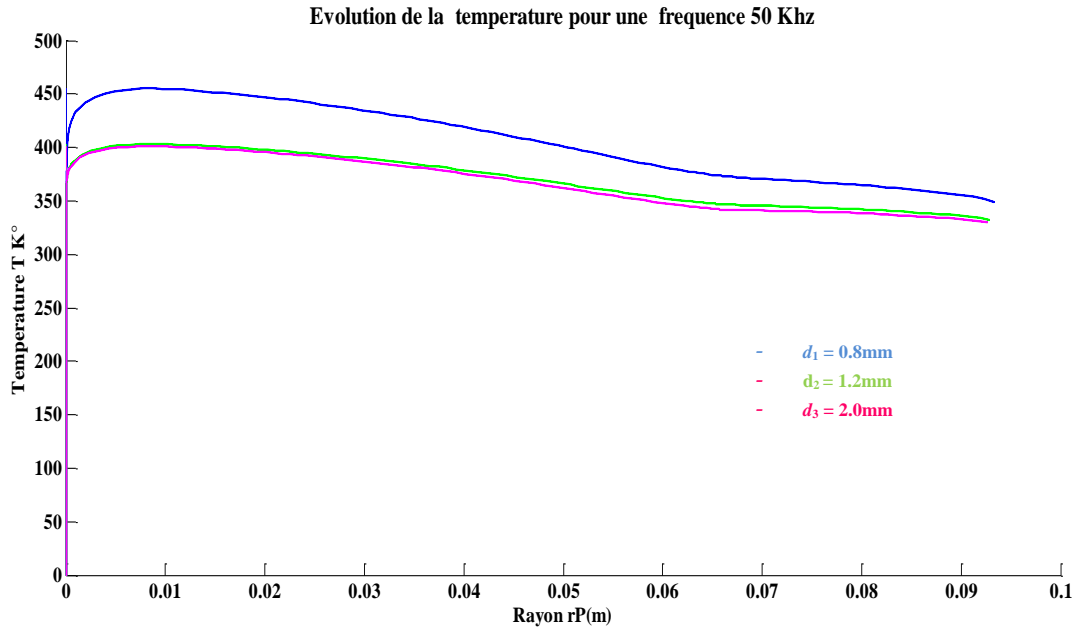


Figure.IV.21. Evolution de la température pour des différent dimensions pour une fréquence $f = 50$ KHz

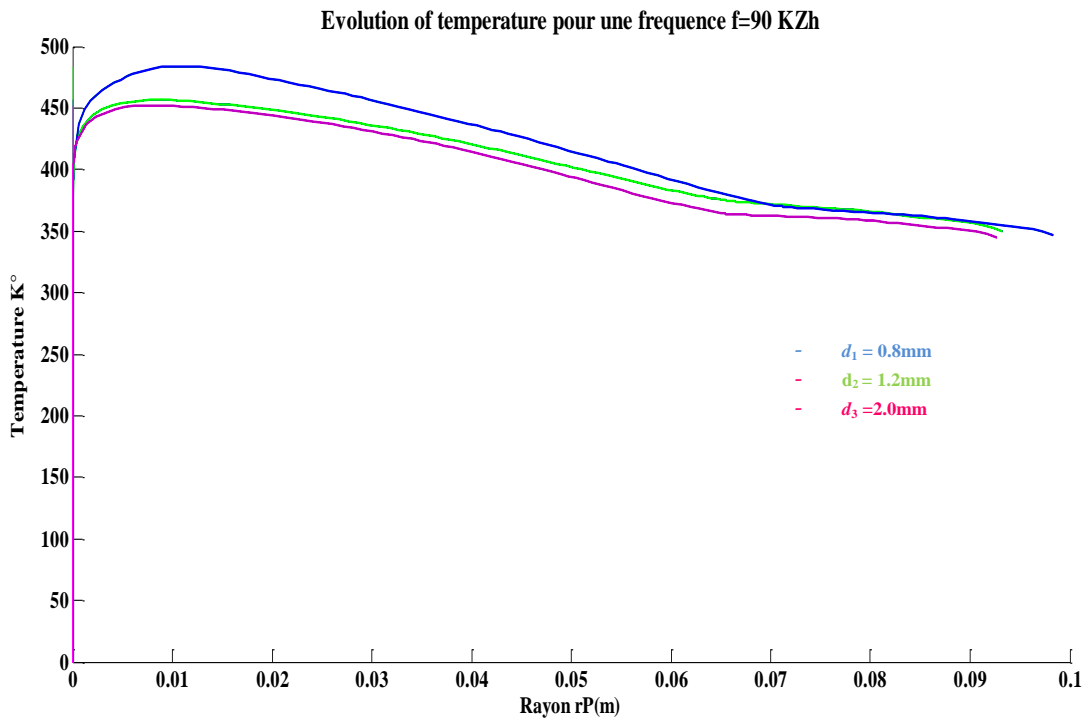


Figure. IV.22. Evolution de la température pour des différentes dimensions pour une fréquence $f= 50$ KHz

IV.3. Conclusion : dans le présent chapitre, nous avons présenté les résultats des simulations des comportements électromagnétique et thermique d'un système de chauffage par induction dédié principalement aux applications domestiques principalement la cuisson. Dans un premier temps nous avons présenté les résultats des simulations d'un procédé de chauffage par induction classique composé de trois inducteurs placés en dessous de la plaque à chauffer. Ce système offre une température non-homogène à l'intérieur de la plaque à chauffer, ceci présente un inconvénient majeur surtout pour le cuisson. Une nouvelle topologie du système de chauffage par induction a été proposé par un système de chauffage par induction composé de six inducteurs où le profil de la température été considérablement améliorée en valeur et en répartition. Une nouvelle topologie a été proposé où elle a permet d'améliorer les performances thermiques du procédé de chauffage, pour une dimension dans ce cas ne dépasse pas $d=08$ mm.

**Conclusion
Générale**

Conclusion Générale

Bibliographie

Bibliographie

BIBLIOGRAPHIE

- [AURIOL 97] **PHILIPPE AURIOL, NOEL BURAI**S, “ La Compatibilité Electromagnétique en Chauffage par Induction, Partie A : Corps Humain ”, Congrès International, “ L’Induction dans les Procédés industriels ”, Paris, France, Mai 1997.
- [DEVELEY 97] **G. DEVELEY**, “ L’Induction : Effets Thermiques et Mécaniques. Rappel des Bases Théoriques ”, Congrès International, “ L’Induction dans les Procédés Industriels ”, Paris, France, Mai 1997.
- [NUNS 93] **J.NUNS**, “ Le Chauffage par Induction Appliqué aux Industries Agro-alimentaires ”, Note EDF, Avril 1993.
- [COEVOET 97] **M.COEVOET**, “ La Place de l’Induction dans l’Industrie ”, Congrès International, “ L’Induction dans les Procédés Industriels ”, Paris, France, Mai 1997.
- [SABONNADIÈRE 88] **J. C. SABONNADIÈRE, J. L. COULOMB** , “ Calcul des Champs Electromagnétiques ”, Technique de l’ingénieur D.3020.pp.I-20 .1988
- [EDMINISTER 85] **JOSEPHA. EDMINISTER**, “ Electromagnétisme ”, Série Schaum, 1985.
- [VANDER VORST 85] **ANDRE VANDER VORST**, “ Electromagnétisme (Champ, Forces et Circuits) ”, Université Catholique de Louvain, Laboratoire de Télécommunications et d’Hyperfréquences CABAY, Librairie-Editeur, Louvain-La-Neuve, 1985.
- [TOUZOT 84] **G. D. G.TOUZOT**, “ Une Présentation de la Méthode des Eléments Finies ”, Maloine S.A. Editeur Paris, France,1984.
- [KREITH 67] **FRANK KREITH**, “ Transmission de la Chaleur et Thermodynamique ”, Edition MASSON et SIE Editeur, Paris, France, 1967.

-
- [CRABOL 89] JEAN CRABOL, “ Transfert de Chaleur ”, tome1- Les Principes, tome2- Applications Industrielles, MASSON, Paris, 1989.
- [KHEZZAR 88] LYES KHEZZAR, “ Procèdes de Transfert de Chaleur et de Masse ” , Collection de Cour de Physique, Université de Constantine, 1988.
- [MEKIDECHE 93] MOHAMED RACHID MEKIDECHE, “ Contribution à la Modélisation Numérique de Torches à Plasma d’Induction ” Thèse de Doctorat, Université de NANTES, 1993.
- [CHENTOUF 94] ABDELLAH CHENTOUF, “ Contribution à la Modélisation Electrique, Magnétique et Thermique d’un Applicateur de Plasma Inductif Haute Fréquence ”, Thèse de Doctorat, Université de NANTES, 1994.
- [SADIKU 92] N. O. MATHEW SADIKU, “Numerical Techniques in Electromagnetics”, CRC, London, 1992.
- [PISKOUNOV 80] N. PISKOUNOV, “ Calcul Différentiel et Intégral ”, Tome 1, Edition MIR, Moscou, 1980.
- [EUVRARD 87] DANIEL EUVRARD, “ Résolution Numérique des Equations aux Dérivées Partielles Différences Finies Elément Finis ”, Masson, Paris, France, 1987.
- [PATANKAR 80] SUHAS V. PATANKAR, “Numerical Heat Transfer and Fluid Flow”, Series in Computational Methods in Mechanics and Thermal Sciences, ISSN0272-4804, Hemisphere publishing corporation 1980
- [BOUMAH RAT 83] M. BOUMAH RAT, A. GOURDIN, “ Méthode Numériques Appliquées ”, (O.P.U). 1983
- [FELICHI 97] M. FELICHI, “ La Modélisation Numérique des Phénomènes Couplés ”, Congres International, “ L’Induction dans les Procédés Industriels ”, Paris, France, Mai 1997.
-

-
- [**MOLFINO 90**] **M. MOLFINO**, “ Non Linear Coupled Thermomagnetic Problems Under Pulsed Conditions-Comparison of Different Finite Element Analysis Strategies ”
March 1990.
- [**FELIACHI 91**] **M. FELIACHI, G. DEVELEY**, “Magneto-Thermal Behavior Finite Element Analysis for Ferromagnetic Materials in Induction Heating Devices ”, IEEE Transaction on magnetic Vol.27, N°6, p : 5235-5237, November 1991.
- [**SRAIRI 98**] **K. SRAIRI, M. FELIACHI** “Numerical Coupling Modes for Analyzing Dynamic Behaviors of Electromagnetic Actuators”, IEEE transaction on magnetics, Vol.34, No.5, September 1998.
- [**FELIACHI 91**] **M. FELIACHI**, “ Modélisation du Chauffage par Induction de Pièce Ferromagnétiques en Mouvement, 1^{ère} Partie : Equations et Lois Locales de Comportement, 2^{ème} Partie : Modélisation et validation, formulation du couplage fort ”, Contrat EDF, IUT St, Nazaire, DT2I, 1991
- [**THE MATHS WORKS 92**] **Reference Guide**, “MATLAB”, “High-Performance Numeric Computation and Visualization Software”, October, 1992.
- [**DEVELEY08**] **GERARD DEVELEY** “ Méthodes Numériques ”, Technique de L’ingénieur D 5935.p1-22,2008
- [**SARENI 92**] **BRUNO SARENI** “ Méthodes d’Optimisation Multimodales Associées à la Modélisation Numérique en Electromagnétisme” Thèse de Doctorat, L’école Centrale de Lyon 1992.
- [**MOHAMMADI 03**] **BIJAN MOHAMMADI, JACQUES-HERVE SAIAC** “ Pratique de la Simulation Numérique ”, Dunod, 2003.
- [**MAMMAR 04**] **SAID MAMMAR** “MT31 Méthodes Numériques” IUP GE II, Université d’Evry-Val-d’Essonne, 2004.
-

-
- [BYUN 00] JIN-KYU BYUN, KYUNG CHOI “ Optimal Design Procedure for a Practical Induction Heating Cooker”, IEEE transaction on magnetics, Vol.36, No.4, Juillet200.
- [BYUN 98] JIN-KYU BYUN, KYUNG CHOI, SONG-Y-HAHN “ Optimal Temperature Control for Induction Heating Devices Using Physical and Geometrical Design Sensitivity” , IEEE transaction on magnetics, Vol.33, No.5, September 1998.
- [WANSER 95] S. WANSER, « **Simulation des phénomènes de chauffage par induction. Application à la trempe superficielle**», Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Lyon, France, 1995.
- [Alloui 03] L. Alloui, “Modélisation tridimensionnelle par la méthode des volumes finis phénomènes électromagnétiques et thermiques couplés dans les dispositifs de chauffage par induction”, Mémoire de Magister, Université de Biskra, Algérie, 2003.
- [KAGIMOTO 10] HIROYUKI KAGIMOTO, DAISUKE MIYAGI, NORIO TAKAHASHI, Fellow, IEEE, Naoki Uchida, and Keiji Kawanaka” Effect of Temperature Dependence of Magnetic Properties on Heating Characteristics of Induction Heater ” IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS, VOL. 46, NO. 8, AUGUST 2010.
- [MENG 09] L. C. MENG, K.W.E. CHENG, K.W. CHAN “Heating Performance Improvement and Field Study of the Induction Cooker” 3rd International Conference on Power Electronics Systems and Applications 2009.
- [BECHA 01] H.BECHA “modélisation des phénomènes électromagnétique et thermiques couplés par méthode des volumes finis et paramétrisation dans les systèmes Amagnétiques de chauffage par induction”, Thèse de Magister, Université de BISKRA, 2001.
-
-

-
- [**MENG 12**] L. C. Meng, K. W. E. Cheng, and S. L. Ho “Multicoils Design for Induction Cookers With Applying Switched Exciting Method” IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS, VOL. 48, NO. 11, NOVEMBER 2012.
- [**ZHANG 15**] FENGGE ZHANG, YONGGANG JIAO, XIAOJU YIN “ Efficiency analysis and Heating Structure Design of High power Electromagnetic Thermal Energy Storage System” 18th international conference on electrical machines and system (ICEMS) oct 25-28 pattaya cite thailland 2015.
- [**KRANJC 09**] MATEJ KRANJC, ANŽE ŽUPANIČ, TOMAŽ JARM, DAMIJAN MIKLAVČIČ “Optimization of induction heating using numerical modeling and genetic algorithm ” 978-1-4244-4649-0/09/©2009 IEEE.
- [**FRANCON10**] C. Franco, D. Paesa, C. Sagues, S. Llorente « Analytical Modeling of a Saucepan in an Induction hob “18th Mediterranean Conference on Control & Automation ,Congress Palace Hotel, Marrakech, Morocco , June 23-25, 2010
- [**AZZAOUI 02**] A. AZZAOUI “modélisation des phénomènes électromagnétique et thermiques couplés dans les dispositifs de chauffage par induction par couplage: méthode des volumes finis (CVM) – algorithme alterné”, Thèse de Magister, Université de BISKRA, 2002
- [**DEVELEY 00**] G. DEVELEY “ *Chauffage par induction électromagnétique : Principe* ”, Technique de l’ingénieur 2000.

Annexes

Annexes

ANNEXE I

PROPRIETES MATHÉMATIQUES

AI.1 THÉORÈME DE STOKES

La circulation d'un champ de vecteur sur un contour fermé (C) est égale au rotationnel de ce même champ \vec{A} à travers n'importe quelle surfaces, s'appuyant sur ce contour :

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\text{rot} \vec{A}) \cdot d\vec{S} \quad (\text{AI.1})$$

Où :

C : Contour,

S : Surface appuyant sur C,

\vec{A} : Champ vectoriel.

AI.2 THEOREME D'OSTROGRADSKI-GREEN

Le flux du champ de vecteurs \vec{A} à travers une surface S est égale à l'intégrale étendue à V de la divergence de \vec{A} .

$$\iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div} \vec{A} \, dV \quad (\text{AI.2})$$

AI.3 LES OPERATEURS (rot, div, grad) EN COORDONNEES CYLINDRIQUES

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \text{rot} \vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\varphi + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_z \quad (\text{AI.3})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \text{div} \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{AI.4})$$

$$\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z \quad (\text{AI.5})$$

f : champ scalaire.

$$\nabla^2 A = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \quad (\text{AI.6})$$

AI.4 DEVELOPPEMENT DES TERMES DE L'EQUATION DE LA THERMIQUE

Soit l'équation de la thermique :

$$\operatorname{div}(\vec{k} \operatorname{grad} T) + P_s = \rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)$$

Calculant $\vec{k} \operatorname{grad} T$ et $\operatorname{div}(\vec{k} \operatorname{grad} T)$

d'après les équations ((AI.4), (AI.5)) on aura :

$$\vec{\operatorname{grad}} T = \frac{\partial T}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$T = f(r, z, t) \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$$

D'où :

$$\vec{\operatorname{grad}} T = \frac{\partial T}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\vec{k} \operatorname{grad} T = k \frac{\partial T}{\partial r} \vec{e}_r + k \frac{\partial T}{\partial z} \vec{e}_z = \vec{F}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z} ; \frac{1}{r} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} = 0$$

$$\operatorname{div}(\vec{k} \operatorname{grad} T) = \operatorname{div} \left(k \frac{\partial T}{\partial r} \vec{e}_r + k \frac{\partial T}{\partial z} \vec{e}_z \right)$$

$$= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (kr \frac{\partial T}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial z} (kr \frac{\partial T}{\partial z}) \right)$$

$$= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (kr \frac{\partial T}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial z} (k \frac{\partial T}{\partial z})$$

ANNEXE II

CARACTERISTIQUES PHYSIQUES DES MATERIAUX

AII.1 CARACTERISTIQUES PHYSIQUES DU MATERIAU CONSTITUANT
LA CHARGEL'acier inoxydable

Les caractéristiques magnétiques de l'inox se limitent à la résistivité électrique (figure VI.3)

T (°C)	40	105	142	194	249	294	352	398	449	500
$\rho_0 (\Omega \cdot m) \times 10^{-7}$	8.729	9.237	9.478	9.789	10.09	10.33	10.61	10.81	11.03	11.25

T (°C)	551	605	648	702	753	805	855	902
$\rho_0 (\Omega \cdot m) \times 10^{-7}$	11.37	11.10	10.96	11.95	12.14	12.25	12.36	12.44

L'interpolation de la loi de variation de la résistivité électrique $\rho_0(T)$ par le logiciel ORIGIN donne :

- Pour $T \leq 551^\circ\text{C}$

$$\rho_0(T) = 8.42 \times 10^{-7} (1 + 9.73 \times 10^{-4} T - 7.76 \times 10^{-7} T^2 + 3.06 \times 10^{-10} T^3)$$

- Pour $551^\circ\text{C} < T \leq 605^\circ\text{C}$

$$\rho_0(T) = 1.41 \times 10^{-6} (1 - 3.54 \times 10^{-4} T)$$

- Pour $605^\circ\text{C} < T \leq 648^\circ\text{C}$

$$\rho_0(T) = 1.31 \times 10^{-6} (1 - 2,49 \times 10^{-4} T)$$

- Pour $T > 648^\circ\text{C}$

$$\rho_0(T) = 8.27 \times 10^{-7} + 1.092 \times 10^{-9} T - 1.74 \times 10^{-12} T^2 + 1.57 \times 10^{-15} T^3 - 4.49 \times 10^{-19} T^4$$

Les caractéristiques thermiques de l'inox se limitent à :

- La conductivité thermique (k) (figure VII.3),
- La chaleur spécifique (ρc_p) (figure VII.4)

T (°C)	20	93	149	204	260	316	371	427	482	538
K (W/(m.°C))	63.70	60.20	58.10	54.60	52.40	49.60	46.80	43.90	41.80	39.00
$\rho c_p \times 10^6$ (J/ (m ³ .°C))	3.666	3.869	4.025	4.181	4.337	4.485	4.703	4.953	5.140	5.413

T (°C)	593	649	704	760	816	871	927	982
K (W/(m.°C))	36.80	34.70	32.60	30.50	28.40	26.20	26.90	27.60
$\rho c_p \times 10^6$ (J/ (m ³ .°C))	5.632	5.881	7.800	7.800	4.859	4.797	4.797	4.797

Par interpolation numérique, les lois de variation sont définies comme suit :

- Chaleur spécifique (J/ (m³.°C))

- Pour $T \leq 593^\circ\text{C}$

$$\rho c_p(T) = 3.64 \times 10^6 (1 + 5.83 \times 10^{-4} T + 5.76 \times 10^{-7} T^2)$$

- Pour $593^\circ\text{C} < T \leq 871^\circ\text{C}$

$$\rho c_p(T) = \frac{3.51 \times 10^8}{41.4 \sqrt{2\pi}} \exp \left(-0.5 \frac{(T-728,6)^2}{41.4^2} \right) + 5.08 \times 10^6$$

- Pour $T > 871^\circ\text{C}$

$$\rho c_p(T) = 4.797 \times 10^6$$

- Conductivité thermique (W/(m.°C))

- Pour $T \leq 816^\circ\text{C}$

$$k(T) = 65.19 (1 - 8,17 \times 10^{-4} T + 1.5 \times 10^{-7} T^2)$$

- Pour $816^\circ\text{C} < T \leq 871^\circ\text{C}$

$$k(T) = 61.04 (1 - 6,55 \times 10^{-4} T)$$

- Pour $T > 871^\circ\text{C}$

$$k(T) = 15.21 (1 + 8.29 \times 10^{-4} T)$$

AII.2 CARACTERISTIQUES PHYSIQUES DE L'AIR

Les caractéristiques thermiques (conductivité thermique (k) et chaleur spécifique (ρc_p)) de l'air sont :

- Conductivité thermique

T (°K)	250	300	350	400	450	500	550	600
k (W/(m.°K))	0.0223	0.0262	0.0300	0.0337	0.0371	0.0404	0.0436	0.0466

T (°K)	650	700	750	800	850	900
k (W/(m.°K))	0.0495	0.0523	0.0551	0.0578	0.0603	0.0628

T (°K)	950	1000	1100	1200	1300
k (W/(m.°K))	0.0653	0.0675	0.0723	0.0763	0.0803

- Chaleur spécifique

T (°K)	250	300	350	400	450	500	550	600
ρc_p (J/(m ³ .°K))	1420.065	1184.062	1006.982	895.362	799.443	726.15	667.038	620.34

T (°K)	650	700	750	800	850	900	950
ρc_p (J/(m ³ .°K))	577.209	540.725	511.506	484.218	460.65	439.432	421.104

T (°K)	1000	1100	1200	1300
ρc_p (J/(m ³ .°K))	401.984	371.52	347.805	324.387

Les représentations de la conductivité thermique et la chaleur spécifique sont données respectivement par la figure AII.1 et par la figure AII.2

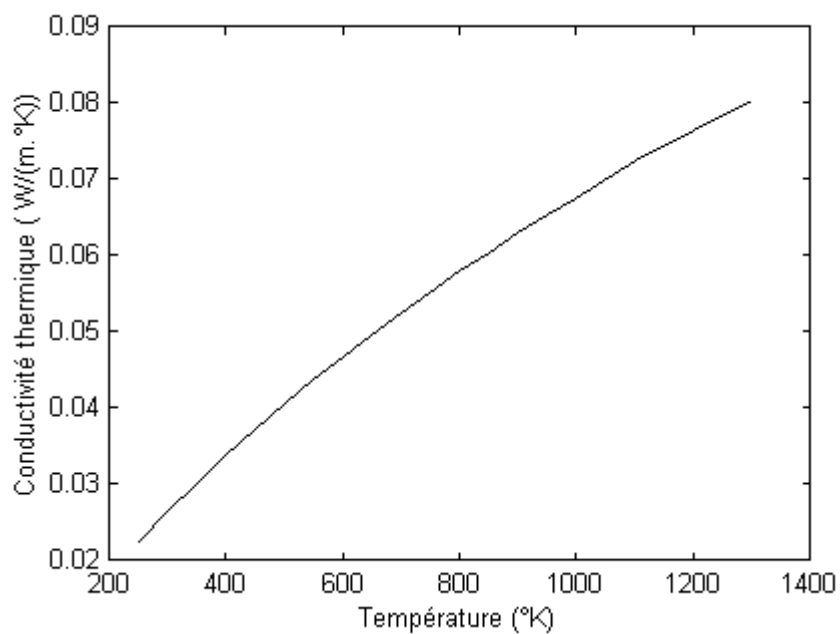


Figure AII.1 Variations de la conductivité thermique de l'air en fonction de la température.

L'interpolation de la loi de variation de la conductivité thermique de l'air $k(T)$ par le logiciel ORIGIN donne :

- $250^{\circ}\text{K} \leq T \leq 1300^{\circ}\text{K}$

$$k(T) = -0.00153 + 1.10282 \times 10^{-4} T - 6.94392 \times 10^{-8} T^2 + 3.80151 \times 10^{-11} T^3 - 9.70474 \times 10^{-15} T^4$$

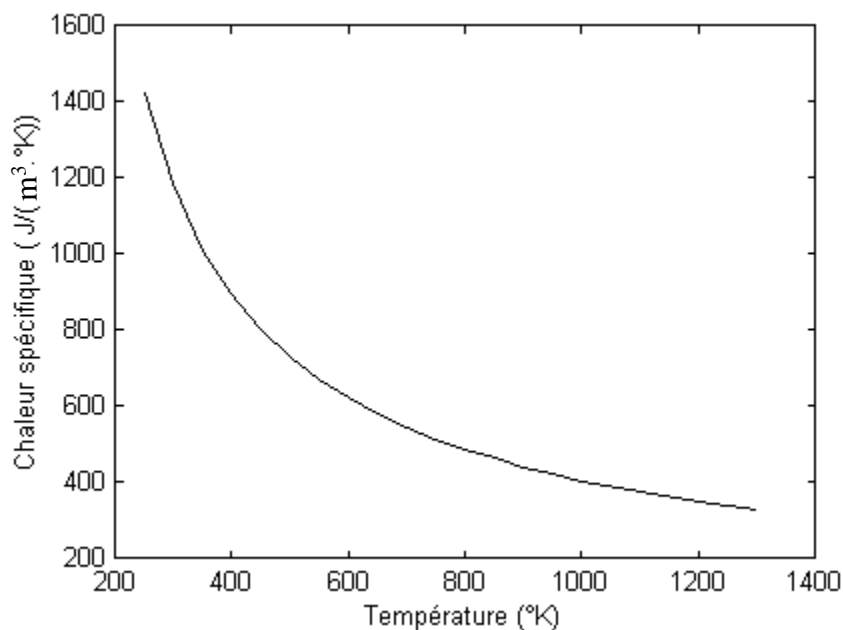


Figure AII.2 Variation de la chaleur spécifique de l'air en fonction de la température.

L'interpolation de la loi de variation de la chaleur spécifique $\rho c_p(T)$ par le logiciel ORIGIN donne :

- $250^\circ\text{K} \leq T \leq 500^\circ\text{K}$

$$\rho c_p(T) = 4302.56667 - 19.08656 T + 0.03676 T^2 - 2.64409 \times 10^{-5} T^3 + 1.29333 \times 10^{-9} T^4$$

- $500^\circ\text{K} < T \leq 1300^\circ\text{K}$

$$\rho c_p(T) = 2016.40026 - 4.54073 T + 0.00521 T^2 - 2.92038 \times 10^{-6} T^3 + 6.38624 \times 10^{-10} T^4$$