

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université Mohamed Khider – Biskra

Faculté des Sciences et de la technologie

Département : Génie mécanique

Ref :.....



جامعة محمد خيضر بسكرة

كلية العلوم و التكنولوجيا

قسم: الهندسة الميكانيكية

المرجع:.....

Thèse présentée en vue de l'obtention du Diplôme de

Doctorat en Sciences en Génie Mécanique

Spécialité : Génie Mécanique

Thème

***ETUDE DES PROPRIETES THERMOMECHANIQUES DES COMPOSITES
RENFORCEE PAR DES PARTICULES***

Présentée par : *Laid CHAIBAINOU*

Soutenue publiquement le : 14/01/2021

Devant le jury composé de :

Pr Meftah Kamel	Président	Université de Biskra
Pr Mohamed Said CHEBBAH	Rapporteur	Université de Biskra
Pr Rebiai Cherif	Examineur	Université de Batna 2
Dr Ameddah Hacene	Examineur	Université de Batna 2

REMERCIEMENTS

Je remercie au premier lieu mon Dieu le tout puissant et miséricordieux, pour ces bénédictions.

Je remercie le directeur de la thèse le Professeur CHEBBAH MOHAMED-SAÏD d'avoir accepté de m'encadrer dans cette thèse, d'avoir consacré de son temps pour m'écouter et m'orienter.

Je remercie également le Professeur MEFTAH KAMEL qui a accepté de présider le jury de soutenance, et pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail et pour ces remarques pertinentes.

Aussi, Je remercie les membres du jury le Professeur REBIAI CHERIF et le Docteur AMEDDAH HACENE qui ont accepté d'examiner ce travail et pour leurs remarques pertinentes.

Je tiens à remercier mes amis : Dr. SAAD BOUTAANI, pour son aide spéciale et ses encouragements continus, Dr. KAMAL FEDAOUI, qui est toujours à la disposition de tout le monde, comme je dois aussi remercier les amis : FATEH HAMIDEN, NASSIM HAMMAD, Dr. HICHAM AMRANI, DR. LAHCEN MEBARKI, DR. NASSIM BOUKHOBZA, DR. BAROURA, DR. BENDAOUÏ et tous les amis que j'ai oublié de citer, pour leurs soutien et/ou respect.

Spécial remerciement à ma petite famille pour son support inconditionnel, sans oublié la grande famille bien sûr.

TABLE DES MATIERES

Introduction générale	15
Chapitre I.....	19
Etude bibliographique.....	19
I.1 Introduction.....	20
I.2 Différents types de matériaux composites	20
I.2.1 Stratifiés	22
I.2.2 Composites à fibres.....	23
I.2.3 Composites à particules	23
I.3 Constitutions d'un matériau composite	24
I.3.1 Renforts.....	24
I.3.2 Matrice	26
I.4 Quelques procédés de fabrication	27
I.5 Comportement mécanique élastique des matériaux.....	29
I.5.1 Généralités sur la loi de HOOK.....	29
I.6 Dilatation (expansion) thermique	32
I.7 Conduction thermique	33
Chapitre II.....	35
Notions d'homogénéisation en élasticité linéaire	35
Partie 1.....	36
II.1 Technique de l'homogénéisation.....	36
II.2 Volume Elémentaire Représentatif RVE.....	37
II.3 Rappels sur la théorie d'élasticité et la micromécanique	38
II.3.1 Relation déformation- déplacement et la loi du comportement linéaire	38
II.3.2 Equations d'équilibre et élasticité linéaire macroscopique	40
II.3.3 Champs de contraintes-déformations, échelle micro-macro	40
II.4 Etapes de modélisation d'un milieu hétérogène	42
II.4.1 Représentation	44
II.4.2 Localisation	44

II.4.3 Homogénéisation	45
Partie 2.....	47
II.5 Présentation de quelques modèles d’homogénéisation analytiques pour l’estimation des propriétés mécaniques	47
II.5.1 Bornes de VOIGT et REUSS	47
II.5.2 Bornes de HASHIN-SHTRIKMAN	49
II.5.3 Modèle Auto-cohérent (Self-consistent) généralisé	50
II.5.4 Modèle MORI-TANAKA	50
II.6 Présentation de quelques modèles d’homogénéisation analytiques pour déterminer les propriétés thermoélastique (conductivité et expansion thermiques)	51
II.6.1 Modèles d’homogénéisation pour la conductivité thermique.....	51
II.6.2 Modèles d’homogénéisation pour l’expansion thermique.....	52
II.7 Processus de calcul des propriétés élastiques d’un matériau composite à particule et à matrice métallique à l’aide de la technique des éléments finis	54
II.7.1 Méthode de génération des microstructures à particules.....	54
II.7.2 Différentes méthodes de maillage	59
II.8 Conclusion	61
Chapitre III	63
Comportement mécanique d’un matériau composite à particules et à matrice métallique	63
III.1 Introduction	64
III.2 Description, génération et maillage des microstructures pour l’étude mécanique.....	64
III.2.1 Modèles de microstructures utilisés pour le calcul des propriétés mécaniques	66
III.2.2 Technique de maillage utilisée	68
III.2.3 Détermination de la densité du maillage	68
III.3 Méthode de calcul des propriétés mécaniques	69
III.3.1 Charges imposées et conditions aux limites.....	70
III.4 Résultats et discussion.....	71
III.4.1 Détermination de taille du RVE.....	71
III.4.2 Comparaison entre la méthode numérique considérée et les méthodes analytiques..	76
III.5 Effet de la fraction volumique sur les propriétés élastiques effectives	79

III.6 Concept de la morphologie équivalente	79
III.7 Conclusion.....	80
Chapitre IV	81
Estimation de l'expansion thermique d'un matériau composite à particules et à matrice métallique	81
IV.1 Introduction.....	82
IV.2 Génération, maillage et calcul des propriétés de l'expansion thermique.....	82
IV.2.1 Matériaux et description.....	83
IV.2.2 Conditions de maillage et de frontière	85
IV.3 Résultats et discussions	86
IV.3.1 Effet de la fraction volumique sur l'expansion relative	86
IV.3.2 Effet de la fraction volumique sur le CET	86
IV.4 Effet de la température sur le CET.....	89
IV.5 Effet de la température sur la contrainte résiduelle.....	91
IV.6 Approches analytiques et approche FE.....	92
IV.7 L'expérimentale contre la méthode numérique	93
IV.8 Conclusion	94
Conclusion générale	96

Liste des figures

Figure I.1 : Types de composites basés sur la forme des renforts.....	21
Figure I.2 : Constitution d'un stratifié [4].....	22
Figure I.3 : Convention de signe pour la désignation des stratifiés, désignation d'après le système d'axe choisit : (a) [30 / 90 / -45/ 0 / 45], (b) [30 / 90 / 45/ 0 / -45] [4].....	23
Figure I.4 : (a) Feutre para aramide, (b) Feutre inox [7].....	25
Figure I.5 : (a) Tapis de poudre haché brin de fibre de verre, (b) Mat à fils coupés de la fibre de verre [8].....	26
Figure I.6 : SEM micrographe des renforts à particules SiC, (a) morphologie angulaire (b) morphologie ronde [6].....	26
Figure I.7 : Comportement typique dans un matériau ductile contrainte (Stress) vs déformation (Strain), jusqu'à la rupture point F. La résistance à la traction TS est indiquée au point M [9]...	29
Figure I.8 : Schéma illustrant un matériau monoclinique, ici le plan (1,2) est le plan de symétrie, les deux plans (1,2) et (2,3) son perpendiculaires	30
Figure I.9 : Schéma illustrant un matériau orthotrope, ici le matériau possède trois plans de symétrie le plan (1,2), le plan (1,3) et le plan (2,3).....	31
Figure I.10 : Lorsqu'une extrémité d'une barre est chauffée, un flux de chaleur Q, s'écoule vers l'extrémité froide à une vitesse déterminée par le gradient de température produit dans la barre [13]	34
Figure II. 1 : Schéma explicatif l'homogénéité statistique	37
Figure II. 2 : Schéma illustratif de des échelles et la taille du VER [22].....	38
Figure II. 3 : Les composantes du tenseur de contraintes $\sigma(x)$, au point matériel P (le cuboïde), x est le vecteur position du point P, les composants sont donnés par rapport à la base de repère (x_1, x_2, x_3)	39
Figure II. 4 : Etapes principales d'homogénéisation [28]	43
Figure II. 5 : Direction de déformation utilisée par la limite Voigt pour calculer la rigidité du composite	48
Figure II. 6 : Direction de contraintes utilisée par la limite Reuss pour calculer la rigidité du composite	49
Figure II. 7 : Etape de préparation et génération d'une microstructure réelle par le Microtomographe [34]	55
Figure II. 8 : Schéma de la procédure de traitement d'une microstructure réelle pour la simulation [42]	55

Figure II. 9 : Technique de génération RSA	57
Figure II. 10 : Groupe d'ellipsoïdes aplatis généré en utilisant l'algorithme de la dynamique moléculaire, nombre d'ellipsoïdes = 1000, fraction volumique = 70%, et le rapport de forme (aspect ratio) =1.9, proche des bonbons M&M's Donev [49]	57
Figure II. 11 : Exemple de volumes élémentaires VEs, (différents volumes pour une seul fraction volumique 0,2)	58
Figure II. 12 : Algorithme de génération des particules dans un volume élémentaire VE	59
Figure II. 13 : Exemple sur les éléments de maillage tétraédrique libre	60
Figure II. 14 : Effet du nombre des éléments sur les valeurs (a) du module de compressibilité apparent k et (b) module de cisaillement apparent μ	61
Figure III. 1 : Exemple d'une microstructure 3D	65
Figure III. 2 : Exemples de microstructures de différentes fractions volumiques, 5 %, 10 %, 20 % et 30 %	67
Figure III. 3 : Changement de la taille du volume V , fraction 10%	68
Figure III. 4 : Type de maillage utilisé, (a) cube de 100 sphères, (b) cube de 10 sphères	68
Figure III. 5 : Processus de calcul numérique	69
Figure III. 6 : Exemples de contraintes et de déformations des microstructures après application des charges de déformation (III.3) : Fraction volumique (0.3)	71
Figure III. 7 : Modules apparents : (a) de Young E^{app} et de compressibilité k^{app} , (b) de cisaillement μ^{app} . Pour la fraction volumique (0.05)	72
Figure III. 8 : Modules apparents : (a) de Young E^{app} et de compressibilité k^{app} , (b) de cisaillement μ^{app} . Pour la fraction volumique (0.10)	73
Figure III. 9 : Modules apparents : (a) de Young E^{app} et de compressibilité k^{app} , (b) de cisaillement μ^{app} . Pour la fraction volumique (0.15)	74
Figure III. 10 : Modules apparents : (a) de Young E^{app} et de compressibilité k^{app} , (b) de cisaillement μ^{app} . Pour la fraction volumique (0.2)	75
Figure III. 11 : Modules apparents : (a) de Young E^{app} et de compressibilité k^{app} , (b) de cisaillement μ^{app} . Pour la fraction volumique (0.3)	76
Figure III. 12 : Module effective de compressibilité k^* [Pa]. Pour les fractions volumiques (0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.3), calculé pour une taille choisie de VER ($V = 6$) et avec (05) méthodes	77
Figure III. 13 : Module effective de cisaillement μ^* [Pa] pour les fractions volumiques (0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.3), calculé pour une taille VER ($V = 6$) et avec (05) méthodes	78
Figure III. 14 : Concept de la morphologie équivalente pour un composite	79

Figure IV. 1 : Processus de calcul des propriétés effectives	84
Figure IV. 2 : Exemples d'une microstructure utilisée dans ce travail, (a) cellule de microstructure, (b) Maillage 3D	84
Figure IV. 3 : La convergence du CET en fonction de la densité du maillage	85
Figure IV. 4 : Expansion de microstructures constituées de : (a) 20 inclusions avec une fraction volumique de 15% en vue en perspective (b) 20 inclusions et une fraction volumique de 15% en vue plane (c) 50 inclusions avec une fraction volumique de 30% vue en perspective	86
Figure IV. 5 : Expansion relative VS. Fraction volumique des inclusions	87
Figure IV. 6 : Coefficient moyen d'expansion thermique VS. Fraction volumique des inclusions	87
Figure IV. 7 : Effet des volumes (nombre d'inclusions) sur les dilatations relatives	88
Figure IV. 8 : Effet des volumes (nombre d'inclusions) sur le Coefficient de dilatation thermique effectif des microstructures avec (5%, 10%, 15%, 20%, 30%) de fraction volumique	88
Figure IV. 9 : Effet de la fraction volumique des inclusions sur le coefficient effectif de dilatation thermique de microstructures renforcées avec un nombre d'inclusions de $N = (01, 10, 20, 50, 80 \text{ et } 100)$	89
Figure IV. 10 : Effet du changement de température sur le coefficient effectif de dilatation thermique (α^*), les bornes supérieure ($\alpha Sh U$) et inférieure ($\alpha Sh L$) de Sharpy, et Turner (αTu)	90
Figure IV. 11 : Contraintes de Von Mises d'un VER avec 50 sphères et une fraction de volume de 30% (a) vue complète (b) en vue en coupe	91
Figure IV. 12 : Valeurs maximales de contraintes de Von Mises dans les VERs avec différents volumes en fonction du volume	92
Figure IV. 13 : Comparaison entre le CET effective numérique calculé avec la méthode numérique FE (α^*) et les CETs calculé avec les méthodes analytiques	93
Figure IV. 14 : Comparaison entre le CET effectif obtenue par la méthode numérique et les résultats expérimentaux du CET d'après Chawla	94

Liste des tableaux

Tableau I. 1 : Quelques typiques renforts du composite à matrice métallique [6]	24
Tableau III. 1 : Propriétés élastiques des deux phases de la microstructure considérée	65
Tableau III. 2 : Les volumes élémentaires générés avec différentes et différentes fractions volumiques	66
Tableau III. 3 : Modules apparents de : Young E^{app} , compressibilité k^{app} , coefficient de Poisson ν^{app} et de cisaillement μ^{app} . Pour la fraction volumique (0,05), calculés pour les tailles $V = 2, 3, 4, 5$ et 6	72
Tableau III. 4 : Modules apparents de : Young E^{app} , compressibilité k^{app} , coefficient de Poisson ν^{app} et de cisaillement μ^{app} . Pour la fraction volumique (0,10), calculés pour les tailles $V = 2, 3, 4, 5$ et 6	73
Tableau III. 5 : Modules apparents de : Young E^{app} , compressibilité k^{app} , coefficient de Poisson ν^{app} et de cisaillement μ^{app} . Pour la fraction volumique (0,15), calculé pour les tailles $V = 2, 3, 4, 5$ et 6	74
Tableau III. 6 : Modules apparents de : Young E^{app} , compressibilité k^{app} , coefficient de Poisson ν^{app} et de cisaillement μ^{app} . Pour la fraction volumique (0,2), calculés pour les tailles $V = 2, 3, 4, 5$, et 6	75
Tableau III. 7 : Modules apparents de : Young E^{app} , compressibilité k^{app} , coefficient de Poisson ν^{app} et de cisaillement μ^{app} . Pour la fraction volumique (0,3), calculé pour des tailles $V = 2, 3, 4, 5$ et 6	76
Tableau III. 8 : Module effective de compressibilité k^* [Pa]. Pour les fractions volumiques (0,05, 0,1, 0,15, 0,2, 0,3), calculé pour une taille choisie de VER ($V = 6$) et avec (05) méthodes	77
Tableau III. 9 : Module effective de cisaillement μ^* [Pa]. Pour les fractions volumiques (0,05, 0,1, 0,15, 0,2, 0,3), calculé pour une taille VER ($V = 6$) et avec (05) méthodes	78
Tableau IV. 1 : Matériaux, volumes (Nombre d'inclusion) et fraction volumique des inclusions	83
Tableau IV. 2 : Quelques propriétés des constituants du composite considéré dans ce travail	84
Tableau IV. 3 : La dépendance en température du module élastique de Young E (Gpa), coefficient de Poisson ν , et CET (ppm/K) de la matrice Al, renforcement SiC utilisé pour la modélisation (Huber et al.2006 [65], Sharma N K et al. 2016 [60]).....	90
Tableau IV. 4 : L'erreur relative entre le CET effective α^* et le CET $\alpha_{Sh U}$ (Upper bound of Sharp) VS. Température.....	90

Tableau IV. 5 : L'erreur relative entre le CET α^* effectif et les autres CETs Versus la fraction volumique..... 93

Symboles et notations générales

CMM : Matériau composite à matrice métallique

CMC : Matériau composite à matrice céramique

CMP : Matériau composite à matrice polymère

CMA : Matériau composite à matrice d'aluminium

CPMM : Matériau composite à particule et à matrice métallique

MC : Matériau composite

MEF : Méthode des éléments finis

EF : éléments finis

3D : Trois dimensions

$\langle \cdot \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \cdot d\Omega$: Moyenne spatiale

« : » : Produit doublement contracté

CPL : Conditions aux limites périodiques

VE : Volume élémentaire

VER : Volume élémentaire représentatif

MHE : Milieu homogène équivalent

H-S: Bornes de HASHIN-STRICKMAN

Hashin+ (ou) HS+ : Bornes supérieurs de HASHIN-STRICKMAN

Hashin- (ou) HS- : Bornes inférieures de HASHIN-STRICKMAN

ACG : Auto cohérent généralisé (general self-consistent)

t_i (ou) \mathbf{t} : tenseur d'ordre 1, ou vecteur de traction

n_j (ou) \mathbf{n} : tenseur d'ordre 1, ou vecteur d'unité

σ_{ij} , $\underline{\boldsymbol{\sigma}}$, $\underline{\boldsymbol{\Sigma}}$: Tenseur symétrique d'ordre 2 de contrainte

ε_{ij} , $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$, $\underline{\boldsymbol{E}}$: Tenseur symétrique d'ordre 2 de déformation

$\underline{\boldsymbol{S}}$, S_{ij} : Tenseur d'ordre 2 de souplesse ou de complaisance

$\underline{\boldsymbol{C}}$, C_{ij} : Tenseur symétrique d'ordre 2 de rigidité

$\underline{\boldsymbol{C}}^*$: Tenseur effective de rigidité

C_{ijkl} : Tenseur d'ordre 4 de rigidité

δ_{ij} : Delta KRONECKER

λ et μ : Coefficients de Lamé

E : Module de YOUNG

μ (ou) G : Module de cisaillement

$\text{Tr}(\underline{\sigma})$: Trace du tenseur des contraintes $\underline{\sigma}$

α : Coefficient de dilatation thermique linéaire

α_{ij} (ou) $\underline{\alpha}$: Tenseur symétrique d'ordre 2 du coefficient de l'expansion thermique

L_0 : Longueur initiale avant dilatation

L : Longueur finale après dilatation

ΔL : Différence de longueur avant et après la dilatation

Q : Flux thermique

\underline{Q} : Tenseur thermique

K : Conductivité thermique

\underline{K} : Tenseur de conductivité

T : Température

∇T : Gradient de température

ρ : Masse volumique

C_p : Capacité thermique à pression constante

a : Diffusivité thermique

$\frac{\partial T}{\partial t}$: Dérivée partielle de la température par rapport au temps.

$\Delta T = \nabla^2 T = \nabla \cdot \nabla (T)$: Laplacien de la température

L_1, L_2, L_3 : respectivement, la taille macroscopique, la taille microscopique et la taille de l'inclusion

u_i : Vecteurs déplacement d'un point matériel

$u_{i,j}$ (ou) $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$: Variation de déplacement

b_i : Forces du corps

$\tilde{\sigma}_{ij}, \tilde{\epsilon}_{ij}$: Respectivement, Fluctuations micro-échelle du champ de contrainte et de déformation

\underline{E} (ou) E_{ij} : Tenseur d'ordre 2 de déformations macroscopiques infinitésimales

$\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}, \underline{C}^{\text{hom}}$: Tenseur de rigidité homogénéisé

$\underline{\underline{S}}^{\text{hom}}, \underline{S}^{\text{hom}}$: Tenseur de souplesse homogénéisé

C^* : Module effectif du matériau composite

C_p, C_m : Respectivement, Module de l'inclusion et module de matrice

$\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{B}}$: Respectivement, les tenseurs de localisation des déformations et de concentration des contraintes,

$\underline{\underline{I}}$: Tenseur d'identité d'ordre 4.

f_p : Fraction volumique du domaine occupé par la phase « p »

f_m : Fraction volumique de la matrice

f_i : Fraction volumique de l'inclusion

k : Module de compressibilité

k_i , k_m : Modules de compressibilité, respectivement, de l'inclusion et de la matrice

k^{app} : Module de compressibilité apparent

k^* : Module de compressibilité effectif

k^V : Module effectif de compressibilité de VOIGT

k^R : Module effectif de compressibilité de REUSS

k^{HS+} , k^{HS-} : Respectivement, la borne supérieure et inférieure du module de compressibilité de
HASHIN et STRICKMAN

k^{ACG} : Module effectif de compressibilité estimé avec la méthode du self-consistant généralisée.

k^{MT} : Module effectif de compressibilité estimé avec la méthode de MORI-TANAKA

μ : Module de cisaillement

μ_i , μ_m : Modules de cisaillement, respectivement, de l'inclusion et de la matrice

μ^{app} : Module de cisaillement apparent

μ^* : Module de cisaillement effectif

μ^V : Module de cisaillement effectif de VOIGT

μ^R : Module de cisaillement effectif de REUSS

μ^{HS+} , μ^{HS-} : Respectivement, la borne supérieure et inférieure du module de cisaillement de
HASHIN et STRICKMAN

μ^{MT} : Module de cisaillement effectif estimé avec la méthode de MORI-TANAKA

ε^0 , σ^0 : Charges appliquées sur le matériau composite

\underline{v} : La fluctuation périodique

A, B, C : Paramètres de calcul du module de cisaillement par la méthode auto-cohérente généralisée

α , β : Paramètres de calcul des modules de cisaillement et compressibilité par la méthode MORI-TANAKA

CET (ou) α : Coefficient de dilatation thermique

α_c : Coefficient de dilatation thermique

α^{app} : Coefficient de dilatation thermique apparent

α^* : Coefficient de dilatation thermique effectif

α_p, α_m : Respectivement, les coefficients de dilatation thermique de l'inclusion et de la matrice

CET_c^u : Limite supérieure du CET effectif du composite, calculé avec la méthode de SHARPY

CET_c^l : Limite inférieure du CET effectif du composite, calculé avec la méthode de SHARPY

$\varepsilon_k, \varepsilon_\mu$: Tenseurs de déformation macroscopiques

E^{app} : Module apparent de YOUNG

ν^{app} : Coefficient de poisson apparent

V : Taille du volume de la microstructure

N : Nombre d'inclusions (taille du volume)

ΔV : Expansion volumétrique

V_0 : Volume initial

ε : Expansion relative

$\alpha_{Sh U}$ (ou) $\alpha_{Shapery}$: Limite supérieure du CET de SHARPY

$\alpha_{Sh L}$ (ou) $\alpha_{lShapery}$: Limite inférieure du CET de SHARPY

α_{Tu} (ou) α_{Turner} : CET de TURNER

α_{Reuss} : CET de REUSS

α_{Voigt} : CET de VOIGT

Introduction générale

De son nom, un matériau composite (MC) est composé de 02 matières distinctes ou plus, qui ont une reconnaissable interface entre eux. Ils sont utilisés à cause de leurs applications électriques, tribologiques et environnementales [1].

Les matériaux composites ont une importance dans l'industrie et la vie quotidienne des gens, c'est pourquoi plusieurs auteurs se sont penchés sur l'étude et la compréhension des propriétés physico-chimiques, pour ensuite contribuer à l'amélioration continue de ces MCs.

Il y a toute sorte de matériaux composite, d'abord les MCs existants depuis l'antiquité constitués d'éléments naturels comme le bois, le torchis, les arcs mongols, dont les parties comprimées sont en corne, et les parties tendues en bois, soies collées et tendons de bœuf, les épées damassées ou sabres japonais dont la lame est en acier et en fer doux [2]. Ainsi que les matériaux actuels fabriqués à partir des fibres ou particules comme renforts noyées dans des matrices résineuses, céramiques ou métalliques. Généralement les matrices ont une résistance mécanique beaucoup plus faible que celle des renforts. La matrice conserve les dispositions géométriques aux fibres et leur transmet les sollicitations auxquelles est soumise la pièce. Les matériaux composites ainsi obtenus sont à la fois hétérogènes et anisotropes et supportent des sollicitations beaucoup plus que chaque matière constituante toute seule.

On trouve l'importance des MCs dans plusieurs domaines, par exemple les domaines comme [2] :

- Mécanique générale et divers : engrenages, coussinets, boîtiers, corps de vérin, bras de robots...
- Electricité et électronique : isolant de construction électrique, support de disjoncteur, support de circuit imprimé ...
- Bâtiment et travaux publics : coffrages, moules à béton, piscines, panneaux de façade, cloisons, portes, mobilier, sanitaire...
- Camion et automobile : pièces de carrosserie ou carrosserie complète, roues, boucliers, calendres, arbres de transmission, ressort de suspension, carters, sièges, caravanes...
- Trains : avants de motrices, wagons, portes, sièges, panneaux intérieurs, gaines de ventilation...
- Cabines de téléphériques, télécabines...
- Aéronautique : avion de tourisme, planeurs, des pièces d'avion comme le radôme, les bords d'attaque, volets, dérives...
- Transport spatial : corps de propulseurs, réservoirs, tuyères...

- Sports et loisirs : raquette de tennis et de squash, cannes à pêches, skis, perches à sauter, planches à voile, de surfing, à roulettes, arcs et flèches, javelots, casques de protection, cadres de bicyclette, clubs de golf...

Le défi aujourd'hui est le passage du métal au composite afin d'apporter un gain de poids significatif dans la conception. Ce paradigme nécessite toutefois des outils dédiés à la conception composite afin de prendre en compte le comportement composite spécifique. Les outils de conception classiques ne sont pas en mesure de décrire avec précision le comportement local des matériaux composites, ce qui entraîne des questions de sécurité et un manque de confiance dans la conception, d'où la nécessité de la recherche et le développement d'autres outils qui nous permettent de trouver des solutions plus simples, plus précises et plus pratiques aux problèmes liés à la prédiction du comportement de ces MCs et la conception de leurs structures.

Le but de ce travail est de contribuer à une étude théorique concernant l'élasticité linéaire, à travers la recherche d'une méthode numérique pour prédire quelques propriétés *effectives* macroscopiques d'un *matériau composite à particules*, en se basant sur des outils mathématiques et numériques, dans l'objectif est de réduire les éventuelles dépenses, concernant les outils expérimentaux, sans omettre complètement le côté expérimental qui va devenir un travail complémentaire d'assurance et de confirmation. Les propriétés effectives étudiées dans ce travail sont en particulier la *matrice de rigidité homogénéisée* ou effective ($\underline{\mathbf{C}}$) et le *coefficient de dilatation thermique* (CET) d'un *matériau à particules et à matrice métallique* (CPMM). On a choisi parmi ces CPMMs comme exemple d'étude, le matériau composite (Al-SiC), composé de deux matériaux essentiels qui sont l'*Aluminium* (Al) et le *carbure de silicium* (SiC).

Cette thèse est divisée en (04) chapitres. Dans le **premier chapitre** une étude bibliographique concernant les matériaux composites d'une façon générale, où on expose différents types de renforts et matrices qui constituent les matériaux composites ou (*hétérogènes*), on aborde quelques procédés d'élaboration de ces matériaux, l'introduction aux matériaux composites à particules, le comportement élastique des matériaux sous l'effet mécanique de dilatation, cisaillement ou la température, on aborde aussi quelques notions sur la loi de Hook, dilatation thermique, et la conduction thermique.

Le **deuxième chapitre** est divisé en deux parties, dans la *première partie* on présente les notions d'homogénéisation en élasticité linéaire des matériaux composites, en particulier les matériaux composites à particules et à matrice métalliques CPMM, la *deuxième partie* on présente quelques modèles analytiques d'homogénéisation utilisés dans le calcul et l'estimation des propriétés mécaniques et thermiques du MC, aussi on présente le processus de calcul numérique par éléments finis de ces propriétés élastiques considérés dans ce travail.

Le **troisième chapitre** contient l'étude théorique du comportement mécano élastique des MCs à particules, et plus particulièrement et à titre d'exemple le matériau Al-SiC (renforts de carbure de silicium noyés dans une matrice d'aluminium). Quand le MC subit des sollicitations mécaniques, thermiques ou les deux à la fois, il répond avec un comportement élastique (réversible), plastique (irréversible) ou autre comportement. Dans ce travail, on se limite aux propriétés élastiques essentielles de ce matériau hétérogène qui sont le module de compressibilité effectif et le module de cisaillement effectif. En déterminant ces deux facteurs on obtient la matrice de rigidité effective, ce qui va permettre ensuite de réaliser des simulations pour la structure globale, en considérant ces propriétés effectives homogénéisés.

Dans le **quatrième chapitre** on aborde l'estimation de l'expansion thermique du même matériau composite considéré dans le chapitre III, à l'aide de la méthode de l'homogénéisation analytique et numérique. On étudie : l'effet de la fraction volumique sur l'*expansion relative* et le coefficient de dilatation (expansion) thermique CET. Aussi l'effet de la température sur le CET. L'effet de la température sur la contrainte résiduelle. On fait une comparaison entre l'approche analytique et l'approche numérique à base d'éléments finis. Et une comparaison entre des résultats expérimentaux déjà faite par CHAWLA [3] et les résultats obtenus par cette approche numérique.

Après chaque chapitre, on trouve une petite conclusion qui résume ce qui a été fait dans le chapitre, et à la fin de la thèse on tire une conclusion générale sur l'intérêt de ce travail.

Chapitre I

Etude bibliographique

Ce chapitre propose une revue bibliographique des connaissances sur les matériaux composites, en représentant leurs différents types et leurs utilisations, ainsi que quelques procédés de fabrication de ces matériaux. Ensuite, la définition du comportement thermomécanique élastique d'un matériau composite de faible proportion volumique du renfort, où on cherche les modules effectifs : d'élasticité (compressibilité, cisaillement) et le coefficient d'expansion thermique.

I.1 Introduction

Les matériaux composites sont des matériaux résultant de l'association d'au moins deux matériaux de natures différentes. La finalité est d'obtenir un matériau présentant des caractéristiques que les deux matériaux associés n'avaient pas seuls. Ces caractéristiques peuvent être physiques, mécaniques ... Dans ce travail, on s'intéresse seulement aux comportements mécaniques et thermiques, dont on cherche les propriétés effectives élastiques : (module de compressibilité, module de cisaillement), la dilatation thermique relative et le coefficient d'expansion thermique.

On peut distinguer un composite sur plusieurs critères communs, par exemple selon leurs matrices comme, en disant par exemple un composite à matrice métallique (CMM), céramique (CMC) ou polymère (CPM). On peut aussi classer les composites selon le type de leurs renforts (inclusions) comme (Figure I.1) : les composites à fibres longues, à fibres courtes, à mèches ou à particules. Comme on peut les distinguer comme étant des feuilles avec une seule couche, ou à plusieurs couches (stratifiés) ou sandwichs etc.

I.2 Différents types de matériaux composites

La liaison entre les inclusions et la matrice est créée pendant la phase de fabrication du matériau composite. Ceci a une influence fondamentale sur les propriétés du matériau composite.

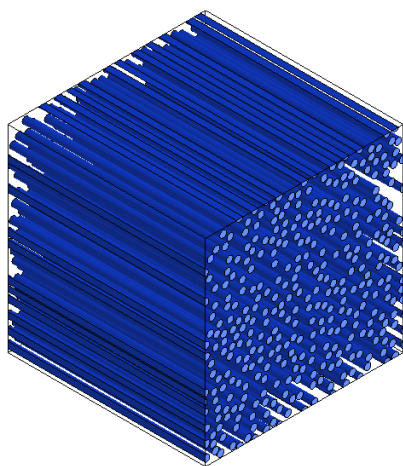
La classification des matériaux composites selon la forme de leurs constituants (Figure I.1) nous mène à distinguer les matériaux présent en considération dans notre travail, qui sont les composites à particules et à matrice métallique CMM. Ces matériaux sont utilisés dans plusieurs applications aéronautiques et industrielles non réalisables avec des matériaux conventionnels. Les propriétés des constituants de ces matériaux influent directement sur leurs comportements, comme on peut avoir le comportement désiré d'un matériau composite à particules en variant les quantités des renforts. Une mauvaise sélection des renforts peut conduire à un résultat indésirable concernant la fabrication d'un matériau composite, en plus de la difficulté de production, c'est pour cela qu'on doit faire des prédictions sur les propriétés thermomécaniques et le comportement finale de ces matériaux, qui ne s'appuient pas nécessairement sur des essais destructifs et coûteux, mais en utilisant les moyens de simulation numérique et les méthodes analytiques. [1].

Les matériaux composites à matrice métallique ont divers avantages comme [4] :

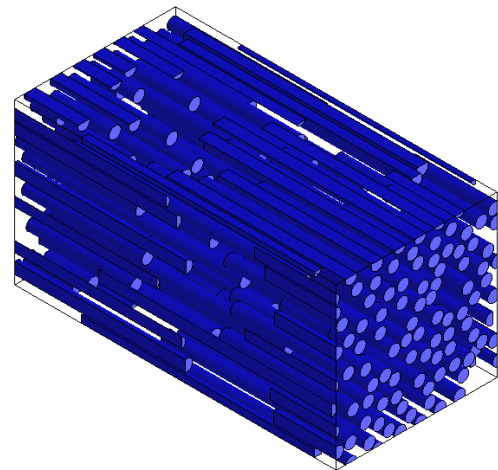
- Haute résistance transversale et rigidité,
- Haute ductilité et ténacité à la rupture,
- Résistance aux hautes températures,

- Haute résistance aux feux,
- Haute conductivité électrique et thermique,
- Pas d'absorption d'humidité,
- Meilleure protection aux radiations...

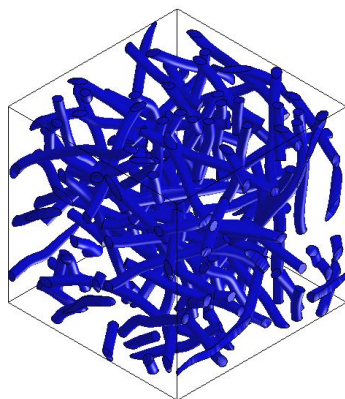
Pour mieux illustrer, on a choisi de considérer par l'étude, dans le chapitre III et IV, un matériau à particule et à matrice métallique qui est le matériau composite Al-SiC. On a utilisé une méthode d'homogénéisation numérique basée sur les éléments finis (EF), où on l'a comparé avec quelques méthodes analytiques connues dans la littérature, pour enfin tenter d'estimer le comportement macroscopique globale du matériau composite. Néanmoins, même en utilisant des approches théoriques, on aura toujours besoin des essais pratiques dans les laboratoires pour consolider les solutions théoriques proposées.



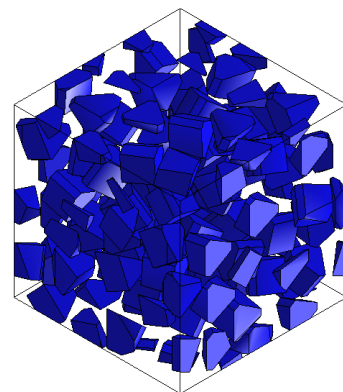
Composite à fibres longues



Composite à fibres courtes



Composite à mèches



Composite à particules

Figure I.1 : Types de composites basés sur la forme des renforts

Dans l'industrie on peut trouver des composites en une seule couche ou en plusieurs couches collés ensemble appelées « stratifiés » qui constituent un seul matériau (Figure I.2).

I.2.1 Stratifiés

Les stratifiés sont composés de plusieurs plis de fils ou de tissus unidirectionnels imprégné dans des matrices, dont la direction est décalée dans chaque pli.

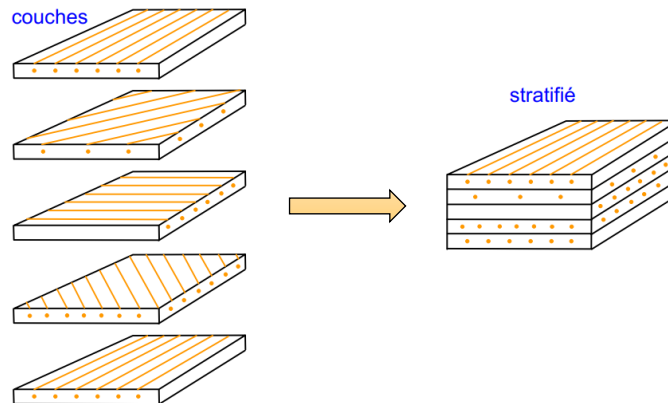


Figure I.2 : Constitution d'un stratifié [5]

Ces stratifiés aussi sont marqués par des *codes* qui désignent [5] :

- Chaque couche par un nombre indiquant la valeur en degrés de l'angle que fait la direction des fibres avec l'axe x de référence.
- Les couches successives sont séparées par un slash « / », si leurs angles sont différents.
- Les couches successives de même orientation sont désignées par un indice numérique.

Les couches sont nommées successivement en allant d'une couche à l'autre, des crochets indiquent le début et la fin du code. La désignation dépend du système d'axes choisi, un exemple est donné à la (Figure I.3).

Il existe aussi d'autres types de stratifiés comme :

- Les stratifiés hybride, constitués d'une suite de couches, chacune de nature différente ou chacune de renforts différents, ou ces couches peuvent également être intercalées.
- Les panneaux sandwich, qui sont une combinaison de deux feuilles appelée peaux entre lesquelles on met une structure légère possédant de bonnes propriétés en compression appelée âme.

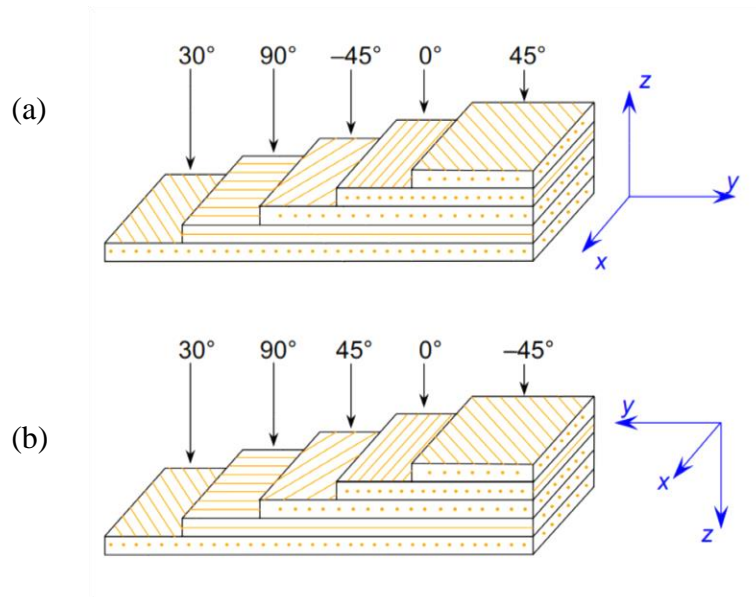


Figure I.3 : Convention de signe pour la désignation des stratifiés, désignation d'après le système d'axe choisit : (a) [30 / 90 / -45 / 0 / 45], (b) [30 / 90 / 45 / 0 / -45] [5]

I.2.2 Composites à fibres

Ces composites peuvent être des composites à fibres longues ou courtes (Figure I.1), comme ils peuvent être constitués de fibres orientées unidirectionnels ou multidirectionnels. Pour distinguer les types de composites (à fibres courtes ou à fibres longues), on peut se référer au tableau (Tableau I. 1) qui estime les tailles des fibres de chaque type de MC.

Outre les fibres céramiques à base de carbure de silicium, il existe d'autres fibres céramiques prometteuses, par exemple le nitrure de silicium, le carbure de bore et le nitrure de bore.

Les fibres de nitrure de silicium (Si_3N_4) peuvent être préparées par CVD réactif à l'aide de composés volatils du silicium. Les réactifs sont généralement SiCl_4 et NH_3 . Si_3N_4 est déposé sur un substrat de carbone ou de tungstène. Encore une fois, comme dans d'autres procédés de CVD, la fibre résultante a de bonnes propriétés [6].

I.2.3 Composites à particules

Dans ce type de composites, Les particules imprégnées dans des matrices céramiques, polymères ou métalliques sont des renforts, monocristallines et extrêmement résistantes. Cette résistance élevée, proche de la résistance théorique, résulte de l'absence d'imperfections cristallines telles que des dislocations. Être monocristallin, il n'y a pas de joints de grains non plus. Typiquement, Les particules n'ont pas de dimensions ni de propriétés uniformes. Mais durant

l'étude théorique des propriétés d'un composite à particule, on utilise généralement des formes simples comme les sphères, ellipsoïdes ou les cylindres...

Le SiC sous forme de particules est disponible à très bon marché et en abondance pour les utilisations abrasives, réfractaires et chimiques. Dans ce procédé classique, on fait réagir de la silice sous forme de sable et du carbone sous forme de coke à 2400 °C dans un four électrique [7].

Le SiC produit sous forme de gros granulés est ensuite broyé à la taille souhaitée. Le carbure de tungstène en forme particules est obtenu par carburation de tungstène métallique, lui-même préparé par réduction d'hydrogène de l'oxyde de tungstène. Un mélange de poudre de tungstène et de noir de carbone de granulométrie et de répartition appropriées est obtenu par fraisage. L'ajout de noir de carbone aide à contrôler la taille des particules et leur distribution. L'objectif est de produire du carbure de tungstène stœchiométrique avec un faible excès de carbone libre, ce qui empêche la formation de l'êta (η) phase, hautement indésirable. La carburation se fait en présence d'hydrogène à des températures comprises entre 1 400 et 2 650 °C [7].

I.3 Constitutions d'un matériau composite

Un matériau composite est constitué essentiellement d'une phase qui s'appelle matrice et une ou plusieurs autres phases qu'on appelle renforts.

I.3.1 Renforts

Il y a plusieurs types de renforts ou (inclusions), comme (Tableau I. 1) :

- Les fibres continues longues ;
- Les fibres discontinues courtes ou mèches ;
- Les particules.

Tableau I. 1 : Quelques typiques renforts du composite à matrice métallique [7]

Type de renforts	Rapport de forme	Diamètre (μm)	Exemples
Fibres continues	> 1000	3-150	Al_2O_3 , $\text{Al}_2\text{O}_3+\text{SiO}_2$, B, C, SiC, Si_3N_4 , Nb-Ti, Nb_3Sn , W
Fibres discontinues (a) Mèches (b) Fibres courtes	10-10 000	1-5	SiC, TiB_2 , Al_2O_3 Al_2O_3 , SiC, ($\text{Al}_2\text{O}_3+\text{SiO}_2$), fibres de carbone en phase vapeur
Particule	1-4	1-25	SiC, Al_2O_3 , TiC, B_4C , WC, BN

Le *rapport de forme* (aspect ratio) est la longueur du renfort / le diamètre du renfort.

I.3.1.1 Fibres continues longues

Les fibres consistent en des milliers de filaments, chaque filament ayant un diamètre de quelques micromètres, ce qui permet de les produire avec des machines textiles ; par exemple, les fibres longues coupées pendant la fabrication du MC, sont utilisées tels quels ou tissées.

Les principaux matériaux fibreux sont : Verre, Aramide ou Kevlar qui est très léger, carbone qui a une haute résistance, Bore qui a une haute résistance, Carbure de silicium (résistant aux hautes températures).

Lors de la formation des fibres destinées à la fabrication des matériaux composites, l'assemblage de ces fibres peut prendre les formes suivantes :

- Unidimensionnel : câbles, fils ou bandes unidirectionnels
- Bidimensionnel : tissus tissés ou non tissés (feutres ou mats)
- Tridimensionnel : tissus (parfois appelés tissus multidimensionnels) avec fibres orientées dans plusieurs directions.

I.3.1.2 Fibres courtes ou mèches

Les fibres courtes, d'une longueur de quelques centimètres ou fractions de millimètres sont feutres (Figure I.4), mats (Figure I.5) et fibres courtes utilisés dans le moulage par injection. Les renforts « moustaches » ou mèches sont des fibres courtes monocristallines d'une grande résistance, qui se rapproche de la résistance théorique à cause de l'absence des imperfections cristalline comme les dislocations, par-contre les mèches n'ont pas des dimensions et propriétés uniforme.

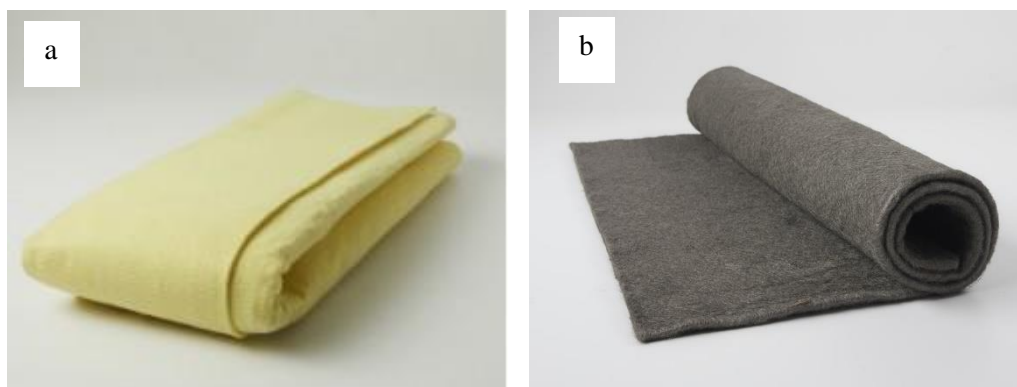


Figure I.4 : (a) Feutre para aramide, (b) Feutre inox [8]

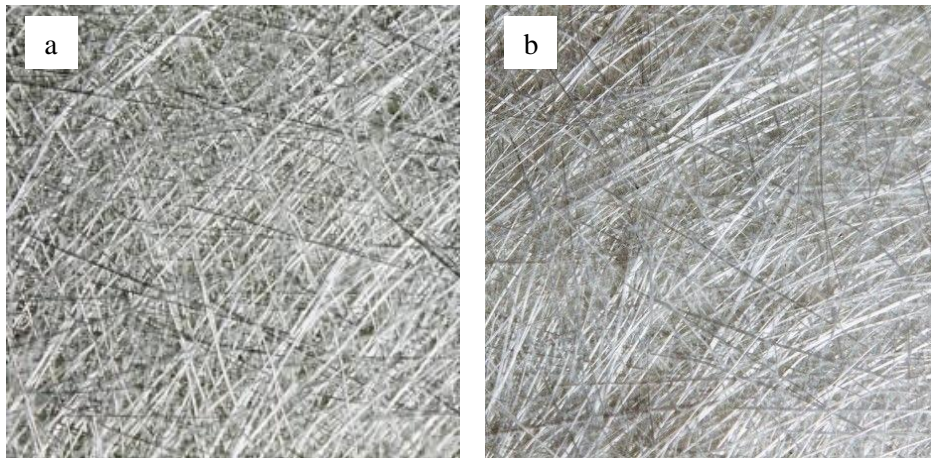


Figure I.5 : (a) Tapis de poudre haché brin de fibre de verre, (b) Mat à fils coupés de la fibre de verre [9]

I.3.1.3 Particules

Les particules peuvent être des carbures de tungstène (WC), ou carbure de silicium SiC (Figure I.6) ou du gravier dans le béton etc. Ils peuvent avoir n'importe quelle forme ou taille, mais sont généralement sphériques, ellipsoïdales, polyédriques ou de forme irrégulière.

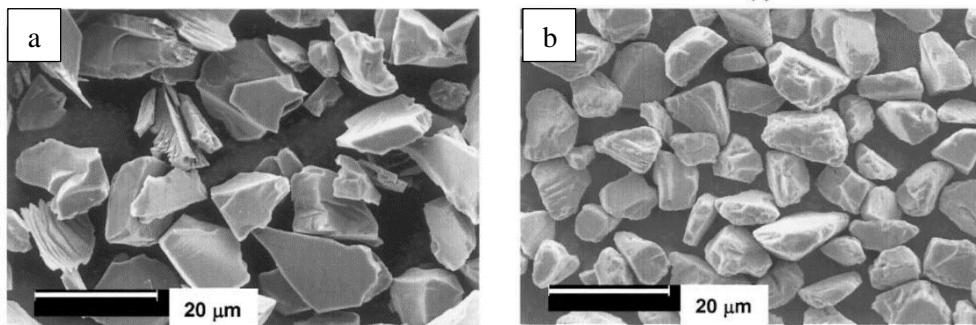


Figure I.6 : SEM micrographe des renforts à particules SiC, (a) morphologie angulaire (b) morphologie ronde [7]

Le carbure de silicium sous forme particulaire est couramment utilisé à des fins abrasives, réfractaires et chimiques. Le SiC particulaire est produit sous forme de gros granulat, ensuite broyé à la taille souhaitée. Deux types de renfort particulaire SiC sont représentés sur la (Figure I.6), avec une morphologie angulaire et arrondie, respectivement.

Le carbure de tungstène WC est généralement obtenu par carburation gazeuse. Du noir de carbone est ajoutée pour contrôler la distribution de la taille des particules. L'objectif du processus de carburation est de produire du tungstène stœchiométrique. [7]

I.3.2 Matrice

La matrice des matériaux composites peut être :

- Matrice polymère : résines thermoplastiques, comme, le *polypropylène*, le *poly(sulfure de phénylène)* ou Polyphénylène sulfide (PPS), le *polyamide*, le *polyétheréthercétone* (PEEK), etc. et résines thermodurcissables (*polyesters*, *phénoliques*, *mélamines*, *silicones*, *polyuréthanes*, *époxy*)...
- Matrice minérale : carbure de silicium, carbone... Ils peuvent être utilisés à des températures élevées.
- Matrice métallique : alliages d'aluminium, alliages de titane, eutectiques orientés...

Les alliages d'aluminium comme l'Al-Cu-Mg et Al-Zn-Mg-Cu sont très utilisés dans les matrices d'un CMM, en raison de leur faible densité et leur excellente résistance, ainsi que leurs résistances à la corrosion et ténacité [7].

Les métaux sont caractérisés par des liaisons métalliques, i.e., les électrons de valence ne sont pas liés à des ions en particulier dans le solide, mais sont un nuage d'électrons qui entoure des nucléons atomiques chargés positivement. Par conséquent les liaisons électroniques dans les métaux sont non directionnelles, cette non directionnalité de la liaison est très importante, puisqu'elle contribue à l'isotropie dans plusieurs propriétés.

I.4 Quelques procédés de fabrication

L'objectif de ce paragraphe n'est pas de faire une étude approfondie de la technologie de fabrication des matériaux composites. Il se propose simplement de citer en bref quelques processus de fabrication, et de constituer une introduction à l'étude du comportement thermomécanique des matériaux composites.

La plupart des méthodes de fabrication consistent à élaborer les pièces en matériaux composites par couches successives comportant matrice et renfort.

La mise en œuvre de ces matériaux composites se fait généralement par la méthode de moulage, que ce soit [5] :

- Le moulage à froid et sans l'intervention des presses (moulages sans pression),
- Le moulage sous vide.
- Le moulage sous pression qui est un moulage par injection ou sous pression à chaud ou à froid.
- Le moulage en continu moulage se fait en plusieurs phases :
 - Une phase d'imprégnation des renforts. La résine catalysée et les renforts sont véhiculés sur un film de démoulage (cellophane, mylar, polyéthylène, etc.)
 - Une phase de mise en forme.

- Une phase de polymérisation,
- Une phase de refroidissement et découpage.
- Le moulage par pultrusion où les renforts passent dans un bain de résine catalysée où ils sont imprégnés. Puis Ils traversent une filière chauffée dans laquelle ont lieu simultanément mise en forme du profilé et polymérisation de la résine.
- Moulage par centrifugation, Le moule de révolution, enduit d'agent de démoulage est mis en rotation (à environ 2 000 tours/min) Après dépôt éventuel de *gel coat*, on introduit simultanément en continu.
 - le renfort, fibres coupées ou stratifil coupé
 - la résine catalysée et accélérée (résines époxydes, polyesters, etc.) durcissant à froid
- Moulage par enroulement filamentaire, Le renfort (fil continu, ruban, etc.) imprégné de résine catalysée est enroulé avec une légère tension, sur un mandrin cylindrique ou de révolution en rotation.

Chaque méthode de ceux –ci, a ces avantages, ces inconvénients et ces domaines d'utilisation.

Il y a de nombreux processus de fabrication de composites à matrice métallique CMM. La plupart de ces processus impliquent un traitement à l'état liquide et solide. Certains processus peuvent impliquer une variété de techniques de dépôt ou un processus in situ d'incorporation d'une phase de renforcement. Nous citons par exemple [6].

- Processus à l'état liquide : s'applique généralement pour les CMMs avec des renforts en particules, il consiste à l'ajout de la phase matrice fusionnée et la phase des particules dans une enceinte, pour les mélanger ensemble en utilisant plusieurs méthodes comme.
 - Moulage avec malaxage
 - Formation par pulvérisation
 - Modélisation de l'infiltration...
- Processus à l'état solide : c'est une opération de frittage qui se fait surtout pour les CMM avec des renforts en fibres
- Processus in situ : La fabrication in situ du composite à matrice métallique est un processus dans lequel une phase dispersée (de renforcement) est formée dans la matrice à la suite de la précipitation de la masse fondue pendant son refroidissement et sa solidification. Dans les techniques in situ, on forme la phase de renforcement in

situ. Le matériau composite est produit en une étape à partir d'un alliage de départ approprié.

I.5 Comportement mécanique élastique des matériaux

I.5.1 Généralités sur la loi de HOOK

La principale caractéristique de la déformation élastique est sa réversibilité. Lorsque la charge qui a provoqué une déformation élastique est retirée, le matériau retrouve sa forme initiale. Dans les matériaux cristallins la zone de déformation élastique est généralement en-deçà de 1,2 % de déformation.

La relation de base pour traiter de l'élasticité est la loi de HOOK, qui établit une relation linéaire entre la charge et la déformation élastique (Figure I.7).

Dans le cas unidimensionnel la loi de HOOK s'écrit

$$\sigma = E \varepsilon \quad (\text{I.1})$$

Où, E est le module de Young, σ la contrainte et ε la déformation.

Pour un matériau homogène et isotrope (dont les propriétés sont identiques dans toutes les directions) une tension axiale le long de la direction x engendre une déformation $\varepsilon_x = \frac{1}{E} \sigma_x$. De plus cette charge axiale sur x produit également une déformation transversale : $\varepsilon_y = \varepsilon_z = \nu \varepsilon_x$, où ν est le coefficient de Poisson. Ce coefficient est généralement compris entre 0,2 et 0,3. Il ne peut pas dépasser 0,5 sinon une charge compressive engendrerait une augmentation de volume des matériaux.

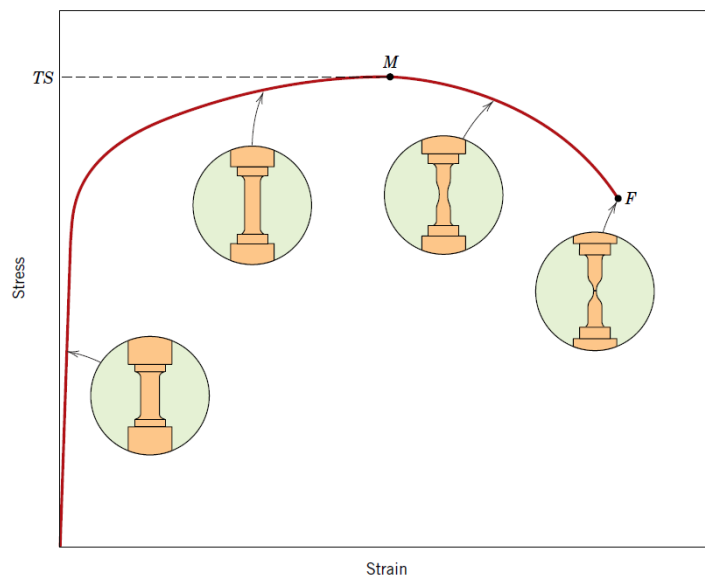


Figure I.7 : Comportement typique dans un matériau ductile contrainte (Stress) vs déformation (Strain), jusqu'à la rupture point F. La résistance à la traction TS est indiquée au point M [10].

Pour un *matériau hétérogène* la loi de HOOK change d'après les cas de l'hétérogénéité, on peut distinguer plusieurs cas comme [5] :

- Le cas général où le matériau est *triclinique*, i.e., ne représente aucune symétrie géométrique, la loi de HOOK généralisé est donnée par la relation linéaire suivante :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & \text{Sym.} & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} \quad (I.2)$$

Où, $\sigma = \underline{C} \varepsilon$, avec \underline{C} représente la matrice de rigidité et elle est symétrique, σ est le vecteur contrainte, ε est le vecteur de déformation.

On peut aussi écrire cette loi d'une autre façon, $\varepsilon = \underline{S} \sigma$

Où \underline{S} est la matrice de souplesse qui est l'inverse de la matrice de rigidité \underline{C} , $\underline{S} = \underline{C}^{-1}$

- Dans le cas où le matériau hétérogène possède un plan de symétrie par exemple (1,2), on l'appelle matériau *monoclinique* et la matrice de rigidité sera réduite en :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

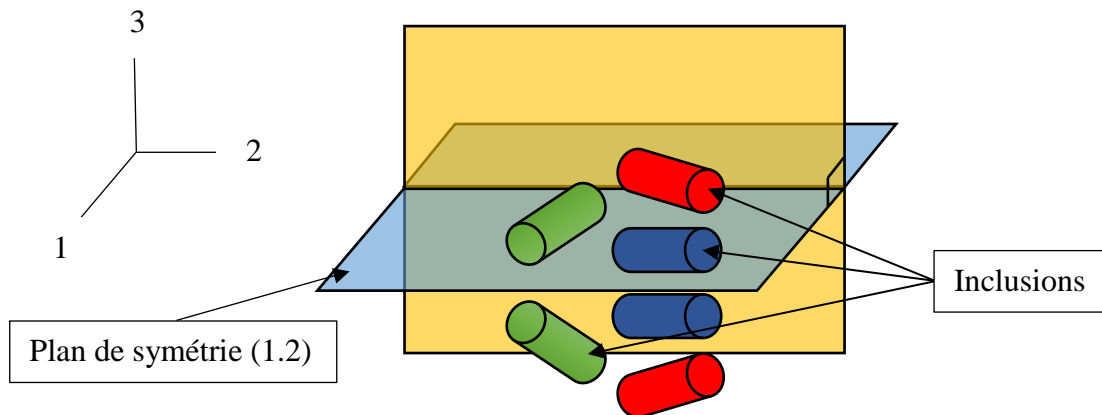


Figure I.8 : Schéma illustrant un matériau monoclinique, ici le plan (1,2) est le plan de symétrie, les deux plans (1,2) et (2,3) sont perpendiculaires

- Le cas d'un matériau possédant (03) plans de symétrie perpendiculaires deux à deux, est un matériau *orthotrope* et la matrice sera réduite encore plus, en devenant sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} \quad (\text{I.4})$$

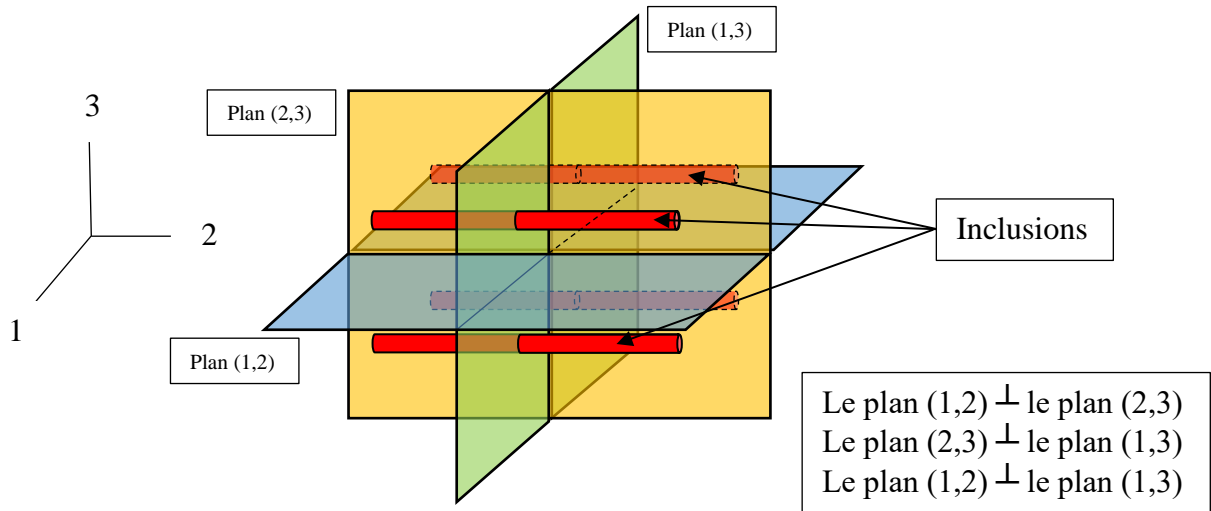


Figure I.9 : Schéma illustrant un matériau orthotrope, ici le matériau possède trois plans de symétrie le plan (1,2), le plan (1,3) et le plan (2,3)

- Le matériau *isotrope* a les mêmes propriétés élasto-plastiques et thermiques suivant toutes les directions, la loi de HOOK dans ce cas est donnée par la relation (I.5)

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} \quad (\text{I.5})$$

Les constantes de rigidité sont exprimées aussi par les coefficients de Lamé λ et μ où,

$$\lambda = C_{12} \text{ et } \mu = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) \quad (\text{I.6})$$

Ou

$$C_{12} = \lambda \text{ et } C_{11} = 2\mu + \lambda \quad (\text{I.7})$$

La relation d'élasticité (1.5) peut s'écrire avec la notation indicielle avec l'expression suivante

[5] :

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (\text{I.8})$$

Ou encore

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \delta_{ij} Tr(\sigma_{ij}) + \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} \quad (I.9)$$

Avec : $Tr(\underline{\sigma})$ ou $Tr(\sigma_{ij}) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$ est la trace du tenseur des contraintes, δ_{ij} c'est le delta KRONECKER et $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

La relation entre le module de compressibilité k et les coefficients de Lamé est

$$k = \frac{3\lambda+2\mu}{3} \quad (I.10)$$

Ou encore une autre relation de k qui s'exprime en fonction du module de YOUNG E et du coefficient de POISSON ν

$$k = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (I.11)$$

De même on peut tirer l'expression du module de cisaillement G ou parfois est symbolisé par la lettre μ

$$G = \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (I.12)$$

I.6 Dilatation (expansion) thermique

Lorsqu'une éprouvette d'un matériau *isotrope* de longueur L_0 subi une variation de température ses dimensions varient proportionnellement à la variation de température ΔT , parmi ces dimensions on considère la longueur L et la déformation linéaire ε

$$\varepsilon = \frac{L-L_0}{L_0} = \frac{\Delta L}{L_0} = \alpha \Delta T \quad (I.13)$$

D'où

$$\alpha = \frac{\varepsilon}{\Delta T} \quad (I.14)$$

Où, α est le coefficient de dilatation thermique linéaire, $\Delta T = T - T_0$ est la différence de température, $\Delta L = L - L_0$ est la différence des longueurs (avant et après la dilatation).

Le coefficient α prend une valeur positive, elle-même dépendante de la température. Donc la loi d'allongement ci-dessus n'est qu'une approximation et la linéarité n'est plus valide lorsque l'on considère des grandes différences de températures.

Certains matériaux présentent des « anomalies » dans la valeur du coefficient de dilatation α . Le cas le plus connu est celui de l'eau qui présente un comportement particulier dans sa phase liquide entre 0 °C et 4 °C. En effet lorsque la température augmente dans cet intervalle l'eau se contracte, ce qui correspond à un coefficient de dilatation thermique négatif. D'autres matériaux présentent de telles anomalies (tungstate de zirconium, germanate de cuivre et fer, borate de

strontium et de cuivre...) dont l'origine repose sur différents phénomènes physiques liés à l'évolution de la microstructure du matériau.

D'autre part le module de YOUNG est également affecté par un changement de température ; ce dernier diminue lorsque la température augmente. Ainsi une même force génère une déformation plus importante lorsque le matériau est à une température plus élevée.

Un matériau naturel [11], à quelques exceptions près dans une plage de température étroite, se dilate lorsqu'ils sont chauffés. Ceci est causé par les vibrations atomiques ou moléculaires à toutes les températures. L'amplitude et la population de densité d'états de ces vibrations (phonons) augmentent avec l'augmentation de la température. Le coefficient linéaire de dilatation thermique α_{ij} est défini comme

$$\alpha_{ij} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial T} \quad (I.15)$$

Où la déformation ε_{ij} et le CET linéaire α_{ij} sont des tenseurs symétriques de second ordre. Sur une petite plage de température de ΔT , la déformation $\underline{\varepsilon}$ peut être supposée directement proportionnelle au coefficient linéaire de la dilatation thermique $\underline{\alpha}$ et la relation constitutive entre la contrainte $\underline{\sigma}$ et la déformation $\underline{\varepsilon}$ et le changement de température ΔT est donné par la loi de DUHAMEL- NEUMANN [11] :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - C_{ijkl} \alpha_{kl} \Delta T \quad (I.16)$$

C_{ijkl} est le tenseur de rigidité du quatrième ordre.

1.7 Conduction thermique

L'énergie thermique peut être transférée par convection (liquide et gaz), rayonnement ou conduction (solide), dans notre cas on s'intéresse à la conduction (Figure I.10). La capacité d'un matériau à conduire la chaleur dépend fortement de sa composition [12]. C'est le gradient de température ∇T qui permet l'écoulement du flux de température Q , ce flux thermique se propage depuis la température la plus élevée vers la température la plus basse, suivant la loi de FOURIER [13] :

$$Q = -k \cdot \nabla T \quad (I.17)$$

Avec k est la conductivité thermique

La conservation d'énergie s'écrit de la manière suivante

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot Q = 0 \quad (I.18)$$

Où, C_p est la capacité thermique, ρ la masse volumique, et $(\frac{\partial T}{\partial t})$ est la variation de la température par rapport au temps. En insérant l'expression (I.18) dans (I.17), on obtient L'expression (I.19). Elle décrit la variation spatiale et temporelle de la température localement dans un solide [13]

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} - K \nabla^2 T = 0 \quad (\text{I.19})$$

En considérant la diffusivité thermique a

$$a = \frac{K}{\rho} C_p \quad (\text{I.20})$$

Et en remplaçant a dans (I.19), on obtient

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \nabla^2 T \quad (\text{I.21})$$

L'équation (I.21) montre la relation entre la température est la diffusivité ou la nature du matériau (masse volumique et capacité thermique) et la vitesse de l'écoulement. Ainsi, nous avons abordés les grandeurs physiques impliquées dans le phénomène de conduction thermique.

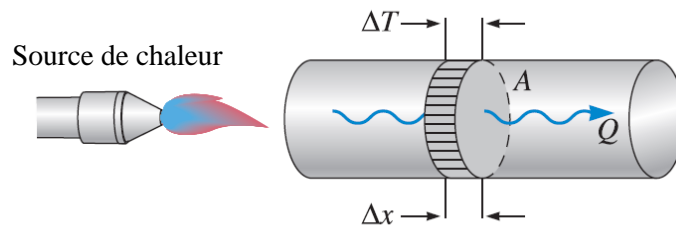


Figure I.10 : Lorsqu'une extrémité d'une barre est chauffée, un flux de chaleur Q , s'écoule vers l'extrémité froide à une vitesse déterminée par le gradient de température produit dans la barre [14]

CHAPITRE II

Notions d'homogénéisation en élasticité linéaire

Dans ce chapitre on s'intéresse essentiellement à la modélisation du comportement élastique linéaire des matériaux composites en deux parties. La première partie de ce chapitre est consacrée à la méthodologie de la modélisation multi-échelles. Nous présentons la démarche générale de cette modélisation dans le cadre de l'étude du comportement mécanique et thermique, en introduisant la notion d'homogénéisation, cette dernière est basée sur la détermination du volume élémentaire représentatif (VER). Dans la seconde partie, on présente quelques modèles analytiques utilisés pour l'estimation des propriétés effectives d'un matériau hétérogène à faible proportion volumique, dans le domaine de changement d'échelles formulés dans le cadre de la mécanique linéaire.

La micromécanique étudie le comportement mécanique effectif des matériaux hétérogènes en se basant sur les propriétés de chacune de leurs phases. La modélisation micromécanique des matériaux d'ingénierie est aujourd'hui une partie cruciale du processus de la conception, et les tests d'échantillons sont généralement effectués uniquement pendant la phase finale de validation de la conception [15].

Partie 1

Il n'est pas facile pour les ingénieurs de modéliser les microstructures des matériaux comme les composites. S'ils devaient tenir fidèlement compte de tous les détails de la microstructure, la charge du calcul pour exécuter une simulation par éléments finis serait bien au-delà des capacités informatiques actuelles. Les géométries complexes ont des microstructures complexes, la seule façon de les simuler est d'homogénéiser les propriétés du matériau. C.à.d. appliquer des techniques de simulation opérant sur différentes échelles (du nano au mm ou m) qu'on appelle techniques d'*homogénéisation*. Ces techniques sont basées sur un échantillon de volume élémentaire qui s'appelle le *volume élémentaire représentatif* (VER).

On compte dans notre investigation sur l'aspect élastique linéaire des matériaux, parce que ce dernier sert comme une base au développement de la micromécanique des petites déformations [16].

II.1 Technique de l'homogénéisation

L'homogénéisation d'une façon générale est une méthode de calcul et d'estimation des propriétés thermomécaniques des matériaux composites. Donc au lieu d'utiliser la méthode expérimentale qui s'appuie sur la réalisation de peut-être beaucoup d'expériences qui peuvent coûter du temps et de l'argent en plus des efforts d'acquisition d'équipements..., on préfère user des méthodes théoriques. Pour trouver une méthode théorique adéquate avec l'approche mécanique classique, c'est difficile ou presque impossible, c'est pour cela qu'on utilise souvent des techniques d'homogénéisation pour trouver des solutions théoriques fiable au problème de la conception et l'analyse mécanique et thermique. L'utilisation de ces méthodes ou (techniques) de l'homogénéisation mène à la compréhension du comportement macroscopique des matériaux composites ou (hétérogènes), en considérant le comportement du volume élémentaire représentatif le VER au niveau microscopique.

II.2 Volume Élémentaire Représentatif RVE

Le volume élémentaire représentatif VER est introduit par les auteurs dans ([17], [18], [19], [20] et [21]), c'est une microstructure contenant tous les éléments qui existent dans le matériau hétérogène considéré, i.e. contenir toutes les informations nécessaires sur le MC, les informations de la fraction volumique, le type, la taille, la forme, la distribution des inclusions, aussi de l'interface entre Matrice et inclusions...

Le VER doit être suffisamment grand pour représenter *statistiquement* la structure macroscopique, et suffisamment petit pour qu'on puisse lui appliquer la mécanique des milieux continus. On trouve plusieurs définitions du VER dans la littérature. Mais le plus important c'est qu'un VER doit être représentatif de la structure macroscopique ou (matériau composite).

Il est défini statistiquement microstructure homogène, toute microstructure hétérogène appartenant au volume analysé (Ω) (la structure macroscopique), indépendamment de son emplacement voir (Figure II. 1). S'il y a une homogénéité statistique, les caractéristiques de la microstructure des volumes V_1 , V_2 et V_3 sont semblables [22].

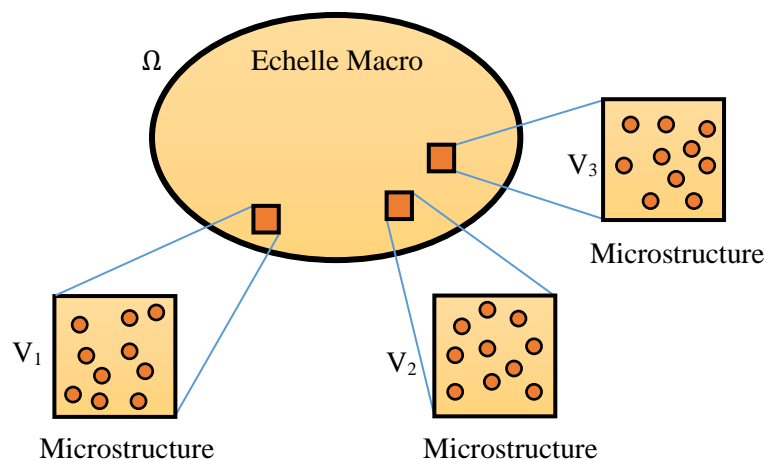


Figure II. 1 : Schéma explicatif l'homogénéité statistique

La définition précédente suggère que le VER devrait avoir une taille (L_2) (Figure II. 2), fortement supérieure à la taille (L_3) caractéristique des particules constituantes, mais en même temps doit être fortement inférieure à la dimension (L_1) de la structure à l'échelle macroscopique.

En résumé :

$$L_1 \gg L_2 \gg L_3.$$

Où

- L_1 , longueur de la structure, caractéristique de la charge appliquée ;
- L_2 , taille du VER considéré ;
- L_3 , taille des hétérogénéités microstructurales.

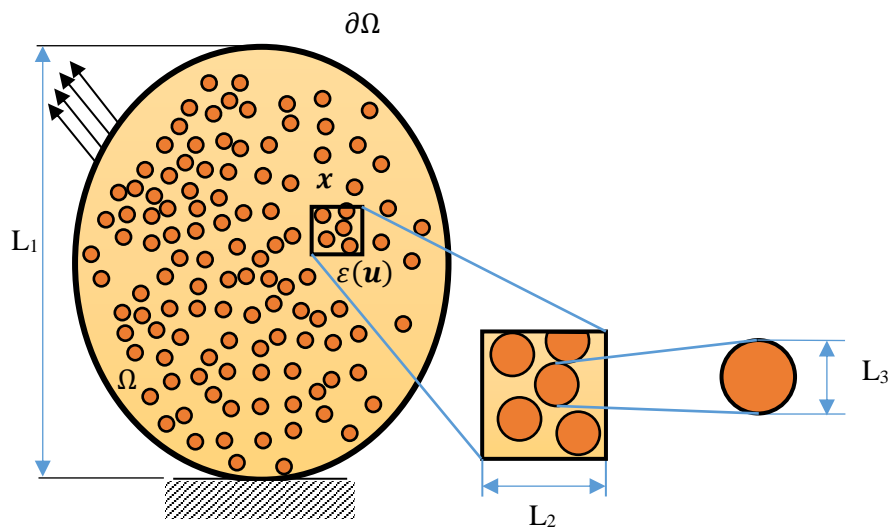


Figure II. 2 : Schéma illustratif de des échelles et la taille du VER [23]

II.3 Rappels sur la théorie d'élasticité et la micromécanique

La théorie d'élasticité se base sur les lois de la mécanique des milieux continus (CMM), cette matière considère généralement le comportement du solide en supposant qu'il n'y a ni vides, ni discontinuités ni différence de phases à l'intérieur. On va considérer le matériau *fictif* issu de l'homogénéisation comme étant un matériau effectivement homogène et isotrope, donc on peut lui appliquer les lois de la mécanique des milieux continue, et les analyses porteront sur le comportement macroscopique de la structure.

Dans les paragraphes qui suivent, nous donnerons quelques notions des concepts basiques de la théorie de l'élasticité et certains théorèmes de la micromécanique qui seront peut-être utilisés dans le reste du travail. Une importance particulière est donnée à l'élasticité anisotrope en trois dimensions et à la Théorie des *champs moyens* utilisés pour trouver les propriétés effectives des matériaux hétérogènes.

II.3.1 Relation déformation- déplacement et la loi du comportement linéaire

Dans la mécanique des milieux continus, on considère que le milieu est homogène et continu. L'état des contraintes (Figure II. 3) est caractérisé par la relation entre t_i ou \mathbf{t} et n_j (ou) \mathbf{n} . On définit alors le tenseur des contraintes de CAUCHY σ_{ij} ou $\underline{\sigma}$ au point P qui relie le vecteur traction et la normale avec la relation suivante :

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \quad (\text{ou}) \quad \mathbf{t} = \underline{\underline{\sigma}} \mathbf{n} \quad (\text{II.1})$$

Ou sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \quad (\text{II.2})$$

Où, t_i est le vecteur traction, agissant sur le contour (∂V) de la microstructure V ;

Et n_j est le vecteur unité, ils sont normaux au contour (∂V) de la microstructure V .

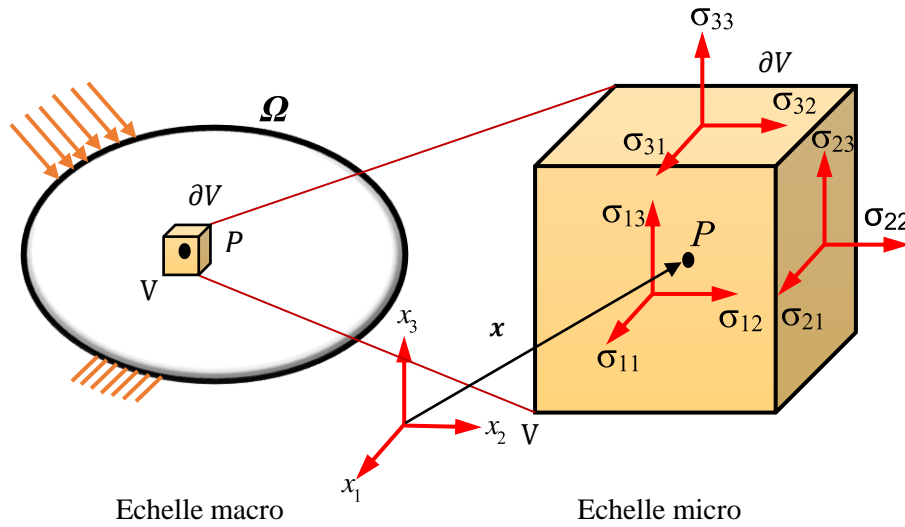


Figure II. 3 : Les composantes du tenseur de contraintes $\underline{\underline{\sigma}}(\mathbf{x})$, au point matériel P (le cuboïde), \mathbf{x} est le vecteur position du point P , les composantes sont donnés par rapport à la base de repère (x_1, x_2, x_3)

Dans ce travail, on va considérer l'hypothèse des déformations infinitésimales de CAUCHY. Ainsi, la relation entre déformation et déplacement est donnée par :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (\text{ou}) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \quad (\text{II.3})$$

Où, ε_{ij} est un tenseur du second ordre symétrique appelé tenseur de *déformations infinitésimales*, u_i est le champ de déplacement.

La loi de comportement linéaire ou l'équation constitutive linéaire d'un matériau élastique est écrit sous la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (\text{II.4})$$

Ou sous forme de notation indicielle

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (\text{II.5})$$

Où, $\underline{\underline{C}}$ ou C_{ijkl} est le tenseur d'ordre 4 de *rigidité*.

II.3.2 Equations d'équilibre et élasticité linéaire macroscopique

Le point matériel est considéré comme un élément infinitésimal dans le corps solide Ω , la condition d'équilibre des forces conduit à l'équation d'équilibre :

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (\text{II.6})$$

Où, b_i sont les forces du corps. La condition d'équilibre des moments conduit à la symétrie du tenseur des contraintes : $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

On définit la relation qui relie le tenseur de *déformation macroscopique* \mathbf{E} et le tenseur de *contrainte macroscopique* $\mathbf{\Sigma}$ sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{\Sigma} = \underline{\underline{C}} : \mathbf{E} \quad (\text{II.7})$$

Ou

$$\begin{pmatrix} \Sigma_{11} \\ \Sigma_{22} \\ \Sigma_{33} \\ \Sigma_{12} \\ \Sigma_{23} \\ \Sigma_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & \text{Sym.} & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ E_{12} \\ E_{23} \\ E_{31} \end{pmatrix}$$

Ici $\underline{\underline{C}}$ est le tenseur d'ordre 2 de *rigidité macroscopique*.

Plus tard on va voir que notre problème consiste à chercher la matrice de rigidité macroscopique homogénéisée ou effective d'un *matériau homogène équivalent*.

II.3.3 Champs de contraintes-déformations, échelle micro-macro

La plupart des modèles micromécaniques sont basés sur l'hypothèse que les échelles de longueur dans un matériau hétérogène sont parfaitement séparées. Ceci est interprété comme, pour chaque paire d'échelles micro-macro, les fluctuations des contributions aux champs à l'échelle de longueur inférieure influencent le comportement à l'échelle de longueur plus grande par leurs moyennes volumique et les fluctuations des champs de contrainte et de déformation.

Ce partage de la déformation et de contrainte dans les champs des fluctuations peut être écrit comme

$$\underline{\underline{\sigma}} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle + \tilde{\underline{\underline{\sigma}}} ; \underline{\underline{\varepsilon}} = \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle + \tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}}$$

Sous forme indicelle

(II.8)

$$\sigma_{ij} = \langle \sigma_{ij} \rangle + \tilde{\sigma}_{ij}; \quad \varepsilon_{ij} = \langle \varepsilon_{ij} \rangle + \tilde{\varepsilon}_{ij}$$

Où, $\underline{\sigma}$ (ou) σ_{ij} et $\underline{\varepsilon}$ (ou) ε_{ij} désignent respectivement, les champs micro-contrainte et micro-déformation.

$\tilde{\underline{\sigma}}$ (ou) $\tilde{\sigma}_{ij}$ et $\tilde{\underline{\varepsilon}}$ (ou) $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ désignent les fluctuations micro-échelle de ces champs. Et

$\langle . \rangle$ définie l'opérateur de la moyenne spatiale, tel que :

$$\langle . \rangle = \frac{1}{|V|} \int_V . dV \quad (\text{II.9})$$

L'homogénéisation computationnelle peut prendre plusieurs formes de système de premier ordre ou second ordre (i.e. le premier et le deuxième gradient du champ de déplacement, d'où le nom de « second ordre ») [24]. Dans notre travail on a considéré le système de premier ordre. On peut trouver un exemple de l'homogénéisation computationnelle, dont il est considéré un modèle de comportement multi-échelle basé sur une approche multi-niveaux éléments finis, dans FEYEL (1999) [25].

A partir d'un volume égal ou supérieur à celui du VER, on peut considérer le matériau composite comme s'il est homogène, donc le VER peut être considéré comme un échantillon qui représente le domaine global du matériau, ainsi, on peut tirer les propriétés du domaine global du matériau à partir de ce même VER.

Pour un aperçu des méthodes applicables en dessous de l'échelle continu. On suppose que le tenseur des déformations macroscopiques infinitésimales E_{ij} est la moyenne spatiale du tenseur des déformations infinitésimales ε_{ij} dans un VER [26]

$$\underline{\mathbf{E}} = \langle \underline{\varepsilon} \rangle_{VER}$$

Ou

(II.10)

$$E_{ij} = \langle \varepsilon_{ij} \rangle_{VER}$$

Ce champ de déformation à l'échelle microscopique n'est pas négligeable, et la moyenne doit être prise sur un VER. Ce champ n'est pas satisfaisant pour certaines quantités cinématiques dans l'analyse non linéaire [24].

De même, il est postulé que le tenseur des contraintes macroscopiques Σ_{ij} est la moyenne spatiale du tenseur des contraintes σ_{ij} sur le VER ([27], [28])

$$\underline{\Sigma} = \langle \underline{\sigma} \rangle_{VER}$$

Ou

(II.11)

$$\Sigma_{ij} = \langle \sigma_{ij} \rangle_{VER}$$

Dans le théorème de l'énergie moyenne de HILL, connue dans la littérature où la condition macro-homogénéité [17] exige que le volume de *travail moyen* exercé par les champs internes des contraintes et des déformations sur le VER est égal au travail local dans la macro-échelle. Ainsi, un matériau micro-hétérogène élastique linéaire est exprimé par la condition de HILL, comme suit :

$$\langle \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon} \rangle_{VER} = \underline{\Sigma} : \underline{E}$$

Ou (II.12)

$$\langle \sigma_{ij} : \varepsilon_{ij} \rangle_{VER} = \Sigma_{ij} : E_{ij}$$

Ou comme la relation suivante :

$$\langle \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon} \rangle_{VER} = \langle \underline{\sigma} \rangle_{VER} : \langle \underline{\varepsilon} \rangle_{VER} \quad (II.13)$$

micro-énergie de déformation Macro-énergie de déformation

Les relations (II.10), (II.11) et (II.12) sont essentielles dans la micromécanique, ils permettent d'interpréter le problème d'homogénéisation d'une façon à trouver un matériau homogène virtuel qui est énergétiquement équivalent à une microstructure donnée. Au même temps, elles assurent que, pour les matériaux avec répartition aléatoire, les propriétés effectives définies en termes d'énergie élastique coïncident avec celle définie en termes de la relation entre la contrainte et la déformation moyenne [26]. Il est important de noter que ces conditions ne sont pas satisfaites pour toutes les microstructures.

II.4 Etapes de modélisation d'un milieu hétérogène

Pour calculer le comportement effectif d'une structure composée d'un matériau hétérogène, nous procédons généralement en étapes, qui s'appellent les *étapes principales d'homogénéisation*.

Afin de construire des modèles de comportement prédictifs, des recherches ont été entreprises pour prendre en compte l'hétérogénéité de la matière à l'échelle microscopique dans la modélisation de son comportement macroscopique. La modélisation par changement d'échelles consiste à remplacer un milieu hétérogène avec un *milieu homogène équivalent* (MHE) voir (Figure II. 4), cette modélisation permet de :

- Simplifier la représentation du milieu hétérogène ;
- Etudier le comportement de matériaux hétérogènes en le considérant fictivement comme un matériau homogène.

L'homogénéisation donc, a pour but de remplacer un matériau ou une structure hétérogène par un milieu homogène de comportement équivalent (Figure II. 4). Pour atteindre cet objectif, la plupart des modélisations micromécaniques suivent les trois étapes de l'homogénéisation :

- La représentation : définition des phases, description de leur répartition spatiale et de leur comportement mécanique
- La localisation : modélisation mécanique et détermination des relations entre champs locaux et grandeurs macroscopiques
- L'homogénéisation : opération de moyenne et détermination du comportement effectif.

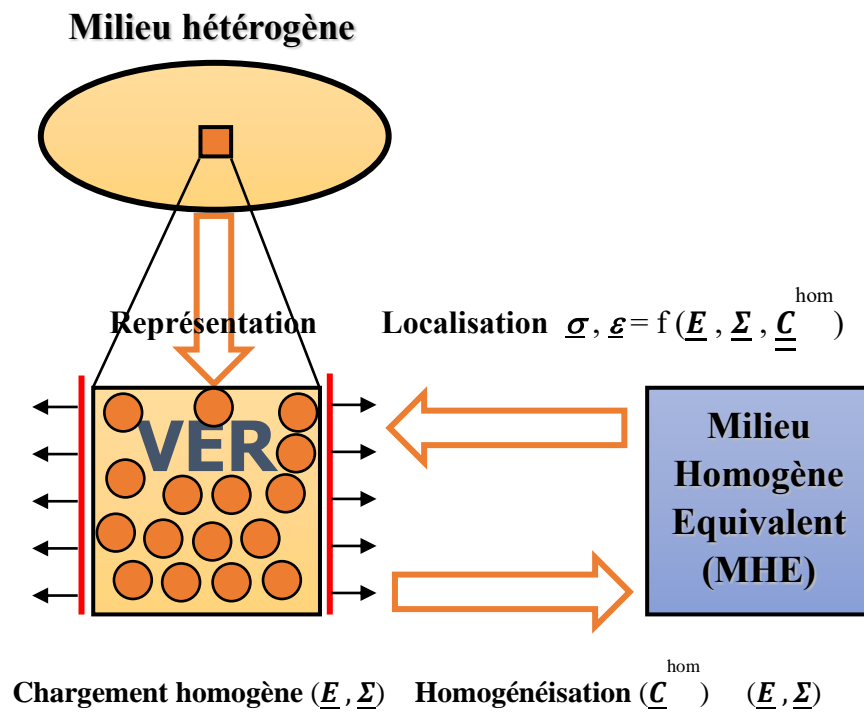


Figure II. 4 : Etapes principales d'homogénéisation [29]

Nous rappelons ci-dessous avec plus de détails chacune de ces étapes d'homogénéisation, en prenant en considération les *conditions aux limites*. On peut citer dans ce qui suit quelques conditions aux limites pour le comportement mécanique :

- Conditions aux limites cinématiquement uniformes : le champ de déplacement u_i est uniforme sur toute la surface extérieure ∂V du VER

$$u_i = E_{ij} x_j, \quad \forall x_j \in \partial V \tag{II.14}$$

E_{ij} est le tenseur macroscopique imposé de déformation d'ordre 2, indépendant de x_j

- Conditions aux limites statiquement uniformes : le champ de tractions $\sigma_{ij} n_j$ est uniforme sur toute la surface ∂V du VER, et compatibles avec un champ de contrainte macroscopique Σ_{ij}

$$\sigma_{ij} n_j = \Sigma_{ij} n_j \quad \forall x_j \in \partial V \quad (\text{II.15})$$

Σ_{ij} est le tenseur macroscopique imposé de contrainte d'ordre 2, indépendant de x_j

- Les conditions aux limites périodiques (CPL) : Le champ déplacement u_i dans tout le volume V du VER prend la forme

$$u_i = E_{ij} x_j + v_i \quad \forall x_j \in V \quad (\text{II.16})$$

Où, v_i est la fluctuation périodique, elle prend les mêmes valeurs dans deux points homologues situés sur deux faces opposées du VER. De la même façon, le vecteur traction $\sigma_{ij} n_j$ prend les mêmes valeurs dans deux points homologues situés sur deux faces opposées du VER.

Ainsi, la démarche de modélisation par changement d'échelles est composée classiquement des étapes suivantes :

II.4.1 Représentation

La représentation est la collection de toutes les informations concernant le matériau composite ou hétérogène pris en considération. Ainsi, dans cette étape, le nombre de phases contenues dans le VER est très important. On doit déterminer la nature des paramètres permettant la description des phases correspondantes, ensuite, caractériser le comportement mécanique de chaque phase et enfin décrire la géométrie et la proportion de chaque phase. Pour une détermination exacte du comportement effectif du matériau composite, il est nécessaire de connaître de manière précise la répartition spatiale des phases. La fraction volumique de renforts est le paramètre commun à tous les modèles. Le comportement microscopique élastique de chaque phase « p » est donné par :

$$\underline{\underline{\sigma}}_p = \underline{\underline{C}}_p : \underline{\underline{\varepsilon}}_p$$

Et (II.17)

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_p = \underline{\underline{S}}_p : \underline{\underline{\sigma}}_p$$

Où, $\underline{\underline{\sigma}}_p$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}_p$ sont respectivement, les contraintes et déformations locales de la phase p ;

$\underline{\underline{C}}_p$ et $\underline{\underline{S}}_p$ sont respectivement, les tenseurs de rigidité et de souplesse de la phase p .

II.4.2 Localisation

La localisation est l'inverse de l'homogénéisation, où le modèle micromécanique est utilisée pour récupérer le comportement des constituants à partir du comportement macro sur la structure. On considère dans cette étape le VER déterminé dans la représentation. Il s'agit donc de relier des grandeurs mécaniques microscopiques locales avec des grandeurs macroscopiques. C'est-à-dire, on recherche, pour chaque phase « p », les relations entre les déformations ou les contraintes

moyennes locales $\langle \underline{\varepsilon} \rangle$ (ou) $\langle \underline{\sigma} \rangle$ et les déformations ou contraintes macroscopiques imposées \underline{E} (ou) $\underline{\Sigma}$. Les grandeurs moyennes de chaque phase p sont définies par les expressions suivantes :

$$\langle \underline{\sigma} \rangle_p = \frac{1}{|V|} \int_V \underline{\sigma}_p dV$$

Et

(II.18)

$$\langle \underline{\varepsilon} \rangle_p = \frac{1}{|V|} \int_V \underline{\varepsilon}_p dV$$

Les relations de localisation des déformations et de concentration des contraintes à partir des quantités moyennes sont :

$$\langle \underline{\varepsilon} \rangle_p = \underline{A}_p : \underline{E}$$

Et

(II.19)

$$\langle \underline{\sigma} \rangle_p = \underline{B}_p : \underline{\Sigma}$$

Où, \underline{A}_p et \underline{B}_p désignent respectivement les tenseurs de localisation de déformations et de concentration des contraintes de la phase p .

II.4.3 Homogénéisation

L'homogénéisation est le remplacement d'un matériau hétérogène par un matériau homogène équivalent virtuel, qui se comporte de la même manière que celui-ci, dans le but de simplifier l'étude ou la conception des structures hétérogènes. Donc cette étape consiste à déterminer le comportement équivalent du matériau hétérogène. Les propriétés effectives de ce matériau relient le champ de contrainte moyenne $\langle \underline{\sigma} \rangle$ au champ de déformation moyenne $\langle \underline{\varepsilon} \rangle$, calculés dans un VER comme dans les équations :

$$\langle \underline{\varepsilon} \rangle = \sum_{p=1}^n f_p \langle \underline{\varepsilon} \rangle_p$$

Et

(II.20)

$$\langle \underline{\sigma} \rangle = \sum_{p=1}^n f_p \langle \underline{\sigma} \rangle_p$$

Avec n représente le nombre des phases du matériau hétérogène. A partir des conditions aux limites imposées équations (II.14), (II.15) et (II.16), les contraintes et les déformations locales doivent vérifier les relations suivantes :

$$\underline{\Sigma} = \langle \underline{\sigma} \rangle \text{ Et } \underline{E} = \langle \underline{\varepsilon} \rangle$$
(II.21)

En prenant en considération les équations (II.19), (II.20) et (II.21), on peut déduire les propriétés des tenseurs $\underline{\underline{A}}_p$ et $\underline{\underline{B}}_p$:

$$\sum_{p=1}^n f_p \underline{\underline{A}}_p = \underline{\underline{I}}$$

Et

$$\sum_{p=1}^n f_p \underline{\underline{B}}_p = \underline{\underline{I}}$$

Où, f_p désigne la fraction volumique du domaine occupé par la phase p

$\underline{\underline{I}}$ est le tenseur d'identité d'ordre 4

La relation constitutive pour le matériau hétérogène est donnée par :

$$\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle = \underline{\underline{C}} : \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle \quad (\text{II.23})$$

En utilisant les équations (II.22) et (II.23), on obtient le tenseur de rigidité équivalent $\underline{\underline{C}}$ qui s'exprime en fonction des tenseurs de rigidité $\underline{\underline{C}}_p$ de chaque phase p et des tenseurs de localisation $\underline{\underline{A}}_p$ de la déformation dans chaque phase p :

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^n f_p \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_p = \underline{\underline{C}} : \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle &\Rightarrow \sum_{p=1}^n f_p \underline{\underline{C}}_p \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_p = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{E}} \Rightarrow \left(\sum_{p=1}^n f_p \underline{\underline{C}}_p \underline{\underline{A}}_p \right) : \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{E}} \Rightarrow \\ \underline{\underline{C}} &= \sum_{p=1}^n f_p \underline{\underline{C}}_p \underline{\underline{A}}_p \end{aligned} \quad (\text{II.24})$$

Le tenseur de rigidité équivalent d'un matériau hétérogène dépend donc du tenseur de localisation. Ce tenseur de localisation dépend de chaque modèle d'homogénéisation.

L'approche énergétique définit $\underline{\underline{C}}$ comme le tenseur reliant la moyenne de l'énergie de déformation microscopique à l'énergie de déformation macroscopique :

$$\langle \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle = \frac{1}{2} \underline{\underline{E}} : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{E}} \quad (\text{II.25})$$

Où, $\underline{\underline{C}}$ est le tenseur des rigidités défini en tout point du VER.

Si l'on n'ajoute pas des conditions supplémentaires sur les champs de déformation et de contrainte. Ces deux définitions ne fournissent pas la même valeur du comportement apparent. L'équivalence entre les deux approches est assurée par la condition de macro-homogénéité ou condition de HILL, qui impose l'égalité du travail macroscopique et de la moyenne du travail microscopique [30] :

$$\frac{1}{2} \langle \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\sigma}} \rangle = \frac{1}{2} \underline{\underline{E}} : \underline{\underline{\Sigma}} \quad (\text{II.26})$$

Partie 2

Cette partie récapitule quelques modèles analytiques utilisables en élasticité linéaire dans un matériau hétérogène biphasique (02 phases), dans le but d'estimer les propriétés mécaniques et thermiques de ces matériaux. Dans le paragraphe II.5 on considère f la fraction volumique de l'inclusion.

II.5 Présentation de quelques modèles d'homogénéisation analytiques pour l'estimation des propriétés mécaniques

Un aspect important dans l'étude des modèles micromécaniques est de savoir si ces méthodes utilisées donnent des résultats cohérents. Les limites de VOIGT et REUSS ([31], [32]) et HASHIN-STRIKMAN ([33], [34]) sont utilisés pour vérifier les limites des modèles analysés, en d'autres termes, les résultats obtenus par les autres modèles devraient se situer dans la région formée par ces limites.

Différents modèles et limites pour la prédiction des propriétés mécaniques des MCs à deux phases sont examinées. Ces modèles comprennent les approximations de VOIGT et REUSS (règle de mélange), les bornes de type HASHIN-SHTRIKMAN. On peut ajouter aussi, les modèles comme : Auto-cohérent (Self-consistent) généralisé, MORI-TANAKA et autres non considérés dans ce travail.

Ainsi, on a deux sortes de méthodes analytiques : a) les bornes ou (limites) qui nous donnent la fourchette des valeurs des propriétés effectives estimées et b) les méthodes qui donnent des estimations directes à ces propriétés.

II.5.1 Bornes de VOIGT et REUSS

Il y a parmi les modèles analytiques utilisés pour l'estimation des propriétés ou modules élastiques effectives d'un matériau composite (tenseur effectif ou *homogénéisé* de rigidité \underline{C}^{hom} , tenseur effectif ou homogénéisé de souplesse \underline{S}^{hom}), le modèle de VOIGT [32] qui est considéré comme étant une limite supérieure que la propriété effective ne doit pas franchir (Figure II. 5). Pour des constituants isotropes d'un MC, Le module effectif du composite C est donnée par l'expression suivante

$$C = fC_i + (1 - f)C_m \quad (\text{II.27})$$

Tels que, C_i est le module de l'inclusion et C_m le module de la matrice.

Les équations (II.28) et (II.29) représentent les expressions utilisées pour calculer les modules effectifs de compressibilité k^V et de cisaillement μ^V (les bornes supérieures de VOIGT) :

$$k^V = f k_i + (1 - f) k_m \quad (\text{II.28})$$

$$\mu^V = f \mu_i + (1 - f) \mu_m \quad (\text{II.29})$$

Où, k_i et k_m sont respectivement, les modules de compressibilité de l'inclusion et la matrice, et μ_i et μ_m sont respectivement, les modules de cisaillement de l'inclusion et la matrice

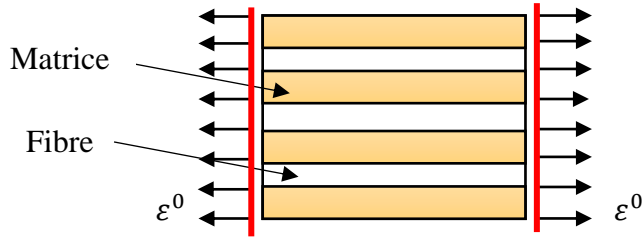


Figure II. 5 : Direction de déformation utilisée par la limite VOIGT pour calculer la rigidité du composite

Dans la figure ci-dessus, ε^0 est une charge appliquée sur le matériau composite, c'est une déformation supposée la même pour les deux constituants du composite.

Dans ce cas le tenseur de rigidité homogénéisé $\underline{\underline{c}}^{hom}$ est donné par l'expression suivante :

$$\underline{\underline{c}}^{hom} = \langle \underline{\underline{c}}(\mathbf{x}) \rangle \quad (\text{II.30})$$

Tel que, $\langle \underline{\underline{c}}(\mathbf{x}) \rangle$ est la moyenne spatiale du tenseur de rigidité microscopique.

Comme le modèle de VOIGT, le modèle de REUSS est aussi considéré comme un seuil pour évaluer les propriétés élastiques effectives d'un matériau composite (Figure II. 6). Ainsi, ce modèle est la limite inférieure que la propriété effective du composite ne doit pas franchir. Pour des constituants isotropes du composite, la propriété effective C est donnée par l'expression suivante :

$$\frac{1}{c} = \frac{f}{c_i} + \frac{1-f}{c_m} \quad (\text{II.31})$$

Les modules effectifs de compressibilité k^R et de cisaillement μ^R de REUSS sont donnés par les expressions suivantes :

$$k^R = \frac{k_i k_m}{(1-f)k_i + f k_m} \quad (\text{II.32})$$

$$\mu^R = \frac{\mu_i \mu_m}{(1-f)\mu_i + f \mu_m} \quad (\text{II.33})$$

Où, k_i , k_m et μ_i , μ_m sont les mêmes que ceux du modèle de REUSS

Dans ce cas le tenseur de souplesse homogénéisé $\underline{\underline{s}}^{hom}$ en fonction de la moyenne spatiale du tenseur de souplesse microscopique $\langle \underline{\underline{s}}(\mathbf{x}) \rangle$ est donné par la relation :

$$\underline{s}^{hom} = \langle \underline{s}(x) \rangle \quad (\text{II.34})$$

Dans la (Figure II. 6), σ^0 est une charge appliquée sur le matériau composite, c'est une contrainte, où sa force est supposée la même pour les deux constituants du composite.

Les bornes de VOIGT et de REUSS sont moins serrées que les bornes des autres modèles comme HASHIN-STRICKMAN.

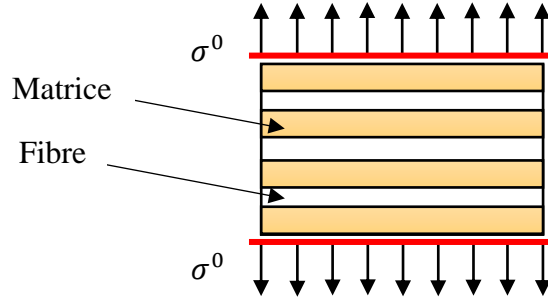


Figure II. 6 : Direction de contraintes utilisée par la limite Reuss pour calculer la rigidité du composite

II.5.2 Bornes de HASHIN-SHTRIKMAN

Les limites ou les bornes de HASHIN-SHTRIKMAN ([33], [34]) sont les plus souvent utilisées dans la littérature, car ils ont un intervalle plus serré. Pour les composites macroscopiquement isotropes avec deux phases isotropes m (matrice) et i (inclusions), les limites de module de compressibilité effectif k^{HS} et de module de cisaillement effectif μ^{HS} sont données par les expressions :

$$k^{HS+} = k_i + \frac{1-f}{(k_m - k_i)^{-1} + f \left(k_i + \frac{4}{3}\mu_i\right)^{-1}} \quad (\text{II.35})$$

$$k^{HS-} = k_m + \frac{f}{(k_i - k_m)^{-1} + (1-f) \left(k_m + \frac{4}{3}\mu_m\right)^{-1}} \quad (\text{II.36})$$

$$\mu^{HS+} = \mu_i + \frac{1-f}{(\mu_m - \mu_i)^{-1} + \frac{6f(k_i + 2\mu_i)}{5\mu_i(3k_i + 4\mu_i)}} \quad (\text{II.37})$$

$$\mu^{HS-} = \mu_m + \frac{f}{(\mu_i - \mu_m)^{-1} + \frac{6(1-f)(k_m + 2\mu_m)}{5\mu_m(3k_m + 4\mu_m)}} \quad (\text{II.38})$$

Les équations (II.35) à (II.38) représentent les plages des valeurs extrêmes pour les modules d'élasticité effectives.

Avec : $k_m > k_i$ et $\mu_i > \mu_m$ sont respectivement les modules de compressibilités et de cisaillement pour les deux phases. Les signes $^+$ et $^-$ désignent respectivement les bornes supérieures et inférieures.

Le schéma de HASHIN-SHTRIKMAN est le même que pour la méthode auto-cohérente mais le matériau homogène équivalent entourant des différents constituants est remplacé par un matériau de comparaison. Si le matériau de comparaison est plus « raide », on trouve la borne supérieure de la rigidité du composite, par contre, si le matériau de comparaison est plus « souple », on aboutit à la borne inférieure de la rigidité du composite. Ces bornes conduisent à des prédictions plus serrées que celles fournies par les bornes de VOIGT et REUSS.

II.5.3 Modèle Auto-cohérent (Self-consistent) généralisé

Pour un matériau isotrope en 3D contenant des particules avec des modules de compressibilité (k_m pour matrice, k_i pour inclusion) et des modules de cisaillement (μ_m pour matrice, μ_i pour inclusion) l'estimation obtenue par le modèle Auto-cohérent (self-consistent) généralisé peut-être écrite par l'expression :

$$k^{ACG} = k_m + \frac{f(k_i - k_m)}{1 + \left(\frac{k_i - k_m}{k_m + \frac{4}{3}\mu_m}\right)(1-f)} \quad (\text{II.39})$$

Le module de cisaillement peut être calculé avec la solution de l'équation de deuxième degré (II.40) qui contient les paramètres A, B, C [35].

$$A \left(\frac{\mu^{ACG}}{\mu_m}\right)^2 + B \left(\frac{\mu^{ACG}}{\mu_m}\right) + C = 0 \quad (\text{II.40})$$

II.5.4 Modèle MORI-TANAKA

C'est un autre modèle mathématique d'homogénéisation analytique, les équations mathématiques qui donnent les modules effectifs de compressibilité k^{MT} et de cisaillement μ^{MT} sont [35] :

$$k^{MT} = k_m \left(1 + \frac{f(k_i - k_m)}{k_m + \alpha(1-f)(k_i - k_m)}\right) \quad (\text{II.41})$$

$$\mu^{MT} = \mu_m \left(1 + \frac{f(\mu_i - \mu_m)}{\mu_m + \beta(1-f)(\mu_i - \mu_m)}\right) \quad (\text{II.42})$$

Avec
$$\alpha = \frac{3k_m}{3k_m + 4\mu_m}, \quad \beta = \frac{6(k_m + 2\mu_m)}{5(3k_m + 4\mu_m)}$$

II.6 Présentation de quelques modèles d'homogénéisation analytiques pour déterminer les propriétés thermoélastique (conductivité et expansion thermiques)

Il existe plusieurs modèles d'homogénéisation analytique utilisés dans l'estimation de la conductivité thermique effective et le coefficient de l'expansion thermique effectif. Mais, dans notre cas, on va s'intéresser seulement dans le chapitre IV à l'expansion thermique du matériau composite.

II.6.1 Modèles d'homogénéisation pour la conductivité thermique

Les matériaux des constituants (matrice + renforts) utilisés pour déterminer la conductivité thermique effective d'un MC sont considérés comme des matériaux élastiques et isotropes.

II.6.1.1 Modèle de MORI-TANAKA adapté par HATTA et TAYA

Le modèle de MORI et TANAKA [36] a été formulé pour déterminer les propriétés de la conductivité thermique effectives. Pour cela HATTA et TAYA [37] ont présenté une analogie avec la méthode d'inclusion équivalente d'ESHELBY [38]. Ces auteurs ont considéré les analogies suivantes :

$$\underline{\underline{\sigma}} \rightarrow \underline{Q} \quad (\text{II.43})$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} \rightarrow \underline{T}_i \quad (\text{II.44})$$

$$\underline{\underline{C}} \rightarrow \underline{K} \quad (\text{II.45})$$

Où, $\underline{\underline{\sigma}}$ est le tenseur d'ordre 2 des contraintes, \underline{Q} le tenseur d'ordre 1 du flux thermique, $\underline{\underline{\varepsilon}}$ est le tenseur d'ordre 2 des déformations, \underline{T}_i le tenseur d'ordre 1 du gradient de la température, $\underline{\underline{C}}$ est le tenseur d'ordre 4 de la rigidité, \underline{K} le tenseur d'ordre 2 de la conductivité thermique.

En appliquant la méthode d'inclusion équivalente pour la conductivité thermique, HATTA et TAYA déduisent le modèle analogue à celui de MORI-TANAKA, pour déterminer la conductivité thermique effective.

Ainsi, on peut écrire une expression pour le tenseur de conductivité thermique effective $K_{(ii)}$ d'un matériau homogénéisé biphasé et pour une inclusion sphérique comme suit

$$K_{(ii)} = K_m + \frac{f(K_i - K_m)K_m}{\frac{1}{3}(K_i - K_m)(1-f) + K_m} \quad (\text{II.46})$$

Où, K_i et K_m sont respectivement, les tenseurs de conductivité thermique de l'inclusion et la matrice, f est la fraction volumique des inclusions.

II.6.1.2 Modèle de HASHIN et STRIKMAN

En utilisant les mêmes analogies décrites dans (II.43) à (II.45), HASHIN (1983) [21] a développé un modèle pour déterminer la conductivité thermique. Un tel modèle considère que le gradient de température dans l'inclusion est uniforme pour l'inclusion ellipsoïdale soumise à un champ de température linéaire.

Ce modèle analytique à deux phases, considère les composites macroscopiquement isotropes et les composites transversalement isotropes, c'est-à-dire les composites renforcés par des fibres courtes distribuées de façon aléatoire et des fibres longues unidirectionnelles, respectivement. Pour le cas des fibres courtes, l'expression déduite par HASHIN est présentée ci-dessous

$$K^{hom} = K_m + \frac{f}{\frac{1}{K_i - K_m} + \frac{(1-f)}{K_m}} \quad (\text{II.47})$$

Avec, K^{hom} est la conductivité thermique homogénéisée du composite, les paramètres K_m , K_i et f sont les mêmes que le procédé ci-dessus.

II.6.2 Modèles d'homogénéisation pour l'expansion thermique

Il existe plusieurs méthodes analytiques pour prédire le coefficient de dilatation thermique CET. Parmi eux, on trouve :

II.6.2.1 Modèle de mélange ROM

La règle de mélange (ROM) est une moyenne linéaire de la matrice et du CET de l'inclusion basés sur la fraction volumique [39]. L'équation de premier ordre, l'hypothèse de REUSS concernant la contrainte uniforme dans les matériaux composites, est exprimée comme suit

$$\alpha_c = f_p \alpha_p + f_m \alpha_m \quad (\text{II.48})$$

La deuxième équation est la limite supérieure de VOIGT [40], le coefficient de dilatation thermique effectif α_c est donné par

$$\alpha_c = \frac{f_p E_p \alpha_p + f_m E_m \alpha_m}{f_p E_p + f_m E_m} \quad (\text{II.49})$$

Où : α_p et α_m sont respectivement les coefficients de dilatation thermique de l'inclusion et de la matrice. f_p et f_m sont respectivement, les fractions volumiques de l'inclusion et de la matrice. E_p et E_m sont respectivement, les modules de YOUNG de l'inclusion et de la matrice.

II.6.2.2 Modèle de TURNER

Un autre modèle mathématique permettant de prédire le CET d'un composite est le modèle de TURNER [41]. Ce modèle incorpore le module de matériaux vrac des constituants et exprimé comme

$$\alpha_c = \frac{f_p k_p \alpha_p + f_m k_m \alpha_m}{f_p k_p + f_m k_m} \quad (\text{II.50})$$

Où k_p et k_m représentent respectivement les modules de compressibilité de l'inclusion et de la matrice. α_c , α_m , α_p , f_p et f_m sont les mêmes que dans le procédé ci-dessus.

II.6.2.3 Modèle de SHAPERY

La dernière méthode est le modèle de SCHAPERY [42]. Ce modèle consiste en deux équations qui développent une limite supérieure et inférieure pour le CTE effectif d'un composite. La limite supérieure est donnée par

$$CET_c^u = \alpha_m + \frac{k_p(k_m - K_c^l)(\alpha_p - \alpha_m)}{K_c^l(k_m - k_p)} \quad (\text{II.51})$$

Et la limite inférieure par

$$CET_c^l = \alpha_m + \frac{k_p(k_m - K_c^u)(\alpha_p - \alpha_m)}{K_c^u(k_m - k_p)} \quad (\text{II.52})$$

Où les indices u et l représentent les bornes supérieure et inférieure K_c^u et K_c^l , ils sont calculés à partir du modèle H-S en utilisant les équations ci-dessous

$$K_c^u = k_p + \frac{f_m}{\frac{1}{k_m - k_p} + \frac{3f_p}{3k_p + 4\mu_p}} \quad (\text{II.53})$$

Et

$$K_c^l = k_m + \frac{f_p}{\frac{1}{k_p - k_m} + \frac{3f_m}{3k_m + 4\mu_m}} \quad (\text{II.54})$$

Dans les équations de SCHAPERY et H-S, toutes les variables sont identiques à celles des deux modèles précédents, μ_m et μ_p représentent respectivement, les modules de cisaillement de la matrice et de l'inclusion.

II.7 Processus de calcul des propriétés élastiques d'un matériau composite à particule et à matrice métallique à l'aide de la technique des éléments finis

Dans la phase de calcul des propriétés mécaniques et thermiques, on utilise des modèles de microstructures qu'on appelle des volumes élémentaires (VE), ces VEs sont générées à l'aide d'un script PYTHON dans un logiciel open source BLENDER [43].

Après avoir générer les microstructures et les importer dans un logiciel de conception mécanique code « COMSOL MULTIPHYSICS », on leurs applique les charges imposées, les conditions aux limites, on attribue des matériaux à toutes les phases de ces microstructures, on passe à la phase de maillage en nombre suffisant d'éléments finis qui va nous permettre de se rapprocher d'une façon correcte à la solution du problème.

Après le maillage des VEs, on passe au calcul de leurs propriétés mécaniques et thermiques moyennes qui vont représenter les propriétés élastiques apparentes du matériau homogène équivalent.

La technique du maillage et de l'analyse présentée ici, est basée sur l'étude statique par éléments finis de la réponse élastique que présente la microstructure après avoir subi des chargements mécaniques choisis, et en respectant des *conditions aux limites périodiques* (CPL) choisie parmi d'autres types de conditions aux limites. La géométrie du composite à particules simples dans une cellule 3D est entièrement déterminé par les données de centres des particules et son diamètre.

II.7.1 Méthode de génération des microstructures à particules

La génération des structures microscopiques utilise plusieurs techniques, parmi elles, on trouve celle qui repose sur un dispositif qui s'appelle *Micro-tomographie* et celle qui s'appuie sur la *programmation numérique*.

- La première technique (Micro-tomographie) (Figure II. 7), est représentée par les étapes suivantes :
 - Le prélèvement d'un petit échantillon et le placer sur l'appareil de polissage, pour lui donner une surface lisse et claire ;
 - L'obtention des images microscopiques successives de cet échantillon ;
 - La « binarisation » de ces images pour les rendre en noir et blanc, grâce au logiciel inclus dans l'appareil (Micro-tomographie) ;

- La collection de ces images afin d'obtenir un modèle en trois dimensions (3D) pour l'échantillon ;
- Le maillage 3D de l'échantillon effectué par le logiciel de l'appareil ;
- La simulation faite par la même appareil.

Pour obtenir à la fin, les résultats, qui sont les propriétés physiques, mécaniques ou autres de ce matériau. L'organigramme de la (Figure II. 8) résume les étapes utilisées par le Micro-tomographe.

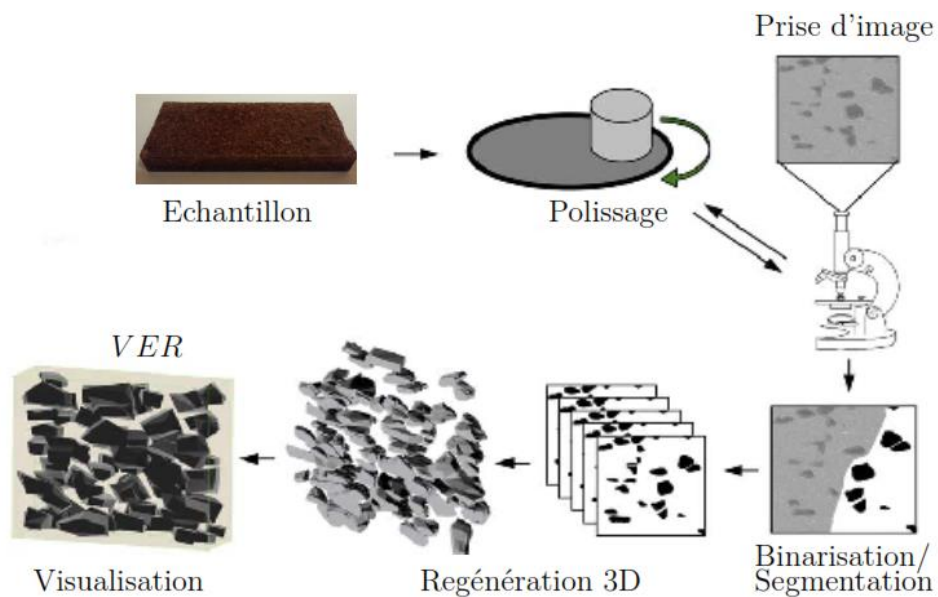


Figure II. 7 : Etape de préparation et génération d'une microstructure réelle par le Micro-tomographe [35]

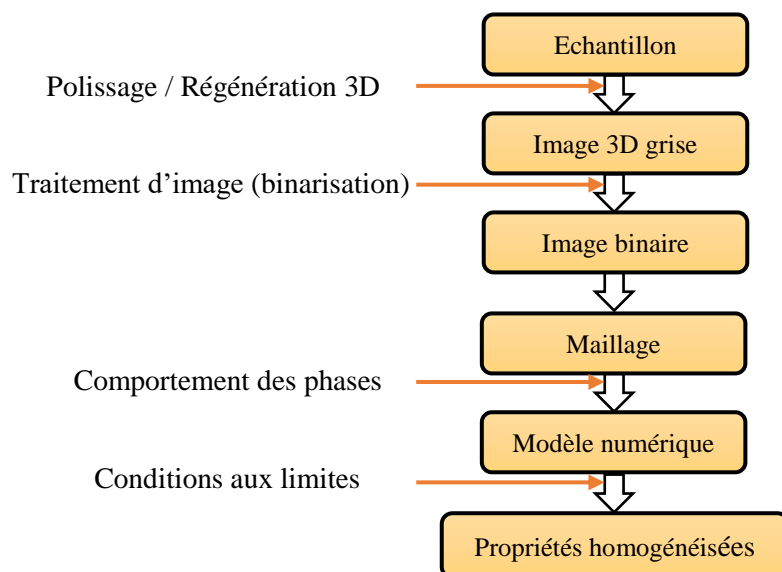


Figure II. 8 : Schéma de la procédure de traitement d'une microstructure réelle pour la simulation [43]

- La deuxième technique utilise plusieurs méthodes qu'on appelle « méthodes de génération ou reconstitution de forme » LUBACHEVSKY et al. [44], parmi ces méthodes on trouve :

- La méthode de génération dite d'*addition séquentielle aléatoire* (RSA),
- La dynamique moléculaire (DM).

Le modèle d'addition séquentielle aléatoire ou Random Sequential Addition RSA (Figure II. 9) est le positionnement des particules l'une après l'autre dans un volume de dimensions constantes, jusqu'à l'obtention de la fraction volumique voulue des particules, et cela par le tirage d'un nombre de points (coordonnées) d'une façon aléatoire, ces points sont les centres des particules. Durant le tirage de chaque particule, on vérifie la condition de non d'interconnexion (chevauchement) de cette dernière avec les particules déjà tirées. En cas d'interconnexion, le tirage est éliminé et un nouveau tirage est fait. Chaque particule positionnée est définitivement fixée dans sa position. Cette méthode semble être plus facile et adapté pour la génération et la distribution aléatoire de particules « dures ». On peut trouver quelques détails sur l'utilisation de ce modèle dans [45]. La RSA a été utilisée dans plusieurs domaines scientifiques comme dans : la biologie, la corrosion, la mécanique, les matériaux composites et les mathématiques. Elle a participé dans des travaux comme, l'oxydation des polymères [46], et les travaux dans ([47], [48]) et autres. Cette méthode ne permet pas d'atteindre des fractions volumiques de particules supérieures à 40 %.

Autre méthode de génération des particules avec la distribution aléatoire dans une cellule élémentaire est basée sur la dynamique moléculaire ou le Modèle de LUBACHEVSKY et STILLINGER [49]. Ces derniers ont développé un nouvel algorithme basé sur la dynamique moléculaire permettant dans un premier temps de disperser des disques dans une cellule élémentaire 2D. En 1991, les auteurs LUBACHEVSKY et *al.* [44] ont étendu l'algorithme au cas de sphères dispersées aléatoirement dans un cube élémentaire 3D.

Cet algorithme part du principe qu'au temps initial toutes les inclusions sont créées et ont un volume nul. Une position et un vecteur vitesse leurs sont attribués aléatoirement. Les particules sont ensuite mises en mouvement et leur volume augmente à chaque itération jusqu'à atteindre la fraction volumique souhaitée. A chaque itération deux types d'événements sont vérifiés :

- Les collisions entre particules ;
- Les collisions entre les particules et les faces de la cellule élémentaire.

Dans le cas des collisions entre particules, leurs vecteurs vitesses sont misent à jour selon le principe de l'énergie cinétique. Dans le cas où une particule quitte la cellule à travers une face, elle doit rentrer par la face opposée afin d'assurer les conditions aux limites de périodicité.

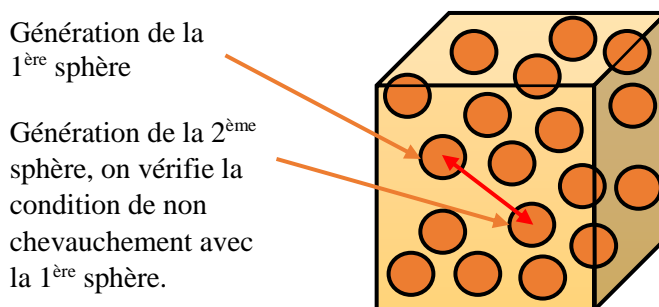


Figure II. 9 : Technique de génération RSA

Les travaux de LUBACHEVSKY et STILLINGER [49] ont été étendus au cas de particules non sphériques par DONEV [50] (Figure II. 10), par la définition du concept de « proche voisin » permettant de limiter la vérification des collisions entre particules.

En effet, DONEV [50] a défini une limite de voisinage pour chaque particule. La collision entre deux particules est vérifiée si leurs limites de voisinage se superposent. Cependant, il est constaté que cet algorithme est plus efficace pour des systèmes de particules ayant un rapport de forme faible et avec des variations de taille des particules faibles.

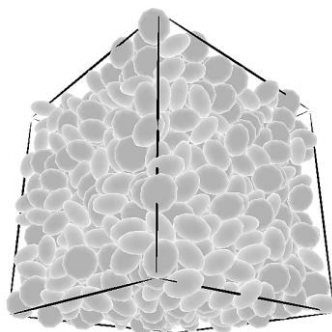


Figure II. 10 : Groupe d'ellipsoïdes aplatis généré en utilisant l'algorithme de la dynamique moléculaire, nombre d'ellipsoïdes = 1000, fraction volumique = 70%, et le rapport de forme (aspect ratio) = 1.9, proche des bonbons M&M's Donev [50]

Dans ce travail, on a opté pour une méthode de génération RSA, ainsi on a utilisé un code (Script) réalisé par BOUTAANI et *al.* [43], cet outil permet de générer différentes microstructures avec différentes géométries (sphères, cylindres ou autre forme géométrique). On a utilisé des modèles avec des géométries simples en particulier sphérique, avec différents volumes élémentaires et différentes fractions volumiques.

La (Figure II. 11) montre quelques exemples utilisés dans le chapitre IV pour la simulation, la fraction 20 %.

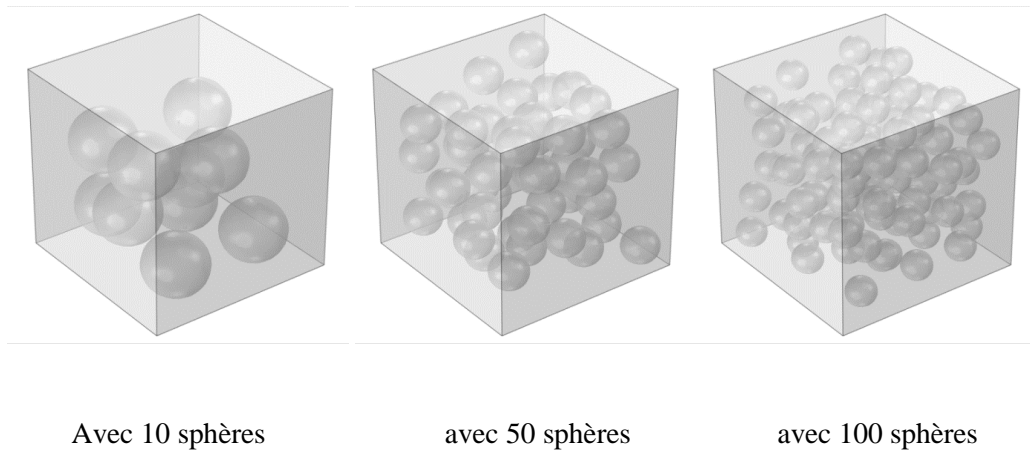


Figure II. 11 : Exemple de volumes élémentaires VEs, (différents volumes pour une seul fraction volumique 0,2)

Dans la (Figure II. 12), on présente l'algorithme développé pour générer les microstructures. Le diamètre de la particule (sphérique) est (d), et sa fraction volumique est (f). La méthode actuelle ne permet pas d'atteindre des fractions volumiques de particules supérieures à 40 %. Cependant, elle peut être modifiée de manière à atteindre des fractions volumiques de particules plus élevées. SEGURADO et LLORCA ont développé la méthode RSA pour obtenir des fractions volumiques de particules supérieures à 40 %.

Pour ce qui nous concerne la fraction volumique maximale prise en charge est la fraction 30%, i.e. toutes les microstructures générées dans ce travail ont une faible fraction volumique.

Le processus de l'obtention des cellules (volumes élémentaires) suit les étapes suivantes :

- Le choix de type de renfort, dans notre cas c'est des sphères de même taille ;
- La saisie des paramètres d'entrée initiales qui sont : la taille de la cellule (L^3), le diamètre de la particule (d) et la fraction volumique (f) ;
- Le calcul du nombre de particules pour atteindre la fraction voulue ;
- Tirage aléatoire des coordonnées du centre de la sphère (x, y, z) ;
- La vérification de l'interconnexion ;
- La vérification du nombre des particules.

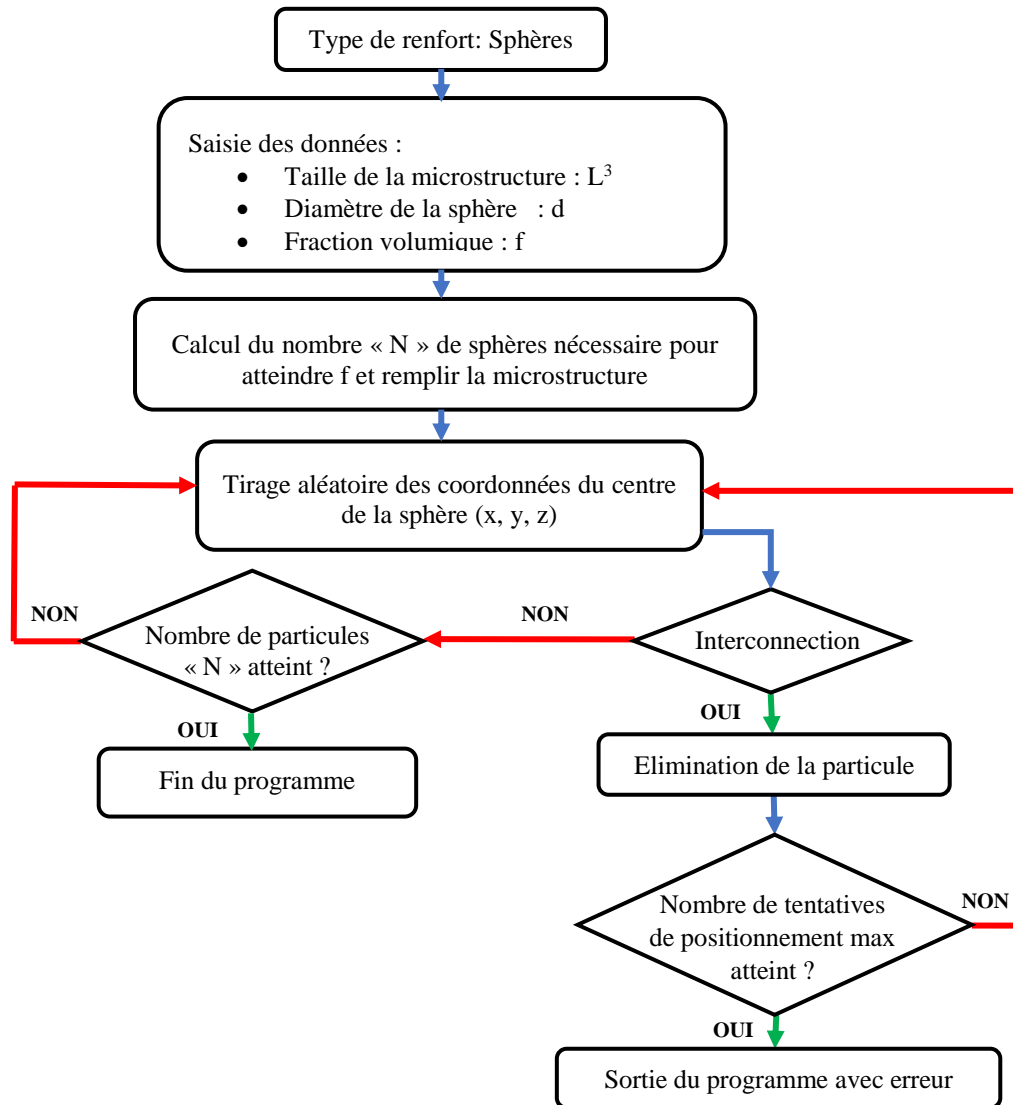


Figure II. 12 : Algorithme de génération des particules dans un volume élémentaire VE

II.7.2 Différentes méthodes de maillage

Il existe plusieurs types de maillage pour le cas des microstructures, parmi ces types on cite : le maillage régulier et le maillage adaptatif.

II.7.2.1 Maillage régulier

Ce maillage est simple, régulier. On attribue aux éléments finis les caractéristiques de la phase où ils sont situés. Il est possible d'utiliser des éléments "multi-phases" où l'attribution des propriétés de chaque phase se fait sur les points d'intégration des éléments selon la phase où ils sont situés. On peut trouver plus de détails sur les éléments multi-phases dans les références ([51], [52], [53]) et l'homogénéisation numérique des composites élastiques-plastiques dans [54], aussi la

simulation du comportement élasto-plastique de matériaux multi-phases par des techniques avancées d'éléments finis dans [55].

L'avantage de cette méthode est la simplicité et la rapidité avec laquelle sont créés les microstructures, en plus, la méthode est applicable à tout type de milieu hétérogène.

II.7.2.2 Maillage adaptatif

Cette méthode consiste à utiliser un maillage initial quelconque qui peut être libre ou régulier, et à déplacer les nœuds du maillage qui sont proche aux interfaces, afin de les positionner sur les interfaces. Cette méthode conserve la forme des interfaces entre les inclusions et la matrice de la microstructure. Les auteurs dans ([51], [55]) proposent une méthode d'adaptation du maillage en identifiant les nœuds les plus proches des frontières et en imposant des déplacements de ces nœuds dans les directions normales aux frontières. L'algorithme d'adaptation est détaillé dans [56].

La forme des éléments finis considéré est tétraédrique libre (Figure II. 13), les tailles de ces éléments finis doivent être adaptées si l'on souhaite obtenir une bonne précision de calcul. Un exemple d'étude de vérification de nombre d'éléments en fonction des propriétés mécaniques (k et μ) est donné dans la (Figure II. 14) pour justifier le maillage.

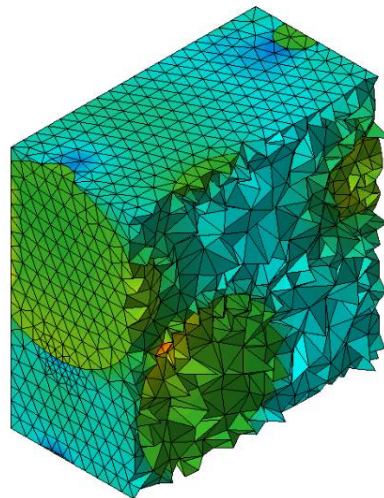


Figure II. 13 : Exemple sur les éléments de maillage tétraédrique libre

Donc, selon ces courbes, on peut agréer qu'à partir d'une densité de maillage égale à environ 162300 éléments et plus, pour les deux modules, on obtiendra des résultats acceptables en ce qui concerne la précision. Ces outils de maillage seront utilisés par la suite pour les calculs par élément fini afin d'évaluer le comportement mécanique des matériaux concernés.

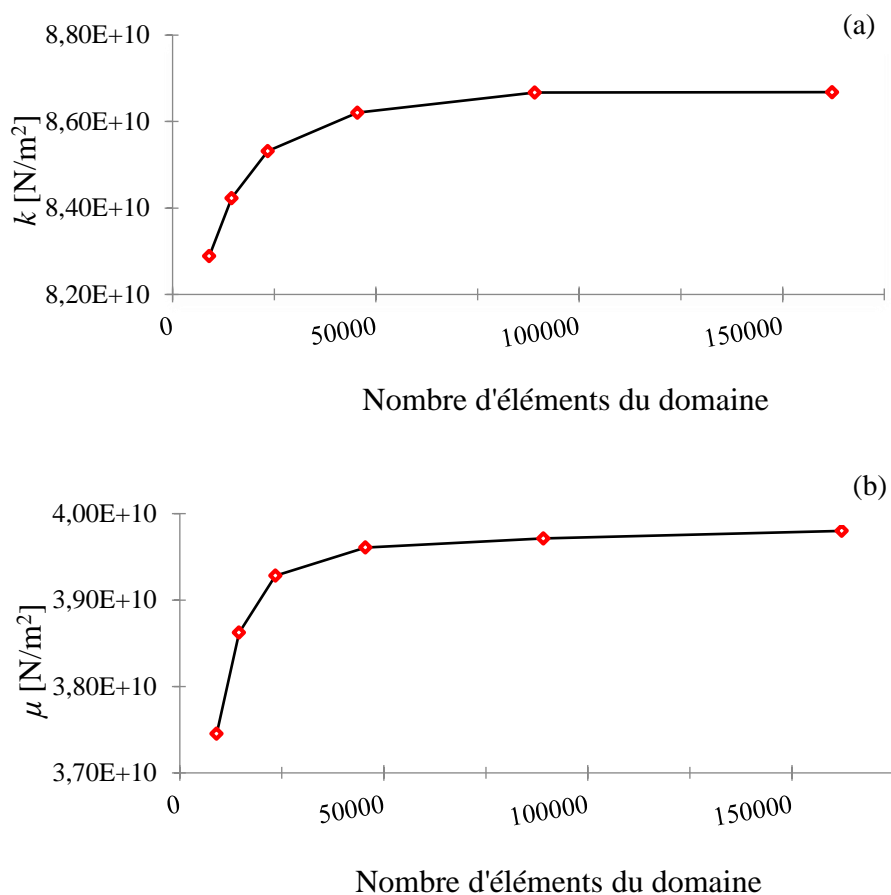


Figure II. 14 : Effet du nombre des éléments sur les valeurs (a) du module de compressibilité apparent k et (b) module de cisaillement apparent μ

II.8 Conclusion

Il est difficile ou même impossible d'arriver à résoudre un problème de conception mécanique sur une structure en matériaux composite avec les méthodes classiques de la mécanique, en tenant compte de tous les détails de la structure, comptes tenus des moyens de calcul actuels disponibles. C'est pour cela qu'on utilise la technique de l'homogénéisation pour d'abord déterminer les propriétés effectives macroscopiques de la structure, et ensuite résoudre le problème de la mécanique, en considérant le matériau réel hétérogène comme étant un matériau *virtuel* homogène avec ces propriétés effectives homogénéisées. Le but est de faciliter la tâche de l'ingénieur, et lui permettre de réaliser ces études et analyses sur les structures avec efficacité et aisance. Donc c'est à partir de là qu'on tire l'importance de l'homogénéisation, et à travers elle l'importance de l'étude des méthodes et techniques analytiques et numériques.

Nous avons cité quelques modèles micromécaniques usuelles comme : les bornes de VOIGT, REUSS et HASHIN-SHTRIKMAN, ainsi que la méthode Auto-Cohérente généralisé. Aussi nous avons cités les modèles utilisés dans la conductivité et l'expansion thermique. On prendra par la suite, quelques méthodes parmi ceux-là, pour études et comparaison. Les résultats des simulations numériques vont servir à la prédiction des comportements équivalents des matériaux composites.

CHAPITRE III

Comportement mécanique d'un matériau composite à particules et à matrice métallique

Dans ce chapitre, on prend en considération un exemple d'un matériau hétérogène à particule et à matrice métallique CPMM qui est le Al-SiC, et on tente la prédiction de ces propriétés mécaniques effectives à partir des propriétés élastiques de ces constituants, qui sont l'aluminium Al et le carbure de silicium SiC, en utilisant un échantillon microscopique représentatif de la structure globale qui est le volume élémentaire représentatif VER et une méthode de l'homogénéisation numérique.

III.1 Introduction

Dans la littérature, on trouve beaucoup de modèles pour décrire le comportement élastique des composites ([57], [53]). La prédiction des propriétés élastiques des matériaux hétérogènes est basée sur la connaissance de la relation entre la réponse de la microstructure aux sollicitations imposées par la macrostructure, et le comportement de cette dernière.

Cela a été réalisé en utilisant des modèles micromécaniques qui ne considèrent que les propriétés mécaniques, thermiques et morphologiques (fraction volumique) des constituants du MC. La majorité des modèles analytiques d'estimation des propriétés ne tiennent pas compte de l'influence de la forme et l'orientation des particules. Mais, Ce problème peut être réglé en le résolvant numériquement sur un volume élémentaire représentatif VER.

Plusieurs auteurs ont utilisé la méthode des éléments finis (MEF) pour comprendre le comportement mécanique des composites ([35], [54]) sous : l'effet de la variation de la fraction volumique des particules, l'effet de la variation de la forme et l'orientation des particules, l'effet de l'interface entre matrice et inclusions, l'effet du chevauchement ou non chevauchement des particule etc.

Dans cette partie, l'effet de la forme et l'orientation des inclusions sur les propriétés élastiques linéaires et sur la taille du VER n'est pas prise en compte. Une technique d'homogénéisation numérique, basée sur la méthode des éléments finis MEF a été utilisée, avec l'application des conditions aux limites périodiques CPL. Le concept de la morphologie équivalente est considéré, où il est proposé de remplacer le matériau hétérogène réel à deux phases par un composite biphasique simple composé d'inclusions *sphériques* distribuées aléatoirement dans une matrice cubique.

III.2 Description, génération et maillage des microstructures pour l'étude mécanique

L'évaluation des propriétés mécaniques d'une microstructure hétérogène devient difficile à déterminer à cause de sa morphologie complexe. Pour cela l'utilisation d'un modèle de sphères distribuées dans une matrice « solide » est peut-être une méthode numérique fiable (

Figure III. 1). Ce travail est basé sur la méthode citée dans le chapitre II, qui permet la détermination d'un volume élémentaire représentatif VER, en générant et étudiant plusieurs réalisations de microstructure.

Les deux phases du MC sont considérées comme isotopiques. k_i et k_m sont respectivement, les modules de compressibilité de l'inclusion et de la matrice, μ_i et μ_m sont respectivement, les modules de cisaillement de l'inclusion et de la matrice. Ils sont exprimés en fonction des modules

de YOUNG E et du coefficient de POISSON ν par les expressions

$$k_j = \frac{E_j}{3(1-2\nu_j)} , \quad \mu_j = \frac{E_j}{2(1+\nu_j)} \quad . \quad j = m, i \quad (III.1)$$

Les propriétés mécaniques : le module de YOUNG E , le coefficient de POISSON ν , le module de compressibilité k et le module de cisaillement μ des deux phases (matrice et inclusions) utilisées pour la microstructure considéré par l'étude sont représentées dans le (Tableau III. 1).

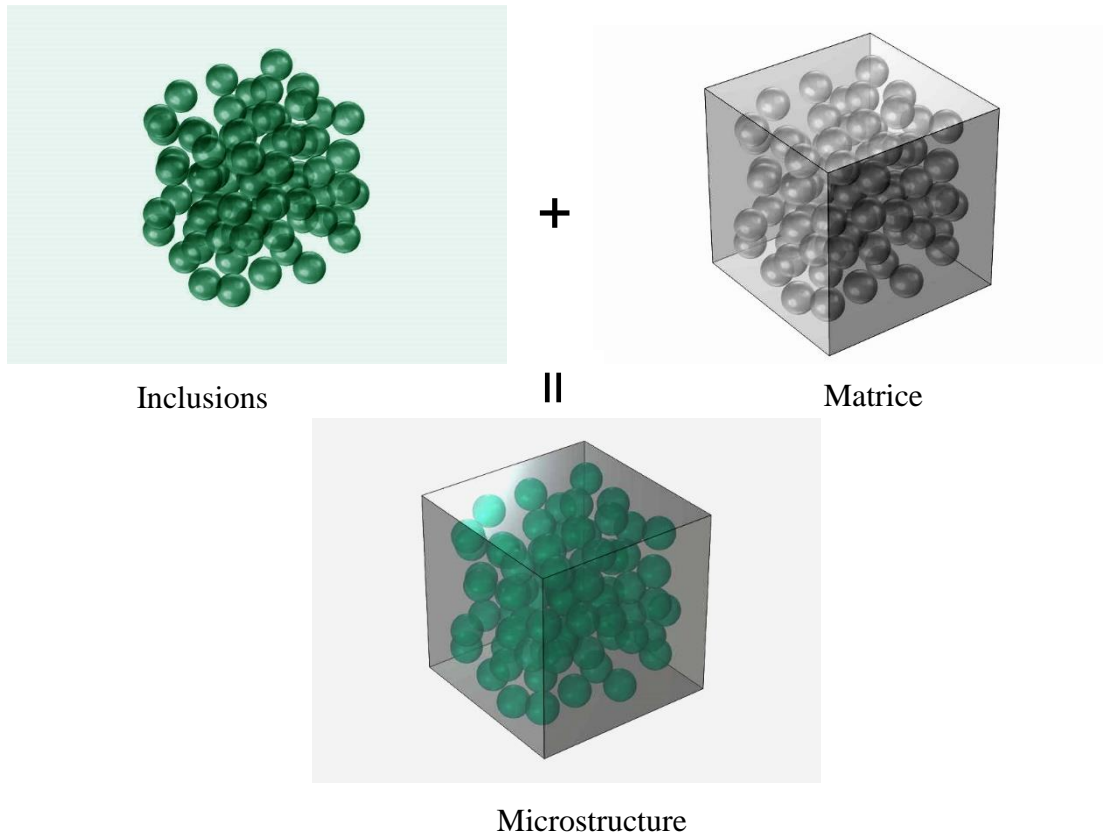


Figure III. 1 : Exemple d'une microstructure 3D

Tableau III. 1 : Propriétés élastiques des deux phases de la microstructure considérée

Constituants	E [MPa]	ν [-]	μ [MPa]	k [MPa]
Matrice (Al)	70×10^3	0.33	2.63×10^4	6.86×10^4
Inclusions (SiC)	400×10^3	0.19	1.68×10^5	2.15×10^5

Dans le but de déterminer la taille du VER et faire une comparaison entre les deux méthodes d'homogénéisation (numérique et analytique), où l'une est basée sur des calculs d'éléments finis tandis-que l'autre est basé sur des formules mathématiques, nous allons prendre en considération des échantillons de volumes élémentaires VEs d'un matériau Al-SiC, avec quatre fractions volumiques des inclusions. Pour la méthode analytique la procédure adaptée est la substitution des valeurs des propriétés des deux phases dans les expressions considérées dans le chapitre précédent

et obtenir les propriétés effectives des matériaux. Pour la méthode numérique il s'agit de suivre une procédure qui consiste à :

- Générer des modèles (microstructures),
- Ajouter les matériaux aux phases,
- Appliquer des charges macroscopiques,
- Appliquer des conditions aux limites,
- Maillage,
- Analyse et résultats.
- Calcule des propriétés effectives.

III.2.1 Modèles de microstructures utilisés pour le calcul des propriétés mécaniques

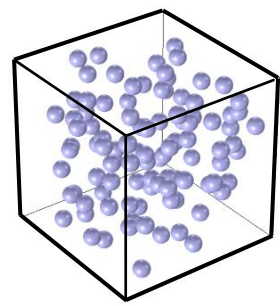
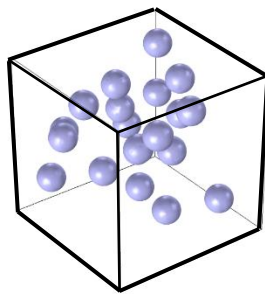
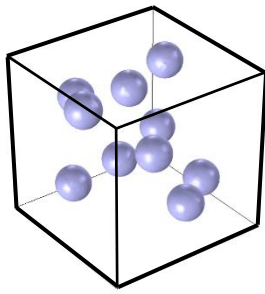
Pour commencer le calcul des propriétés mécaniques, une génération des microstructures qui contiennent des particules sous forme de sphères a été faite (Figure III. 2), la méthode est décrite dans le § (II.8.1), les conditions vérifiées pour la distribution aléatoire des sphères sont

- Les sphères ne chevauchent pas entre eux (pas de percolation),
- Les sphères ne se collent pas avec les parois de la cellule (cube),
- Toutes les sphères sont de même taille.

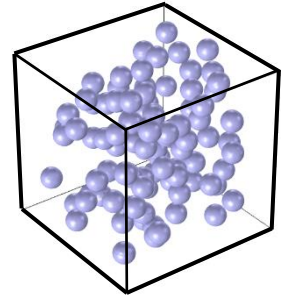
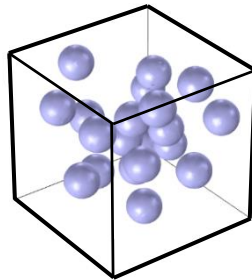
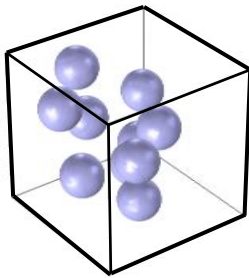
Le modèle utilisé dans ce chapitre est un cube de dimensions initiales $V_1 = 10 \times 10 \times 10$ unité. Les microstructures réalisées sont décrites dans le (Tableau III. 2), les fractions volumiques des inclusions considérées sont respectivement (0.05, 0.1, 0.15, 0.2 et 0.3) (Figure III. 2). Pour chaque fraction volumique on a généré 06 microstructures de tailles $V_i = i \times V_1$, c.-à-d. la taille : $V_2 = 2 \times V_1$, $V_3 = 3 \times V_1$, la taille $V_4 = 4 \times V_1$, la taille $V_5 = 5 \times V_1$, et la taille $V_6 = 6 \times V_1$ (Figure III. 3). Le but est d'étudier les réponses mécaniques des microstructures quand elles subissent des charges (déformations ou contraintes) macroscopiques, et cela pour différentes tailles et fractions volumiques.

Tableau III. 2 : Les volumes élémentaires générés avec différentes et différentes fractions volumiques

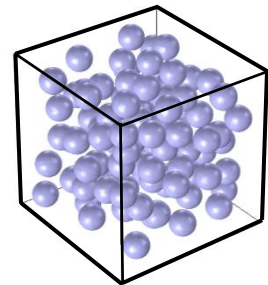
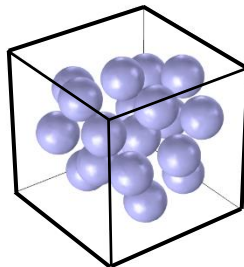
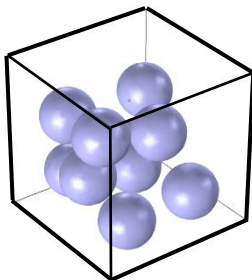
Microstructure	Cas	Echantillons de taille	Fraction volumique des inclusions
Composite à matrice métallique et à deux simples phases (Al-SiC)	Cas 1	$V_i = V_2, V_3, V_4, V_5 \text{ et } V_6$	5%
	Cas 2		10%
	Cas 3		15%
	Cas 4		20%
	Cas 5		30%



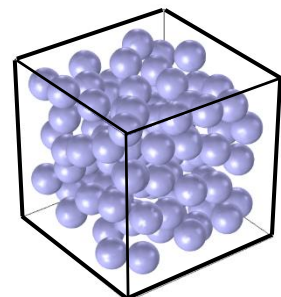
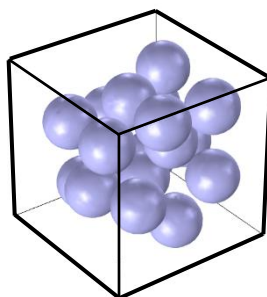
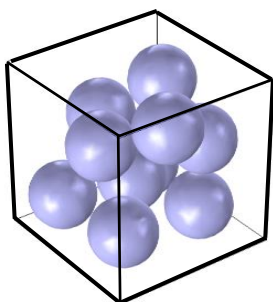
Fraction volumique 05 %



Fraction volumique 10 %



Fraction volumique 20 %



Fraction volumique 30 %

Figure III. 2 : Exemples de microstructures de différentes fractions volumiques, 5 %, 10 %, 20 % et 30 %

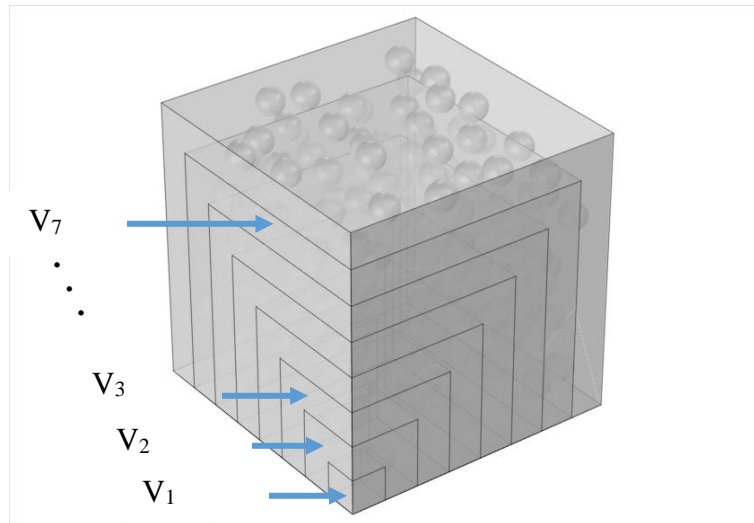


Figure III. 3 : Changement de la taille du volume V, fraction 10%

III.2.2 Technique de maillage utilisée

Le principe de maillage utilisé dans ce chapitre est déjà cité dans le chapitre précédent, il consiste en bref à attribuer un maillage libre de forme d'éléments tétraédriques d'une façon à éviter toutes erreurs éventuelles concernant la taille de l'élément par rapport à la géométrie des formes des deux phases (Figure III. 4).

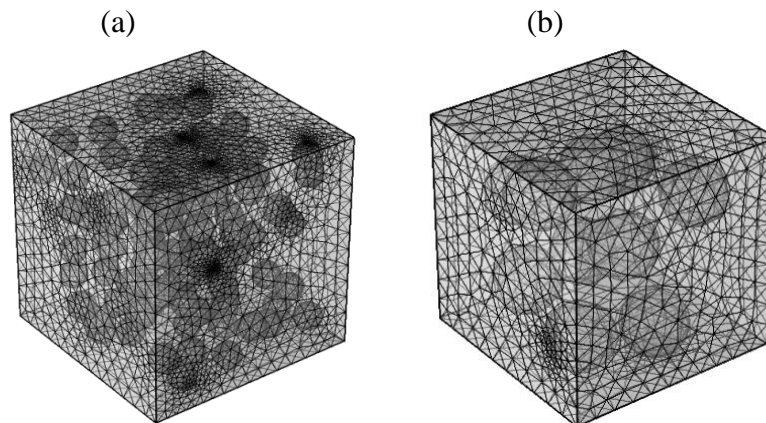


Figure III. 4 : Type de maillage utilisé, (a) cube de 100 sphères, (b) cube de 10 sphères

III.2.3 Détermination de la densité du maillage

Pour chaque propriété et pour chaque fraction volumique un test de maillage doit être effectué, afin de déterminer le model de maillage optimal. Pour cela, on maille le même VER avec différents types de maillage (extra grossier, plus grossier, grossier, normal, fin) et on prélève la valeur de la propriété pour chaque type. Le maillage retenu est celui qui permet la détermination de la propriété avec une bonne précision en un temps minimum. Un exemple de la convergence de la propriété en

fonction du nombre d'éléments finis est présenté dans la (Figure II. 14). Ces résultats révèlent que la stabilité de la courbe commence à partir d'un certain nombre d'éléments finis, dans notre exemple on utilise un maillage fin. Cette densité de maillage permet d'estimer la propriété avec une bonne précision, donc, elle est retenue pour la simulation de cet exemple de fraction volumique. Ainsi, la même procédure est faite pour toutes les fractions volumiques.

III.3 Méthode de calcul des propriétés mécaniques

Les simulations sont effectuées en utilisant la méthode d'homogénéisation et les éléments finis (Figure III. 5). L'algorithme de génération des microstructures est développé avec un code Python. Le processus de génération automatique ne s'arrête pas tant que la fraction volumique n'est pas satisfaite. La technique de la génération des microstructures 3D est présentée dans la section (II.8.1). Pour chaque microstructure étudiée, de nombreuses configurations sont étudiées. Chaque microstructure contient une population d'inclusions, répartie aléatoirement dans une matrice continue. Chaque phase a ces propriétés élastiques illustrés dans le (Tableau III. 1), afin de prédire les propriétés élastiques effectives de la structure globale qui est le composite considéré. Le (Tableau III. 2) représente les cas de composite où on trouve les données concernant la fraction volumique des renforts et les différentes tailles de volume.

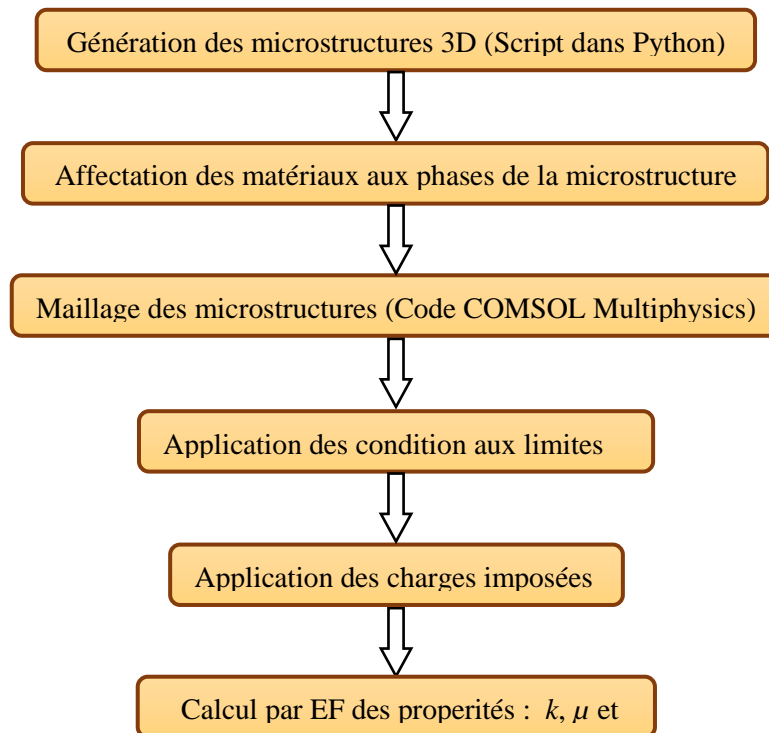


Figure III. 5 : Processus de calcul numérique

III.3.1 Charges imposées et conditions aux limites

La théorie d'homogénéisation numérique est utilisée pour la détermination des propriétés d'élasticité linéaire effectives. Un élément de volume d'un matériau hétérogène est considéré. Des conditions aux limites sont prescrites au contour du volume élémentaire VE, afin d'estimer les propriétés élastiques apparentes de la microstructure, on adopte dans notre cas, des conditions aux limites périodiques CPL sur chaque élément de volume. Celles-ci ont été utilisées avec des valeurs prescrites du tenseur de déformation $\underline{\mathbf{E}}$ sur l'élément de volume individuel, et elles sont définies par un champ de déplacement sur le contour extérieur (∂V) comme suit :

$$\mathbf{u} = \underline{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial V \quad (\text{III.2})$$

Avec, \mathbf{v} étant la fluctuation périodique, elle prend les mêmes valeurs à deux points homologues sur deux faces opposées du VE.

Pour les conditions de périodicités CPL, on a choisi de prendre comme tenseurs de déformations appliqués sur les bords du VE, les tenseurs macroscopiques, de compressibilité $\underline{\mathbf{E}}_k$ et de cisaillement $\underline{\mathbf{E}}_\mu$ suivants ([35], [53]) :

$$\underline{\mathbf{E}}_k = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ Et } \underline{\mathbf{E}}_\mu = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III.3})$$

Ces tenseurs (III.3) sont utilisés pour calculer k^{app} et μ^{app} qui sont respectivement, les modules apparents de compressibilité et de cisaillement. Dans notre cas, on va considérer que $k^* \cong k^{app}$ et $\mu^* \cong \mu^{app}$, dès qu'on commencera la comparaison des méthodes analytiques et numériques, avec k^* et μ^* ici représentent respectivement les modules de compressibilité et de cisaillement effectives.

On définit les modules apparents k^{app} et μ^{app} ([34], [41]) :

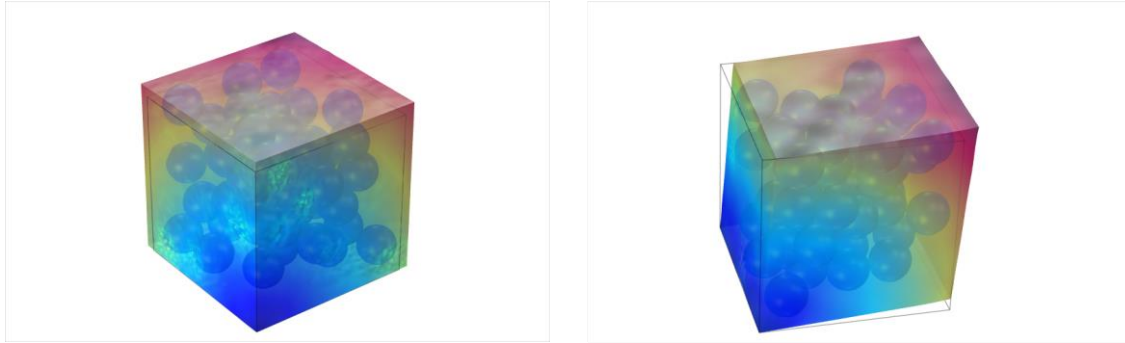
$$k^{app} = \langle \underline{\boldsymbol{\sigma}} \rangle : \underline{\mathbf{E}}_k = \frac{1}{3} \text{trace} \langle \underline{\boldsymbol{\sigma}} \rangle = \frac{1}{3} \langle \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \rangle \quad (\text{III.4})$$

$$\mu^{app} = \langle \underline{\boldsymbol{\sigma}} \rangle : \underline{\mathbf{E}}_\mu = \langle \sigma_{12} \rangle \quad (\text{III.5})$$

Où $\langle . \rangle$ est la valeur moyenne de « . », expression (II.9)

Et σ_{11} , σ_{22} et σ_{33} représentent les contraintes sphériques et σ_{12} la contrainte de cisaillement.

La (Figure III. 6) est une représentation *exagérée* des résultats de déformation et contraintes de Von Mises, pour une microstructure de fraction volumique de 0.3, après application des champs de déformation macroscopiques (les expressions III.3).



En appliquant une dilatation \underline{E}_k

En appliquant un cisaillement \underline{E}_μ

Figure III. 6 : Exemples de contraintes et de déformations des microstructures après application des charges de déformation (III.3) : Fraction volumique (0.3)

III.4 Résultats et discussion

Pour la détermination du module effectif de compressibilité k^* et de cisaillement μ^* du matériau Al-SiC, on utilise la technique de l'homogénéisation numérique basée sur les éléments finis EF appliquée sur des volumes élémentaires développée dans le chapitre II. Ensuite on va faire une comparaison avec les méthodes analytiques citées auparavant. Mais avant de procéder à la discussion et la comparaison des techniques numériques et analytiques, on doit d'abord choisir des volumes élémentaires plus représentatifs parmi ceux qu'on va étudiés pour devenir des volumes élémentaires représentatives VERs. Donc pour trouver la taille voulue de l'VER on doit chercher là où les courbes des propriétés apparentes se stabilisent et prennent des valeurs presque semblables, chaque fois qu'on augmente la taille du volume VE. Et après la détermination du VER, on peut passer à l'analyse des propriétés effectives du matériau.

III.4.1 Détermination de taille du RVE

La taille optimale du VER est obtenue par variation de la taille du volume jusqu'à avoir un module apparent stable en valeur c-à-d. sa valeur reste presque constante en variant le volume (Figure III. 7 à Figure III. 11). On trouve dans les (Tableau III. 3 à Tableau III. 7), les valeurs des propriétés élastiques apparentes (E^{app} , k^{app} , μ^{app} , ν^{app}) et les tailles $V = 2, 3, 4, 5, 6$. Les propriétés élastiques apparentes sont : E^{app} c'est le module de YOUNG, ν^{app} le coefficient de POISSON, k^{app} le module de compressibilité et μ^{app} est le module de cisaillement.

Dans la (Figure III. 7) on voit que pour les modules apparents E^{app} , k^{app} et μ^{app} leurs valeurs commencent à se stabiliser à partir du volume 5 et plus, donc on peut prétendre que la taille de notre VER pour la fraction volumique 0.05 est bien la taille $V= 5$.

Tableau III. 3 : Modules apparents de : YOUNG E^{app} , compressibilité k^{app} , coefficient de Poisson ν^{app} et de cisaillement μ^{app} . Pour la fraction volumique (0,05), calculés pour les tailles V = 2, 3, 4, 5 et 6

Taille du volume \ Module [MPa]	2	3	4	5	6
E^{app}	7,75E+04	7,63E+04	7,62E+04	7,54E+04	7,55E+04
k^{app}	7,28E+04	7,25E+04	7,23E+04	7,16E+04	7,18E+04
ν^{app}	3,22E-01	3,24E-01	3,24E-01	3,25E-01	3,25E-01
μ^{app}	2,90E+04	2,88E+04	2,87E+04	2,84E+04	2,85E+04

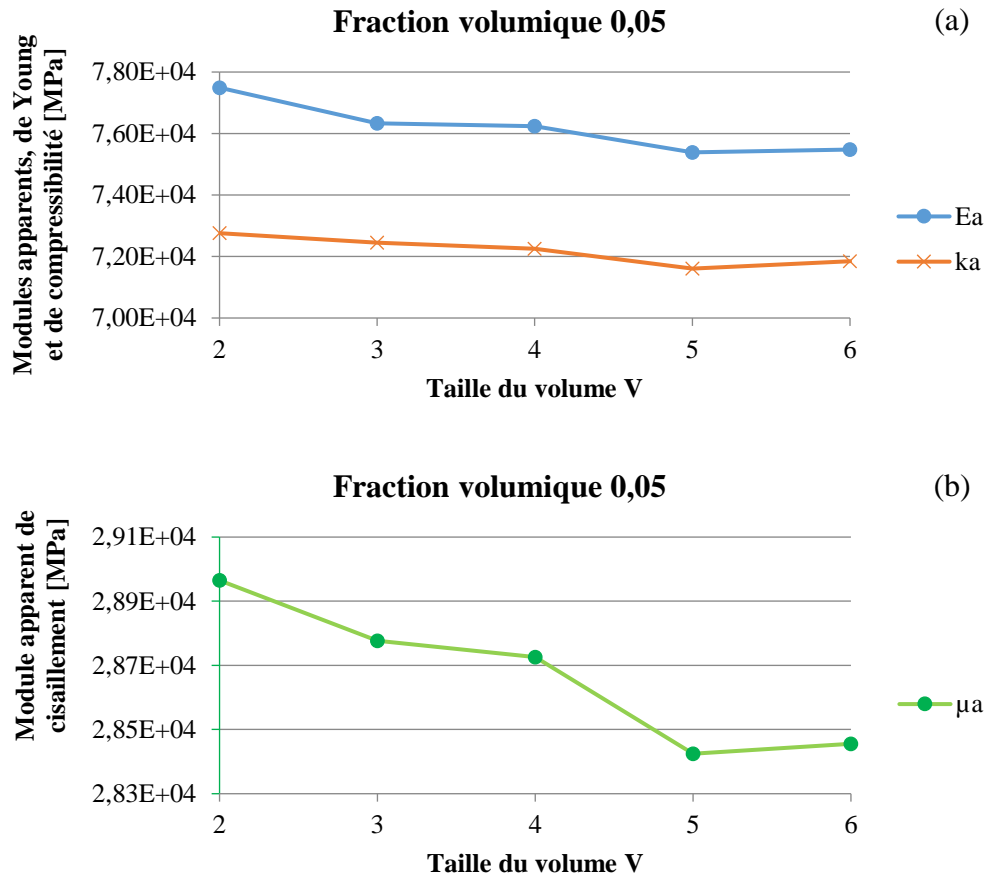


Figure III. 7 : Modules apparents : (a) de YOUNG E^{app} et de compressibilité k^{app} , (b) de cisaillement μ^{app} . Pour la fraction volumique (0.05)

Dans La (Figure III. 8) on voit que pour les modules apparents E^{app} , k^{app} leurs valeurs commencent à se stabiliser à partir du volume 4, mais μ^{app} commence à se stabiliser à partir du volume 5 et plus, ils prennent des valeurs plus stables, donc on prend la taille du VER pour la fraction volumique 0.1, la taille V=5.

Tableau III. 4 : Modules apparents de : YOUNG E^{app} , compressibilité k^{app} , coefficient de Poisson ν^{app} et de cisaillement μ^{app} . Pour la fraction volumique (0.10), calculés pour les tailles V = 2, 3, 4, 5 et 6

Taille du volume \ Module [MPa]	2	3	4	5	6
E^{app}	8,49E+04	8,34E+04	8,19E+04	8,15E+04	8,14E+04
k^{app}	7,67E+04	7,60E+04	7,52E+04	7,52E+04	7,52E+04
ν^{app}	3,16E-01	3,17E-01	3,18E-01	3,19E-01	3,20E-01
μ^{app}	3,22E+04	3,15E+04	3,11E+04	3,08E+04	3,08E+04

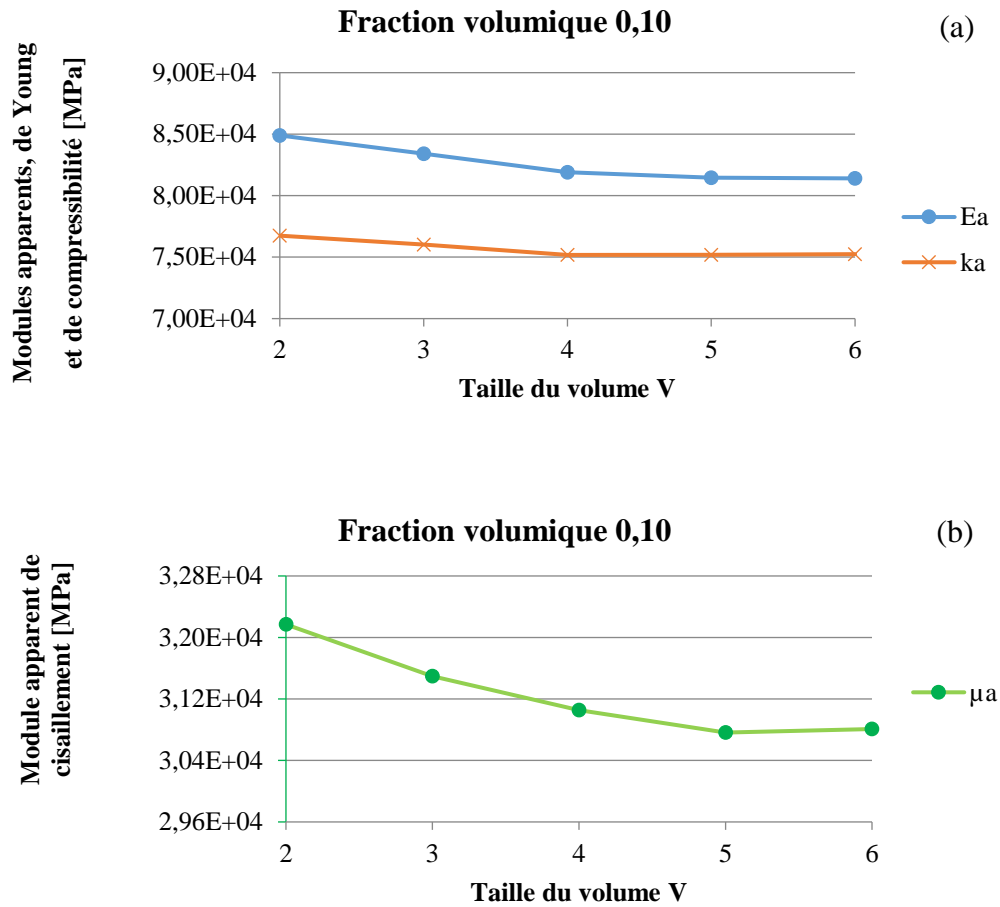


Figure III. 8 : Modules apparents : (a) de YOUNG E^{app} et de compressibilité k^{app} , (b) de cisaillement μ^{app} . Pour la fraction volumique (0.10)

Dans La (Figure III. 9) on voit que pour les modules apparents E^{app} , k^{app} et μ^{app} leurs valeurs commencent à se stabiliser presque à partir du volume 3, mais pour le volume 5 et plus, ils prennent des valeurs plus stables, donc on peut prétendre que la taille de notre VER pour la fraction volumique 0.15 est bien la taille V = 5.

Tableau III. 5 : Modules apparents de : YOUNG E^{app} , compressibilité k^{app} , coefficient de Poisson ν^{app} et de cisaillement μ^{app} . Pour la fraction volumique (0.15), calculé pour les tailles V = 2, 3, 4, 5 et 6

Taille du volume	2	3	4	5	6
E^{app}	9,51E+04	8,79E+04	8,82E+04	8,76E+04	8,75E+04
k^{app}	8,51E+04	7,86E+04	7,91E+04	7,87E+04	7,87E+04
ν^{app}	3,14E-01	3,14E-01	3,14E-01	3,14E-01	3,15E-01
μ^{app}	3,58E+04	3,37E+04	3,36E+04	3,33E+04	3,33E+04

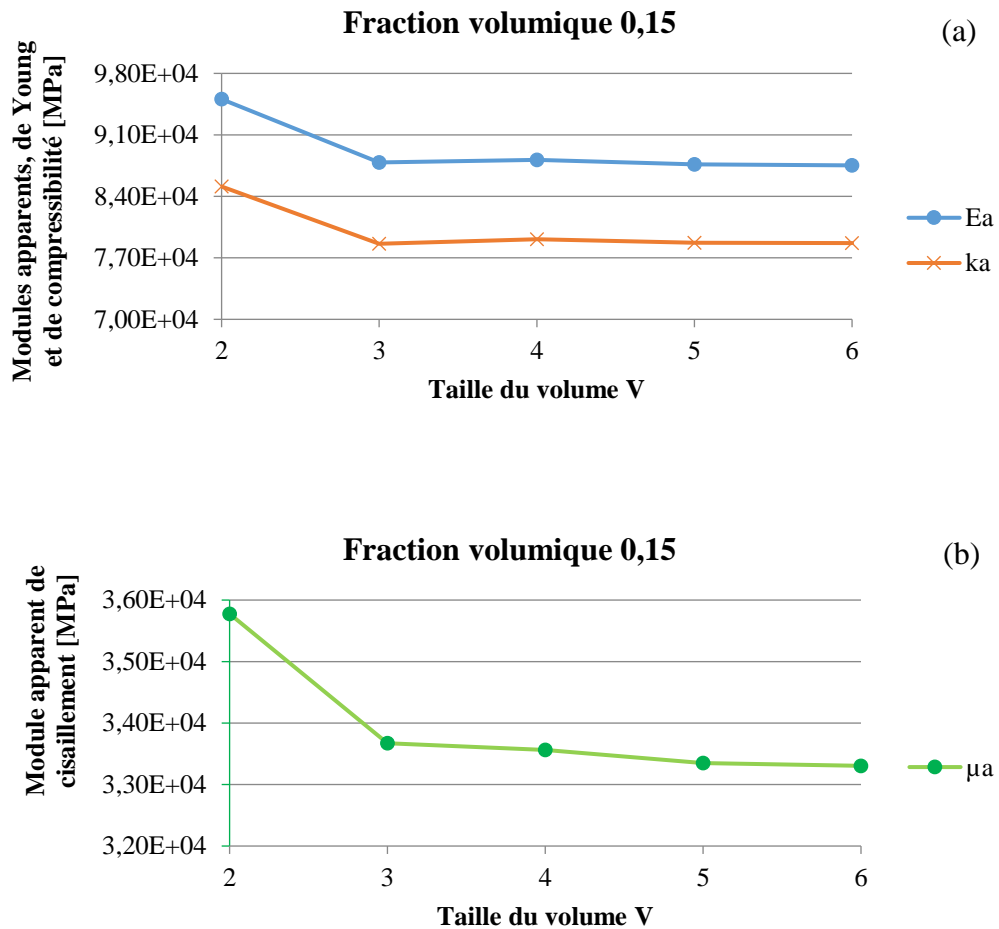


Figure III. 9 : Modules apparents : (a) de YOUNG E^{app} et de compressibilité k^{app} , (b) de cisaillement μ^{app} . Pour la fraction volumique (0.15)

Les valeurs des modules apparents E^{app} , k^{app} et μ^{app} (Figure III. 10) commencent à se stabiliser presque à partir du volume 3, mais à partir du volume 5 et plus on remarque des valeurs plus semblables, donc on considère que la taille du VER pour la fraction volumique 0.2 est la taille V = 5.

Tableau III. 6 : Modules apparents de : YOUNG E^{app} , compressibilité k^{app} , coefficient de Poisson ν^{app} et de cisaillement μ^{app} . Pour la fraction volumique (0,2), calculés pour les tailles V = 2, 3, 4, 5, et 6

Taille du volume \ Module [MPa]	2	3	4	5	6
E^{app}	1,03E+05	9,67E+04	9,51E+04	9,44E+04	9,48E+04
k^{app}	8,79E+04	8,34E+04	8,36E+04	8,25E+04	8,26E+04
ν^{app}	3,05E-01	3,07E-01	3,10E-01	3,09E-01	3,09E-01
μ^{app}	4,04E+04	3,67E+04	3,64E+04	3,62E+04	3,62E+04

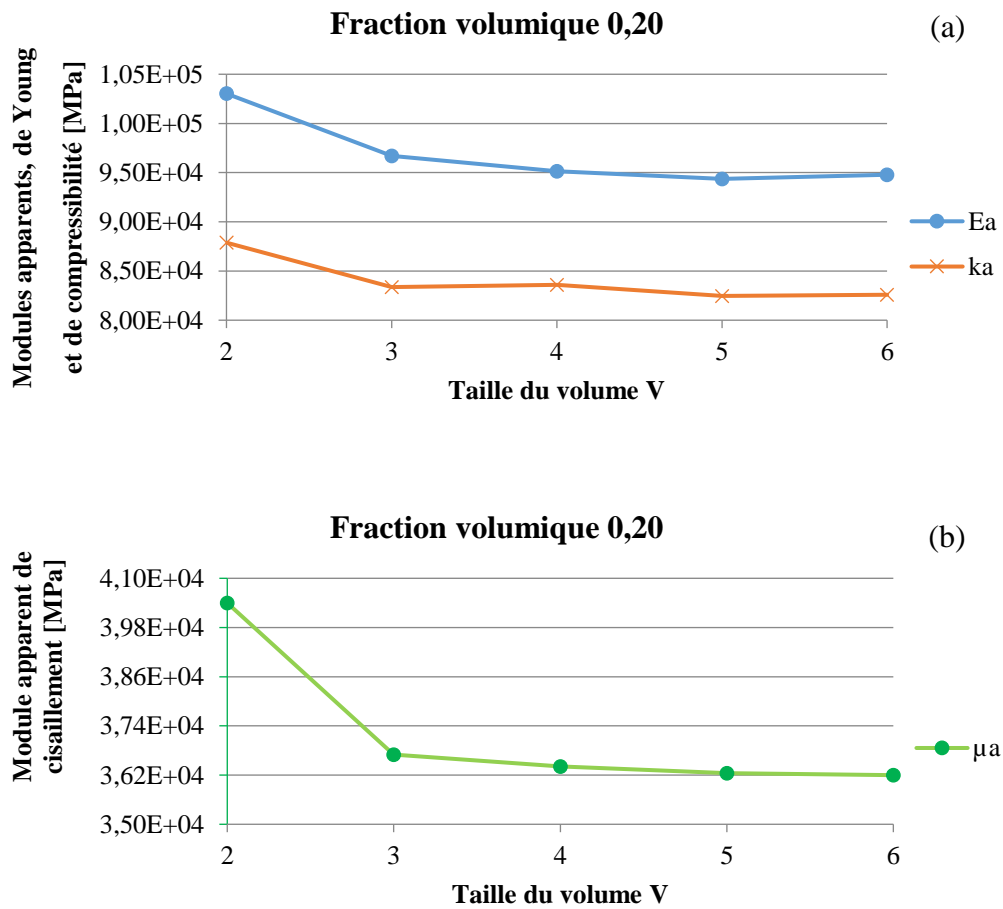


Figure III. 10 : Modules apparents : (a) de YOUNG E^{app} et de compressibilité k^{app} , (b) de cisaillement μ^{app} . Pour la fraction volumique (0.2)

Dans La (Figure III. 11) les valeurs des modules apparents E^{app} , k^{app} deviennent stable presque à partir du volume 3, mais pour le module μ^{app} commence à devenir stable à partir du volume 4 et plus, donc pour la fraction volumique 0.3, on peut prendre la taille V=5 comme étant la taille du VER.

Tableau III. 7 : Modules apparents de : YOUNG E^{app} , compressibilité k^{app} , coefficient de Poisson ν^{app} et de cisaillement μ^{app} . Pour la fraction volumique (0,3), calculé pour des tailles V = 2, 3, 4, 5 et 6

Taille du volume \ Module [MPa]	2	3	4	5	6
E^{app}	1,16E+05	1,13E+05	1,12E+05	1,11E+05	1,11E+05
k^{app}	9,32E+04	9,09E+04	9,13E+04	9,15E+04	9,13E+04
ν^{app}	2,93E-01	2,93E-01	2,95E-01	2,98E-01	2,98E-01
μ^{app}	4,50E+04	4,36E+04	4,26E+04	4,30E+04	4,29E+04

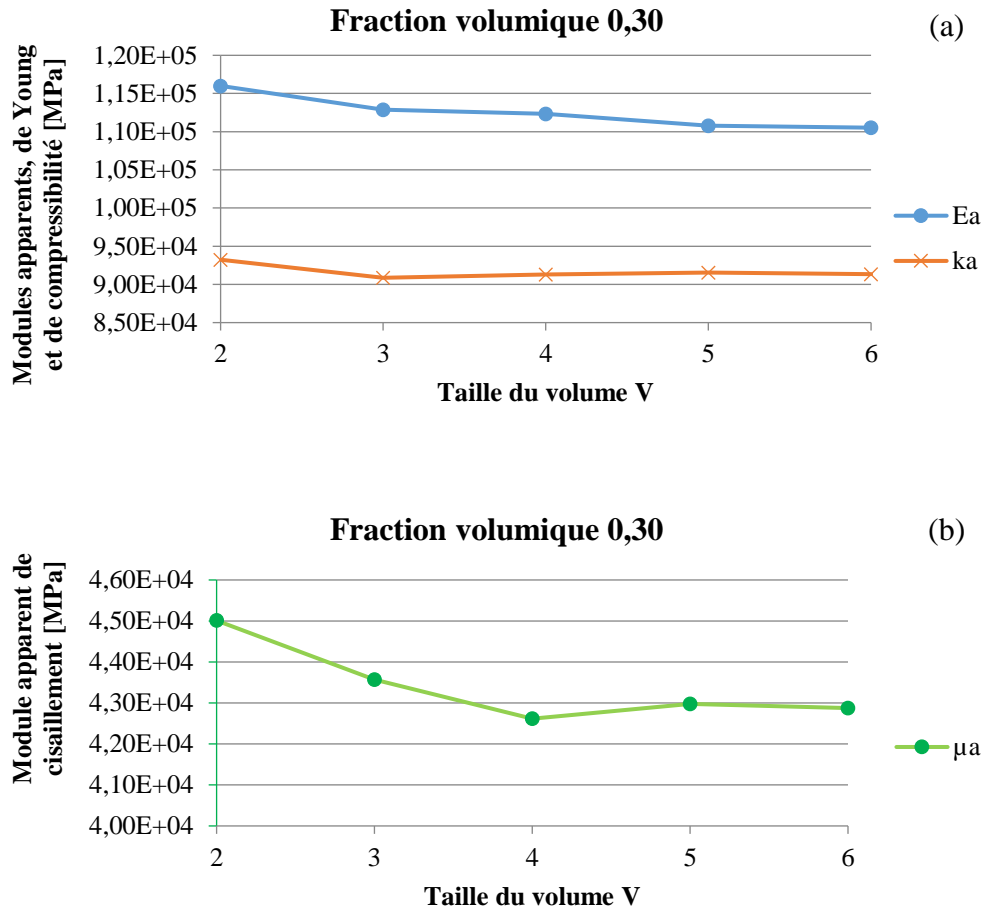


Figure III. 11 : Modules apparents : (a) de YOUNG E^{app} et de compressibilité k^{app} , (b) de cisaillement μ^{app} . Pour la fraction volumique (0.3)

III.4.2 Comparaison entre la méthode numérique considérée et les méthodes analytiques

Dans les (Tableau III. 8) et (Tableau III. 9), on trouve Les variations des modules effectifs de compressibilité k^* et de cisaillement μ^* en termes de fraction volumique (les 5 cas du Tableau III. 2) pour une taille du VER V = 6 choisie selon l'étude précédente, obtenus en utilisant la méthode

numérique des éléments finis EF. Et aussi les variations des modules k et μ , calculés avec les méthodes analytiques de :

- Bornes de VOIGT et REUSS ;
- Les bornes de HASHIN-STRIKMAN (Hashin + c'est une borne supérieure, Hashin - est une borne inférieure) ;
- Méthode de MORI-TANAKA (MT).

En utilisant les expressions (II.26 à II.31), (II.33 à II.36), (II.38), (II.39).

Tableau III. 8 : Module effective de compressibilité k^* [Pa]. Pour les fractions volumiques (0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.3), calculé pour une taille choisie de VER ($V = 6$) et avec (05) méthodes

Méthode \ Fraction volumique	0,05	0,1	0,15	0,2	0,3
Eléments finis (EF)	7,18E+10	7,52E+10	7,87E+10	8,25E+10	9,15E+10
VOIGT	7,59E+10	8,33E+10	9,06E+10	9,79E+10	1,13E+11
REUSS	7,10E+10	7,36E+10	7,64E+10	7,94E+10	8,62E+10
HASHIN +	7,36E+10	7,87E+10	8,40E+10	8,95E+10	1,01E+11
HASHIN -	7,18E+10	7,51E+10	7,86E+10	8,24E+10	9,07E+10
MORI-TANAKA (MT)	6,86E+10	6,86E+10	6,86E+10	6,86E+10	6,86E+10

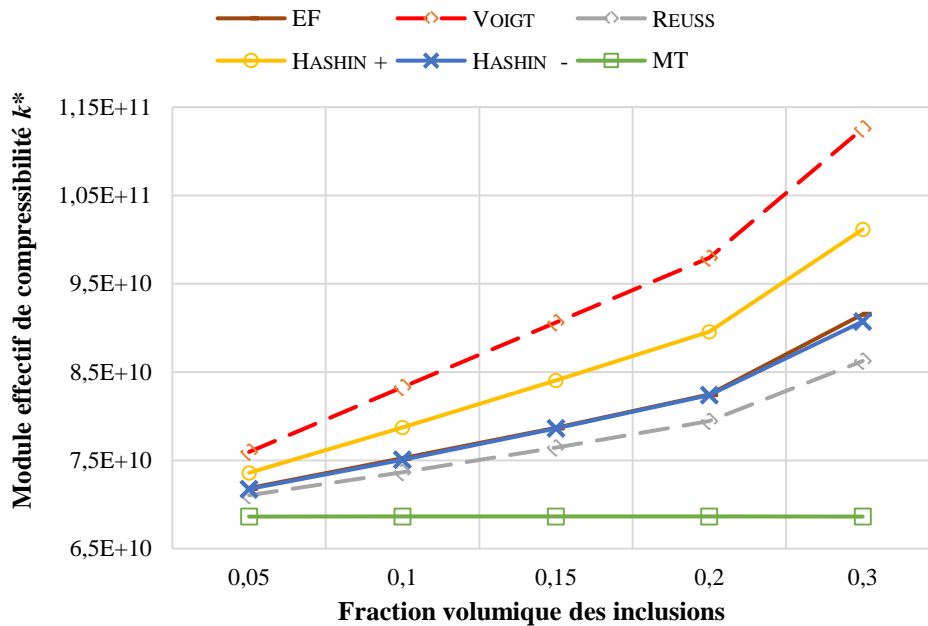


Figure III. 12 : Module effective de compressibilité k^* [Pa]. Pour les fractions volumiques (0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.3), calculé pour une taille choisie de VER ($V = 6$) et avec (05) méthodes

Tableau III. 9 : Module effective de cisaillement μ^* [Pa]. Pour les fractions volumiques (0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.3), calculé pour une taille VER ($V = 6$) et avec (05) méthodes

Méthode \ Fraction volumique	0,05	0,1	0,15	0,2	0,3
Eléments finis (EF)	3,32E+10	4,02E+10	4,71E+10	5,40E+10	6,67E+10
VOIGT	3,34E+10	4,05E+10	4,76E+10	5,47E+10	6,88E+10
REUSS	2,75E+10	2,87E+10	3,01E+10	3,17E+10	3,52E+10
HASHIN +	3,05E+10	3,48E+10	3,94E+10	4,42E+10	5,44E+10
HASHIN -	2,84E+10	3,07E+10	3,31E+10	3,57E+10	4,17E+10
MORI-TANAKA (MT)	2,84E+10	4,05E+10	4,76E+10	5,47E+10	6,88E+10

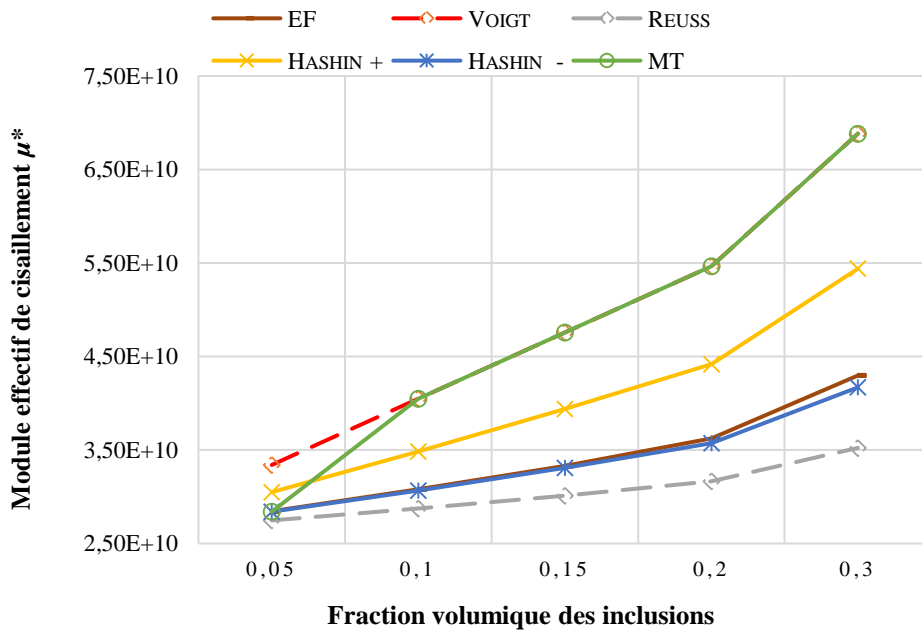


Figure III. 13 : Module effective de cisaillement μ^* [Pa] pour les fractions volumiques (0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.3), calculé pour une taille VER ($V = 6$) et avec (05) méthodes

D'après les courbes des (Figure III. 12) et (Figure III. 13), la technique EF est très proche de la borne inférieure de HASHIN-STRIKMAN (Hashin-), mais ces valeurs sont restées entre ces deux bornes.

On note aussi l'augmentation des modules effectifs en fonction de la fraction volumique, on remarque que la courbe EF est loin de la courbe MT donc, on peut la considérer comme une technique qui peut être utilisé pour la prédiction du module effectif de cisaillement μ^* .

III.5 Effet de la fraction volumique sur les propriétés élastiques effectives

En tenant compte des (Figure III. 12) et (Figure III. 13) on voit clairement que les modules de compressibilité et de cisaillement varient en fonction de la fraction volumique des inclusions, donc pour obtenir des propriétés désirées proche aux propriétés de l'une des phases constituant le composite, il faut augmenter la fraction volumique de cette phase. Après avoir calculé les modules effectifs de compressibilité k^* et de cisaillement μ^* on peut calculer la matrice de rigidité effective \underline{C}^* ou la matrice effective de souplesse \underline{S}^* , en utilisant les expressions (I.8 à I.11).

III.6 Concept de la morphologie équivalente

Dans ce travail, on a remplacé un matériau complexe réel à deux phases par un matériau simple virtuel biphasé. Ce dernier était constitué d'inclusions sphériques noyées dans une matrice (Figure III. 14). Ces inclusions sphériques sont non interconnectées entre elles, et ils sont de même diamètre. Nous avons supposé que la fraction volumique soit la même dans les deux configurations. La distribution des inclusions est aléatoire. Si nous devons faire une étude plus proche à la réalité sur une structure de matériau composite qui possède une géométrie complexe, la charge de calcul des simulations va augmenter, si encore ces géométries complexes possèdent des microstructures complexes. Et en prenant compte de plusieurs facteurs comme :

- La forme ou la morphologie, La direction ou l'orientation et la taille des inclusions.
- La distribution des inclusions.
- L'interface entre les inclusions et la matrice...

Les calculs deviendront encore beaucoup plus complexes et difficiles.

Dans notre cas, on a considéré une technique numérique simple, basée sur une morphologie de microstructure simple et qui donne des résultats proches de la borne de HASHIN-STRIKMAN.

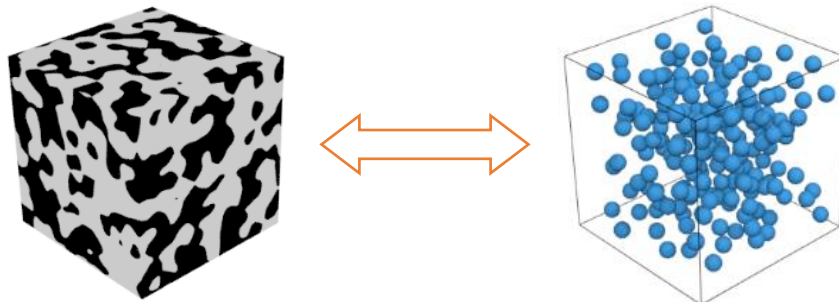


Figure III. 14 : Concept de la morphologie équivalente pour un composite

III.7 Conclusion

Un modèle de cellule 3D est utilisé pour prédire les propriétés mécaniques effectives d'un matériau complexe diphasique (Al-SiC), en utilisant des techniques d'homogénéisation pour différentes fractions volumiques. L'approche numérique est basée sur la méthode des éléments finis. Les modules effectifs de compressibilité et de cisaillement ont été calculés en utilisant un modèle à éléments finis et comparés aux modèles analytiques de VOIGT et REUSS, HASHIN-STRIKMAN (H-S), MORI-TANAKA.

Le concept de morphologie équivalente, qui permet de remplacer la morphologie originale d'un matériau complexe en deux phases par une autre morphologie équivalente contenant uniquement des sphères, est proposé pour le but de réduire le temps de maillage de la microstructure complexe.

Les résultats numériques démontrent que l'approche développée par EF est précise et efficace pour l'analyse de matériaux complexes 3D. Le présent travail a établi une base pour d'autres applications d'analyse micromécanique par éléments finis pour des problèmes tels que l'étude du champ de contrainte afin de comprendre l'apparition et le développement d'un comportement inélastique tel que la déformation plastique et l'endommagement éventuels. En outre, la fiabilité prouvée de l'approche EF introduite, permet de nouvelles possibilités d'explorer des composites avec des types d'inclusions géométriques arbitraires, qui ne peuvent être couverts par la plupart des autres méthodes d'homogénéisation.

CHAPITRE IV

Estimation de l'expansion thermique d'un matériau composite à particules et à matrice métallique

La détermination des propriétés effectives des matériaux composites à matrice métallique CMM semble très importante pour la caractérisation, la conception ou la fabrication des composites. Le coefficient effectif de dilatation thermique fait partie de ces propriétés. Dans cette partie, une technique d'homogénéisation numérique a été utilisée pour déterminer le coefficient effectif de dilatation thermique CET d'un matériau composite à particules et à matrice métallique en prenant à titre d'exemple le matériau déjà étudié qui est le Al-SiC.

IV.1 Introduction

Ainsi, plusieurs modèles numériques 3D d'éléments de volume représentatifs VER avec différentes fractions de volume ont été générés et étudiés. Ces VERs sont composés d'un matériau à deux phases l'une en carbure de silicium et l'autre en aluminium Al-SiC. Des méthodes analytiques ont été utilisées pour comparer leurs résultats avec ceux de la méthode numérique.

Les matériaux composites à matrice métallique CMM sont utilisés dans plusieurs domaines industriels en raison de leur procédé de fabrication relativement simple et de leurs propriétés presque isotropes par rapport aux composites renforcés de fibres, de leur résistance mécanique, de leur rigidité, de leur résistance au fluage améliorée et de leur bonne conductivité thermique et électrique. En particulier, les matériaux composites à matrice d'aluminium (CMA) sont utilisés en raison de leur légèreté, de leur résistance à l'usure et de leur coefficient de dilatation thermique plus faible [7]. Plusieurs études ont été menées dans le but d'identifier la meilleure combinaison entre la microstructure et les propriétés thermomécaniques du CMM avec différents types de renforts, utilisant à la fois des particules et des fibres ([58], [59], [60]). Sharma et al. 2016 [61] ont examiné le comportement de dilatation thermique d'Al-SiC à masse dense en utilisant une approche numérique spéciale, CHAWLA et al. 2005 [3] ont étudié l'anisotropie de dilatation thermique dans des composites matriciels en alliage d'aluminium 2080 renforcés de particules de SiC extrudé, au moyen d'un analyseur thermomécanique expérimental (TMA) permettant de mesurer les propriétés thermiques des composites et des Modèles de la méthode des éléments finis MEF. Des géométries microstructurales plus simples, telles que des particules de forme sphérique ou ellipsoïdale, ont été utilisées pour modéliser la phase de renforcement répartie dans la matrice homogène, HUA et GU, 2013 [62] ; YIN et SUN, 2005 [63]. Dans ce travail, nous avons considéré un modèle constitué d'inclusions de forme sphérique de carbure de silicium (SiC) incorporées dans une matrice cubique d'aluminium (Al) représentant une microstructure composite de matériau Al-SiC et nous avons utilisé une approche numérique MEF pour prédire le coefficient effectif de dilatation thermique, comportement relatif à la dilatation et évolution du CET avec le changement de température.

IV.2 Génération, maillage et calcul des propriétés de l'expansion thermique

Dans ce chapitre, on a utilisé la méthode du chapitre II, pour générer les VERs. Ainsi nous avons pris en compte 5 ensembles d'éléments de volume représentatifs VER avec différentes fractions volumiques de charges (5%, 10%, 15%, 20% et 30%) et nous avons généré 6 réalisations

de volume différentes (nombre de sphères) (1, 10, 20, 50, 80 et 100) pour chaque fraction de volume, à l'aide du logiciel open source BLENDER et du script PYTHON [43]. Ces VERs composés d'inclusions sphériques de carbure de silicium SiC imprégnés et réparties de manière aléatoire dans une matrice cubique d'aluminium Al formant un matériau composite Al-SiC, ainsi que les différentes configurations, sont résumés dans le (Tableau IV. 1).

Après la génération des modèles, le code FE commercial COMSOL Multiphysics est utilisé pour évaluer la propriété de coefficient de dilatation thermique CET et la dilatation relative sur les éléments de volume, voir (Figure IV. 1).

Tableau IV. 1 : Matériaux, volumes (Nombre d'inclusion) et fraction volumique des inclusions

Matériaux	Cas	Echantillons	Fractions volumiques des inclusions
Composite à matrice métallique et à deux simples phases (Al-SiC)	Cas 1	Contenant : 01, 10, 20, 50, 80 et 100 sphères de SiC.	5%
	Cas 2		10%
	Cas 3		15%
	Cas 4		20%
	Cas 5		30%

IV.2.1 Matériaux et description

Nous avons choisi un modèle de microstructure constitué de deux phases (inclusion et matrice) (Figure IV. 2.a), la première phase (inclusions) est représentée par le matériau SiC qui se présente sous la forme de sphères *dures* réparties de manière aléatoire dans la matrice, non en collision avec les parois de la microstructure. La deuxième phase douce (matrice) est représentée par un cube de matériau Al. Tous ceux-là représentent à premier lieu des éléments de volume apparents VEs, pas encore représentatif, parce qu'ils leur faut d'abord d'atteindre un certain volume pour qu'il soit représentatif.

Les VERs sont utilisés pour déterminer la dilatation relative et le coefficient de dilatation thermique effectif α^* . Les propriétés indépendantes de la température des constituants du matériau hétérogène, le module de YOUNG (E), le coefficient de POISSON (ν) et le coefficient de dilatation thermique CET sont présentés dans le (Tableau IV. 2).

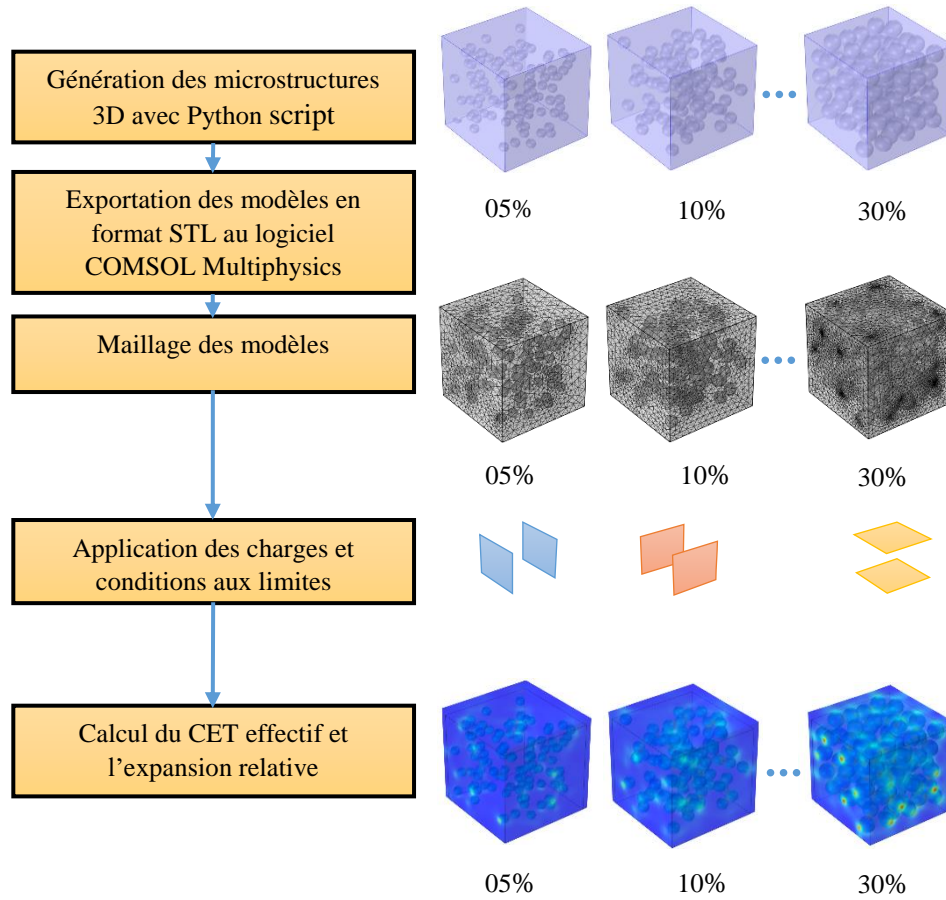


Figure IV. 1 : Processus de calcul des propriétés effectives

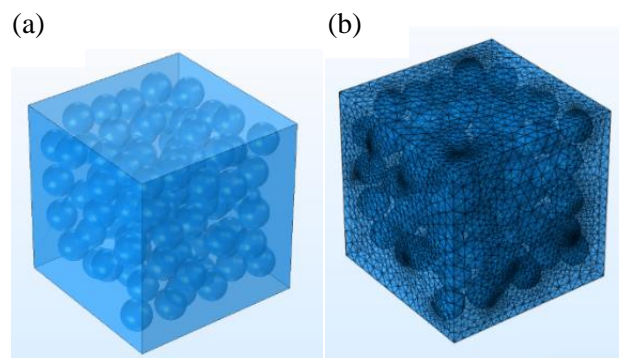


Figure IV. 2 : Exemples d'une microstructure utilisée dans ce travail, (a) cellule de microstructure, (b) Maillage 3D

Tableau IV. 2 : Quelques propriétés des constituants du composite considéré dans ce travail

Constituants	E [MPa]	ν [-]	CET [1/K]
Matrice (Al)	70×10^3	0.33	25×10^{-6}
Inclusion (SiC)	400×10^3	0.19	4.3×10^{-6}

IV.2.2 Conditions de maillage et de frontière

Nous avons introduit des considérations de maillage pour les problèmes statiques linéaires, l'un des concepts clés était l'idée de la convergence du maillage lorsque vous affinez le maillage la solution deviendra plus précise, mais cela prend une longue étude et la mémoire de l'ordinateur. Dans ce travail, le maillage par éléments finis associé à la cellule contenant les sphères est obtenu par l'utilisation d'éléments de maillage tétraédriques libres, voir (Figure IV. 2).

Pour la convergence, une densité de maillage de plus de 130000 éléments finis a été adoptée dans toutes ces recherches pour toutes les simulations (Figure IV. 3).

La théorie de l'homogénéisation est utilisée pour la détermination numérique des propriétés de dilatation thermique effectives. Un élément de volume d'un matériau hétérogène est considéré et des conditions aux limites sont prescrites afin d'estimer la propriété de dilatation thermique.

Les conditions aux limites sont appliquées à un élément de volume individuel en utilisant des contraintes de rouleau sur trois plans du contour ∂V du VER ($x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$). Tous les VERs sont soumis à un changement de température ΔT de 100 °K.

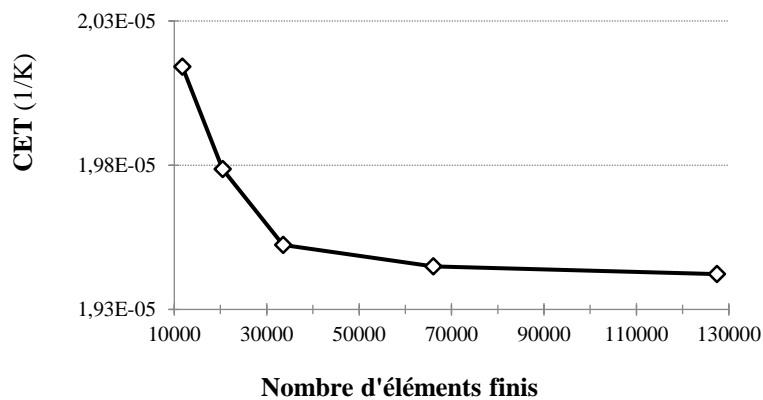


Figure IV. 3 : La convergence du CET en fonction de la densité du maillage

Nous définissons le "coefficient apparent des modules de dilatation thermique" (α^{app}) avec l'expression analytique [64]

$$\alpha^{app} = \alpha^* = \frac{1}{3} \text{trace} \langle \alpha \rangle = \frac{1}{3} \langle \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} \rangle \quad (\text{IV.1})$$

Où, α_{11} , α_{22} et α_{33} représentent les coefficients de dilatation thermique dans les directions 1, 2 et 3, calculés par la méthode numérique. Avec la même méthode et le même logiciel, nous avons également calculé l'expansion relative comme étant :

$$\varepsilon = \Delta V / V_0 \quad (\text{IV.2})$$

Ici, ΔV est l'expansion volumétrique et V_0 le volume initial.

IV.3 Résultats et discussions

Dans cette partie, pour évaluer le CET effectif et la dilatation relative. Les simulations numériques basées sur la méthode des éléments finis sont effectuées avec les conditions aux limites périodiques.

Avant de faire la simulation numérique du CET effectif et de l'expansion relative des VERs, nous avons posé des hypothèses telles que l'ignorance des contraintes d'interface et la séparation éventuelle, en ne considérant que les propriétés élastiques des deux phases du composite, aucun vide dans la microstructure. D'après les résultats obtenus, il apparaît qu'il existe une expansion homogène du volume dans trois directions pour tous les VER considérés, voir (Figure IV. 4).

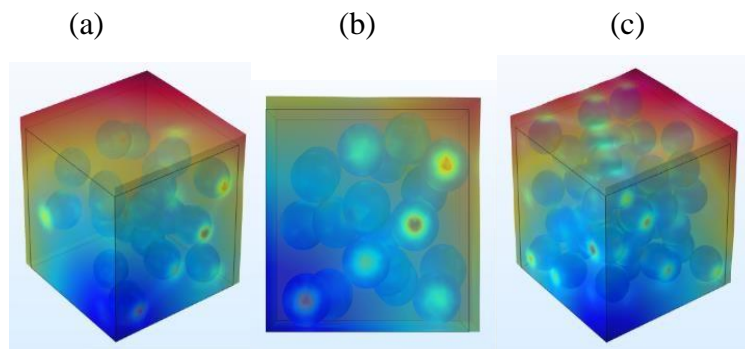


Figure IV. 4 : Expansion de microstructures constituées de : (a) 20 inclusions avec une fraction volumique de 15% en vue en perspective (b) 20 inclusions et une fraction volumique de 15% en vue plane (c) 50 inclusions avec une fraction volumique de 30% vue en perspective

IV.3.1 Effet de la fraction volumique sur l'expansion relative

Il y a une diminution substantielle de l'expansion relative moyenne par rapport à la fraction volumique (Figure IV. 5). D'autre part, il y a une très petite différence lorsque nous changeons le volume (le nombre de sphères), nous notons donc un effet négligeable du volume sur l'expansion relative, voir (Figure IV. 7). Cela est dû à la bonne répartition aléatoire des inclusions, dans toutes les directions.

IV.3.2 Effet de la fraction volumique sur le CET

Sur la (Figure IV. 6), nous prenons en compte les valeurs numériques moyennes des CETs effectifs calculés de chaque fraction volumique et notons leur évolution en ce qui concerne l'évolution de la fraction volumique des inclusions. Les résultats indiquent que plus la fraction volumique des particules de (SiC) augmente, le CET du CMM diminue. Ceci est dû au fait que le CET du SiC est inférieur à celui de l'aluminium Al. Il semble aussi que la différence entre les

CETs de la même fraction de volume soit négligeable lorsque le volume (nombre d'inclusions) varie, voir (Figure IV. 8).

La (Figure IV. 9) montre par contre que pour des fractions volumiques de 15% (cas 3) et 30% (cas 5), les valeurs du CET varient légèrement en raison peut-être des erreurs du modèle. Comprendre le comportement de la dilatation thermique aide le concepteur et le fabricant de matériaux composites à matrice métallique à utiliser une fraction volumique appropriée pour obtenir le matériau souhaité.

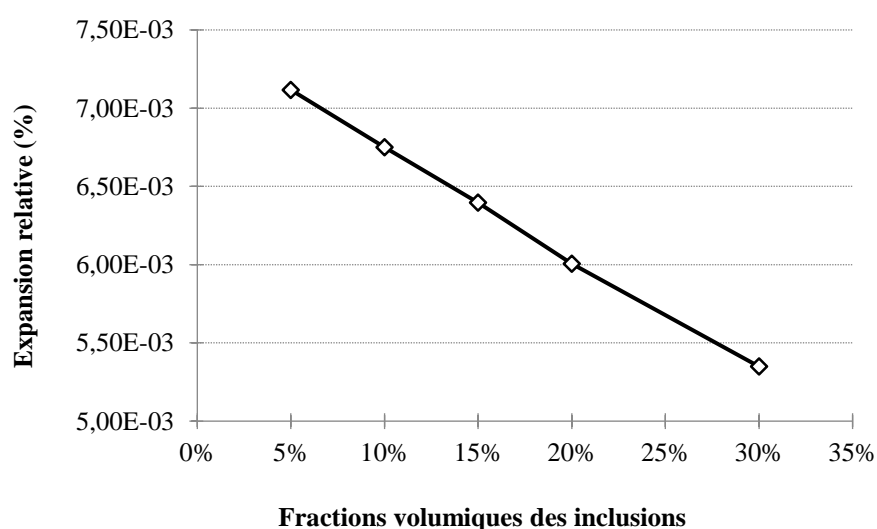


Figure IV. 5 : Expansion relative VS. Fraction volumique des inclusions

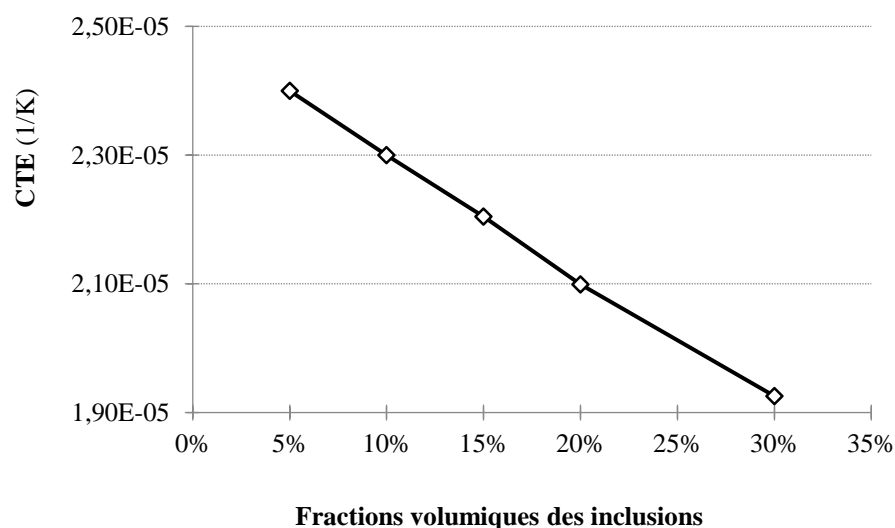


Figure IV. 6 : Coefficient moyen d'expansion thermique VS. Fraction volumique des inclusions

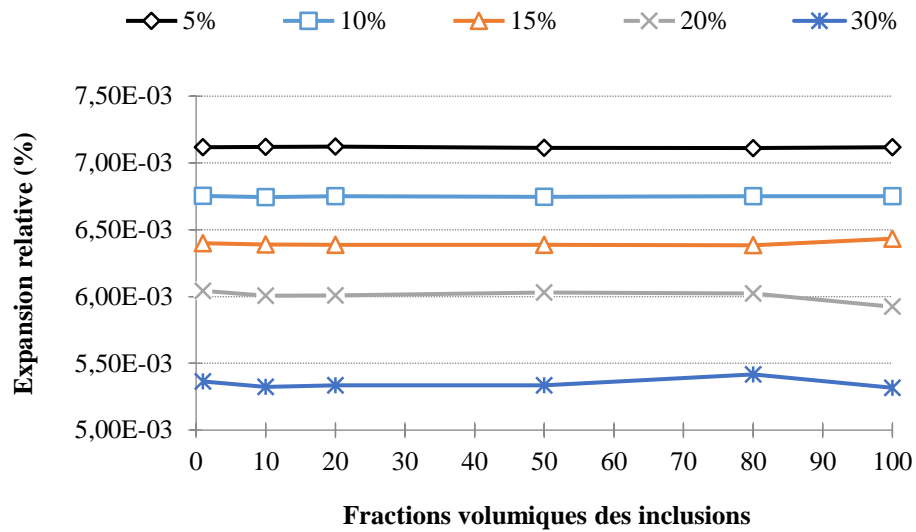


Figure IV.7 : Effet des volumes (nombre d'inclusions) sur les dilatations relatives

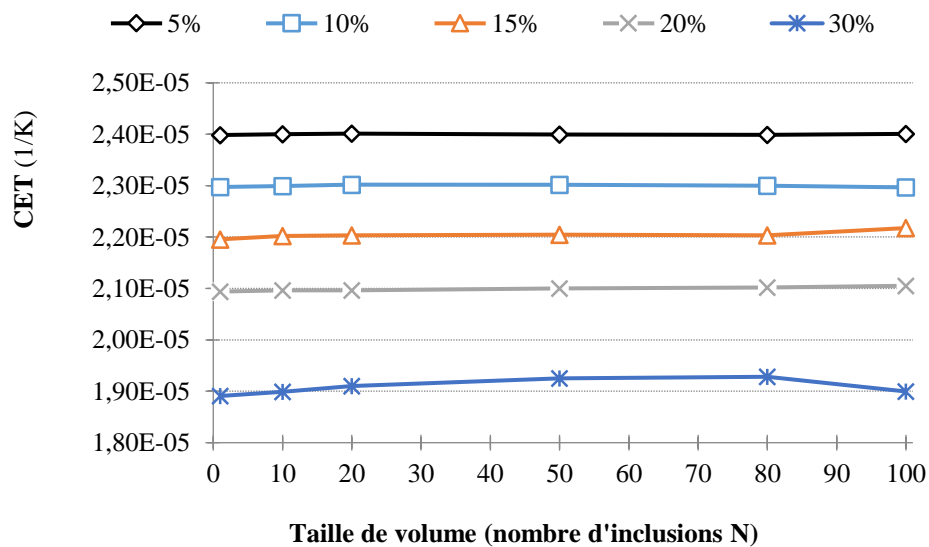


Figure IV.8 : Effet des volumes (nombre d'inclusions) sur le Coefficient de dilatation thermique effectif des microstructures avec (5%, 10%, 15%, 20%, 30%) de fraction volumique

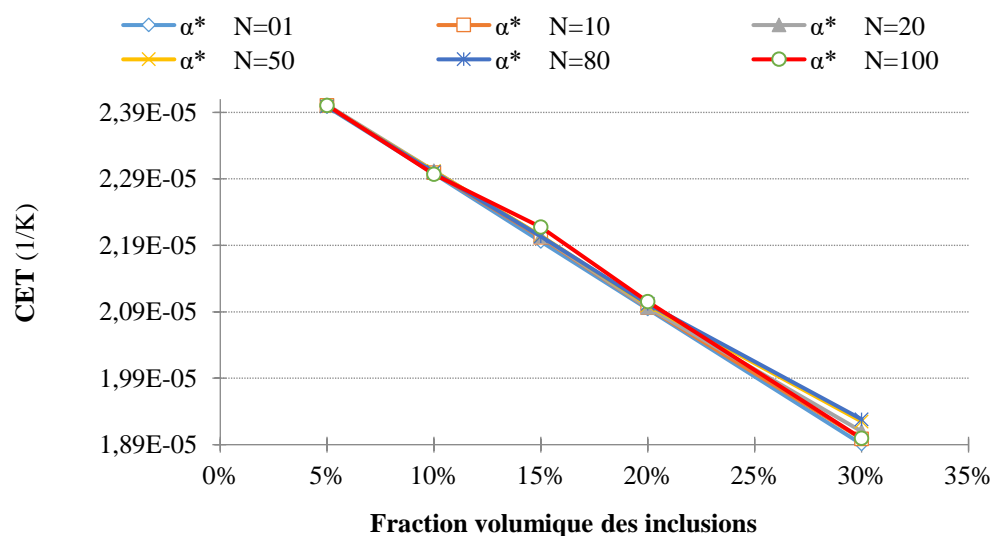


Figure IV. 9 : Effet de la fraction volumique des inclusions sur le coefficient effectif de dilatation thermique de microstructures renforcées avec un nombre d'inclusions de $N = (01, 10, 20, 50, 80$ et $100)$

IV.4 Effet de la température sur le CET

Nous avons examiné les propriétés dépendantes de la température des constituants du matériau, les données utilisées par [61] et [65] sont considérées, voir (Tableau IV. 3). Le coefficient de dilatation thermique du composite, contenant (15%) de SiC, en fonction de la température (chauffage de la température ambiante à 500 °C) est obtenu par méthode FE et comparée aux CET obtenus par d'autres méthodes analytiques (limites de SHARPY et méthode de TURNER). Pour ce faire, nous avons tenu compte de plusieurs températures (50, 100, 200, 300, 400 et 500 °C).

Les résultats sont illustrés à la (Figure IV. 10). Nous notons les valeurs les plus proches du CET effectif, calculées par la méthode numérique FE avec les valeurs de la limite supérieure de SHARPY. On prend l'erreur relative entre le CET effectif (α^*) et la limite supérieure de SHARPY, car ce sont les valeurs les plus proches et qui doivent être calculées comme suit :

$$\text{Erreur relative} = \frac{(\alpha^* - \alpha_{ShU})}{\alpha^*} * 100 \quad (\text{IV.3})$$

Les valeurs d'erreur relative obtenues sont acceptables, voir le (Tableau IV. 4). On peut donc en déduire que les approches numérique et analytique de la limite supérieure de SHARPY donnent à peu près les mêmes résultats.

Tableau IV. 3 : La dépendance en température du module élastique de YOUNG E (Gpa), coefficient de POISSON ν , et CET (ppm/K) de la matrice Al, renforcement SiC utilisé pour la modélisation (HUBER et al.2006 [65], SHARMA N K et al. 2016 [61])

T(°C)	Al99.5			SiC		
	E [Gpa]	ν	CET	E	ν	CET
50	69.2	0.33	22.6	450	0.18	3.8
100	67.6	0.33	24.2	450	0.18	3.8
200	64.0	0.33	25.7	450	0.18	3.9
300	59.8	0.34	27.7	450	0.18	4.0
400	54.9	0.36	30.4	450	0.18	4.0
500	49.9	0.38	31.7	450	0.18	4.1

Tableau IV. 4 : L'erreur relative entre le CET effective α^* et le CET $\alpha Sh U$ (Upper bound of Sharpy) VS. Température

Température [°C]	50	100	200	300	400	500
Erreur relative [%]	02	04	04	04	04	03

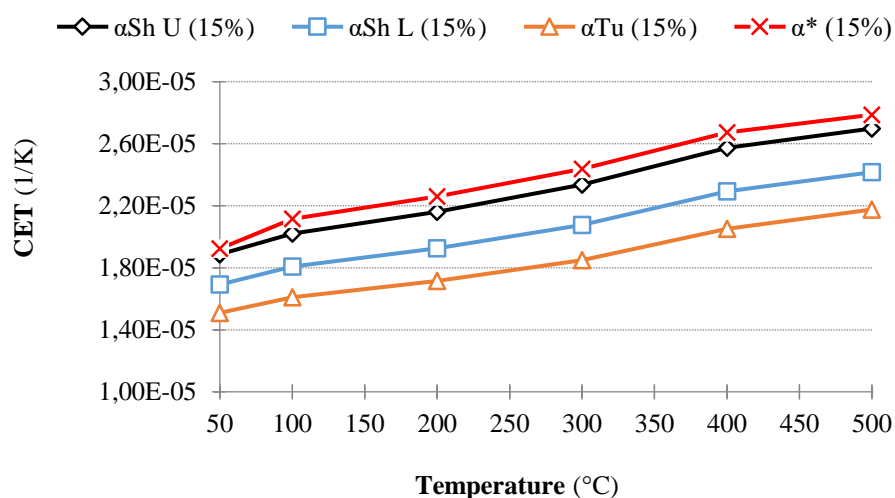


Figure IV. 10 : Effet du changement de température sur le coefficient effectif de dilatation thermique (α^*), les bornes supérieure ($\alpha Sh U$) et inférieure ($\alpha Sh L$) de SHARPY, et TURNER (αTu)

IV.5 Effet de la température sur la contrainte résiduelle

Lorsque le matériau composite est dilaté sous l'effet du changement de température, il existe une contrainte d'interface et une déformation entre matrice et inclusions. Un exemple de contrainte de VON MISES induite sur un VER avec (nombre de sphères 50 et fraction volumique de 30% des inclusions) est représenté à la (Figure IV. 11). Les contraintes intérieures et la déformation entre les inclusions et la matrice peuvent être dues à l'incompatibilité de l'expansion liée aux deux phases. La contrainte appliquée sur les inclusions permet d'éviter la séparation entre la matrice et les charges aux interfaces. Nous notons ici l'augmentation des contraintes lorsque les distances entre les inclusions sont très proches. Et cette situation, si elle est répétée plusieurs fois (réchauffage et refroidissement), peut endommager le matériau. On peut distinguer sur la (Figure IV. 12), la différence entre les valeurs des contraintes maximales lorsque la fraction volumique augmente, en raison des distances proches entre les inclusions lorsque la fraction volumique augmente, ce qui entraîne l'augmentation de la différence entre les contraintes de la même fraction volumique.

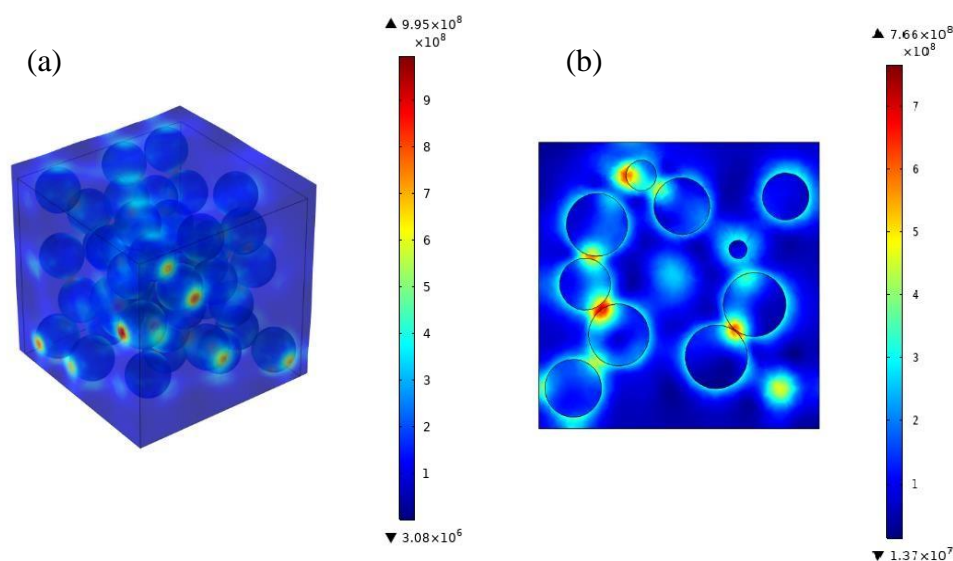


Figure IV. 11 : Contraintes de VON MISES d'un VER avec 50 sphères et une fraction de volume de 30% (a) vue complète (b) en vue en coupe

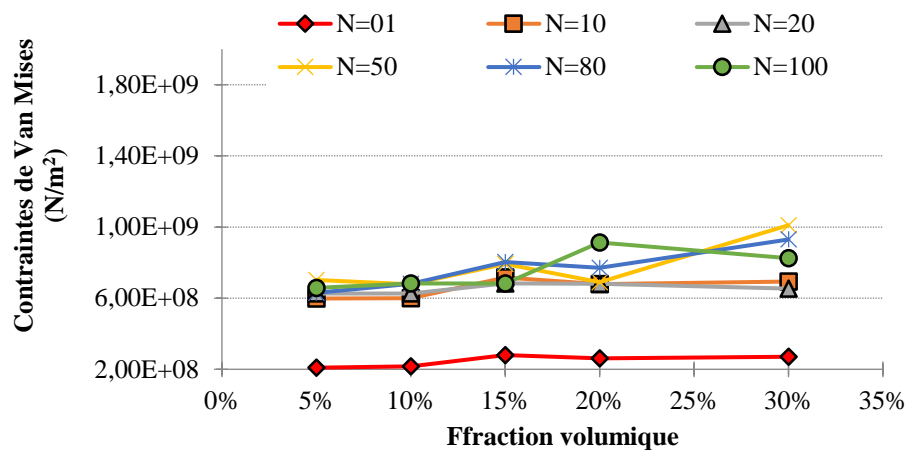


Figure IV. 12 : Valeurs maximales de contraintes de Von Mises dans les VERs avec différents volumes en fonction du volume

IV.6 Approches analytiques et approche FE

Sur la (Figure IV. 13), nous pouvons noter que les valeurs obtenues du CET effectif calculé par la méthode numérique sont plus proches des valeurs des limites supérieures de REUSS et de SHARPY. Cela nous permet d'affirmer l'utilité de cette méthode numérique pour prédire le coefficient effectif de dilatation thermique, dans l'objectif de gagner du temps et de l'argent tout en évitant les contrôles destructifs.

L'erreur relative entre le CET effectif (α^*) et les autres CET (calculés à l'aide de méthodes analytiques) doit être calculée comme suit :

$$\text{Erreur relative} = \frac{(\alpha^* - \alpha_i)}{\alpha^*} * 100 \quad (\text{IV.4})$$

Lorsque α_i sont les valeurs analytiques calculées des autres CETs (REUSS, SHARPY et VOIGT). Les valeurs résultantes des erreurs relatives entre α^* et les deux CETs de REUSS et SHARPY sont acceptables, par contre les valeurs des erreurs relatives entre α^* et les deux CETs de TURNER et VOIGT sont loin des valeurs acceptées, voir (Tableau IV. 5).

Nous pouvons donc en déduire que l'approche numérique proposée est peut-être une méthode efficace pour calculer le CET effectif d'une microstructure.

Tableau IV. 5 : L'erreur relative entre le CET α^* effectif et les autres CETs Versus la fraction volumique

Erreurs relatives (%)					
Fraction Vol.	5%	10%	15%	20%	30%
Méthodes analytiques					
α Reuss	0,14	0,31	0,67	0,62	2,42
α uSharp (Upper bound)	1,35	2,66	4,10	5,08	8,62
α lSharp (Lower bound)	4,37	8,26	11,88	14,73	20,95
α Turner	8,04	14,55	20,03	24,22	31,79
α Voigt	15,77	26,26	33,74	38,91	46,50

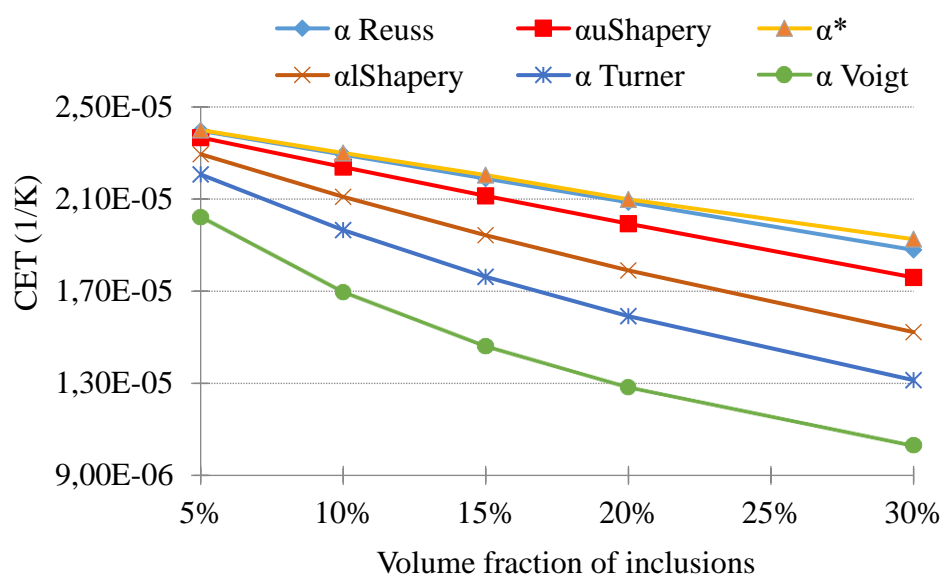


Figure IV. 13 : Comparaison entre le CET effective numérique calculé avec la méthode numérique FE (α^*) et les CETs calculé avec les méthodes analytiques

IV.7 L'expérimentale contre la méthode numérique

Le but du travail de CHAWLA et *al.* 2006 [3] est l'étude de l'anisotropie de dilatation thermique d'une matrice en aluminium extrudée renforcée de particules de SiC. CHAWLA a noté qu'il y avait une différence dans la valeur de la CET en fonction du sens du processus d'extrusion.

Les résultats MEF de la présente étude, illustrés à la (Figure IV. 14), montrent l'anisotropie du CET, qui est assez similaire aux données expérimentales. À une teneur en SiC particulière (10%), la direction transversale courte a le plus grand CET suivi de la direction transversale puis de la direction longitudinale. Il existe encore une différence entre les valeurs de CET pour les résultats expérimentaux et celles pour les résultats de MEF. La principale raison de cette différence peut être attribuée au fait que l'analyse par MEF est effectuée avec des matériaux dont les propriétés sont différentes de celles utilisées dans l'analyse expérimentale citées par CHAWLA.

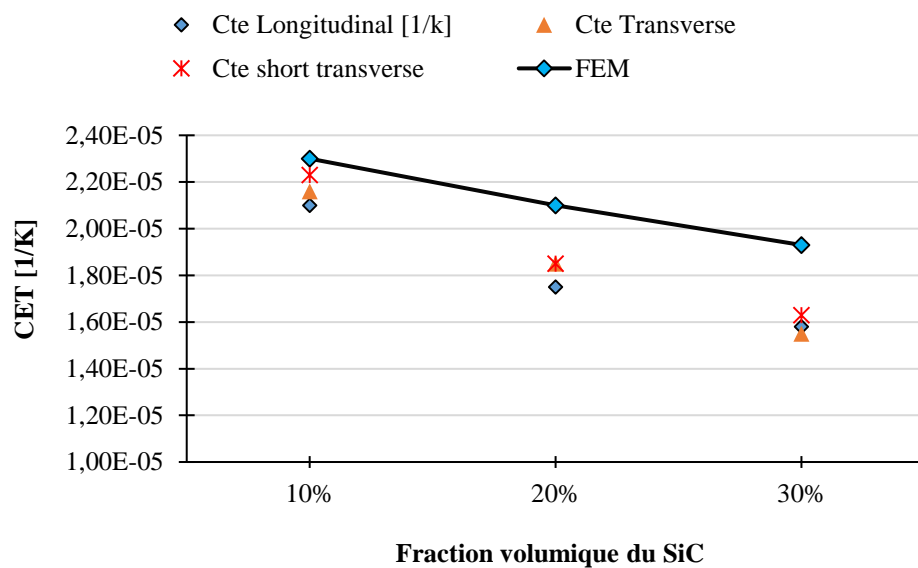


Figure IV. 14 : Comparaison entre le CET effectif obtenue par la méthode numérique et les résultats expérimentaux du CET d'après CHAWLA

IV.8 Conclusion

Des modèles numériques 3D ont été utilisés pour prédire le comportement de dilatation thermique d'un matériau composite à deux phases en particulier (Al / SiC) dans la plage de différence de température moyenne (20 - 500 °C) à l'aide de techniques d'homogénéisation pour différentes fractions volumiques. Une méthode numérique basée sur la méthode des éléments finis a été utilisée pour calculer le coefficient effectif de module de dilatation thermique. Celle-ci a été comparée à d'autres CET calculés par les méthodes (bornes de SHAPERY, bornes de ROM, et TURNER) et les résultats expérimentaux.

Les résultats numériques démontrent que l'approche MEF développée est proche de certaines approches analytiques (limite supérieure de REUSS et SHARPY). Le présent travail

indique que le modèle plus simple de microstructure constitué d'une matrice cubique et de sphères semblables est fiable pour prévoir l'expansion thermique des CMM et donne une approximation acceptable des résultats souhaités.

Conclusion générale

Les matériaux composites à particules et en particulier à matrice métallique, peuvent constituer un sujet intéressant à étudier à cause de leurs intérêts dans la fabrication de beaucoup de pièces qui entrent dans le fonctionnement des machines, engins, et matériels industriels. On peut citer par exemple : la résistance à l'usure dans les composites WC-Co utilisés dans les outils de coupe ou les inserts de forage pétrolier et le rotor d'Al-SiC dans les freins.

Le but dans ce travail était peut-être de comprendre le comportement de ces matériaux envers les sollicitations extérieures, et à partir de là mieux utiliser et exploiter ces matériaux de sorte qu'on puisse plus tard tirer bénéfice et intérêt. Dans cette étude, on n'a considéré que le comportement élastique des matériaux composites à matrice métallique, afin de contribuer à l'estimation de quelques propriétés de ces matériaux. Le principal matériau pris en charge par l'étude était l'Al-SiC à cause de sa vaste utilisation dans plusieurs domaines de l'industrie.

Les propriétés étudiées sont : les propriétés mécaniques comme : le module de compressibilité, le module de cisaillement et les propriétés thermiques comme : l'expansion relative et le coefficient de dilatation thermique CET. Le coefficient de dilatation thermique CET et la matrice de rigidité \underline{C} jouent un rôle important dans la conception et l'analyse des structures composites. Une analyse détaillée du comportement thermomécanique peut être effectuée au niveau microscopique d'une structure. Mais, pour une conception et une analyse de grandes structures, la connaissance des propriétés effectives des matériaux est essentielle. Ainsi, une prédiction théorique ou une estimation numérique des propriétés effectives est indispensable. Dans certains cas simples, des solutions analytiques exactes pour les propriétés effectives peuvent être dérivées. Il existe aussi des limites sur les valeurs effectives. Mais, face à des composites hétérogènes complexes, les méthodes numériques deviennent de plus en plus importantes et largement utilisées.

Avant l'évolution de l'outil informatique, c'étaient donc les modèles analytiques comme VOIGT et REUSS, HASHIN-STRICKMAN et autres qui sont utilisés dans l'estimation des propriétés thermomécaniques effectives des matériaux composites. Cependant, avec l'évolution de l'informatique et aussi des microprocesseurs, je crois qu'on arrivera un jour à prédire avec beaucoup plus de précision toutes les propriétés élastiques et le comportement élastique et non élastiques de ces matériaux.

On s'est appuyé dans cette étude sur l'homogénéisation numérique pour prédire le comportement thermomécanique du matériau composite à particules et matrice métallique CMM. Pour ce faire on a d'abord généré des microstructures avec des outils open source disponibles. Après ça, on a cherché à identifier la taille du VER pour pouvoir l'utiliser plus tard dans le calcul des modules effectifs. Cependant, on a utilisé aussi pour le calcul des moyennes

des propriétés élastiques, une méthode numérique basée sur le concept des éléments finis EF. Puis, en dernier lieu, on a déduit les propriétés effectives désirées.

On peut citer beaucoup de propriétés concernant les matériaux composites à particules à étudier, comme : la fatigue, la rupture, le transfert de la chaleur, l'électromagnétisme, la résistance à la corrosion... Ce que veut dire qu'il y a beaucoup de travail qu'on peut réaliser dans ce domaine dans les perspectives qui viennent, par exemple le travail expérimental. Aussi la recherche d'autres méthodes qui peuvent être plus précise et simple.

Bibliographie

- [01] Daniel B. Miracle and Steven L. Donaldson. (2001). Composites volume 21. ASM Handbook.
- [02] Gay Daniel. (1997). Matériaux composites 4e ed. Paris: Hennes.
- [03] Chawla N., D. X., & DRM, S. (2006). Thermal expansion anisotropy in extruded SiC particle reinforced. materials science and engineering: A 426 (1-2), 314-322.
- [04] Sohe Rana and Raul Figueiro. (2016). Advanced Composite Materials for Aerospace Engineering. ELSEVIER.
- [05] Barthelot, J.-M. (2010). Mécanique des matériaux et structures composites. Le Mans.
- [06] Krishan K, C. (2012). Composite Materials, Third Edition. New York: Springer Science+Business Media.
- [07] Chawla N, a. C. (2006). Metal Matrix Composites. New York, USA: Springer Science+Business Media, Inc.
- [08]. (n.d.). Retrieved from <https://www.ferlam-technologies.fr/textiles-techniques-fibres-recyclees/55-feutres-para-aramide.html>
- [09]. (n.d.). Retrieved from <https://www.castrocompositesshop.com/fr>
- [10] William D. Callister, J. a. (2011). Fundamentals of materials science and engineering an integrated approach.
- [11] Christian, K. (2014). Micromechanical Analysis of Thermal Expansion Coefficients. Modeling and Numerical Simulation of Material Science, Scientific Research Publishing Inc, 104-118.
- [12] Nabil, C. (2018). Matériaux composites Aluminium/Carbone : architecture spécifique et propriétés thermiques adaptatives, (Thèse PHD). Bordeaux: École doctorale des sciences chimiques.
- [13] Muscat J., (. (n.d.). The Analytical Theory of Heat, 35.
- [14] Donald R., A. F. (2010). The Science and Engineering of Materials Sixth Edition. Cengage Learning, Inc.
- [15] Valeriy A. Buryachenko. (2007). Micromechanics of heterogeneous materials. Springer.
- [16] Achenbach, J. (1993). Applied mathemaics and mechanics.
- [17] Hill, R. (1963). Elastic properties of reinforced solids : some theoretical principles. J. Mech. Phys. Solids, 11, 357-372.
- [18] Drugan, W. W. (1996). A micromechanics-based nonlocal constitutive equation and

-
- estimates of representative volume element size for elastic composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 44, 497-524.
- [19] Van Mier, J. (1997). *Fracture processes of concrete*. CRC Press, Inc. USA.
- [20] Trusov, P. a. (1997). *Theory of constitutive relation Part I*. Perm State Technical University, in Russian.
- [21] Hashin, Z. (1983). Analysis of composite material-A Survey. *Journal of Applied Mechanics*, 50, 481-505.
- [22] Hollister, S. K. (1992). A comparison of homogenization and standard mechanics analyses for periodic porous composites, 10. 73-95.
- [23] Tarek I. Zohdi, P. W. (2004). *An introduction to computational micromechanics*, Lecture notes in applied and computational mechanics Volume 20.
- [24] Kouznetsova, V. (2002). *Computational homogenization for the multi-scale analysis of multi-phase materials*. Technische Universiteit Eindhoven.
- [25] Feyel, F. (1999). Multiscale FE2 elastoviscoplastic analysis of composite structure. *Computational Materials Science* 16(1-4), 433–454.
- [26] Nemat-Nasser, S. H. (1993). *Micromechanics: overall properties of heterogeneous materials*. New York: North-Holland.
- [27] Suquet., P. M. (1985). *Elements of homogenization for inelastic solid mechanics*.
- [28] Nemat-Nasser, H. (1999). On two micromechanics theories for determining micro–macro relations in heterogeneous solids. *Mechanics of Materials*, Elsevier,.
- [29] Drapier, S. (2017). *Mécanique des Composites Hautes*, version 3. Mines Saint-Étienne: Département Mécanique et Procédés d’Elaboration directe Centre Science des Matériaux et des Structures & LGF UMR CNRS 5307.
- [30] Bornert, M. B. (2001a). *Homogénéisation en mécanique des matériaux volume Tome 1*. Paris: Hermès Sciences Publications.
- [31] Reuss, A. (1929). Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle. *Z. angew. Math. Mech.*, 9, 49–58.
- [32] Voigt, W. (1928). *Lehrbuch der Kristallphysik*. Leipzig: B. G. Teubner Verlag.
- [33] Hashin, Z. (1988). The differential scheme and its application to cracked materials. *J. Mech. Phys. Solids* (36), 719–736.
- [34] Hashin, Z. S. (1963). A variational approach to the theory of the elastic behaviour of
-

-
- multiphase materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 11, 127-140.
- [35] El Moumen, A. (2014). *Prévision du comportement des matériaux hétérogènes basée sur l'homogénéisation numérique : modélisation, visualisation et étude morphologique*, (Thèse PHD). Lile: Université de Lile.
- [36] MORI, T. T. (1973). Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metal.*, v.21, p. 571.
- [37] HATTA, H. T. (1986). Equivalent inclusion method for steady state heat conduction in composites. *Int. J. Engng. Sci.*, v. 24, n. 7, p. 1159-1172.
- [38] ESHELBY, J. (1957). The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proc. Roy. Soc. London A*, v. 241, p. 376–396.
- [39] Ghossein E., L. M. (2014). A comprehensive validation of analytical homogenization models: The case of ellipsoidal particles reinforced composites. *Mechanics of Materials*, 75, 135-150.
- [40] Voigt, W. (1889). *Theoretische Studien über die Elastizitätsverhältnisse der Krystalle*. *Annalen der Physik*, 38, 573-587.
- [41] Turner, P. (1946). Thermal-expansion stresses in reinforced plastics. *J. Res. NBS*, vol. 37, p. 239.
- [42] Schapery, R. (1968). Thermal expansion coefficients of composite materials based on energy principles. *Journal of Composite Materials*, vol. 2, no. 3, p. 380.
- [43] Boutaani M. S., M. S. (2017). Evaluation of effective mechanical properties of complex multiphase materials with finite element method. *U.P.B. Sci. Bull., Series D*, Vol. 79, Iss. 3.
- [44] Lubachevsky B., S. F. (1991). Disks vs Spheres : Constrating Properties of Random Packings. *Journal of Statistical Physics* 64(3-4), 501–524.
- [45] Rintoul M. D. et Torquato, S. (1997). Reconstruction of the structure of dispersions. *Journal of Colloid and Interface Science* 186, pages 467-476.
- [46] González J.J., H. P. (1973). Cooperative effects in random sequential polymer reactions. *Chemical Physics Volume 3, Issue 2*, Pages 228-238.
- [47] Finegold L., D. J. (1979). Maximum density of random placing of membrane particles. *Mac Millan journals Ltd. Nature Vol*, 278, pages 443-445.
- [48] Masaharu Tanemura, M. H. (1980). *Geometrical Models of Territory. I. Models for*
-

-
- Synchronous and Asynchronous Settlement of Territories. *J. theor. Biol.* 82, 477-496.
- [49] Boris D., L. F. (1990). Geometric properties of random disk packings. *Journal of Statistical Physics* volume 60, pages 561–583.
- [50] Donev, A. (2006). *Jammed Packings of Hard Particles-PhD Thesis-*. Faculty of Princeton University.
- [51] Steinkopff T., e. S. (1995a). Simulating the elasto-plastic behavior of multiphase materials by advanced finite element techniques. Part I: a rezoning technique and the multiphase element method. *Computational Materials Science* 4, 10_14.
- [52] Lippmann N., S. T. (1997). 3D-finite-element-modelling of microstructures with the method of multiphase elements. *Computational Materials Science* 9, 28_35.
- [53] Kanit T., F. S. (2003). Determination of the size of the representative volume element for random composites: statistical and numerical approach. *Methods in applied mechanics and engineering*, Vol. 195, p. 3960–3982.
- [54] Khdir Y.K., K. T. (2013). Computational homogenization of elastic-plastic composites. *Int. J. Solids Struct.*
- [55] Steinkopff T., e. S. (1995b). Simulating the elasto-plastic behavior of multiphase materials by advanced finite element techniques. Part II: simulation of the deformation behavior of Ag-Ni composites. *Computational Materials Science* 4, 15_22.
- [56] Steinkopff T. (1993.). Rezoning scheme for the simulation of discrete void formation in coarse two-phase materials. *Computational Materials Science* 1, 289_296.
- [57] Kari S., B. S. (2007). Numerical evaluation of effective material properties of randomly distributed short cylindrical fiber composites. *Computational Materials Science* 39, 198–204.
- [58] El Moumen A., K. T. (2014.). Effect of reinforcement shape on physical properties and representative volume element of particles-reinforced composites: statistical and numerical approaches. *Mechanics of Materials*.
- [59] Sukiman M. S., K. T. (2017). Effective thermal and mechanical properties of randomly oriented short and long fiber composites. *Mechanics of Materials*.
- [60] Djebara Y., E. M. (2015). Modeling of the effect of particles size, particles distribution and particles number on mechanical properties of polymer-clay nano-composites: numerical homogenization versus experimental results. *Composites Part b*.
-

- [61] Sharma N.K., M. R. (2016). Modeling of thermal expansion behavior of densely packed Al/SiC composites. *International journal of solids and structures* 102, 77-88.
- [62] Hua Y., G. L. (2013). Prediction of the thermomechanical behavior of particle reinforced metal matrix composites. *Composites Part B* 45, 1464–1470.
- [63] Yin, H. ., (2005). Elastic modeling of periodic composites with particle interactions. *Philos. Mag. Lett.* 85, 163–173.
- [64] Di Paola, M. F. (2010). Modélisation multi-échelles du comportement thermoélastique de composites à particules sphériques (Thèse PHD). Ecole Centrale Paris.
- [65] Huber T., D. H. (2006). Thermal expansion studies of aluminum-matrix composites with different reinforced architecture of SiC particles. *Comp. Sci. Technol.* 66, 2206–2217.

Résumé

Les matériaux composites sont de plus en plus utilisés dans plusieurs domaines de la vie quotidienne. Le comportement des matériaux composite après la subissions des sollicitations extérieures : thermiques, mécanique, électromagnétiques, électrique, la corrosion... est un sujet abordable dans plusieurs travaux dans la littérature et travaux de fabrication.

Parmi les matériaux composites on trouve les matériaux composites à particules qui ont des qualités comme : la diminution du poids, la résistance élevée...

Le but de ce travail est de contribuer à une étude théorique, afin de déduire : les propriétés effectives mécaniques comme le module de compressibilité et le module de cisaillement, le coefficient de dilatation thermique effectif. L'étude effectuée concerne le comportement élastique linéaire des matériaux composite à particules. Les méthodes utilisées sont dites numériques par éléments finis, et sont comparés avec des méthodes analytiques et parfois expérimentales.

Mots-clés : matériaux composites, matériaux composites à particules, micromécanique des matériaux hétérogène, homogénéisation des milieux hétérogènes, Propriétés effectives des matériaux composites.

Summary

Composite materials are increasingly used in several areas of daily life. The behavior of composite materials after having been subjected to external solicitations like: thermal, mechanical, electromagnetic, electrical, corrosion, etc. is an affordable subject in several works in the literature and manufacturing works.

Among the composite materials, there are particulate composite materials, which have qualities such as weight reduction, high strength, etc.

The aim of this work is to contribute to a theoretical study, in order to deduce the effective mechanical properties such as the bulk modulus, shear modulus, and the effective coefficient of thermal expansion. The study carried out concerns the linear elastic behavior of particulate composite materials. The methods used here are numerical by finite elements, and are compared to analytical and sometimes experimental methods.

ملخص

تستخدم المواد المركبة بشكل متزايد في العديد من مجالات الحياة اليومية. يعتبر سلوك المواد المركبة بعد تعرضها للضغوط الخارجية: الحرارية، الميكانيكية، الكهرومغناطيسية، الكهربائية، التآكل... موضوعًا محل نقاش في العديد من الأعمال العلمية، ولكن أيضًا في أعمال التصنيع... من بين هذه المواد المركبة نجد المواد المركبة الجسيمية التي لها صفات مثل: تقليل الوزن، المقاومة العالية...

الهدف من هذا العمل هو المساهمة في دراسة نظرية، من أجل استنتاج: الخصائص الميكانيكية الفعالة مثل معامل الانضغاط ومعامل القص، معامل التمدد الحراري الفعال. الدراسة التي أجريت تتعلق بالسلوك الخطي المرن للمواد المركبة الجسيمية. الطرق المستخدمة هي عديدة بواسطة عناصر محدودة، وتتم مقارنتها بالطرق التحليلية والتجريبية أحيانًا.