

Université Mohamed Khider – Biskra  
Faculté des Sciences et de la technologie  
Département : Génie mécanique  
Ref : .....



جامعة محمد خيضر بسكرة  
كلية العلوم و التكنولوجيا  
قسم: الهندسة الميكانيكية  
المرجع: .....

Thèse présentée en vue de l'obtention  
Du diplôme de  
**Doctorat en sciences en : Génie mécanique**

**Spécialité (Option) : Construction mécanique**

**Modélisation du comportement élasto-viscoplastique  
d'un matériau composite sollicité en flexion par une  
technique d'homogénéisation**

Présentée par :  
**SAADALLAH Younès**

Soutenue publiquement le 23 avril 2018

**Devant le jury composé de :**

Dr. HECINI Mabrouk	Professeur	Président	Université de Biskra
Dr. DERFOUF Semcheddine	Maitre de Conférences 'A'	Directeur de thèse	Université de Biskra
Dr. HADID Mohamed	Professeur	Co-directeur de thèse	Université de Biskra
Dr. BRIOUA Mourad	Professeur	Examineur	Université de Batna 2
Dr. MANAA Rabah	Maitre de Conférences 'A'	Examineur	Université de Batna 2
Dr. AMEDDAH Hacene	Maitre de Conférences 'A'	Examineur	Université de Batna 2

*A ma mère*

*A la mémoire de mon père*

## ***Remerciements***

*Les travaux de thèse que j'ai l'honneur de présenter dans ce manuscrit sont le fruit de plusieurs années de travail au sein du Département de Génie Mécanique et du Laboratoire de Génie Mécanique de l'Université de Biskra.*

*A ce titre je voudrais remercier le Directeur de ma thèse, le Docteur Semcheddine Derfouf et le Co-directeur, le Professeur Mohamed Hadid. Je reconnais qu'ils n'ont épargné aucun effort pour m'aider, m'encourager et m'orienter pour mener à bien et à terme la présente thèse.*

*J'exprime toute ma reconnaissance aux membres du jury, le Pr Mabrouk Hécini, le Pr Mourad Brioua, le Dr Rabah Manaa, et le Dr Hacene Ameddah, pour l'intérêt manifesté à l'égard de ces travaux de recherche. Je tiens également à les remercier vivement pour l'honneur qu'ils m'ont fait d'avoir accepté de faire partie du jury.*

## Table des contenus

Dédicaces .....	i
Remerciements .....	ii
Table des contenus .....	iii
Liste des Tableaux.....	vii
Liste des Figures .....	vii
Introduction générale.....	1
<b>Chapitre I : Lois de comportement viscoélastiques et viscoplastiques .....</b>	<b>5</b>
I.1. Introduction .....	5
I.2. Viscoélasticité linéaire .....	5
I.2.1. Comportement viscoélastique unidimensionnel .....	6
I.2.2. Principe de superposition de Boltzmann .....	7
I.2.3. Modèles rhéologiques viscoélastiques.....	8
I.3. Viscoélasticité non linéaire .....	11
I.3.1. Principe de superposition non linéaire.....	12
I.3.2. Modèles rhéologiques viscoélastiques non linéaires .....	12
I.4. Viscoplasticité .....	13
I.4.1. Modèles rhéologiques viscoplastiques.....	14
I.5. Influence de la vitesse de déformation et de la température .....	16
I.5.1. Sensibilité du comportement à la vitesse de déformation.....	16
I.5.2. Sensibilité du comportement à la température.....	17
I.6. Bilan du chapitre .....	19
<b>Chapitre II : Théories et modélisation de la flexion des poutres .....</b>	<b>20</b>
II.1. Introduction .....	20
II.2. Elément poutre .....	20
II.3. Flexion en petits déplacements .....	20
II.4. Flexion en grands déplacements .....	22
II.4.1. Etat de l'art.....	22

II.4.2. Modélisation d'une poutre console.....	23
II.5. Influence du cisaillement transverse .....	25
II.5.1. Hypothèses d'Euler-Bernoulli .....	25
II.5.2. Théorie de Timoshenko .....	25
II.5.3. Théories d'ordre élevé .....	27
II.6. Simulation d'un essai de flexion cisailée .....	28
II.6.1. Description du problème.....	28
II.6.2. Modèle rhéologique viscoélastique .....	30
II.6.3. Formulation mathématique des équations de comportement .....	31
II.6.4. Matériau et ses propriétés mécaniques.....	32
II.7. Bilan du chapitre .....	35
<b>Chapitre III : Stratégie d'identification des paramètres des matériaux .....</b>	<b>36</b>
III.1. Introduction .....	36
III.2. Méthodes d'identification .....	36
III.2.1. Méthodes d'identification classique .....	37
III.2.2. Méthodes d'identification inverses.....	38
III.3. Méthodes numériques d'optimisation .....	39
III.3.1. Méthodes classiques .....	39
III.3.2. Méthodes métaheuristiques.....	40
III.4. Identification des paramètres viscoélastiques .....	47
III.5. Identification des paramètres viscoplastiques .....	49
III.6. Identification des paramètres viscoélastiques-viscoplastiques d'une poutre en flexion.....	51
III.6.1. Formulation mathématique.....	51
III.6.2. Application numérique .....	53
III.7. Bilan du chapitre .....	58
<b>Chapitre IV : Modélisation rhéologique et expérimentation.....</b>	<b>59</b>
IV.1. Introduction .....	59
IV.2. Généralités sur les composites .....	59

IV.2.1. Les matrices .....	59
IV.2.2. Les renforts .....	60
IV.3. Généralités sur les polymères thermoplastiques .....	60
IV.3.1. Bibliographie sur les polyamides.....	61
IV.4. Modélisation rhéologique viscoélastique viscoplastique .....	63
IV.4.1. Modèle rhéologique proposé .....	63
IV.4.2. Formulation mathématique des équations de comportement .....	64
IV.5. Techniques d'homogénéisation.....	65
IV.5.1. Homogénéisation en élasticité linéaire .....	65
IV.5.2. Homogénéisation en viscoélasticité.....	66
IV.6. Expérimentation .....	67
IV.6.1. Matériau de la matrice objet d'étude .....	67
IV.6.2. Machine d'essai .....	68
IV.6.3. Techniques de mesure.....	68
IV.6.4. Protocole expérimental en traction .....	70
IV.6.5. Enregistrements expérimentaux en traction.....	70
IV.6.6. Protocole expérimental en flexion.....	72
IV.6.7. Enregistrements expérimentaux en flexion.....	72
IV.7. Bilan du chapitre .....	73
<b>Chapitre V : Identification et validation du modèle en traction .....</b>	<b>75</b>
V.1. Introduction .....	75
V.2. Identification des paramètres viscoélastiques .....	75
V.3. Identification des paramètres viscoplastiques .....	76
V.4. Stratégie de travail pour l'identification des paramètres du modèle .....	77
V.4.1. Identification viscoélastique au seuil d'une déformation de 0.5 % .....	79
V.4.2. Identification viscoplastique à partir d'une déformation de <b>1.5</b> % .....	80
V.4.3. Réidentification viscoélastique .....	82
V.4.4. Ré-identification viscoplastique .....	84
V.4.5. Assemblage des courbes .....	85
V.5. Discussion des résultats obtenus .....	86

V.5.1.	Courbes de contraintes déformation à différentes vitesses de déformation	86
V.5.2.	Sensibilité de la contrainte seuil de plasticité la vitesse de déformation ....	87
V.5.3.	Sensibilité des paramètres à la vitesse de déformation.....	89
V.6.	Bilan du chapitre .....	91
 <b>Chapitre VI :Identification et validation du modèle en flexion. ....</b>		<b>92</b>
VI.1.	Introduction .....	92
VI.2.	Modélisation rhéologique.....	92
VI.2.1.	Analyse viscoélastique.....	93
VI.2.2.	Analyse viscoélastique viscoplastique.....	94
VI.3.	Identification des paramètres.....	97
VI.3.1.	Etablissement de la fonction objectif.....	97
VI.3.2.	Détermination de la contrainte seuil de plasticité.....	98
VI.4.	Application au modèle homogénéisé .....	99
VI.4.1.	Homogénéisation viscoélastique.....	99
VI.4.2.	Frontières viscoélastique viscoplastique.....	100
VI.4.3.	Homogénéisation viscoplastique .....	101
VI.5.	Discussion des résultats.....	101
VI.5.1.	Paramètres identifiés en flexion.....	102
VI.5.2.	Courbes de la courbure en fluage .....	103
VI.5.3.	Répartition des contraintes et des déformations .....	104
VI.5.4.	Evolution de la zone viscoplastique.....	107
VI.5.5.	Influence du renfort sur les propriétés du polyamide .....	107
VI.6.	Bilan du chapitre .....	110
 <b>Conclusion et perspectives.....</b>		<b>111</b>
<b>Annexe :</b>	<b>Théorie élémentaire des poutres.....</b>	<b>114</b>
<b>Références</b>	<b>.....</b>	<b>118</b>

## Liste des Tableaux

Tableau I-1. Module de Young et paramètres du seuil de plasticité à différentes vitesses de déformation [6] .....	17
Tableau III-1. Comparaison des paramètres viscoélastiques réels et identifiés .....	54
Tableau III-2. Comparaison des paramètres viscoplastiques .....	56
Tableau IV-1. Paramètres élastoviscoplastique d'un polyamide à 400C [18].....	61
Tableau IV-2. Propriétés physiques du polyamide 6 .....	67
Tableau IV-3. Vitesses de déformation de l'essai de traction.....	70
Tableau V-1. Paramètres viscoélastiques identifiés au seuil de 0.5% de déformation.....	79
Tableau V-2. Paramètres viscoplastiques identifiés au seuil de 1.5% de déformation. ....	81
Tableau V-3. Paramètres viscoélastiques ré-identifiés au seuil de plasticité préalable. ..	83
Tableau V-4. Paramètres viscoplastiques ré-identifiés au seuil de plasticité préalable. ...	84
Tableau V-5. Relations des paramètres avec la vitesse de déformation .....	89
Tableau VI-1. Paramètres viscoélastiques et viscoplastiques en flexion .....	102



## Liste des Figures

Figure I-1. Essais de fluage-recouvrance et relaxation-effacement. ....	7
Figure I-2. Modèles analogiques viscoélastiques: a.Modèle de Maxwell, b.Modèle de Kelvin-Voigt.....	10
Figure I-3. Modèle viscoplastique de Bingham: a. Parfait, b. à avec écrouissage .....	14
Figure I-4. Courbes contraintes déformations d'un polymère semi cristallin à différentes vitesses de déformation [6]. ....	17
Figure I-5. Courbe d'un essai de compression uniaxial de PMMA à une vitesse de déformation de $-0.001s^{-1}$ et à différentes températures [47]......	18
Figure I-6. Courbes simulées des contraintes déformations d'une fonte à graphite sphéroïdal à différentes températures [33]. ....	19
Figure II-1. Poutre console en flexion en grands déplacements.....	23
Figure II-2. Projection de la déformée sur l'axe $x$ .....	24
Figure II-3. Hypothèses cinématiques d'Euler Bernoulli.....	26
Figure II-4. Hypothèses cinématiques de Timoshenko .....	27
Figure II-5. Hypothèses cinématiques des théories d'ordre élevé.....	28
Figure II-6. Géométrie d'une poutre en flexion trois points .....	29
Figure II-7. Modèle rhéologique viscoélastique .....	30
Figure II-8. Effet du cisaillement sur la flèche.....	34
Figure II-9. a. Evolution des flèches au cours du temps, b. Différence des flèches pure et cisailée.....	34
Figure III-1. Types de croisements .....	42
Figure III-2. Mutation par inversion de bit.....	43
Figure III-3. Organigramme d'un algorithme génétique.....	44
Figure III-4. Faculté des colonies de fourmis à retrouver le chemin le plus court.....	46
Figure III-5. Organigramme d'un algorithme à colonies de fourmis .....	47
Figure III-6. Dépendance du seuil de plasticité à la température et la vitesse de déformation (a. polycarbonate, b. poly(methyl methacrylate)) [5] .....	50
Figure III-7. Poutre en flexion trois points.....	53
Figure III-8. Comparaison des paramètres réels et identifiés.....	55
Figure III-9. Comparaison des courbures viscoélastiques réelle et identifiée.....	55

Figure III-10. Comparaison des paramètres viscoplastiques réelles et identifiés .....	57
Figure III-11. Comparaison des courbures viscoplastiques réelles et identifiées .....	57
Figure IV-1. Représentation d'un matériau composite .....	60
Figure IV-2. Modèle rhéologique élasto-viscoplastique .....	63
Figure IV-3. Matériau objet d'étude (polyamide 6) .....	67
Figure IV-4. Machine d'essai INSTRON 5969 .....	68
Figure IV-5. Evolution du marquage à quatre tâches au cours de la déformation. ....	69
Figure IV-6. Courbes contraintes-déformations expérimentales d'un polyamide 6 à différentes vitesses de déformation. ....	71
Figure IV-7. Géométrie d'une poutre en flexion trois points.....	72
Figure IV-8. Courbes expérimentales de l'évolution de la flèche.....	73
Figure V-1. Intervalle du seuil de plasticité .....	78
Figure V-2. Courbe contrainte déformation viscoélastique en dessous du seuil de déformation de 0.5% et à vitesse de déformation de .0000646 <i>Min</i> –	1.80
Figure V-3. Courbe contrainte déformation viscoplastique au dessus du seuil de déformation de 0.5% et à vitesse de déformation de 0.0000646 <i>Min</i> – 1 .....	82
Figure V-4. Courbe contrainte déformation viscoélastique en dessous du seuil de plasticité et à vitesse de déformation de 0.0000646 <i>Min</i> – 1 .....	83
Figure V-5. Courbe contrainte déformation viscoplastique au dessus du seuil de plasticité et à vitesse de déformation de 0.0000646 <i>Min</i> – 1.....	85
Figure V-6. Courbes comparatives expérimentation-simulation .....	86
Figure V-7. Sensibilité du seuil de plasticité à la vitesse de déformation.....	88
Figure V-8. Linéarité du seuil de plasticité au logarithme de la vitesse de déformation ..	88
Figure V-9. Sensibilité des paramètres viscoélastiques à la vitesse de déformation .....	90
Figure V-10. Sensibilité des paramètres viscoplastiques à la vitesse de déformation .....	90
Figure VI-1. Répartition des contraintes dans les domaines viscoélastique et viscoélastique-viscoplastique .....	97
Figure VI-2. Courbe contrainte déformation pour la détermination du seuil de plasticité	99
Figure VI-3. Paramètres en fonction de la contrainte à une échelle logarithmique .....	102
Figure VI-4. Courbes du fluage du polyamide 6 sous 170 <i>N</i> et 200 <i>N</i> .....	103

Figure VI-5. Evolution de la vitesse de courbure du polyamide 6 sous 170 N et 200 N 104

Figure VI-6. Répartition des contraintes et des déformations dans la section la plus sollicitée. .... 105

Figure VI-7. Evolution des contraintes sur les fibres externes..... 106

Figure VI-8. Evolution de la frontière viscoélastique. .... 106

Figure VI-9. Influence du renfort sur la fonction du fluage..... 108

Figure VI-10. Limite élastique effective ..... 108

Figure VI-11. Influence du renfort sur la courbure ..... 109

Figure VI-12. Hypothèses cinématiques d'Euler-Bernoulli..... 116

## Introduction générale

Sous l'effet d'une sollicitation mécanique, les matériaux réagissent. Différentes réponses mécaniques sont à prévoir dont principalement la déformation et la rupture. Ces réponses diffèrent selon plusieurs facteurs dont la structure du matériau et l'intensité du chargement mécanique. En effet différentes classes des matériaux sont distinguées : les métaux et alliages, les polymères et les céramiques ; les composites en sont des composés. Par ailleurs un faible chargement provoque une déformation réversible alors qu'un chargement excessif dépassant des valeurs critiques induit une déformation irréversible. Il est maintenant temps d'introduire quatre concepts élémentaires de réponses mécaniques. Il est question de la déformation élastique et la déformation plastique ; la déformation viscoélastique et la déformation viscoplastique. Ces deux dernières se distinguent des deux premières par l'intervention du facteur temps.

La modélisation de ces réponses se traduit par des fonctions mathématiques appelées lois de comportement mécanique. Le comportement mécanique d'un matériau se traduit alors par une relation mathématique entre l'état de contrainte et les principales variables d'écoulement telles que la déformation, la vitesse de déformation et la température. Les propriétés des matériaux s'expriment dans ces lois par des paramètres qui peuvent être indépendants ou dépendants du taux de chargement ou bien des variables d'écoulement. La détermination de ces paramètres exige une expérimentation adaptée au type de loi de comportement pris en compte.

L'expérimentation consiste à la réalisation des tests mécaniques afin d'identifier le comportement rhéologique des matériaux. On distingue, d'abord, une expérimentation qualitative permettant d'identifier le type du comportement. Celle-ci permet de donner des indices comme la linéarité ou la non linéarité, l'allure de la courbe contrainte-déformation, la dépendance du temps et/ou de la température etc. Ensuite vient l'expérimentation quantitative qui est la plus importante. Grâce à elle, les paramètres qui pilotent la loi de comportement peuvent être identifiés. Plusieurs types d'essais mécaniques sont à prévoir : la traction et la compression, la flexion et le cisaillement. Pour les matériaux dont le comportement dépend du temps, les essais de fluage et de relaxation sont bien privilégiés. Ils présentent respectivement l'avantage de donner des informations sur l'évolution de la déformation sous un chargement constant ; et la diminution de la contrainte sous une déformation constante. Par ailleurs, si l'on veut étudier la

sensibilité du comportement à la température et/ou à la vitesse de déformation, on prévoit des essais à différentes températures tout en fixant la vitesse de déformation et vice versa. Parfois, il est nécessaire de faire appel à plusieurs tests pour identifier le comportement mécanique d'un seul matériau.

L'identification des paramètres qui traduisent les propriétés des matériaux est une étape qui suit la modélisation et l'expérimentation. Il s'agit d'un moment de comparaison des résultats de l'expérimentation et ceux de la modélisation. Il est souvent question de mettre en place une fonction qui établit l'écart entre les résultats expérimentaux et les résultats du modèle pris en compte. La minimisation de cette fonction nous met face à un problème d'optimisation. La résolution de ce problème exige un recours aux techniques d'optimisation adéquates. Le choix de la méthode appropriée dépend du type et de complexité du problème. Il est à souligner qu'il y a des méthodes dites métaheuristiques qui servent d'outils pertinents pour résoudre des problèmes très compliqués sans qu'elles n'exigent une connaissance approfondie sur la fonction objectif et l'espace de recherche. Celles-ci sont investies dans la présente thèse.

## **Problématique**

Malgré les grandes différences de nature et de structure entre les métaux et les alliages, les polymères, les céramiques et les composites, on observe de grandes similitudes dans leurs comportements macroscopiques. Ainsi, avec des ordres de grandeur différents, les termes d'élasticité, de viscosité, de plasticité, d'écrouissage et de rupture s'appliquent à tous ces matériaux. C'est ce qui justifie l'approche globale de la mécanique des matériaux : à l'aide des concepts de la mécanique des milieux continus, de la thermodynamique et de la rhéologie, elle permet de construire des modèles indépendants dans leurs fondements de la nature des matériaux.

Ainsi, il n'est pas surprenant que des méthodes d'analyses des propriétés mécaniques mises au point pour les métaux soient appliquées aux polymères et vice versa. Cependant, le comportement de chaque classe des matériaux est décrit par un caractère dominant. Si les métaux et alliages présentent un comportement indépendant du temps à température ambiante, il n'en est pas de même pour les polymères. Ces derniers sont en revanche généralement décrits par des comportements viscoélastiques-viscoplastiques. Les composites étant des matériaux constitués de deux ou de plusieurs matériaux de comportements différents acquièrent naturellement des

comportements compliqués. La présente thèse est focalisée sur la matrice thermoplastique d'un composite renforcée par des fibres de verre.

Les thermoplastiques sont des matériaux polymères largement utilisés dans diverses applications de l'industrie. En effet, ces matériaux ont des propriétés mécaniques et électriques qui leur permettent de s'adapter et de répondre à différentes exigences dans des domaines très variés dont l'automobile, l'aéronautique et la médecine [1-3]. De ce fait, la compréhension de leur comportement suite aux sollicitations externes dans les conditions de leur mise en service requiert, ces dernières années, un intérêt considérable. En effet, de nombreux modèles ont été développés pour représenter le comportement rhéologique des thermoplastiques dont la modélisation a toujours été une tâche compliquée. Leur comportement dépend de nombreux facteurs externes tels que la température et la vitesse de déformation ; mais aussi d'autres facteurs internes dont les enchevêtrements, les réticulations et le taux de cristallinité [2, 4]. Les références ci-après présentent des travaux sur la sensibilité du comportement des polymères à la température et/ou à la vitesse de déformation [1, 5-7]. Ainsi la modélisation du comportement des thermoplastiques est un champ de recherche encore fertile. C'est dans ce cadre que s'inscrit principalement la présente étude doctorale.

L'ambition de cette étude doctorale est d'établir un modèle rhéologique pour simuler le comportement d'un thermoplastique en traction et en flexion. Des essais mécaniques sont alors réalisés pour connaître le comportement réel du matériau. Les paramètres du modèle sont identifiés à partir d'une analyse inverse qui consiste à la minimisation d'une fonction objectif établissant l'écart entre les enregistrements expérimentaux et les résultats simulés. Le modèle rhéologique étant global, il prend en compte aussi bien la viscoélasticité que la viscoplasticité. Il est représenté par un mécanisme analogique en deux composants : viscoélastique viscoplastique. Ce thermoplastique fait ensuite la matrice d'un composite renforcé par des fibres de verre. Le composite est enfin homogénéisé et son comportement effectif est modélisé.

## **Structure de la thèse**

La présente thèse s'organise en six chapitres. Le premier chapitre sert d'entrée à la thèse. Il met en évidence les différents comportements rhéologiques que peut avoir un matériau sous

l'effet des sollicitations mécaniques tout en mettant l'accent sur les comportements dépendants du temps qui sont la viscoélasticité et la viscoplasticité.

Le deuxième chapitre porte sur la flexion des poutres. On y passe en revue les différentes théories des poutres. D'abord, les théories de la flexion en petits déplacements et la flexion en grands déplacements sont confrontées. Ensuite, la théorie classique et les théories qui prennent en compte le cisaillement transverse sont présentées. Un exemple numérique illustratif est enfin appliqué.

Le troisième chapitre est dédié à l'identification des paramètres des modèles de comportements. Les méthodes d'identification classique et les méthodes d'identification par analyse inverse sont présentées. Ces dernières étant traduites par des problèmes d'optimisation, les techniques d'optimisation sont recensées et explicitées. Une application numérique portant sur l'identification des paramètres viscoélastiques et viscoplastique d'un matériau est réalisée.

Le chapitre 4 porte sur la modélisation et l'expérimentation du matériau objet d'étude. La matrice polyamide en question et la machine d'essai sont découverts. Le modèle rhéologique viscoélastique viscoplastique est proposé. La technique d'homogénéisation des composites est élucidée. Le dispositif expérimental mis en place est présenté. Une brève discussion sur les résultats est enfin effectuée.

Le cinquième chapitre fait l'objet de la validation du modèle en traction. Des essais de traction à différentes vitesses de déformation sont conduits. Les paramètres sont identifiés par la technique des algorithmes génétiques. Sur la base de la comparaison des résultats du test et ceux du modèle, l'approche est validée.

La thèse est couronnée par le dernier chapitre où le modèle rhéologique est appliqué en flexion. De nouveaux paramètres sont déterminés en fluage viscoélastique viscoplastique. Un très bon accord entre les résultats expérimentaux et ceux obtenus par le modèle est constaté. Le modèle est par conséquent validé. Une extension du modèle aux matériaux hétérogènes homogénéisés est enfin appliquée.

Le manuscrit est clôturé par des conclusions et des perspectives.

## **Chapitre I : Lois de comportement viscoélastiques et viscoplastiques**

### **I.1. Introduction**

Sous l'effet d'une sollicitation mécanique, les matériaux réagissent différemment. Différentes réponses mécaniques sont à prévoir. Le présent chapitre s'intéresse à la mise en évidence des différents types de déformation que peut subir un matériau. Il est question de la déformation élastique et la déformation plastique ; et quand celles-ci dépendent du temps, il s'agit de la déformation viscoélastique et la déformation viscoplastique. On passe en revue en premier lieu la théorie de la viscoélasticité et les modèles rhéologiques qui s'y appliquent. On s'intéresse en second lieu à la viscoplasticité et les lois qui la pilotent. Quelques modèles viscoélastiques et viscoplastiques sont présentés. La sensibilité du comportement et des paramètres de la loi qui le gèrent aussi bien à la vitesse de déformation qu'à la température est enfin abordée.

### **I.2. Viscoélasticité linéaire**

La viscoélasticité concerne une grande classe de comportements des matériaux dont les caractéristiques principales sont la réversibilité et la dépendance du temps. Tous les matériaux présentent, en effet, une réponse viscoélastique mais avec des ordres de grandeurs différentes [8, 9]. Pour les métaux et les céramiques à température ambiante et en petites déformations, l'effet viscoélastique est très faible et le comportement ne s'écarte pas beaucoup du comportement élastique linéaire. Cependant le phénomène de viscoélasticité est prépondérant dans d'autres matériaux dont les polymères [10-13], le bois [14], les tissus biologiques [15, 16] et les métaux à haute température [8]. La prise en compte de cet aspect s'avère alors nécessaire pour simuler la manière dont se comportent ces matériaux.

En petites déformations, les matériaux ont généralement un comportement viscoélastique linéaire [17, 18]. La linéarité du comportement viscoélastique est décrite par le principe de superposition de Boltzmann. La non linéarité viscoélastique apparaît avec des déformations modérées tandis que pour des grandes déformations, on assiste à une viscoplasticité [18]. Il est à



souligner qu'en pratique, on peut avoir un comportement viscoélastique non linéaire même avec des déformations plus faibles.

### I.2.1. Comportement viscoélastique unidimensionnel

La compréhension et l'identification du comportement d'un matériau passe inévitablement par une étape d'expérimentation. Les essais mécaniques unidimensionnels sur les matériaux montrent que la réponse à une sollicitation instantanée est en général constituée d'une partie instantanée et d'une partie différée [19]. Lorsque la réponse différée est réversible après la suppression de la sollicitation, on assiste à une viscoélasticité. Il est lieu de définir le comportement viscoélastique qui se traduit essentiellement par une réponse réversible dépendante du temps. Ce comportement, étant dépendant du temps, il peut être mis en évidence par deux essais rhéologiques qui sont l'essai du fluage et celui de la relaxation. Ces derniers peuvent être complétés respectivement par l'essai de recouvrance et celui de l'effacement.

#### I.2.1.1. Essai du fluage

Sous l'effet d'une contrainte constante  $\sigma_0$  appliquée instantanément au matériau au temps  $t_0$  et puis maintenue constante durant l'essai, le fluage se traduit par une déformation instantanée  $\varepsilon_0$  puis une augmentation de la déformation  $\varepsilon_t$  au cours du temps (Figure I-1.a). Ainsi on écrit :

$$\sigma(t) = \sigma_0 \mathcal{H}(t - t_0) = \sigma_0 \mathcal{H}_{t_0} \quad (\text{I-1})$$

Où  $\mathcal{H}_{t_0}$  est la fonction de Heaviside.  $\mathcal{H}_{t_0} = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_0 \\ 1 & \text{si } t > t_0 \end{cases}$

La réponse viscoélastique, en termes de déformation évoluant en fonction du temps s'exprime alors par la formule suivante :

$$\varepsilon(t) = J(t_0, t) \sigma_0 \quad (\text{I-2})$$

Où  $J(t_0, t)$  représente la fonction du fluage.

#### I.2.1.2. Essai de relaxation

Dans un essai de relaxation, une déformation d'amplitude  $\varepsilon_0$  est instantanément imposée à l'instant  $t_0$  et maintenue constante au cours de l'essai. La contrainte  $\sigma(t)$ , qui est la réponse observée, diminue en fonction du temps (Figure I-1.b). Ainsi on écrit :

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \mathcal{H}(t - t_0) = \varepsilon_0 \mathcal{H}_{t_0} \quad (\text{I-3})$$

La réponse correspondante, en termes de contrainte, est alors :

$$\sigma(t) = D(t, t_0)\varepsilon_0 \quad (\text{I-4})$$

Où  $D(t_0, t)$  représente la fonction de relaxation.

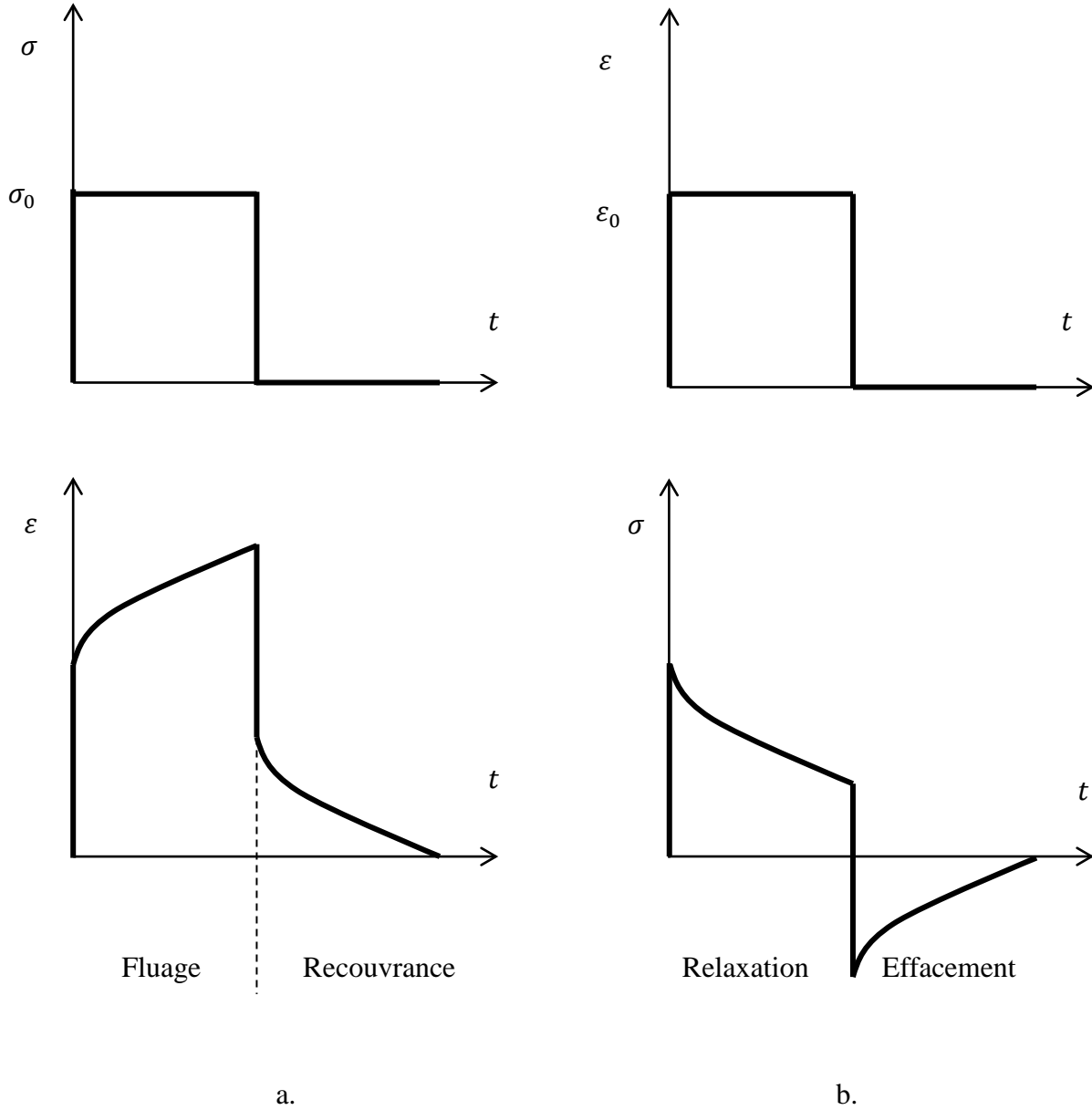


Figure I-1. Essais de fluage-recouvrance et relaxation-effacement.

### I.2.2. Principe de superposition de Boltzmann

Le principe de superposition de Boltzmann énonce la linéarité du comportement du matériau considéré en impliquant une homologie entre la superposition des sollicitations et celle des réponses [19]. Il s'exprime par les intégrales suivantes :

$$\sigma(t) = \int_0^t D(t - \tau) \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (\text{I-5})$$

$$\varepsilon(t) = \int_0^t J(t - \tau) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (\text{I-6})$$

En se servant du théorème du produit de convolution de Laplace, les expressions ci-dessus peuvent s'exprimer comme suit :

$$\mathcal{L}\sigma(t) = \mathcal{L}(D(t))\mathcal{L}\left(\frac{d\varepsilon(t)}{dt}\right) \quad (\text{I-7})$$

$$\mathcal{L}\varepsilon(t) = \mathcal{L}(J(t))\mathcal{L}\left(\frac{d\sigma(t)}{dt}\right) \quad (\text{I-8})$$

En appliquant le théorème de la dérivée de la transformée de Laplace, on obtient :

$$\mathcal{L}\sigma(t) = s\mathcal{L}(D(t))\mathcal{L}(\varepsilon(t)) \quad (\text{I-9})$$

$$\mathcal{L}\varepsilon(t) = s\mathcal{L}(J(t))\mathcal{L}(\sigma(t)) \quad (\text{I-10})$$

Il s'ensuit que la relation entre la fonction du fluage  $J(t)$  et celle de relaxation  $D(t)$  s'expriment en transformée de Laplace par :

$$\mathcal{L}(D(t))\mathcal{L}(J(t)) = \frac{1}{s^2} \quad (\text{I-11})$$

En inversant la transformée de la place et en se servant toujours du théorème de convolution, on obtient :

$$\int_0^t D(t - \tau)J(\tau) d\tau = \int_0^t J(t - \tau)D(\tau) d\tau = t \quad (\text{I-12})$$

### I.2.3. Modèles rhéologiques viscoélastiques

Les relations viscoélastiques sont exprimées sous des formes intégrales ou différentielles. Les formes intégrales sont généralement appropriées aux études théoriques. Par ailleurs, les formes différentielles sont liées à des modèles rhéologiques qui offrent une interprétation physique du comportement viscoélastique [20]. Une description des différents modèles rhéologiques se réfère aux travaux de références [10, 19, 21]. Les modèles rhéologiques utilisés en viscoélasticité linéaire pour le matériau non vieillissant sont constitués à partir des deux modèles élémentaires représentés par un ressort et un amortisseur. Le ressort représente le comportement élastique instantané tandis que l'amortisseur décrit le comportement visqueux. Un arrangement en série ou en parallèle de ces deux éléments permet de produire une infinité de modèles rhéologiques dont les plus simples sont les modèles de Maxwell et Kelvin-Voigt.

### I.2.3.1. Modèle de Maxwell

Le modèle de Maxwell est une combinaison en série d'un ressort et d'un amortisseur (Figure I-2.a). Les équations de ce modèle s'expriment comme suit :

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E} + \frac{\sigma(t)}{\mu} \quad (\text{I-13})$$

En tenant compte que la contrainte est la variable contrôlée, l'équation ci-dessus s'écrit :

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \frac{1}{\mu} \int_0^t \sigma(\tau) d\tau \quad (\text{I-14})$$

En intégrant par partie, on obtient :

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \left( \frac{1}{E} + \frac{t-\tau}{\mu} \right) \dot{\sigma}(\tau) d\tau \quad (\text{I-15})$$

En comparant cette équation aux équations de Boltzmann, on peut déduire que la fonction du fluage  $J(t - \tau)$  dans le modèle de Maxwell est exprimée par :

$$J(t - \tau) = \frac{1}{E} + \frac{t-\tau}{\mu} \quad (\text{I-16})$$

En supposant maintenant que l'histoire de déformation est connue, et en utilisant la solution des équations différentielles de premier ordre, on obtient :

$$\sigma(t - \tau) = \int_0^t E e^{\left(-\frac{t-\tau}{T_r}\right)} \dot{\varepsilon}(t) d\tau$$

Avec  $T_r = \mu/E$  est appelé temps de relaxation.

Ceci nous permet de déduire la fonction de relaxation  $D(t - \tau)$  du modèle de Maxwell .

$$D(t - \tau) = E e^{\left(-\frac{t-\tau}{T_r}\right)} \quad (\text{I-17})$$

### I.2.3.2. Modèle de Kelvin-Voigt

Ce modèle combine un ressort et un amortisseur montés en parallèles (Figure I-2.b). Il est piloté par les équations suivantes :

$$\sigma = E\varepsilon + \mu\dot{\varepsilon} \quad (\text{I-18})$$

$$\varepsilon(t - \tau) = \int_0^t \frac{1}{E} \left( 1 - e^{\left(-\frac{t-\tau}{T_f}\right)} \right) \dot{\sigma}(\tau) d\tau \quad (\text{I-19})$$

$T_f$  étant homogène au temps de relaxation du modèle de maxwell, il vaut  $(\mu/E)$ . Il s'ensuit que la fonction de fluage du modèle de Kelvin-Voigt  $J(t - \tau)$  est donnée par :

$$J(t - \tau) = \frac{1}{E} \left( 1 - e^{\left(-\frac{t-\tau}{T_f}\right)} \right) \quad (\text{I-20})$$

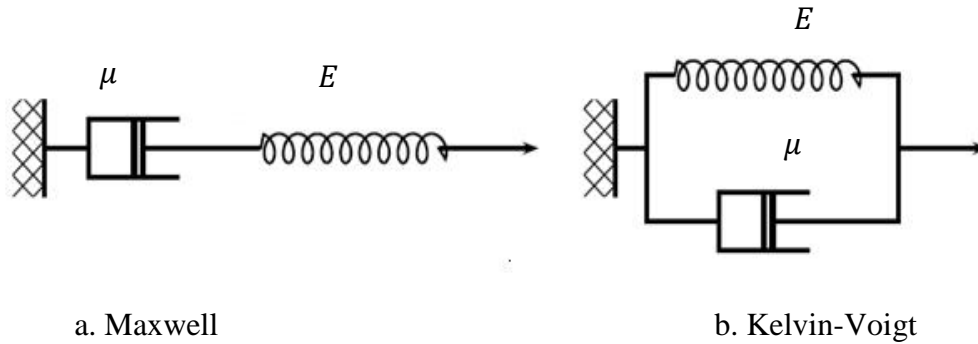


Figure I-2. Modèles analogiques viscoélastiques: a.Modèle de Maxwell, b.Modèle de Kelvin-Voigt

### I.2.3.3. Modèle de Burger

Si le modèle de Maxwell donne une représentation plus rationnelle en relaxation, celui de Kelvin-Voigt est mieux placé pour représenter le fluage du matériau. Le modèle de Burger, qui est une combinaison en série du modèle de Maxwell et celui de Kelvin-Voigt, s'avère alors plus adapté pour décrire aussi bien le fluage que la relaxation du matériau. Ainsi la réponse vaut la somme des réponses des deux modèles élémentaires.

$$\varepsilon(t - \tau) = \int_0^t \left( \frac{1}{E_M} + \frac{t-\tau}{\mu_M} \right) + \frac{1}{E} \left( 1 - e^{\left( -\frac{(t-\tau)E_K}{\mu_K} \right)} \right) \dot{\sigma}(\tau) d\tau \quad (\text{I-21})$$

En désignant par  $E_M$   $\mu_M$  les paramètres du modèle de Maxwell et par  $T_f = \frac{\mu_K}{E_K}$  ceux de Kelvin-Voigt, la fonction du fluage est également la somme des fonctions du fluage des deux modèles élémentaires. Elle s'exprime alors par :

$$J(t - \tau) = \left( \frac{1}{E_M} + \frac{t-\tau}{\mu_M} \right) + \frac{1}{E} \left( 1 - e^{\left( -\frac{(t-\tau)}{T_f} \right)} \right) \quad (\text{I-22})$$

Il est à souligner que d'autres modèles analogiques viscoélastiques sont retrouvés dans la littérature dont ceux de Kelvin-Voigt à élasticité instantanée et de Zener. En effet des modèles analogiques peuvent incessamment avoir lieu en ajoutant en série ou en parallèles des ressorts ou des amortisseurs à des modèles existants.

### I.2.3.4. Modèles généralisés

Les modèles élémentaires de Maxwell et de Kelvin-Voigt sont adoptés pour l'analyse qualitative du comportement viscoélastique. Ces modèles sont généralement insuffisants pour la représentation quantitative du comportement réel des matériaux. Afin d'améliorer la

représentation quantitative, il est nécessaire d'augmenter le nombre de paramètres en combinant de nombreux ressorts et d'amortisseurs. Il est question de la construction des modèles généralisés de Maxwell et de Kelvin-Voigt. Le modèle de Maxwell généralisé est composé de plusieurs modèles de Maxwell montés en parallèles avec un ressort qui assure que la recouvrance est totale. En désignant par  $T_{r_i} = (\mu_i/E_i)$ , les temps de relaxation, et par  $N$  le nombre de modèles élémentaires de Maxwell, la fonction de relaxation pour ce modèle généralisé s'exprime par :

$$D(t - \tau) = E_\infty + \sum_{i=1}^N E_i e^{\left(-\frac{t-\tau}{T_{r_i}}\right)} \quad (\text{I-23})$$

Le modèle de Kelvin-Voigt généralisé est composé de plusieurs modèles de Kelvin-Voigt montés en série avec un ressort qui représente l'élasticité instantanée. Ainsi en mettant  $T_{f_i} = (\mu_i/E_i)$ , et  $e$ , désignant par  $N$  le nombre de modèles élémentaire de Kelvin-Voigt, la fonction de fluage pour ce modèle généralisé est donnée par:

$$J(t - \tau) = \frac{1}{E_0} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{E_i} \left( 1 - e^{\left(-\frac{t-\tau}{T_{f_i}}\right)} \right) \quad (\text{I-24})$$

### I.3. Viscoélasticité non linéaire

Soumis à des sollicitations mécaniques relativement sévères, de nombreux matériaux montrent un comportement viscoélastique non linéaire [22-24]. Plusieurs approches de modélisation sont disponibles pour la modélisation de la viscoélasticité non linéaire. Un des modèles viscoélastiques non linéaires les plus connu est celui de Schapery [24]. Dérivé à partir de la théorie de la thermodynamique, il s'exprime en situation unidimensionnel par :

$$\varepsilon(t) = g_0 J_0 \sigma + g_1 \int_0^t \Delta J(\psi - \psi') \frac{dg_2 \sigma}{d\tau} d\tau \quad (\text{I-25})$$

$g_0, g_1, g_2$  : sont des paramètres non linéaires dépendant de la contrainte,  $J_0$  est la fonction du fluage instantanée et  $\Delta J$  est la fonction du fluage écrite sous forme de série de Prony.  $\psi$  et  $\psi'$  représentent les temps réduits et s'expriment par :

$$\psi = \psi(t) = \int_0^t \frac{dt'}{a_\sigma}, \quad \psi' = \psi'(\tau) = \int_0^\tau \frac{dt'}{a_\sigma}, \quad a_\sigma > 0 \quad (\text{I-26})$$

En petites déformations, les paramètres  $g_0 = g_1 = g_2 = a_\sigma = 1$ , le comportement est viscoélastique linéaire. Le modèle de Schapery est donc compatible aussi bien en viscoélasticité linéaire que non linéaire.

### I.3.1. Principe de superposition non linéaire

Une formulation fondée sur une superposition non linéaire permet de prédire la relation non linéaire de l'histoire de contrainte à l'histoire de déformation peut s'exprimer avec l'équation suivante :

$$\sigma(t) = \int_0^t D(t - \tau, \varepsilon(\tau)) \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (\text{I-27})$$

$$\varepsilon(t) = \int_0^t J(t - \tau, \sigma(\tau)) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (\text{I-28})$$

### I.3.2. Modèles rhéologiques viscoélastiques non linéaires

Plusieurs études antérieures ont proposé des modèles rhéologiques non linéaires. Il s'agit de garder les mêmes modèles rhéologiques susmentionnés tout en remplaçant les éléments constitutifs qui sont les ressorts et les amortisseurs linéaires par d'autres non linéaires [16, 25]. Ainsi les paramètres décrivant ces éléments ne sont plus constants mais s'expriment comme des fonctions dépendant de temps, de contraintes, de déformations ou de températures [26]. Si l'on considère à titre d'exemple les modèles de Maxwell et de Kelvin-Voigt, composés d'éléments non linéaires, on peut respectivement écrire :

$$\sigma(\varepsilon, t, \dot{\varepsilon}) = E(\varepsilon_e, t) = \mu(\dot{\varepsilon}_v, t) \quad (\text{I-29})$$

$$\sigma(\varepsilon, t, \dot{\varepsilon}) = E(\varepsilon_e, t) + \mu(\dot{\varepsilon}_v, t) \quad (\text{I-30})$$

Dans ce cas, les paramètres  $E$  et  $\mu$  sont des fonctions non linéaires qui peuvent s'exprimer avec des fonctions de loi puissance. Ainsi en désignant par  $A, B, \alpha, \beta$  des paramètres dépendants du matériau, on peut alors écrire :

$$E(\varepsilon, t) = A\varepsilon^\alpha(t) \quad (\text{I-31})$$

$$\mu(\dot{\varepsilon}, t) = B\dot{\varepsilon}^\beta(t) \quad (\text{I-32})$$

Le modèle de Bailey-Norton est l'un des modèle viscoélastiques non linéaires les plus utilisés étant régi par une équation aussi simple [8]. Destiné à modéliser le fluage primaire et secondaire,  $A, m, n$  étant des paramètres du matériau, il s'exprime par la formulation suivante:

$$\varepsilon(\sigma, t) = A\sigma^m t^n \quad (\text{I-33})$$

Plusieurs autres modèles d'amortisseurs non linéaires sont retrouvés dans la littérature. On en cite le modèle de d'Eyring et celui de Briant qui s'emploient seuls ou en série avec des

amortisseurs linéaires pour représenter le comportement du matériau. Ils s'expriment respectivement par:

$$\mu(\dot{\varepsilon}, t) = L \sinh^{-1} \frac{\dot{\varepsilon}}{C} \quad (\text{I-34})$$

$$\mu(\dot{\varepsilon}, t) = D \frac{\dot{\varepsilon}}{(\dot{\varepsilon} + d)^\gamma} \quad (\text{I-35})$$

Où  $L, C, D, d, \gamma$  sont des paramètres dépendant du matériau.

#### I.4. Viscoplasticité

La théorie de la viscoplasticité décrit l'écoulement par fluage de la matière, qui par rapport à la plasticité dépend du temps de façon essentielle [9]. On se reporte aux travaux des références [27, 28] pour plus de détail sur les fondements de la viscoplasticité qui s'applique à une grande variété de matériaux dont le bois [14], les bétons [29-32], les métaux et alliages à hautes températures [9, 33], les polymères [4, 11, 34-36] et les composites [37-39]. La modélisation combinée viscoélastique viscoplastique est souvent très compliquée et n'est pas encore bien maîtrisée [1]. Le couplage du comportement viscoplastique avec le comportement élastique ou viscoélastique présente toujours une large plage de recherche.

Une distinction est d'abord à faire d'après Perzyna [28] entre le comportement élastique/viscoplastique et le comportement élastique-viscoplastique. En effet le comportement élastique/viscoplastique s'applique sur les matériaux ayant un caractère visqueux uniquement dans le domaine plastique alors que le comportement élastique-viscoplastique ou élasto-viscoplastique est propre aux matériaux où on assiste à des propriétés visqueuses aussi bien dans le domaine élastique que dans le domaine plastique. Récemment certains auteurs ont introduit des modélisations basées sur des approches viscoélastiques-viscoplastiques [4, 11, 32, 34]. De ce fait, on peut accepter une décomposition de la déformation en deux parties [40]: une partie viscoélastique  $\varepsilon_{ve}$  et une partie viscoplastique  $\varepsilon_{vp}$ .

$$\varepsilon = \varepsilon_{ve} + \varepsilon_{vp} \quad (\text{I-36})$$

Il est à souligner que les réponses élastique et plastique instantanées sont incluses respectivement dans les réponses viscoélastique et viscoplastique. Le caractère viscoélastique étant explicité auparavant, on s'intéresse dans ce qui suit à l'écoulement viscoplastique qui se fait selon plusieurs modèles dont on cite certains en situation unidimensionnelle.



### I.4.1. Modèles rhéologiques viscoplastiques

Tout comme les modèles rhéologiques viscoélastiques représentés par des modèles analogiques, le comportement viscoplastique peut se décrire par la combinaison des ressorts et des amortisseurs en série ou en parallèle. Un troisième élément propre au comportement viscoplastique, c'est le patin. Celui-ci permet d'enclencher l'écoulement viscoplastique une fois un seuil de contrainte atteint. La formulation des lois de comportements viscoplastiques implique essentiellement deux aspects qui sont le choix de la fonction de viscosité ou de potentiel viscoplastique et le choix de la fonction de l'écrouissage [41]. Par ailleurs, le comportement viscoplastique peut être linéaire ou non linéaire. On présente dans la suite quelques modèles de comportements en situation unidimensionnelle.

#### I.4.1.1. Modèle de Bingham

Ce modèle est susceptible de modéliser le comportement viscoplastique parfait (Figure I-3.a) et le comportement viscoplastique avec écrouissage (Figure I-3.b). Il correspond à un modèle analogique composé d'un patin, un ressort et un amortisseur montés en parallèle. On peut passer du modèle à écrouissage au modèle parfait en supprimant le ressort.

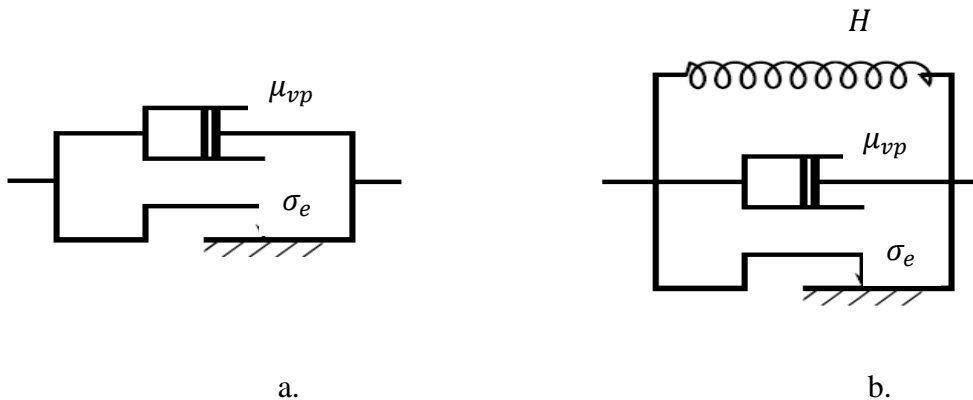


Figure I-3. Modèle viscoplastique de Bingham: a. Parfait, b. à avec écrouissage

Ainsi sans écrouissage, la contrainte est fonction de la vitesse de déformation viscoplastique. Or en prenant en compte l'écrouissage, la contrainte est fonction non seulement de la vitesse de déformation mais aussi de la déformation. Ils s'expriment respectivement par les équations suivantes :

$$\sigma = \sigma_e + \mu_{vp} \dot{\epsilon}_{vp} \quad (\text{I-37})$$

$$\sigma = \sigma_e + H\varepsilon_{vp} + \mu_{vp}\dot{\varepsilon}_{vp} \quad (\text{I-38})$$

Avec  $\sigma_e, H$  et  $\mu_{vp}$  correspondent respectivement à la limite élastique, le module d'écrouissage et le module de viscosité.

Le modèle de Bingham établit une fonction linéaire entre la contrainte et la déformation d'une part et entre la contrainte et la vitesse de déformation d'autre part. On peut utiliser des ressorts et/ou des amortisseurs comme des fonctions non linéaires de la déformation et de la vitesse de déformation si l'on veut prévoir un comportement non linéaire. Dans ce cas, on écrit :

$$\sigma = \sigma_e + H(\varepsilon_{vp}) + \mu_{vp}(\dot{\varepsilon}_{vp}) \quad (\text{I-39})$$

$H$  et  $\mu_{vp}$  représentent dans ce cas deux fonctions non linéaires dépendant relativement de la déformation et de sa vitesse.

Ainsi à titre d'exemple, au dessus d'un seuil de contrainte, les modèles de Herschel-Bulkley et celui de Casson s'expriment respectivement par les équations suivantes:

$$\sigma = \sigma_e + \mu_{vp}\dot{\varepsilon}_{vp}^n \quad (\text{I-40})$$

$$\sqrt{\sigma} = \sqrt{\sigma_e} + \sqrt{\mu_{vp}\dot{\varepsilon}_{vp}} \quad (\text{I-41})$$

#### I.4.1.2. Modèle de Chan, Bodner et Lindholm

Ce modèle, qui permet de prédire le comportement élasto-viscoplastique des matériaux métalliques, est développé originalement par Bodner et Partom [42] et puis modifié par Chan, Bodner et Lindholm [43]. La vitesse de déformation est donnée par l'expression suivante.

$$\dot{\varepsilon}_{vp} = D\sqrt{4/3} \text{sign}(\sigma(t)) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{Z^2}{\sigma^2}\right)^n\right) \quad (\text{I-42})$$

Où  $D$  et  $n$  sont des paramètres gouvernant la règle d'écoulement plastique tandis que  $Z$  représente le paramètre de l'écrouissage du matériau.

#### I.4.1.3. Modèle de Lemaitre-Chaboche

En désignant par  $k$  et  $n$  deux paramètres propres au matériau, le modèle viscoplastique de Lemaitre - Chaboche [9] en situation unidimensionnelle s'exprime par la relation qui relie la contrainte à la vitesse de déformation viscoplastique suivante :

$$\sigma = K + K(\dot{\varepsilon}_{vp})^{\frac{1}{n}} \quad (\text{I-43})$$

#### I.4.1.4. Modèle de Thiruppukuzhi-Sun

Il s'agit d'un modèle viscoplastique à trois paramètres développé dans le but de simuler le comportement différé non linéaire de certains composites polymères [39]. En désignant par  $B, \alpha, \beta$  des paramètres matériels, la vitesse de déformation viscoplastique se relie à la déformation viscoplastique et la contrainte selon la relation suivante :

$$\dot{\varepsilon}_{vp} = B(\varepsilon_{vp})^\alpha (\sigma)^\beta \quad (\text{I-44})$$

### I.5. Influence de la vitesse de déformation et de la température

#### I.5.1. Sensibilité du comportement à la vitesse de déformation

Il est évident que la vitesse de déformation a un grand effet sur le comportement mécanique des matériaux. Ce phénomène est prépondérant dans les comportements marqués par la prépondérance de la viscosité comme les polymères. La Figure I-4 en illustre le phénomène ; les courbes ne sont pas identiques avec le changement de la vitesse de déformation sur le plan quantitatif. En outre, la loi de comportement étant une fonction mathématique pilotée par des paramètres propres aux matériaux ; ces paramètres dépendent aussi de la vitesse de déformation. La dépendance des paramètres de la vitesse de déformation a été étudiée dans plusieurs travaux dont on cite certaines références [5-7, 44-46]. Il est constaté que le module de Young et la limite élastique augmentent avec l'augmentation de la vitesse de déformation. Cependant peu de travaux se sont intéressés à l'étude de la sensibilité des paramètres viscoélastiques et viscoplastiques qui se relie généralement à la vitesse de déformation par des fonctions pouvant être linéaires ou non linéaires.

Le Tableau I-1 représente, à titre illustratif, la dépendance du module de Young, de la limite élastique et du seuil de plasticité correspondant en termes de déformation. Dans une plage de vitesse de déformation variant entre 2 ( $mm/min$ ) et 2000( $mm/min$ ), il est constaté une augmentation de 29 % du module de Young et de 22 % de la limite élastique. Ceci signifie que l'influence de la vitesse de déformation sur ces paramètres est très importante. Par ailleurs, la déformation correspondant à la limite élastique reste insensible à la vitesse de déformation.

Tableau I-1. Module de Young et paramètres du seuil de plasticité à différentes vitesses de déformation [6]

Vitesse de déplacement ( <i>mm/min</i> )	Limite élastique ( <i>MPa</i> )	Module de Young ( <i>MPa</i> )	Seuil de plasticité ( <i>mm/mm</i> )
2	29.6	855	0.064
20	30.3	962	0.065
200	32.4	1012	0.063
2000	36.2	1106	0.064

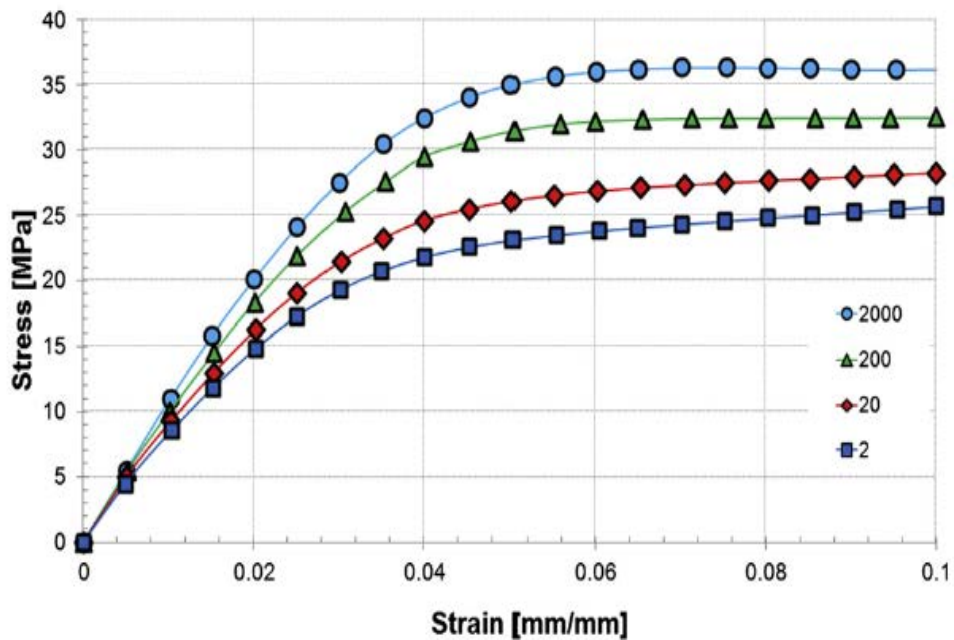


Figure I-4. Courbes contraintes déformations d'un polymère semi cristallin à différentes vitesses de déformation [6].

### I.5.2. Sensibilité du comportement à la température

Jusqu'ici, les concepts et les modélisations évoqués dans les sections précédentes sont développés à des conditions isothermes, cependant la température joue un rôle majeur dans le processus de déformation. Le comportement des matériaux, par-dessus tout les polymères, est aussi bien dépendant du temps que de la température. Ainsi à des températures élevées, on assiste

à de grandes déformations et de grandes vitesses de déformation. La connaissance de l'effet de la température sur le comportement mécanique des matériaux voit son importance et sa nécessité dans les procédés de mise en forme et dans la mise en service des matériaux dans des milieux à des températures élevées.

Si les polymères ont généralement un comportement viscoélastique viscoplastique, donc dépendant du temps, à température ambiante, il n'en est pas de même pour d'autres classes de matériaux dont les métaux et les alliages. Ceux-ci ne se voient se comporter remarquablement en fonction de temps qu'à des températures modérées ou élevées. Il s'ensuit que l'effet de la température ne se limite pas seulement à l'augmentation de la déformation et sa vitesse mais aussi à la modification du comportement tout entier. Ainsi pour certains matériaux, plus la température est élevée plus on passe d'un comportement instantané à un comportement différé réversible ou permanent. La Figure I-5 et la Figure I-6 illustrent respectivement l'influence de la température sur les comportements mécanique d'un polymère et d'un métal à vitesse de déformation constante.

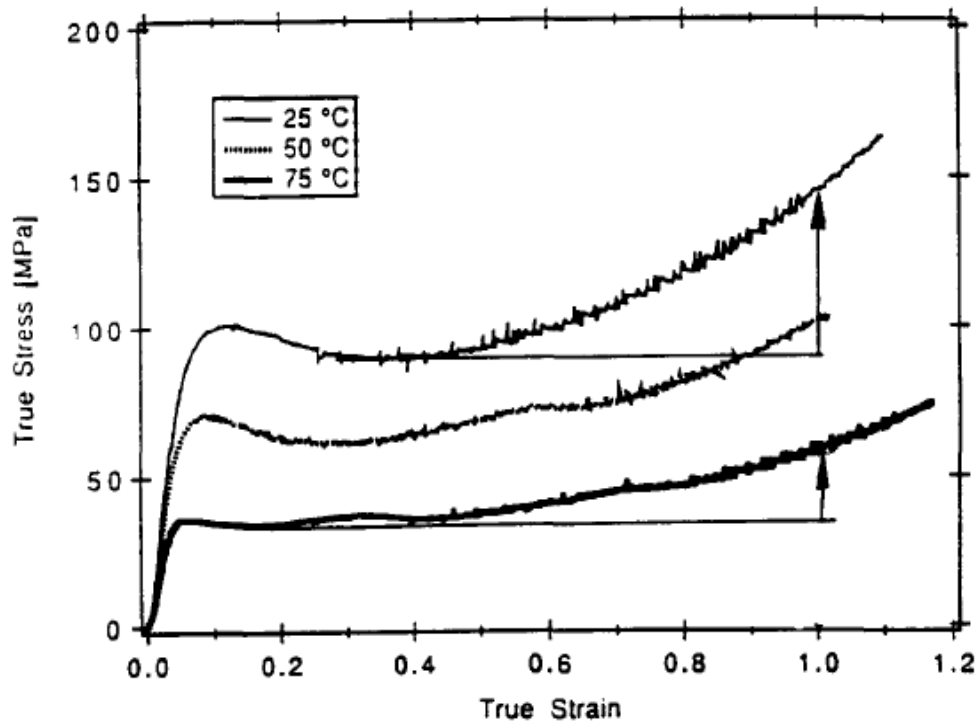


Figure I-5. Courbe d'un essai de compression uniaxial de PMMA à une vitesse de déformation de  $-0.001s^{-1}$  et à différentes températures [47].

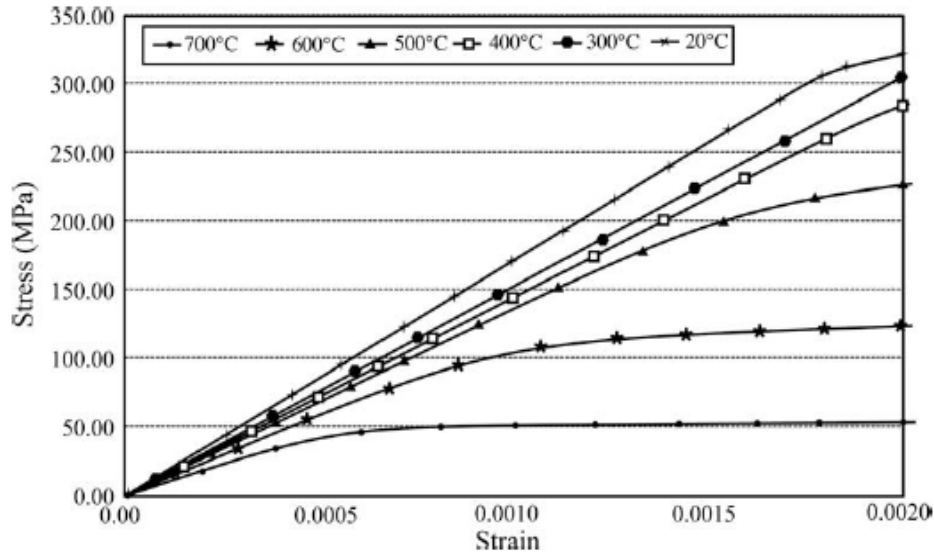


Figure I-6. Courbes simulées des contraintes déformations d'une fonte à graphite sphéroïdal à différentes températures [33].

La réponse mécanique étant sensible à la température, il est naturel que les paramètres de la loi de comportement qui la régit le soient également. Différents auteurs se sont penchés sur l'étude de l'effet de la température sur les paramètres rhéologiques des lois de comportement. On en cite à titre d'exemple les références [5-7, 33, 37, 45, 47, 48]. Le module d'élasticité et la limite élastique sont fortement sensibles à la température. Ces derniers diminuent avec l'augmentation de la température tandis que les paramètres de viscosité deviennent prépondérants.

## I.6. Bilan du chapitre

Le chapitre achevé a porté, en général, sur la compréhension et la modélisation des phénomènes viscoélastiques et viscoplastiques qui apparaissent dans le comportement des matériaux soumis aux sollicitations mécaniques. Les théories de la viscoélasticité et de la viscoplasticité ont été brièvement exposées. La linéarité et la non linéarité du comportement ont été évoquées. Des modèles rhéologiques viscoélastiques et viscoplastiques ont été présentés en situation unidimensionnelle. L'effet de la vitesse de déformation et de la température sur le comportement mécanique a été soulevé et discuté.

## **Chapitre II : Théories et modélisation de la flexion des poutres**

### **II.1. Introduction**

On présente dans ce chapitre une analyse approfondie sur la flexion des poutres. En premier lieu, Les modélisations en petits déplacements et en grands déplacements sont présentées. La relation moment courbure est établie dans les deux théories. La non linéarité matérielle en grands déplacements est alors évoquée. Ensuite, l'effet du cisaillement transverse est discuté. En effet, la théorie de flexion pure qui s'applique uniquement dans les structures minces néglige le cisaillement. Par ailleurs, dans les poutres dites courtes, le cisaillement est pris en compte. Plusieurs théories se sont appliquées pour le modéliser. On en présente la théorie du premier ordre et celles d'ordres élevés. Le chapitre est accompli par une simulation d'un essai de flexion d'une poutre viscoélastique où l'effet de cisaillement transverse est pris en compte selon le postulat de Timoshenko.

### **II.2. Élément poutre**

La poutre est un élément de structure utilisé dans plusieurs applications d'ingénierie dont l'aéronautique, le génie civil et mécanique [49, 50]. Une poutre est un élément de structure dont la longueur est grande par rapport à ses dimensions transversales [51, 52]. Les sollicitations, qui peuvent être des forces concentrées, des forces réparties ou des moments, auxquelles elle est soumise engendrent des déplacements perpendiculaires et des déplacements parallèles à son axe longitudinal. Plusieurs théories basées sur des hypothèses géométriques, cinématiques et statiques ont été proposées pour modéliser le comportement en flexion dont les plus connues sont celles d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko.

### **II.3. Flexion en petits déplacements**

Pour modéliser le comportement des poutres en flexion, il est généralement question d'établir une relation entre le moment fléchissant agissant sur la section transversale et la courbure de flexion qu'il engendre [53-55]. La théorie élémentaire des poutres élastiques en petits déplacements stipule que la relation moment courbure est linéaire sous conditions que la flèche

soit petite en la comparant avec la longueur de la poutre. Ainsi en désignant respectivement par  $E$  et  $I$  le module d'élasticité et le moment d'inertie de la section transversale de la poutre, la courbure  $\chi$  se relie au moment de flexion  $M$  par la relation suivante:

$$\chi = \frac{1}{EI} M \quad (\text{II-1})$$

Cependant pour un comportement non linéaire, la relation moment courbure perd son caractère linéaire. Ainsi dans les cas d'un comportement élastoplastique parfait et d'un comportement élastoplastique avec écrouissage non linéaire décrit par le modèle de Ludwik, cette relation s'exprime respectivement par :

$$\frac{M}{M_e} = \frac{1}{2} \left( 3 - \left( \frac{\chi_e}{\chi} \right)^2 \right) \quad (\text{II-2})$$

$$\frac{M}{M_e} = \frac{1}{2+n} \left( 3 \left( \frac{\chi}{\chi_e} \right)^n - (1-n) \left( \frac{\chi_e}{\chi} \right)^2 \right) \quad (\text{II-3})$$

Avec  $M_e$  et  $\chi_e$  sont respectivement le moment de flexion correspondant à la plastification de la première fibre de la poutre et la courbure correspondante,  $n$  est un paramètre d'écrouissage.

Dans la référence [36], les auteurs ont développé une formule qui représente la relation entre le moment de flexion et le taux de courbure de flexion pour un matériau de comportement élasto-viscoplastique en fluage.

$$\dot{\chi}(x, t) = \frac{M_e}{I} \frac{\left( r(t) - \frac{Hq(t)-3}{E} \right) \left( \frac{\chi_e}{\chi(x,t)} \right)^2 + \frac{Hq(t)}{E} \left( \frac{\chi(x,t)}{\chi_e} \right) - \frac{M(x)r(t)}{M_e} + \frac{3}{2}}{\mu_{vp} \left( \left( \frac{\chi_e}{\chi(x,t)} \right)^3 - 1 \right)} \quad (\text{II-4})$$

Avec  $H$  et  $\mu_{vp}$  sont respectivement le module d'écrouissage et le module de viscosité plastique.  $q(t)$  et  $r(t)$  sont des fonctions de temps dues respectivement à la viscoélasticité et la viscoplasticité du matériau et sont données comme suit :

$$q(t) = 1 + \frac{E}{K} \left( 1 - \exp \left( -\frac{Kt}{\mu_{ve}} \right) \right) \quad (\text{II-5})$$

$$r(t) = 1 + H \left( \frac{1}{E} + \frac{1}{K} \left( 1 - \exp \left( -\frac{Kt}{\mu_{ve}} \right) \right) \right) + \mu_{vp} \left( \frac{1}{\mu_{ve}} \exp \left( -\frac{Kt}{\mu_{ve}} \right) \right) \quad (\text{II-6})$$

Où  $k$  et  $\mu_{ve}$  représentent deux paramètres liés à la viscoélasticité du matériau.

L'équation (II-3) étant non linéaire et l'équation (II-4) étant différentielle, leur résolution exige un recours aux méthodes numériques.



## **II.4. Flexion en grands déplacements**

### **II.4.1. Etat de l'art**

Une formulation en grands déplacements induit une non linéarité géométrique. Une classification des approches traitant du problème de la flexion en grands déplacements figure dans la référence [56]. Quatre approches différentes ont été distinguées dont la première est basée sur l'intégration elliptique [57-59]. Cette approche est reconnue limitée et ne peut s'appliquer que pour résoudre des problèmes des poutres de simples géométries et sous de simples chargements. La deuxième approche utilise l'intégration numérique avec des techniques itératives [60, 61]. Toutefois elle est utilisée uniquement dans le cas où les flèches ne sont pas trop grandes. La troisième se sert de la méthode des éléments finis en couplage avec la technique itérative de Newton-Raphson [62, 63]. Elle exige la génération d'un maillage très fin et donc un temps de calcul important sans que cela assure toujours une convergence. Dans le cas de très grandes déflexions, il est parfois nécessaire de faire recours à des techniques numériques particulières. La quatrième approche mobilise la méthode des différences finies [64-66] qui, elle aussi, exige un très grand nombre de nœuds et présente l'inconvénient de la divergence en très grands déplacements.

Ces méthodes étant instables dans le cas de très grandes déflexions, Dado et Al-Sadder [56] ont développé une approche basée sur la représentation de l'angle de rotation par une fonction polynomiale et sa substitution dans les équations différentielles et les conditions aux limites du problème. Cette approche est applicable aussi bien dans les poutres prismatiques que non prismatiques et sous des chargements aussi bien simples que complexes en très grandes déflexions.

De récentes recherches ont abouti au développement de nouvelles méthodes appliquées au traitement de la flexion en grands déplacements. On y cite les méthodes analytiques, appelées « homotopy analysis method » [67], qui se sont avérées simples et faciles à appliquer, en les comparant avec les méthodes d'intégration elliptiques. Shvartsman [68] a développé une méthode numérique directe qui se traduit par la formulation d'un problème à valeur initiale. Chen [69] a développé une approche basée sur une intégration numérique applicable dans les poutres de

propriétés variables et sous chargements complexes. Tari [70] s'est basé sur la technique d'expansion automatique de Taylor pour résoudre les problèmes sous chargement sévères.

#### II.4.2. Modélisation d'une poutre console

Ainsi qu'il est illustré sur la Figure II-1, une poutre encadré à une extrémité et soumise à une charge concentrée à son extrémité libre. De ce fait la poutre subit une flexion vers le bas. En fonction de l'intensité du chargement, les déplacements peuvent être petits ou grands. En petits déplacements, la courbure peut être assimilée à la dérivée deuxième de la flèche.

$$\chi = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (\text{II-7})$$

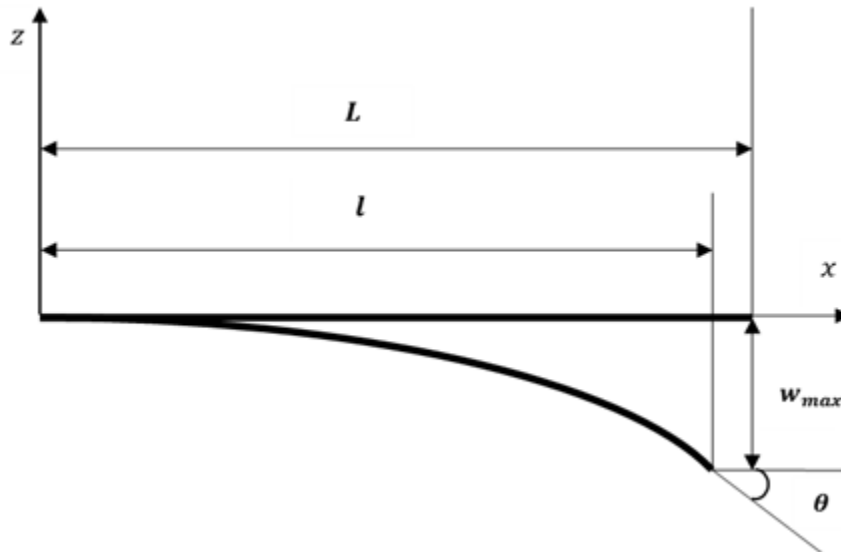


Figure II-1. Poutre console en flexion en grands déplacements

En grands déplacements et grandes rotations, la dérivée deuxième de la flèche n'est plus assimilée à la courbure. Cependant elle se relie avec elle par l'équation :

$$\chi = \frac{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}}{\left(1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right)^{3/2}} \quad (\text{II-8})$$

En supposant que l'axe neutre ne subit pas de déformation, la longueur de la courbée de la poutre  $s(l)$  et sa projection  $l$  sur l'axe des  $x$  est calculée à partir de l'équation (II-9). Il existe en effet deux méthodes

de calcul de la projetée  $l$  de la courbée sur l'axe longitudinal. On se sert d'une méthode numérique pour résoudre l'équation (II-9) ou on utilise une procédure graphique en projetant la courbée sur l'axe  $x$ .

$$s(l) = L = \int_0^l \sqrt{1 + (dw/dx)^2} dx \quad (\text{II-9})$$

En petits déplacements, l'équation de la courbure peut se résoudre analytiquement par l'intégration directe de la courbure de flexion sous les conditions aux limites imposées. Cependant l'équation de la courbure en grands déplacements exige un recours aux méthodes numériques pour sa résolution. On y trouve dans la littérature [69, 71] de nombreuses méthodes de solutions proposées. Ang et al [71] proposent une démarche numérique de résolution en mettant  $v = (\partial w / \partial x)$ . Ainsi les équations qui gouvernent la flexion de la poutre console en grands déplacements se résument en :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \chi \left( 1 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}} ; \quad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2} \quad (\text{II-10})$$

Les équations géométriques étant mises en place, il est à intégrer la loi de comportement considéré pour évaluer les grandeurs de la flexion et particulièrement la courbure de flexion. Plusieurs méthodes numériques sont disponibles pour résoudre ce problème. On y cite la méthode des différences finies, la méthode d'Euler et la méthode de Runge.

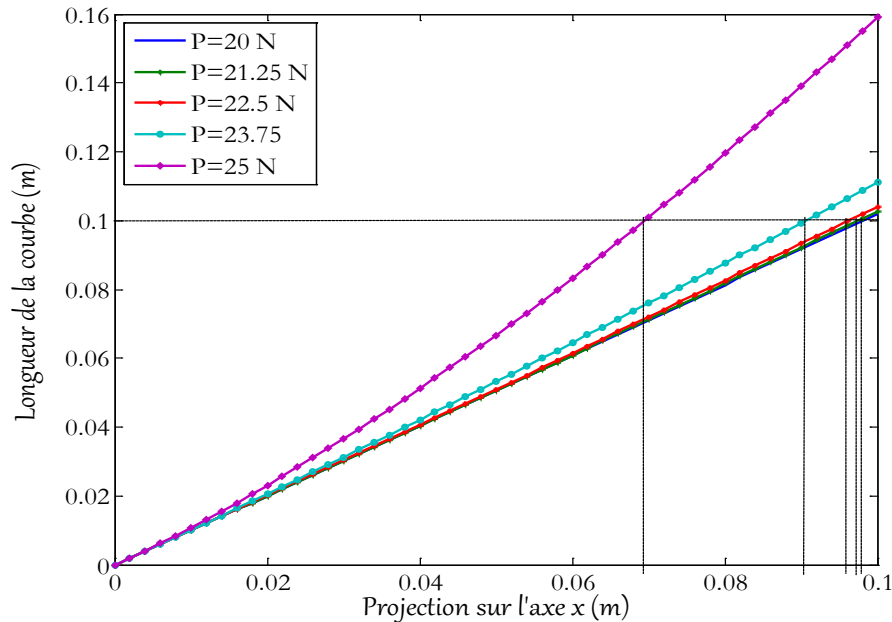


Figure II-2. Projection de la déformée sur l'axe  $x$

On se propose un schéma aux différences finies pour déterminer la courbe et sa projection sur l'axe longitudinal. Pour différents chargements, les résultats obtenus sont présentés sur la Figure II-2, nous remarquons que la longueur de la projection de la courbée de la poutre, qui présente un paramètre essentiel dans la flexion en grands déplacements, est fonction du chargement. Plus le chargement est élevé, plus la longueur est petite. La Figure II-2 n'est qu'à titre illustratif ; la longueur exacte peut s'obtenir avec une méthode numérique itérative.

## II.5. Influence du cisaillement transverse

### II.5.1. Hypothèses d'Euler-Bernoulli

Ainsi qu'il est illustré sur la Figure II-3, la théorie d'Euler-Bernoulli, qui s'applique uniquement dans le cas des poutres élancées, stipule que les sections planes de la poutre restent planes et orthogonales à la fibre moyenne après la déformation de manière à ce que le cisaillement transverse soit négligé. On se réfère aux ouvrages [57, 72] pour plus de détails. Ainsi en supposant que les sections de la poutre ne subissent pas de torsion, les déformations de cisaillement sont négligées et le champ de déplacement s'exprime par :

$$u(x, z, t) = -z\theta(x, t) ; v(x, y, z, t) = 0 ; w(x, z, t) = w(x, t) \quad (\text{II-11})$$

L'annexe présente un développement des champs de déplacements et des déformations dans le cadre de la théorie d'Euler-Bernoulli. On y montre que le champ de déformation se réduit en une composante uni-axiale donnée par:

$$\varepsilon_{xx}(x, z, t) = -z\chi(x, t) \quad (\text{II-12})$$

### II.5.2. Théorie de Timoshenko

Il est bien connu que l'effet de cisaillement est pris en compte lorsque le rapport de la hauteur sur la longueur de la poutre est considérable. Les équations gouvernant la déformation de cisaillement transverse sont typiquement plus complexes que celles de la théorie classique des poutres [73]. Il existe plusieurs théories de flexion qui prennent en compte l'effet de cisaillement. La première d'entre elles est la théorie de flexion de Timoshenko [74]. Celle-ci suppose que les déformations de cisaillement sont constantes à travers l'épaisseur de la poutre. Par conséquent ceci nécessite des facteurs de correction de cisaillement dépendant non seulement des paramètres géométriques et matérielles, mais aussi de la charge et des conditions aux limites [75]. Ainsi en

désignant par  $\theta$  l'angle de rotation de la section transversale (Figure II-4), à un temps donné  $t$ , le champ des déplacements s'exprime par :

$$u(x, z, t) = -z\theta(x, t), \quad v = 0, \quad w(x, z, t) = w(x, z, t) \quad (\text{II-13})$$

En se plaçant dans l'hypothèse de petites déformations, la déformation longitudinale et la déformation de cisaillement sont respectivement données par :

$$\varepsilon_{xx} = -z \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (\text{II-14})$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\theta + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (\text{II-15})$$

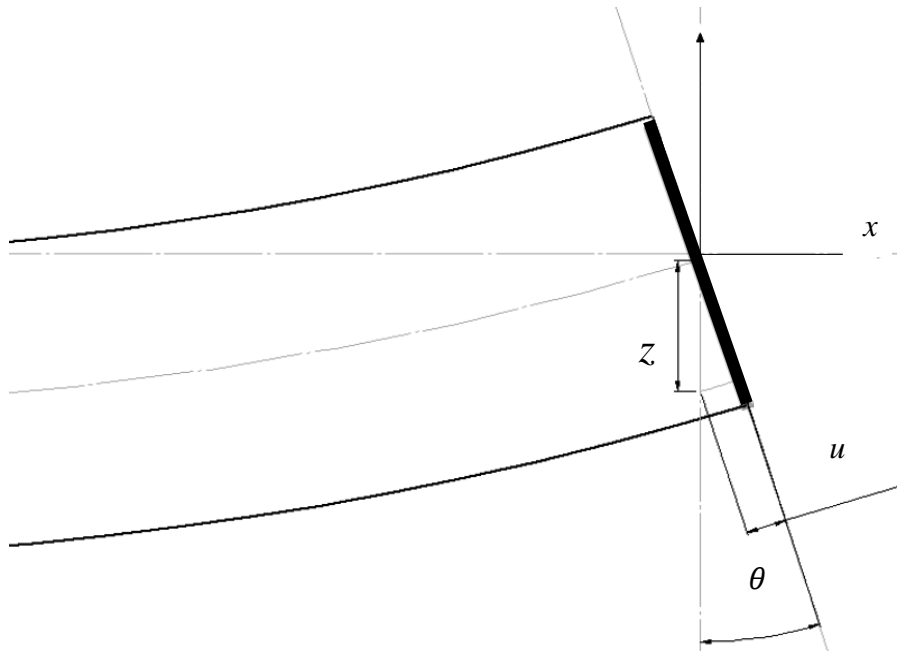


Figure II-3. Hypothèses cinématiques d'Euler Bernoulli

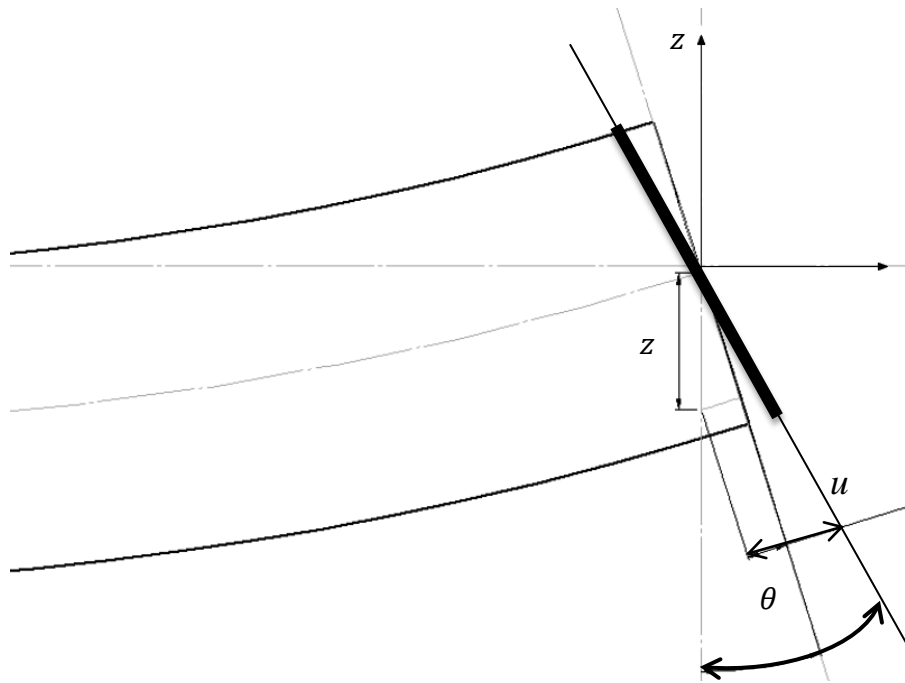


Figure II-4. Hypothèses cinématiques de Timoshenko

### II.5.3. Théories d'ordre élevé

Les théories de déformations de cisaillement d'ordre élevé dont les théories de deuxième ordre et de troisième ordre [73, 76, 77] ne considèrent pas la constance des déformations selon l'épaisseur. Elles proposent, contrairement à la théorie de Timoshenko, une distribution parabolique des déformations de cisaillement transversales à travers l'épaisseur de la poutre (Figure II-5), vérifiant ainsi la nullité des contraintes sur les fibres externes. Nul besoin donc de recourir au facteur de correction. Dans la théorie de deuxième ordre, le champ des déplacements s'exprime par :

$$u(x, z, t) = -z\theta(x, t) + z^2\varphi(x, t), \quad v = 0, \quad w(x, z, t) = w(x, z, t) \quad (\text{II-16})$$

La théorie des déformations de cisaillement de troisième ordre s'exprime par le champ de déplacement suivant :

$$u(x, z, t) = -z\theta(x, t) + z^2\varphi(x, t) + z^3\varnothing(x, t), \quad v = 0, \quad w(x, z, t) = w(x, z, t) \quad (\text{II-17})$$

Où  $\varphi$  et  $\varnothing$  sont des fonctions à déterminer.

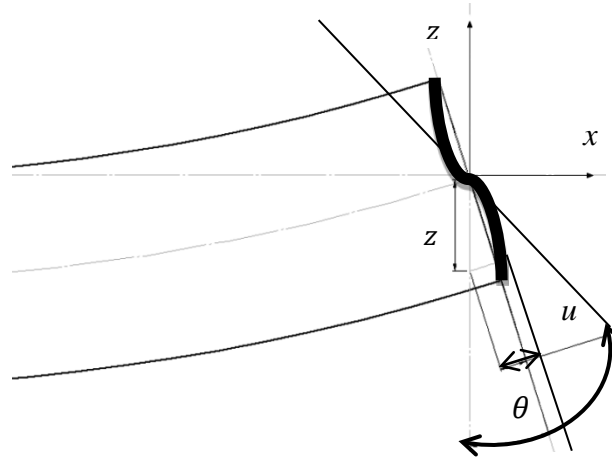


Figure II-5. Hypothèses cinématiques des théories d'ordre élevé

Levinson [77] et Reddy [76] ont employé, afin de développer leur théorie, le champ de déplacement écrit ci-dessous et qui s'obtient en supposant que les déformations de cisaillement sont non uniformes à travers l'épaisseur et nulles aux niveau des fibres extrêmes supérieures et inférieures de la poutre.

$$u(x, z, t) = -z\theta(x, t) - \alpha z^3 \left( \theta(x, t) + \frac{\partial w(x, z, t)}{\partial x} \right), \quad v = 0, \quad w(x, z, t) = w(x, z, t) \quad (\text{II-18})$$

Où  $\alpha = 4/3(2h)^2$  et la grandeur  $2h$  représente la hauteur de la poutre.

Il s'ensuit que le champ des déformations s'exprime par :

$$\varepsilon_{xx} = -z \frac{\partial \theta}{\partial x} - \alpha z^3 \left( \frac{\partial \theta(x, z, t)}{\partial x} + \frac{d^2 w(x, z, t)}{dx^2} \right) \quad (\text{II-19})$$

$$\gamma_{xz} = -\theta(x, z, t) + \frac{\partial w(x, z, t)}{\partial x} - 3\alpha z^2 \left( \theta(x, t) + \frac{\partial w(x, z, t)}{\partial x} \right) \quad (\text{II-20})$$

## II.6. Simulation d'un essai de flexion cisailée

### II.6.1. Description du problème

La théorie d'Euler-Bernoulli suppose qu'au cours de la flexion, les sections droites de la poutre restent droites et perpendiculaires à la fibre moyenne. De ce fait l'effet de cisaillement transverse est négligeable et la flexion est dite pure. Celle de Timoshenko prend en compte l'effet de cisaillement avec une distribution des déformations de cisaillement constante selon l'épaisseur de la poutre. On s'intéresse dans ce problème à l'étude de l'effet du cisaillement sur le comportement d'une poutre en flexion. La théorie appliquée est celle de Timoshenko. Le modèle

rhéologique proposé prend à la fois l'élasticité instantanée et la viscoélasticité. Il s'agit en premier lieu d'une formulation mathématique des équations gouvernant la géométrie de la flexion d'une part et le modèle de comportement d'autre part. De suite, les équations sont résolues. Enfin les résultats obtenus suite à un exemple illustratif sont présentés et discutés.

Nous nous limitons dans cette étude aux théories d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko. Tel qu'il est présenté sur la Figure II-6, nous considérons une poutre prismatique droite de longueur  $l$ , simplement appuyée et soumise à une charge transversale statique, constante et concentrée  $P$  agissant à distances égales des appuis. La section transversale  $A$  parallèle au plan  $yz$  est de largeur  $b$  et de hauteur  $2h$ . A un temps  $t$  donné, les déplacements s'expriment, d'après les hypothèses cinématiques de Timoshenko, respectivement selon les axe  $x$ ,  $y$  et  $z$  par :

$$u(x, z, t) = -z\theta_x(x, t), \quad v = 0, \quad w(x, z, t) = w(x, z, t) \quad (\text{II-21})$$

Où  $\theta$  dénote l'angle de rotation de la section transversale selon l'axe  $z$ .

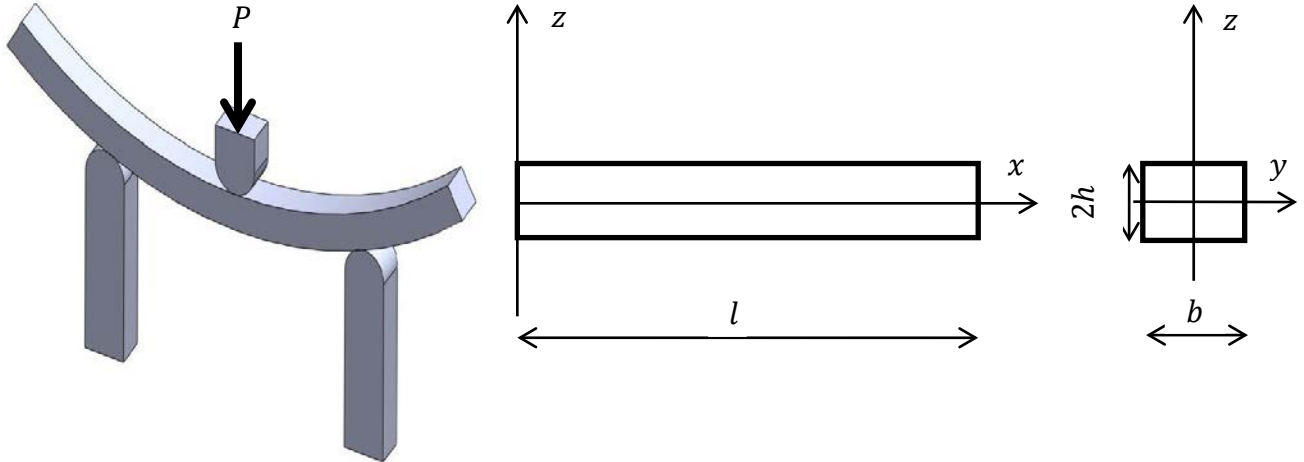


Figure II-6. Géométrie d'une poutre en flexion trois points

En se plaçant dans l'hypothèse de petites déformations, la déformation longitudinale  $\varepsilon_x$  et la déformation de cisaillement  $\gamma_{xz}$  sont données par :

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} ; \gamma_{xz} = -\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (\text{II-22})$$



Les équations d'équilibre d'un élément de poutre permettent de relier les efforts qui sont le moment de flexion  $M_x$  et l'effort tranchant  $Q$  respectivement avec la contrainte normale  $\sigma_x$  et la contrainte tangentielle  $\tau_{xz}$ .

$$\begin{cases} M_x = -b \int_{-h}^h z \sigma_x dz \\ Q = -b \int_{-h}^h \tau_{xy} dz \end{cases} \quad (\text{II-23})$$

### II.6.2. Modèle rhéologique viscoélastique

Il est supposé que la poutre réagit aux sollicitations externes suivant un comportement composé prenant en compte l'élasticité instantanée et l'élasticité différée. Un modèle analogique a été adapté pour répondre convenablement aux différents aspects de comportement pris en compte (Figure II-7). On trouve une description détaillée des modèles analogiques dans les références [21, 78]. Le modèle rhéologique proposé est un montage en série d'un ressort reproduisant l'élasticité instantanée et d'une combinaison en parallèle d'un autre ressort et d'un autre amortisseur reproduisant ainsi une élasticité différée.

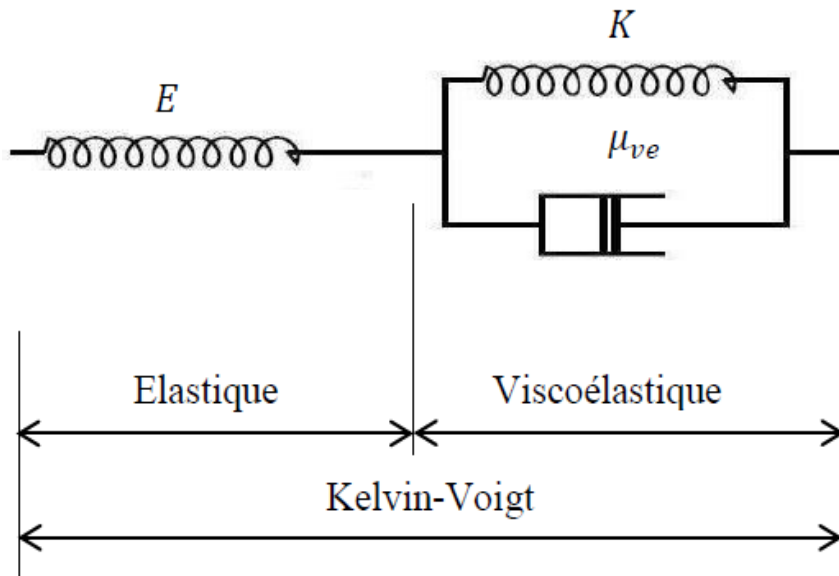


Figure II-7. Modèle rhéologique viscoélastique

### II.6.3. Formulation mathématique des équations de comportement

Nous supposons que la réponse du matériau suit le modèle de Kelvin-Voigt à élasticité instantanée. Ainsi, dans le cas du fluage, la relation contrainte déformation est donnée par :

$$\sigma_x(x, z, t) = E_{ve}(t) \varepsilon(x, z, t) \quad (\text{II-24})$$

$$\tau_{xy} = G_{ve}(t) \gamma_{xz}(x, z, t) \quad (\text{II-25})$$

Où  $E_{ve}(t)$  et  $G_{ve}$  sont des fonctions de temps valant respectivement:

$$E_{ve}(t) = EK / \left( K + E \left( 1 - e^{-\frac{Kt}{\mu_{ve}}} \right) \right); G_{ve} = GK / \left( K + G \left( 1 - e^{-\frac{Kt}{\mu_{ve}}} \right) \right) \quad (\text{II-26})$$

Avec  $E$  et  $G$  sont respectivement le module de Young et le module de cisaillement.  $K$  et  $\mu_{ve}$  sont deux paramètres viscoélastiques du matériau.

Le paramètre géométrique qu'est la courbure  $\chi$  est nécessaire pour déterminer la répartition des déformations et des contraintes ainsi que la flèche de la poutre. On l'obtient à partir des équations d'équilibre d'un élément de poutre. En supposant que la flexion est symétrique et en remplaçant les contraintes et les déformations longitudinales et de cisaillement par leurs formules, l'équilibre d'un élément de poutre est donné par :

$$M_x = -b \int_{-h}^h E_{ve}(t) \frac{\partial \theta_x}{\partial x}(x, z, t) z^2 dz \quad (\text{II-27})$$

$$Q = b \int_{-h}^h \alpha G_{ve}(t) \left( -\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) dz \quad (\text{II-28})$$

Où  $\alpha$  est le coefficient de correction en cisaillement dépendant de la forme de la section [79]. Il permet de prendre en compte la répartition parabolique de la contrainte en fonction de la hauteur de la poutre à l'aide d'une répartition constante sur la section.

En intégrant, on obtient les équations qui gouvernent le comportement viscoélastique de la poutre:

$$\frac{\partial \theta_x}{\partial x} = \frac{M_x}{E_{ve} I} \quad (\text{II-29})$$

$$E_{ve} I \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + \alpha G_{ve} A \left( -\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \quad (\text{II-30})$$

En intégrant l'équation ci-dessus et imposant les conditions aux limites appliquées dans le cas d'une flexion trois points on obtient respectivement le couple de formules de la flèche à droite et à gauche de la force transversale agissant à distances égales des extrémités de la poutre.

$$\begin{cases} W = \frac{P}{E_{ve}I} \left( \frac{x^3}{12} - \left( \frac{L^2}{16} + \frac{E_{ve}I}{2\alpha G_{ve}A} \right) x \right) & x \leq L/2 \\ W = \frac{P}{E_{ve}I} \left( \frac{x^3}{12} - \frac{1}{6} \left( x - \frac{L}{2} \right)^3 - \frac{L^2}{16} x + \frac{E_{ve}I(x-L)}{2\alpha G_{ve}A} \right) & x \geq L/2 \end{cases} \quad (\text{II-31})$$

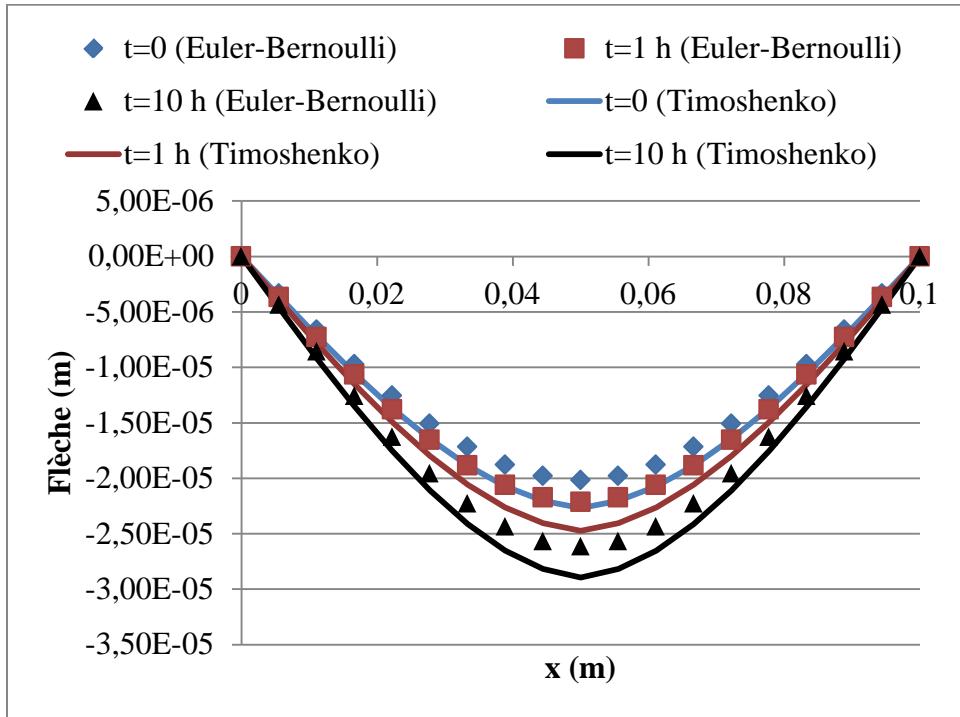
#### II.6.4. Matériau et ses propriétés mécaniques

La poutre est supposée réagir aux sollicitations suivant le modèle de comportement viscoélastique (Figure II-7) dont les paramètres sont  $E = 6200 \text{ MPa}$ ,  $G = 2384 \text{ MPa}$ ,  $K = 40000 \text{ MPa}$ ,  $\mu_{ve} = 52834 \text{ MPa.H}$ . La longueur et la largeur de la poutre sont arrêtées respectivement à  $100 \text{ mm}$  et  $10 \text{ mm}$  tandis que la hauteur est à varier afin de se rendre compte de l'effet de cisaillement sur la flèche. Les rapports de la longueur sur la hauteur de la poutre pris en compte sont 5, 10 et 15.

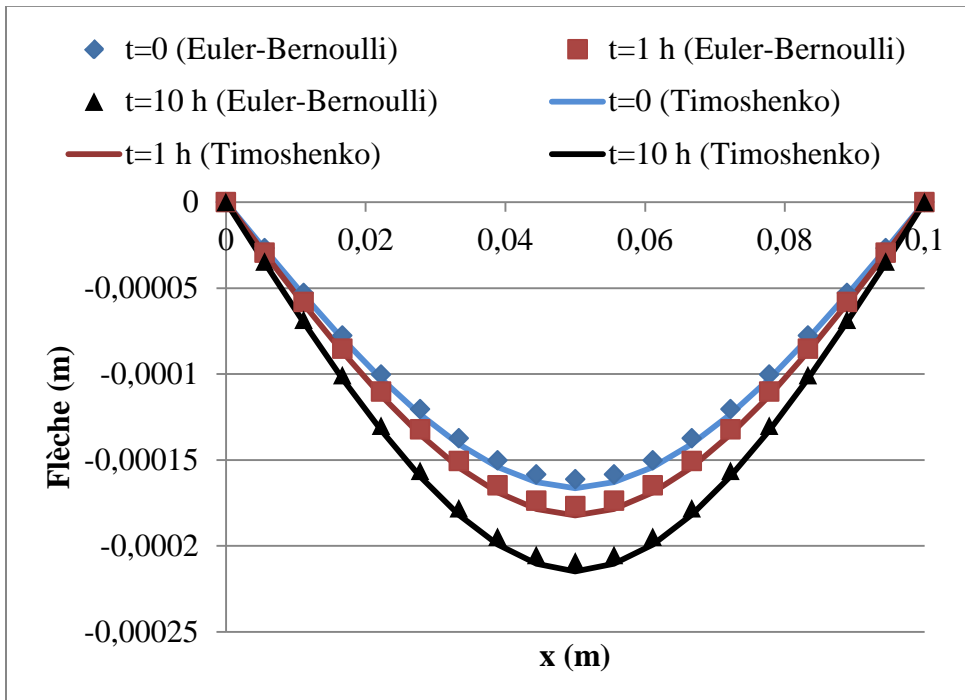
##### II.6.4.1. Influence du cisaillement sur la flèche

La Figure II-8 présente une comparaison de la flèche de la poutre de comportement viscoélastique calculée selon la théorie d'Euler-Bernoulli et celle de Timoshenko pour différents rapports de la longueur sur la hauteur de la poutre. On remarque sur la Figure II-8. a une grande sous-estimation de la flèche pure pour une poutre épaisse avec un rapport valant 5. Cependant cette sous-estimation tend à diminuer en augmentant le rapport longueur/hauteur. Il est communément connu que la poutre est considérée mince lorsque le rapport longueur/hauteur est au dessus de 10. Ceci est constaté sur la Figure II-8. b où on remarque que la différence est négligeable entre la flèche pure et la flèche cisailée. Par ailleurs, on constate sur la Figure II-8. c une quasi-coïncidence dans le cas d'un rapport estimé à l'ordre de 15.

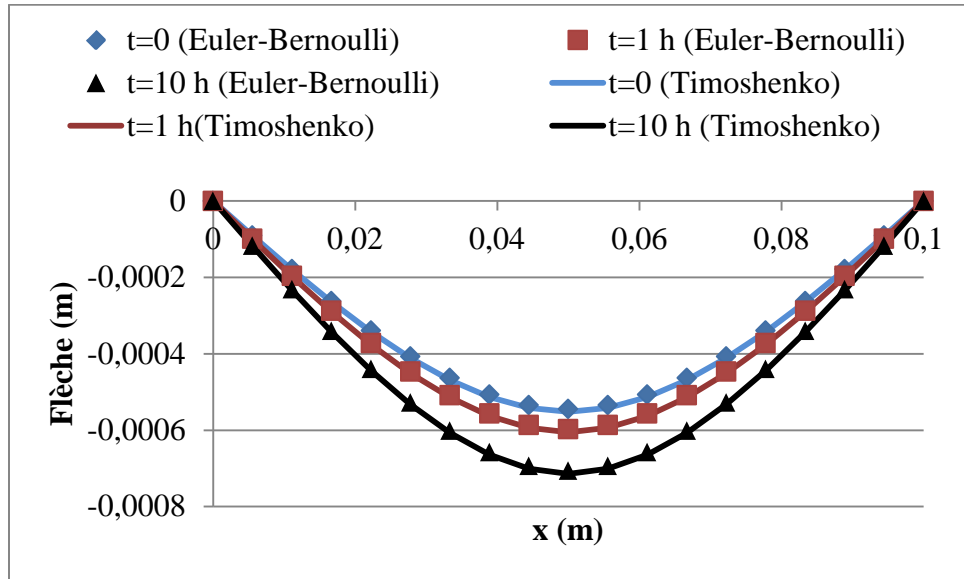
A la lumière de ce constat, aussi bien en élasticité qu'en viscoélasticité, il est privilégié d'utiliser la théorie de flexion d'Euler-Bernoulli dans le cas des poutres ayant un rapport longueur/hauteur au dessus de 10. Elle présente l'avantage de simplicité sans que ses résultats ne soient moins pertinents.



a. ( $L/2h$ ) = 5



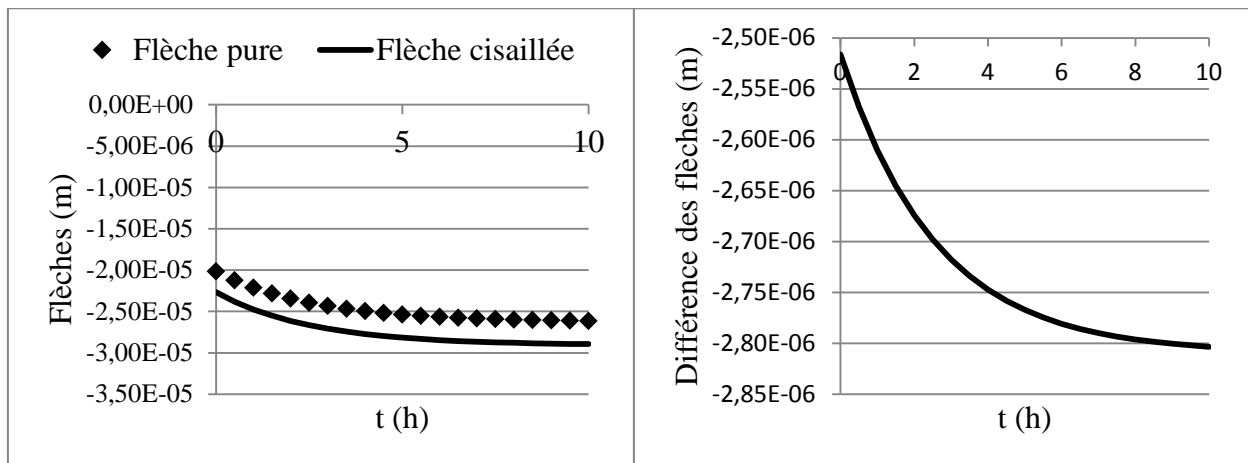
b. ( $L/2h$ ) = 10



c.  $(L/2h) = 15$

Figure II-8. Effet du cisaillement sur la flèche

L'évolution des flèches au cours du temps avec un rapport  $((L/2h) = 5)$  est présentée sur la Figure II-9. On remarque que les flèches suivent une courbe typique de fluage d'après la Figure II-9. a. Quant à l'influence du temps sur la flèche, on se réfère à la Figure II-9. b où on peut distinguer la différence au cours du temps. En effet, la différence entre les flèches pure et cisailée n'est pas constante mais elle évolue non linéairement au cours du temps à faibles pentes.



A.

B.

Figure II-9. a. Evolution des flèches au cours du temps, b. Différence des flèches pure et cisailée

## **II.7. Bilan du chapitre**

Ce chapitre a fait l'objet d'une étude portant sur la flexion des poutres. La non linéarité géométrique et matérielle ont été évoquées à travers des formulations en petits déplacements et en grandes déplacements. L'effet du cisaillement transverse a également été élucidé. Les théories de Timoshenko et celles d'ordre élevé ont été présentées. Les concepts explicités sont illustrés par un exemple numérique. Le modèle viscoélastique de Kelvin-Voigt a été appliqué sur le comportement d'une poutre en flexion trois points dans le cadre des théories d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko. A la base des résultats obtenus, il a été constaté que l'effet de cisaillement n'est considérable que dans une poutre de rapport longueur/hauteur inférieur à 10. Ainsi, on réaffirme la pertinence des résultats de la théorie d'Euler-Bernoulli en viscoélasticité pour modéliser la flexion des poutres minces.

## **Chapitre III : Stratégie d'identification des paramètres des matériaux**

### **III.1. Introduction**

La connaissance des propriétés mécaniques d'un matériau constitue une étape indispensable avant sa mise en service. Ces propriétés s'expriment mathématiquement par des paramètres qui apparaissent dans les lois de comportement des matériaux. La loi de comportement rhéologique établit une relation entre l'état de contrainte et les variables d'écoulement telles que la déformation et sa vitesse en faisant intervenir ces paramètres. L'expérimentation consiste en la réalisation des essais mécaniques en adéquation avec le modèle de comportement et les paramètres à identifier. L'identification de ces paramètres s'opère en minimisant une fonction qui établit l'écart entre les résultats de l'expérience et ceux du modèle. Le présent chapitre est consacré à l'identification des paramètres des lois de comportements. Les méthodes d'identification et les techniques d'optimisation sont présentées. Enfin, un exemple illustratif est donné pour en clarifier les procédures.

### **III.2. Méthodes d'identification**

La détermination des paramètres des modèles utilisés pour la simulation des comportements des matériaux est souvent une tâche compliquée. La difficulté est proportionnelle à la complexité du modèle lui-même [4], aux conditions de chargement et au nombre de paramètres à déterminer [80]. Ces considérations servent d'appui pour le choix de la méthode d'identification appropriée. Ainsi un choix pertinent permet d'avoir des résultats fiables.

Plusieurs méthodes d'identification des paramètres des matériaux sont repérées dans la littérature. Deux grandes classes de méthodes sont distinguées. Les méthodes classiques et les méthodes d'identification inverse. En effet les méthodes basées sur la formulation des problèmes inverse, les plus utilisées, consistent à la minimisation d'une fonction qui établit l'écart entre les données expérimentales et les résultats de la simulation. Les références [17, 81-89] présentent certaines techniques d'identification utilisées pour la détermination des paramètres

viscoélastiques et/ou viscoplastiques. On présente dans ce qui suit les deux grandes classes des méthodes d'identification des paramètres des matériaux.

### **III.2.1. Méthodes d'identification classique**

S'insèrent dans la classe des méthodes classiques d'identification des paramètres matériels les méthodes graphiques analytiques, les méthodes de calcul direct des paramètres et les méthodes de régression des courbes selon la référence [81]. La méthode graphique analytique s'applique dans le cas d'un petit nombre de paramètres. En effet elle se fonde sur une stratégie de découplage de paramètres en déterminant successivement la valeur de chacun. Quant à la méthode de calcul direct, elle est ce que son appellation indique. Elle voit son investissement pour des lois de comportement simple et avec un nombre de paramètres réduit. La méthode de régression des courbes est venue pour corriger les erreurs induites et cumulés par les méthodes des calculs successifs. Elle consiste à établir une fonction analytique de la contrainte et puis chercher les valeurs des paramètres auxquels on obtient le meilleur ajustement avec les courbes expérimentales.

La même ressource [81] conclut qu'un calcul préalable de la contrainte est nécessaire afin de pouvoir se servir de ces méthodes. En effet il est besoin d'établir une relation entre la contrainte d'un côté et les valeurs de la déformation cumulée, de la vitesse équivalente et de la température de l'autre côté. En plus un pilotage de grande précision des essais s'avère indispensable pour maintenir constantes la vitesse de déformation et la température. Ce qui n'est pas facile à réaliser surtout avec des comportements complexes. De ce qui précède, la propagation de l'erreur peut être assez importante et les méthodes deviennent alors trop approximatives.

Les méthodes classiques d'identification étant très limitées, il s'avère nécessaire, pour des sollicitations ou des comportements complexes, de développer des modèles d'analyse rhéologique plus complets et plus rigoureux, rendant l'identification des paramètres plus flexible et plus systématique [90]. Il est donc à agir sur deux plans dont le premier est le développement de techniques expérimentales rendant possibles des mesures plus fines et plus locales dans une gamme de sollicitation large tandis que le second consiste au développement de techniques d'identification plus efficaces qui permettraient l'exploitation d'essais complexes.



### III.2.2. Méthodes d'identification inverses

Les récents progrès réalisés dans le domaine des codes de calcul numérique et les développements de techniques de mesure des champs cinématiques ont favorisé une modélisation très fine des comportements des matériaux. Les méthodes d'identification inverse s'avèrent un outil de choix pour une estimation plus fiable et plus précise des paramètres des matériaux. Le concept général de la méthode d'identification inverse consiste à déterminer les paramètres inconnus qui pilotent le modèle de comportement mécanique du matériau. Ces paramètres sont obtenus à partir de la minimisation d'une fonction qui établit l'écart entre les réponses expérimentales et les résultats de la modélisation.

Dans le cadre de la modélisation mathématique d'un système mécanique, un modèle direct permet d'exprimer la réponse du système ( $M$ ) pour une géométrie, des conditions aux limites et une loi de comportement données [90]. On se reporte à la référence [91] pour plus de détails sur l'exploitation des méthodes inverses dans l'estimation des paramètres. Le modèle direct s'exprime sous la forme d'une fonction de l'ensemble des variables ou paramètres  $P$  qui définissent le système étudié.

$$M_c = S(P) \quad (\text{III-1})$$

Quant à l'analyse inverse, elle consiste à déterminer les paramètres ( $P$ ) qui conduisent à un état expérimental du système donné  $M_{ex}$ . Le modèle inverse s'écrit alors :

$$\text{Trouver } P = S^{-1}(M_c) \text{ tel que } M_c = M_{ex} \quad (\text{III-2})$$

De ce fait, le problème inverse se formule comme un problème de minimisation d'une fonctionnelle d'erreur entre les valeurs calculées des observables  $M_c$  et leurs valeurs expérimentales  $M_{ex}$ . La détermination de l'ensemble des paramètres  $P$  passe par une étape de formulation du problème direct et puis par la minimisation de la fonction objectif  $Q(P)$  avec un algorithme d'optimisation approprié. Ceci se traduit sous la forme mathématique suivante :

$$M_c = S(P) \quad (\text{III-3})$$

$$Q(P) = \sum_{i=1}^n (M_{ex}^i - M_c^i)^2 \quad (\text{III-4})$$

Le principe général de ces méthodes inverses qui associent des résultats de simulation et des mesures expérimentales est toujours le même, la différence peut se révéler dans le choix de la

fonction objectif et des méthodes d'optimisation. A titre d'exemple, la fonction objectif ci-dessus peut s'écrire sous forme adimensionnelle :

$$Q(P) = \frac{\sum_{i=1}^n (M_{ex}^i - M_c^i)^2}{\sum M_{ex}^i{}^2} \quad (\text{III-5})$$

Pour ce qui est des méthodes d'optimisation utilisées pour résoudre ce genre de problèmes, il y en a plusieurs dans la littérature. La section qui suit en présente quelques unes.

### III.3. Méthodes numériques d'optimisation

Plusieurs méthodes sont disponibles pour la résolution des problèmes d'optimisation. En effet différentes manières de classification de problèmes d'optimisation ont été soulevées [92]. On distingue une classification des problèmes d'optimisation selon l'existence des contraintes, avec ou sans contraintes. Selon la nature de l'expression de la fonction objectif et des contraintes qui peuvent être linéaires ou non linéaires. Selon la nature déterministes des variables, des problèmes de programmation déterministe ou stochastique. Selon le nombre de fonctions objectifs, optimisation mono-objectif ou multi-objectif. On peut également distinguer des méthodes classiques et des méthodes modernes ou métaheuristiques. Ceci dit, des difficultés sont toujours rencontrées tant dans le traitement des problèmes inverses que dans les problèmes d'optimisation eux-mêmes. Quant à ces derniers, il est évident que la performance des résultats dépend du choix de l'algorithme tandis que la pertinence de l'algorithme dépend du choix des valeurs initiales [93]. On distingue également deux grandes classes de méthodes qu'on présente dans ce que suit.

#### III.3.1. Méthodes classiques

Les méthodes classiques d'optimisation sont utilisées dans la recherche de la solution optimale des fonctions continues et différentiables. Ces méthodes sont analytiques et utilisent les techniques du calcul différentiel pour localiser les points optimaux.

##### III.3.1.1. Les méthodes basées sur le gradient

Les méthodes basées sur le gradient de la fonction objectif  $f$  sont des techniques utilisées pour minimiser une fonction différentiable. Elles reposent sur la propriété dite de descente itérative. Ainsi que leur appellation indique, elles imposent l'évaluation simultanée de la fonction objectif

et de son gradient. Partant d'un vecteur initial  $x_0$ , une suite des vecteurs  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  est générée selon un procédé itératif de manière à ce que la fonction  $f$  décroisse :

$$f(x_{i+1}) < f(x_i) \quad (\text{III-6})$$

En désignant par  $\alpha$  le pas ou le paramètre de recherche linéaire et par  $\Delta x$  la direction de descente, pour chaque itération, les vecteurs sont générés selon la formule suivante :

$$x_{i+1} = x_i + \alpha_i \Delta x_i \quad (\text{III-7})$$

Afin d'assurer la descente de la fonction objectif, la direction devra être opposée au gradient de la fonction  $f$ . Ce qui permet décrire :

$$\nabla f(x_i) \Delta x_i < 0 \quad (\text{III-8})$$

Les calculs du pas de la descente  $\alpha_i$  et de la direction de la descente  $\Delta x_i$  se font selon différentes manières dont la méthode de la descente la plus rapide et la méthode du gradient conjugué. On se reporte à la référence [94] pour plus de détail sur ces méthodes.

### III.3.1.2. La méthode de Newton

La méthode de Newton, qui est en réalité une méthode de résolution des équations non linéaires, est investie en optimisation pour résoudre l'équation du gradient de la fonction objectif.

$$\nabla f(x) = 0 \quad (\text{III-9})$$

La méthode ne peut s'appliquer que si la fonction  $f$  est deux fois différentiable. La matrice hessienne  $H$  de  $f$  et son inverse devront alors être évaluées. Ainsi par l'application du théorème de Taylor, on peut arriver à la formule finale.

$$x_{k+1} = x_k - H^{-1}(x_k) \nabla f(x_k) \quad (\text{III-10})$$

La convergence de l'algorithme de la méthode de Newton dépend du choix des valeurs initiales  $x_0$ . Plus la valeur initiale est proche du point optimal, plus la méthode converge. De ce fait elle est sensible à l'initialisation. Elle présente par ailleurs l'avantage de sa convergence quadratique. Cependant elle a l'inconvénient qui réside dans le calcul de la matrice hessienne de la fonction objectif qui est couteux en matière de calcul.

### III.3.2. Méthodes métaheuristiques

Au cours des dernières années, des méthodes d'optimisation conceptuellement différentes des techniques classiques de programmation mathématique ont été développées [92]. Ces méthodes sont étiquetées comme des méthodes métaheuristiques. Elles sont en mesure de traiter des

problèmes d'optimisation très complexes. Elles présentent l'avantage de pouvoir trouver des optimums globaux d'un problème d'optimisation sans tomber dans le piège des optimums locaux. Contrairement à d'autres méthodes d'optimisation, la plupart d'entre elles ne nécessitent pas une connaissance approfondie de l'espace de recherche, telles que les limites de solutions probables ou les dérivées des fonctions. Ces méthodes sont basées sur certaines caractéristiques et comportements biologiques, moléculaires, d'essaim d'insectes, et des systèmes neurobiologiques. On en cite la méthode du recuit simulé, les algorithmes génétiques, la méthode de recherche tabou et les algorithmes de colonies de fourmis.

Nous nous limitons ici à présenter deux méthodes métaheuristiques qui sont les algorithmes génétiques et les algorithmes de colonies de fourmi.

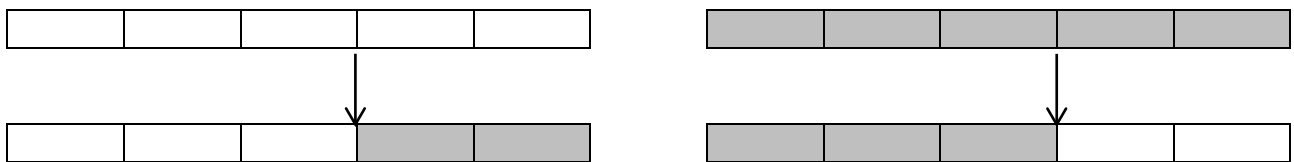
### **III.3.2.1. Algorithmes génétiques**

Les algorithmes génétiques sont des algorithmes d'optimisation stochastique fondés sur les principes de la génétique et de la sélection naturelle [95, 96]. Ils ont été appliqués avec succès dans une large gamme de problèmes de grande complexité [86, 97]. Une bibliographie sur les algorithmes génétiques a été élaborée dans la référence [98]. Leur fonctionnement est extrêmement simple. Partant d'une population de solutions potentielles (*chromosomes*) initiales choisies de manière aléatoire, on évalue leur performance (*fitness*) relative. En termes d'optimisation, la fonction objectif est évaluée pour chacune de ces solutions. Sur la base de ces performances on crée une nouvelle population de solutions potentielles en utilisant des opérateurs évolutionnaires : la sélection, le croisement et la mutation. On recommence le cycle jusqu'à ce que l'on trouve une solution satisfaisante.

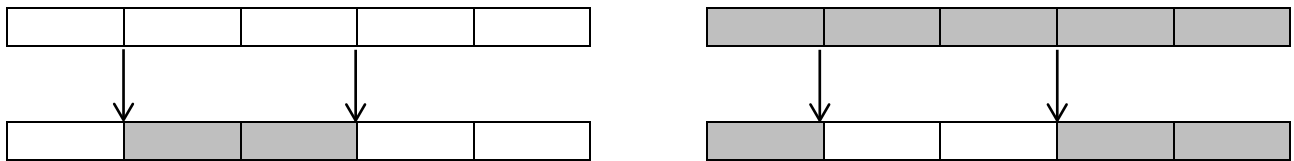
Les algorithmes génétiques s'appuient fortement sur le principe de codage. Celui-ci est représenté par une chaîne de bits qui contient toute l'information nécessaire pour un point dans l'espace de recherche. Historiquement, le codage binaire était le premier codage utilisé. Cependant il présente des inconvénients dont le majeur étant que deux points voisins dans l'espace des variables ne sont pas nécessairement codés par deux chaînes de bits voisines. Le codage réel est désormais largement utilisé.

Dans une première étape, un algorithme génétique génère un ensemble de solutions, qui représentent des individus, choisis de manière aléatoire dans l'espace de recherche. Cet ensemble de solutions possibles est appelé population. Celle-ci correspond à la première génération à partir de laquelle d'autres générations seront créées. La population initiale devra être hétérogène si l'on veut avoir moins de risque de manquer l'optimum global. En effet, l'évolution darwinienne d'une population stipule que seuls les individus les plus forts survivent et se reproduisent.

L'algorithme génétique permettant la progression de la population d'une génération à une autre, le processus de sélection permet d'identifier les meilleurs individus d'une population et d'en éliminer les mauvais. En effet, dans la nature, plus un individu est adapté à l'environnement, plus il a des chances de survivre et de se reproduire pour transmettre leurs caractéristiques à la génération suivante. Il existe différentes règles de sélection telle que la mise en œuvre de la roulette biaisée et la sélection par tournoi. La sélection par roulette reproduit le principe de tirage aléatoire utilisé dans les roulettes de casinos avec une structure linéaire. La sélection par tournoi consiste à comparer deux individus et à ne garder que le meilleur des deux.



a. Croisement à un point



b. Croisement à deux points.

Figure III-1. Types de croisements

Le croisement permet de combiner les caractéristiques des individus parents pour créer de nouveaux individus enfants avec de nouvelles potentialités meilleures que celles de leurs parents dans la génération future. Ainsi, prenant deux individus, le croisement consiste à choisir aléatoirement un point de croisement et à échanger les segments des deux parents déterminés

pour créer de nouveaux individus (Figure III-1). Ceci est appelé croisement à un point. On peut étendre ce processus à plusieurs points de croisement. Ainsi plusieurs segments sont interchangés.

La mutation, considérée comme un opérateur secondaire par rapport au croisement, permet de modifier de façon aléatoire la valeur de certaines variables d'un individu. Elle a pour but de diversifier la population afin d'examiner d'autres zones de l'espace de recherche. Il n'est donc pas nécessaire de construire une population initiale contenant tous les points dans l'espace de recherche. La mutation s'avère importante au cas où la convergence vers un minimum local est plus probable pendant la recherche d'un minimum global [92]. Il est à noter que les mutations ne s'appliquent pas à tous les individus. Un taux de mutation est à définir. Celui-ci peut être constant ou variable dans le temps. Il existe plusieurs types d'opérateurs de mutation utilisant des génotypes binaires ou réels, on en cite la mutation par inversion de bit et la mutation aléatoire. La Figure III-2 présente une mutation par inversion de bit.

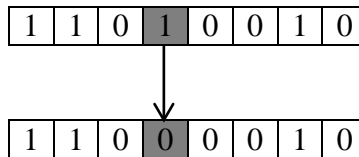


Figure III-2. Mutation par inversion de bit

Ainsi dans les algorithmes génétiques, les processus de sélection, de croisement et de mutation sont répétées jusqu'à ce que la convergence satisfaisante soit obtenue et la solution optimale soit trouvée. Ci-dessous, sur la Figure III-3 se présente l'organigramme des algorithmes génétiques.

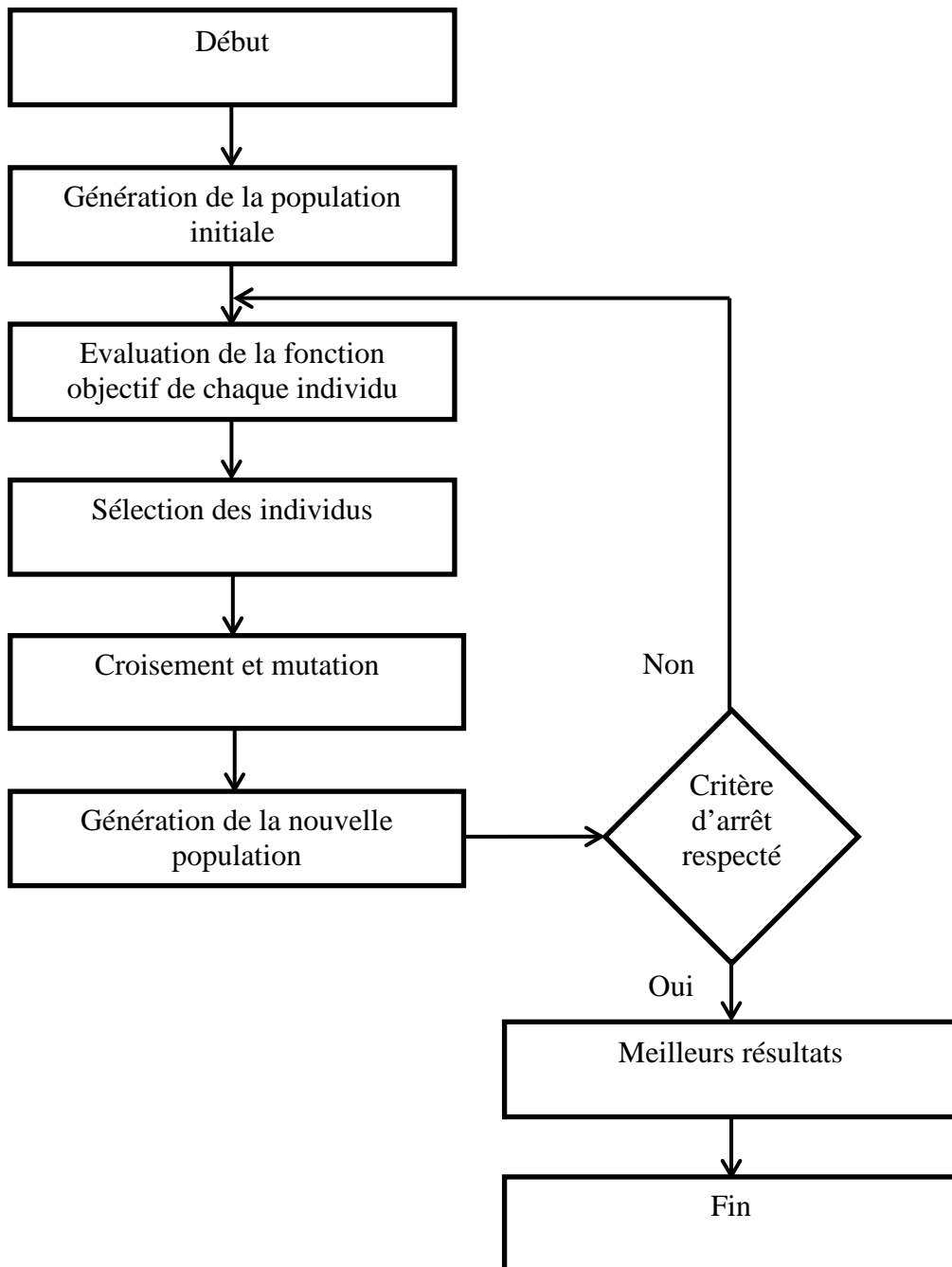


Figure III-3. Organigramme d'un algorithme génétique

### III.3.2.2. Algorithme des colonies de fourmis

L'optimisation par algorithmes de colonie de fourmis est basée sur le comportement coopératif des colonies de fourmis réelles, qui sont en mesure de trouver le plus court chemin partant de leur nid à une source de nourriture. C'est une méthode d'optimisation développée par Marco Dorigo

dans les années 90 [99]. Les techniques d'optimisation issues des colonies de fourmis ont été appliquées à divers problèmes d'optimisation. Le principe consiste alors en la minimisation de la longueur de chemin conduisant à une source de nourriture grâce aux traces chimiques, appelées phéromones, laissées par chaque fourmi. Ces traces chimiques constituent un moyen de communication.

La méthode d'optimisation par colonies de fourmis est donc fondée sur le dépôt et l'évaporation des pistes de phéromones. Les fourmis partent aléatoirement de leur nid à la recherche de la nourriture. Une fois la nourriture trouvée, elles s'en approvisionnent puis retournent vers leur nid, en marquant leur trajet de phéromone. Cette substance chimique permet aux fourmis de communiquer entre elles de façon indirecte. Ceci est défini par la stigmergie selon les entomologistes. La quantité de phéromone déposée, qui dépendrait de la quantité et de la qualité de la nourriture, oriente les autres fourmis à la source de la nourriture [100]. En effet si d'autres fourmis rencontrent ce chemin, elles arrêtent leurs déplacements aléatoires pour rejoindre le chemin marqué, en renforçant ainsi le marquage à leur retour. En même temps, le chemin le plus court sera davantage parcouru, et donc plus renforcé et plus attractif (Figure III-4). En considérant que la phéromone s'évapore, les chemins les moins renforcés finissent par disparaître, ce qui amène toutes les fourmis à suivre ce chemin le plus court.

Dans un algorithme à colonie de fourmis, chaque fourmi construit une solution fondée sur les traces de phéromone. Ensuite les traces de phéromone sont mises à jour à partir des solutions obtenues. Elles peuvent se renforcer ou s'affaiblir selon la quantité de phéromone déposée. Ce processus permet d'améliorer au fur et à mesure les résultats par le biais des itérations pour s'approcher de l'optimum recherché. Ainsi en générant un ensemble de solutions initiales, avec un processus d'itération, les traces de phéromone se mettent à jour ce qui permet la génération d'un nouvel ensemble de solution. Le cycle se refait jusqu'à ce que le critère d'arrêt soit respecté. Les références [99-102] offrent plus de détail sur la mise en place de la technique d'optimisation par colonie de fourmis.



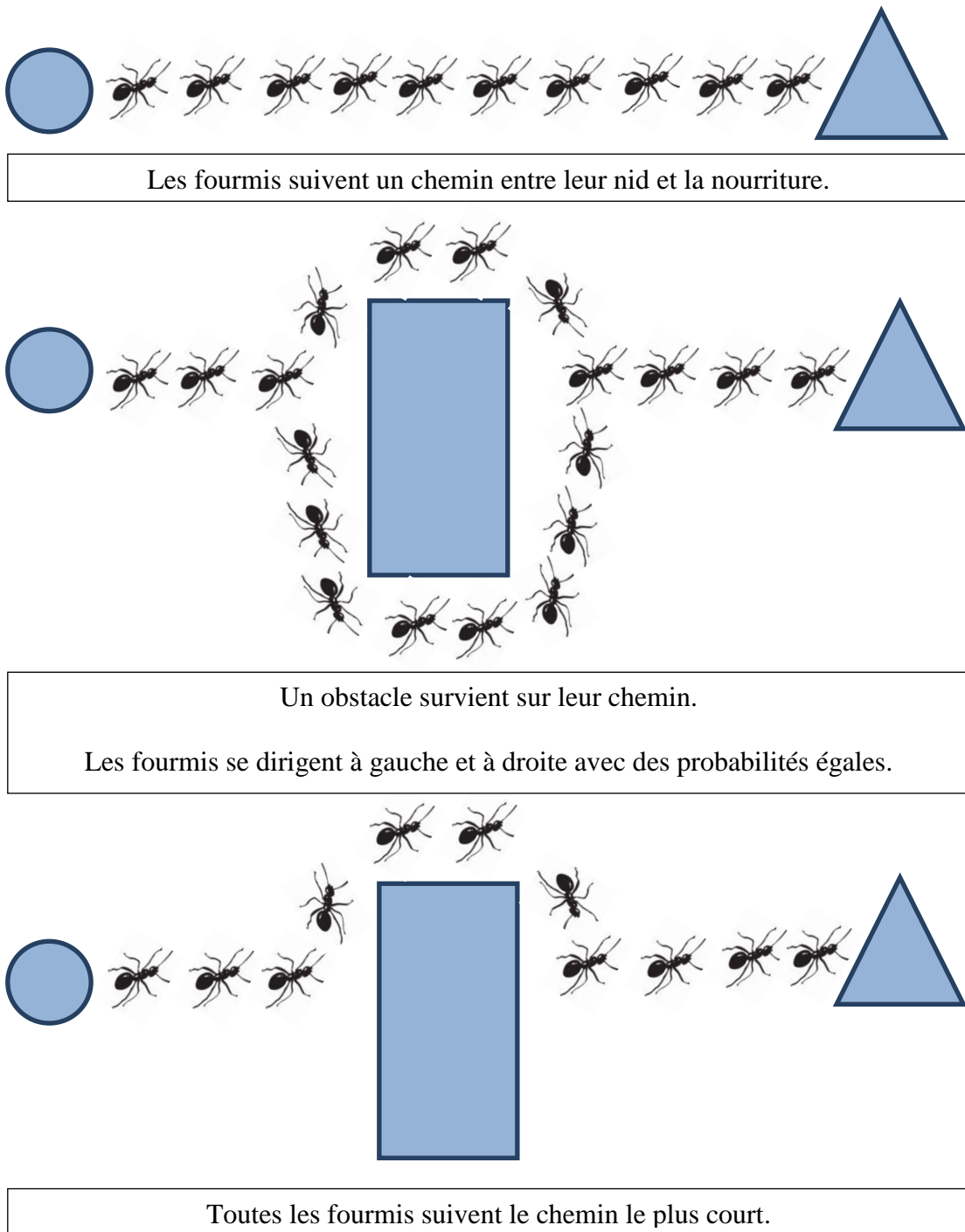


Figure III-4. Faculté des colonies de fourmis à retrouver le chemin le plus court.

Un organigramme de base, permettant la mise en place d'un algorithme d'optimisation à colonies de fourmis, est présenté sur la Figure III-5.

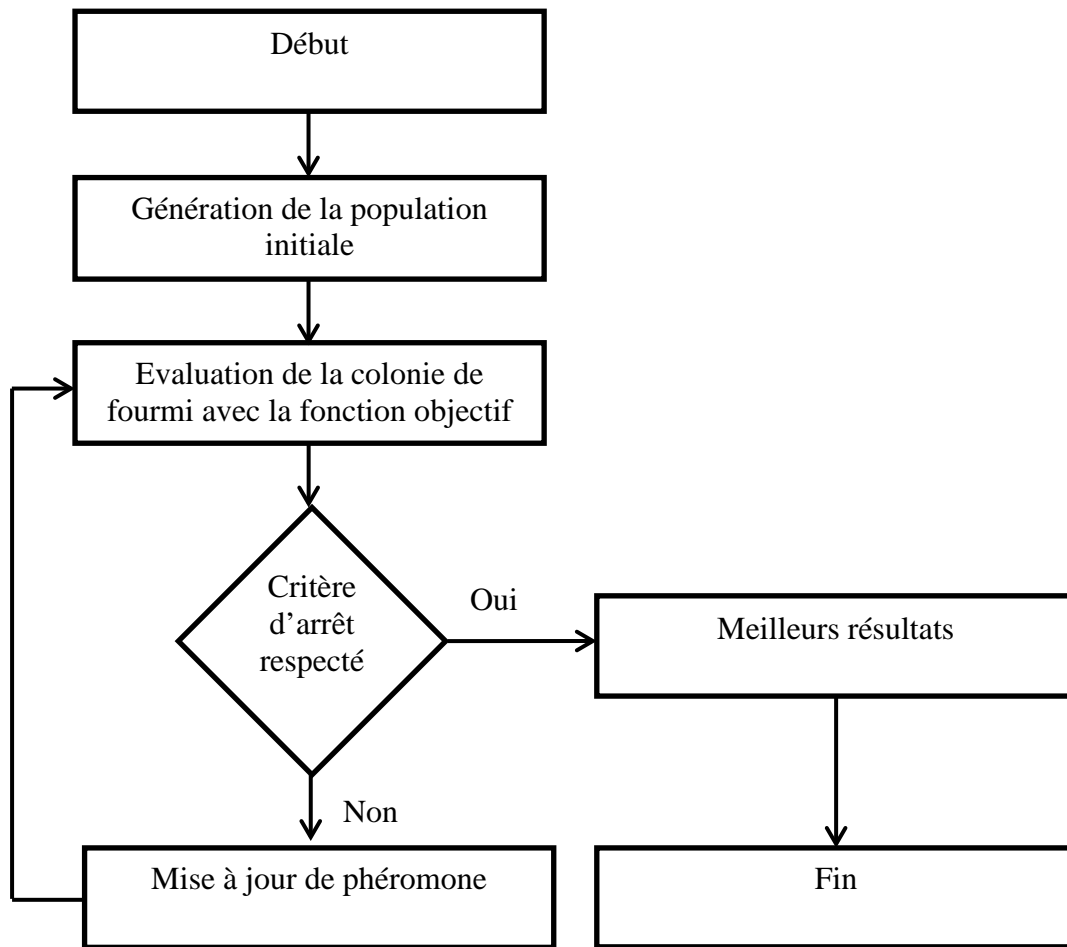


Figure III-5. Organigramme d'un algorithme à colonies de fourmis

#### III.4. Identification des paramètres viscoélastiques

L'identification des paramètres des modèles viscoélastiques à partir des données expérimentales présente une difficulté de grande importance. Différentes procédures appliquées ont été repérées dans la littérature [15, 17, 83-85, 103, 104]. Trois types de méthodes ont été présentés dans la référence [85] pour la détermination des paramètres des modèles rhéologiques de Maxwell et de Kelvin-Voigt à partir d'essais dynamiques. Le processus d'identification des paramètres est, selon cette référence, souvent un problème inverse. Dans la référence [103], les auteurs ont utilisé le principe de régression non linéaire multiplié pour évaluer les quatre paramètres du modèle de Burger. D'autres travaux tels que les références [15, 84, 104] se sont servis des algorithmes génétiques pour l'estimation des paramètres viscoélastiques.

Les essais de fluage et de relaxation sont bien placés pour la détermination des paramètres viscoélastiques des matériaux. En effet, sur le plan théorique, seul un essai d'entre eux suffit pour déterminer les paramètres viscoélastiques [105]. L'interprétation de ces essais ne s'avère simple que si le matériau se comporte de façon linéaire. Ainsi les fonctions de fluage et de relaxation s'expriment respectivement par les formules suivantes:

$$\varepsilon(t) = J(t)\sigma_0 \quad (\text{III-11})$$

$$\sigma(t) = D(t)\varepsilon_0 \quad (\text{III-12})$$

Le comportement viscoélastique linéaire peut être simulé suivant plusieurs modèles rhéologiques. Dans le cas uniaxial, on se rapporte à des combinaisons en parallèle et en série de ressorts et d'amortisseurs. Les modèles les plus simples et les plus communs sont ceux de Maxwell et de Kelvin-Voigt composés d'un ressort et d'un amortisseur respectivement en série et en parallèle. L'ajout d'un ou de plusieurs autres élément permet d'obtenir d'autres modèles beaucoup plus complexes. Ainsi en considérant une éprouvette soumise à un essai de traction simple en fluage et constituée d'un matériau de comportement viscoélastique suivant le modèle de kelvin-Voigt à élasticité instantanée, la relation contrainte déformation s'exprime par :

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \left( \frac{1}{E} + \frac{1}{K} (1 - \exp(-tK/\mu_{ve})) \right) \quad (\text{III-13})$$

Connaissant les valeurs de la contrainte  $\sigma_0$ , de la déformation  $\varepsilon$  et du temps  $t$ , on en obtient directement et aisément la valeur de la fonction du fluage. Cependant il n'est pas aussi simple de déterminer les paramètres élémentaires  $E$ ,  $K$ ,  $\mu_{ve}$ . Il est question alors de formuler un problème d'optimisation consistant en la minimisation d'une fonction qui établit l'écart entre les résultats expérimentaux et les résultats de la simulation. Cette fonction objectif s'exprime par :

$$Q_{ve}(E, K, \mu_{ve}, \varepsilon_c, \varepsilon_{ex}) = \sum_{i=1}^{nt} \sum_{j=1}^{nL} \left( \varepsilon_{ex}^{(i,j)} - \varepsilon_c^{(i,j)}(E, K, \mu_{ve}) \right)^2 \quad (\text{III-14})$$

Où  $nt$  et  $nL$  sont respectivement les nombre de pas de temps et le nombre de points de maillage ;  $\varepsilon_{ex}$  et  $\varepsilon_c$  respectivement les déformations expérimentales et simulées.

La minimisation de l'équation ci-dessus représente un problème d'optimisation qui peut être résolu par différentes méthodes d'optimisation dont certaines ont été présentées dans les sections précédentes. Le choix de la méthode à appliquer dépend de la fonction objectif.

### III.5. Identification des paramètres viscoplastiques

La caractérisation du comportement mécanique des matériaux au delà de leur limite élastique représente une phase indispensable à la simulation de la réponse des matériaux dans différentes applications telles que les procédés de mise en forme. Dans la littérature, de très nombreux auteurs ont mené des travaux sur ce sujet afin de proposer des méthodes fiables et efficaces pour caractériser le comportement élastoplastique des matériaux. On en cite à titre d'exemple les références [32, 82, 106-108] dans lesquelles les chercheurs se sont intéressés principalement à la détermination de la limite élastique et des paramètres d'écroutissage.

Il est bien évident que la réponse viscoplastique ne se manifeste que lorsque la contrainte est au-dessus du seuil de plasticité. Dans ce stage, les réponses viscoélastiques et viscoplastiques s'impliquent simultanément. Les paramètres viscoélastiques étant supposés connus, ils interviennent dans la procédure d'identification qui porte alors sur les paramètres viscoplastiques. Il s'agit de la contrainte seuil de plasticité d'une part et des paramètres d'écroutissage et de viscosité plastique d'autre part.

La limite élastique correspond à un seuil de contrainte à partir duquel le matériau commence à s'écouler comme un fluide. La détermination de cette limite élastique est une étape indispensable dans l'identification viscoélastique-viscoplastique. Théoriquement la limite élastique correspond à une déformation longitudinale évaluée à 0.2 % pour les métaux et les alliages. Or sur le plan pratique, elle est sensible à la température et à la vitesse de déformation [3, 5, 6, 32, 44, 109] pour différentes classes des matériaux, par-dessus tout les polymères. Elle peut ainsi être identifiée tout comme les autres paramètres viscoplastiques. En effet, ainsi qu'il est présenté sur la Figure III-6, le seuil de plasticité de deux polymères différents augmente avec l'augmentation de la vitesse de déformation et avec la diminution de la température.

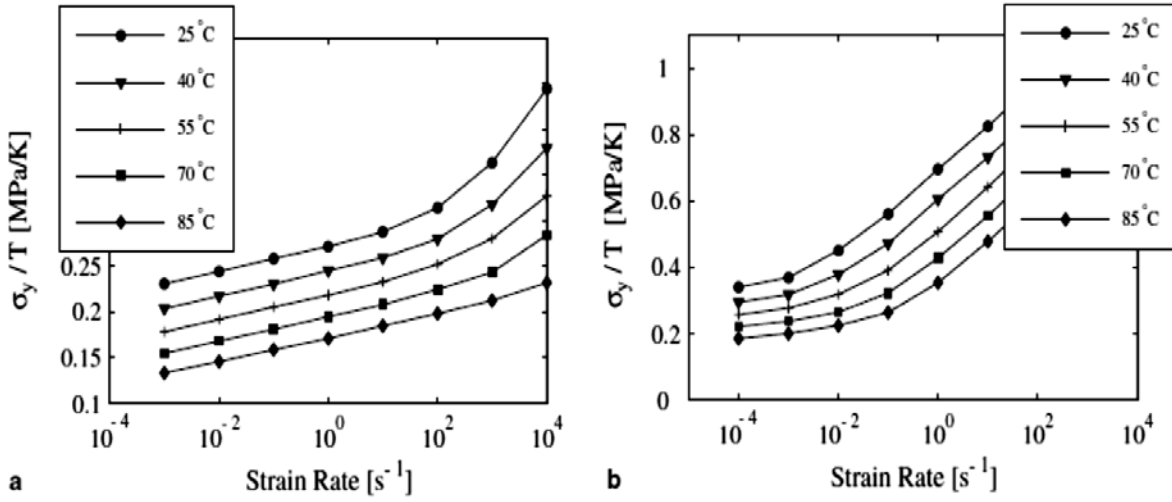


Figure III-6. Dépendance du seuil de plasticité à la température et la vitesse de déformation (a. polycarbonate, b. poly(methyl methacrylate)) [5]

Partant du principe de la décomposition de la déformation en une part viscoélastique et une part viscoplastique, un essai de fluage recouvrance est susceptible de nous fournir les éléments expérimentaux nécessaires pour l'identification des paramètres viscoplastiques du matériau.

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_{ve}(t) + \varepsilon_{vp}(t) \quad (\text{III-15})$$

La partie viscoélastique étant calculée à partir des paramètres viscoélastiques identifiés préalablement, on peut obtenir la valeur de la déformation viscoplastique par soustraction directe de la déformation totale. Ainsi en supposant que le matériau suit le modèle de Bingham généralisé, on peut relier la déformation viscoplastique à la contrainte selon la formule suivante :

$$\varepsilon_{vp}(t) = \frac{\sigma_0 - \sigma_e}{H} \left( 1 - \exp\left(-\frac{H}{\mu_{vp}}\right) \right) \quad (\text{III-16})$$

Les paramètres  $\sigma_e, H, \mu_{vp}$  représentent respectivement la contrainte seuil de plasticité, le module d'érouissage et la viscosité plastique. Leur détermination passe par la mise en place d'une fonction objectif qui les fait intervenir et qui établit l'écart entre les mesures expérimentales et les résultats de la simulation. La minimisation de cette fonctionnelle nous amène à formuler à nouveau un problème d'optimisation axé sur la déformation totale qui est la somme de la déformation viscoélastique et la déformation viscoplastique. Il s'exprime par :

$$Q_{vp}(\sigma_e, H, \mu_{vp}, \varepsilon_c, \varepsilon_{ex}) = \sum_{i=1}^{nt} \sum_{j=1}^{nL} \left( \varepsilon_{ex}^{(i,j)} - \varepsilon_c^{(i,j)}(\sigma_e, H, \mu_{vp}) \right)^2 \quad (\text{III-17})$$

Tel qu'il est procédé dans l'identification viscoélastique, une méthode d'optimisation convenable est choisie pour résoudre le problème ci-dessus.

### III.6. Identification des paramètres viscoélastiques-viscoplastiques d'une poutre en flexion

Les essais de flexion sont souvent adaptés pour l'identification des paramètres des lois de comportement des matériaux [107, 110]. La relation moment-courbure de flexion étant un outil essentiel pour la compréhension du comportement mécanique des éléments de structure en flexion [111], elle a fait l'objet de plusieurs approches d'identification des paramètres [110, 112-114]. D'autres auteurs se sont basés sur la relation force déplacement [115] qui se relie en effet à la relation moment courbure avec une équation différentielle.

#### III.6.1. Formulation mathématique

En considérant une poutre en flexion suivant le modèle rhéologique élasto-viscoplastique développé dans les références [36, 116]. La contrainte induite en flexion étant non uniforme, il est distingué deux domaines de comportements différents le long de la poutre. Un domaine viscoélastique et un domaine viscoélastique-viscoplastique. La relation moment courbure en fluage dans le domaine viscoélastique qui suit le modèle de Kelvin-Voigt à élasticité instantanée s'exprime par :

$$\chi = \frac{M}{E_{ve}I}; \quad E_{ve}(t) = EK / \left( K + E \left( 1 - e^{-\frac{Kt}{\mu_{ve}}} \right) \right) \quad (\text{III-18})$$

$M$ ,  $\chi$  et  $I$  étant respectivement le moment de flexion, la courbure de flexion et le moment d'inertie de la section de la poutre.  $E, K, \mu_{ve}$  sont les paramètres du modèle et  $t$  représente le temps.

Connaissant les valeurs du moment de flexion, de la courbure de flexion et la géométrie de la section, on peut aisément déterminer la fonction du temps  $E_{ve}$ . Cependant l'identification des paramètres élémentaires  $E, K, \mu_{ve}$  exige une analyse inverse. Pour ce faire, il est mis en place une fonction objectif à minimiser. Celle-ci établit l'écart entre les données expérimentales et celles de la simulation.

$$Q_{ve}(E, K, \mu_{ve}, \chi_c, \chi_{ex}) = \sum_{i=1}^{nt} \sum_{j=1}^{nL} \left( \chi_{ex}^{(i,j)} - \chi_c^{(i,j)}(E, K, \mu_{ve}) \right)^2 \quad (\text{III-19})$$

Où  $nt$  et  $nL$  sont respectivement les nombre de pas de temps et le nombre de points de maillage ;  $\chi_{ex}$  et  $\chi_c$  respectivement les courbures expérimentales et simulées.

Le moment de flexion seuil de plasticité étant dépassé, il est apparu, en plus d'un comportement viscoélastique, un comportement viscoplastique au sein de la même section. Ce moment de flexion critique correspond à la plastification de la première fibre de la section de la poutre de  $2h$  de hauteur. A ce moment seuil correspond une courbure que nous appellerons courbure seuil. Ces derniers sont calculés à partir de la contrainte seuil de plasticité  $\sigma_e$  selon les formules suivantes :

$$M_e = \frac{\sigma_e I}{h} \quad (\text{III-20})$$

$$\chi_e = \frac{M_e}{E_{ve} I} \quad (\text{III-21})$$

Les paramètres viscoplastiques sont respectivement représentés par le moment seuil de plasticité, les paramètres de viscosité plastique et d'érouissage  $(M_e, \mu_{vp}, H)$ . Ils s'impliquent dans la loi de comportement représenté par le mécanisme généralisé de Bingham. Reprenant la formulation mathématique du modèle élasto-viscoplastique développée dans les références [36, 116], on peut exprimer le taux de courbure totale dans le domaine viscoélastique viscoplastique par la formule suivante:

$$\begin{cases} \dot{\chi}(x, t) = E_{ve} \chi_e(t) \frac{\left( \frac{1}{r(t)} \frac{H}{E_{ve}(t)} \frac{3}{2} \right) \left( \frac{\chi_e(t)}{\chi(x, t)} \right)^2 + \frac{H}{E_{ve}(t)} \left( \frac{\chi(x, t)}{\chi_e(t)} \right) - \frac{M_e \chi(x)}{M_e r(t)} + \frac{3}{2}}{\mu_{vp} \left( \left( \frac{\chi_e(t)}{\chi(x, t)} \right)^3 - 1 \right)} \\ r(t) = \left( 1 + H \left( \frac{E+K}{EK} \left( 1 - \exp \left( -\frac{Kt}{\mu_{ve}} \right) \right) \right) + \left( \frac{\mu_{vp}}{\mu_{ve}} \exp \left( -\frac{Kt}{\mu_{ve}} \right) \right) \right)^{-1} \end{cases} \quad (\text{III-22})$$

Dans le domaine viscoélastique viscoplastique, la relation moment courbure s'avère très compliquée de manière à ce qu'elle s'exprime par une équation différentielle. La dérivée temporelle de la courbure  $y$  intervient et sur laquelle s'établit la fonction objectif qui se formule comme suit :

$$Q_{vp}(M_e, \mu_{vp}, H, \dot{\chi}_c, \dot{\chi}_{ex}) = \sum_{i=1}^{nt} \sum_{j=1}^{nL} \left( \dot{\chi}_{ex}^{(i,j)} - \dot{\chi}_c^{(i,j)}(M_e, \mu_{vp}, H) \right)^2 \quad (\text{III-23})$$

Où  $nt$  et  $nL$  sont respectivement les nombre de pas de temps et le nombre de points de maillage ;  $\dot{\chi}_{ex}$  et  $\dot{\chi}_c$  respectivement les dérivées temporelles des courbures expérimentales et simulées.

### III.6.2. Application numérique

Nous nous proposons l'étude d'une poutre de comportement viscoélastique viscoplastique en flexion trois points (Figure III-7). La poutre simplement appuyé est soumise à une charge constante et concentrée à distance égales de ces deux extrémités. Elle est supposée constituée d'un matériau qui se comporte selon le modèle rhéologique élasto-viscoplastique proposé dans les références [116]. Le moment seuil étant calculé à partir de la contrainte seuil et de la géométrie de la poutre, les domaines viscoélastiques et viscoélastiques viscoplastiques sont délimités. Les paramètres viscoélastiques et viscoplastiques utilisés dans les références [14, 36, 116] sont considérés comme réels. Le but étant de tester la pertinence de l'algorithme génétique pour l'identification viscoélastique et viscoplastique en flexion.

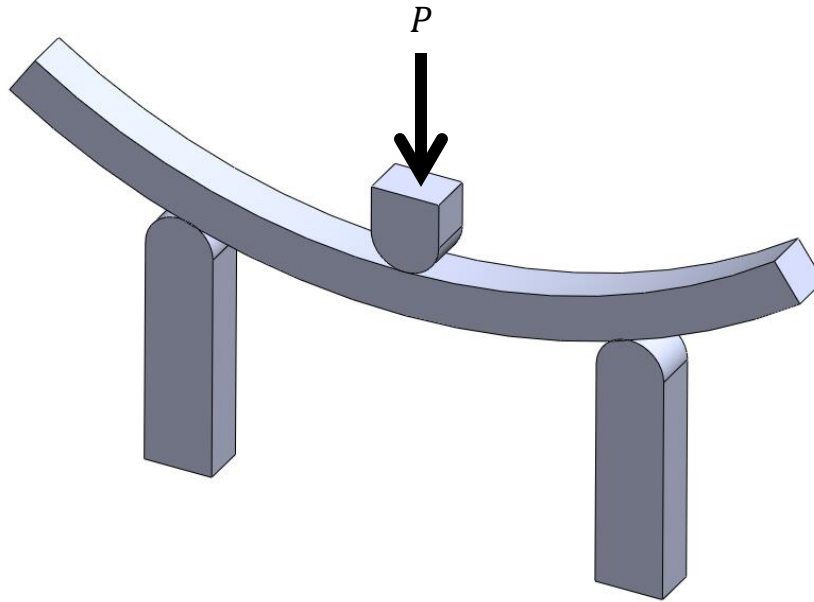


Figure III-7. Poutre en flexion trois points



### III.6.2.1. Choix de la méthode d'optimisation

Dans le domaine viscoélastique, la fonction objectif est tellement simple que plusieurs méthodes d'optimisation s'offrent pour la résoudre. Cependant dans le domaine viscoplastique, il n'est pas aussi facile de minimiser la fonction objectif par les méthodes classiques. En effet la relation moment courbure est une équation différentielle non linéaire. De ce fait il est très compliqué de déterminer son gradient. Un recours aux méthodes métaheuristiques s'avère alors favorable et justifié. Nous privilégions la technique des algorithmes génétiques que, dans un souci de cohérence, nous appliquons aussi bien dans le domaine viscoélastique que dans le domaine viscoélastique-viscoplastique.

### III.6.2.2. Domaine viscoélastique

Le Tableau III-1 et la Figure III-8 représentent une comparaison entre les paramètres viscoélastiques réels et identifiés. Suite à l'exécution du programme de calcul fondé sur l'optimisation par la technique des algorithmes génétiques sous le logiciel Matlab, la fonction objectif étant minimisée à l'échelle de  $4.45 \text{ e-}06$ , l'estimation des paramètres viscoélastiques s'avère d'une très bonne cohérence. Le module d'élasticité  $E$  et les paramètres viscoélastiques  $K$  et  $\mu_{ve}$  sont identifiés sont très proches des valeurs réelles.

Tableau III-1. Comparaison des paramètres viscoélastiques réels et identifiés

Paramètres	Paramètres réels	Paramètres identifiés
$E$	6200 e6	6240.35 e6
$K$	40000 e6	39666.15 e6
$\mu_{ve}$	52834 e6	52822.55 e6

En injectant les paramètres réels et identifiés dans le programme de la simulation de la courbure, on obtient les courbes de la Figure III-9. A deux points différents de la poutre correspondant à la section la plus sollicitée et celle située à la distance  $L/4$ , on y observe une faible diminution de la courbure calculée avec les paramètres identifiés en la comparant à la courbure réelle.

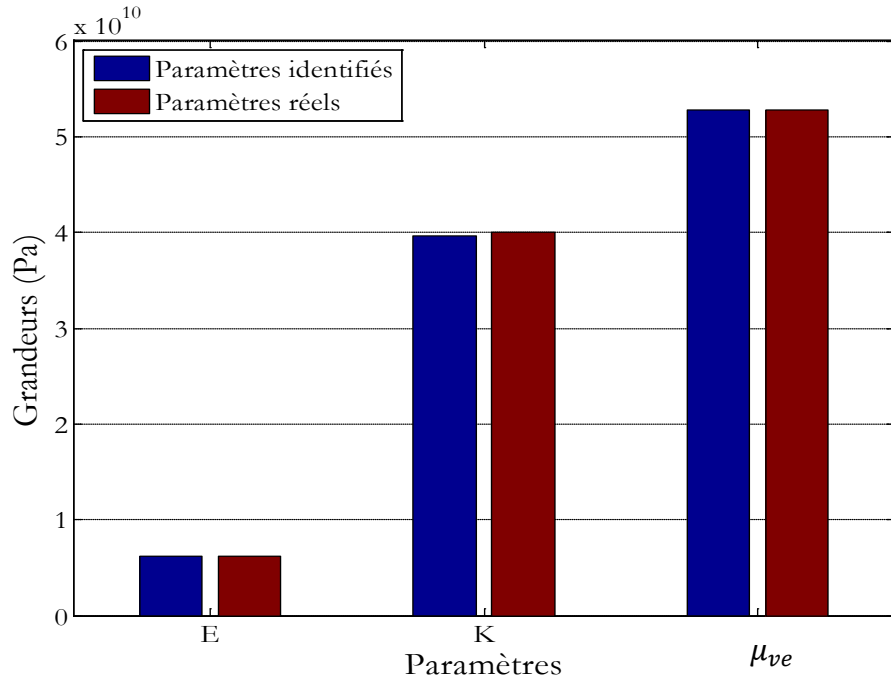


Figure III-8. Comparaison des paramètres réels et identifiés

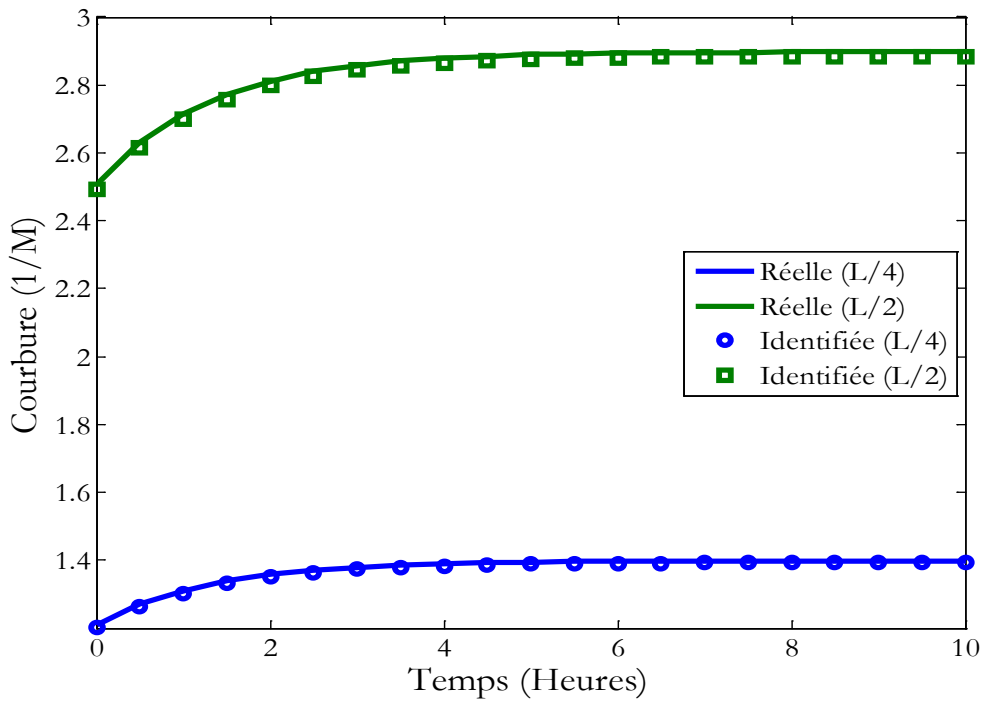


Figure III-9. Comparaison des courbures viscoélastiques réelle et identifiée

### III.6.2.3. Domaine viscoélastique viscoplastique

Connaissant les paramètres viscoélastiques, précédemment identifiés par la minimisation, nous procédons de la même manière pour estimer les paramètres viscoplastiques, y compris la contrainte seuil, L'emploi des algorithmes génétiques est plus fortement justifié en viscoplasticité qu'en viscoélasticité. En effet l'équation différentielle de la courbure est tellement compliquée que la détermination de son gradient revient très difficile. Les méthodes probabilistes, n'ayant besoin d'aucune autre information que la fonction objectif, s'avèrent donc un outil de choix pour résoudre ce genre de problèmes. En outre, pour assurer une cohérence avec les résultats de l'identification viscoélastique, les algorithmes génétiques sont bien placés pour l'identification viscoplastique.

L'exécution du programme de calcul a donné les résultats de l'identification des paramètres viscoplastiques présentés dans le Tableau III-2 et la Figure III-10. On y observe une contrainte seuil  $\sigma_e$  identifiée quasiment égale à la contrainte seuil réelle. Il est à souligner que le paramètre identifié est le moment seuil à partir duquel la contrainte seuil est calculée. Quant aux deux autres paramètres viscoplastiques identifiés, une augmentation du module d'écrouissage  $H$  est récompensée par la diminution du paramètre de la viscosité plastique  $\mu_{vp}$ .

Tableau III-2. Comparaison des paramètres viscoplastiques

Paramètres	Paramètres réels	Paramètres identifiés
$\sigma_e$	13.10 e6	13.09 e6
$H$	2000 e6	2299.79 e6
$\mu_{vp}$	40510 e6	39324.81 e6

Tel qu'il est présenté sur la Figure III-11, la courbure réelle et celle obtenue avec les paramètres identifiés sont comparées. Il s'agit de la courbure viscoélastique viscoplastique induite dans la section la plus sollicitée. Aux premiers temps, la courbure identifiée est si faiblement supérieure à la courbure réelle alors qu'elle devient inférieure à des temps ultérieurs. Cependant l'écart reste insignifiant dans les deux cas.

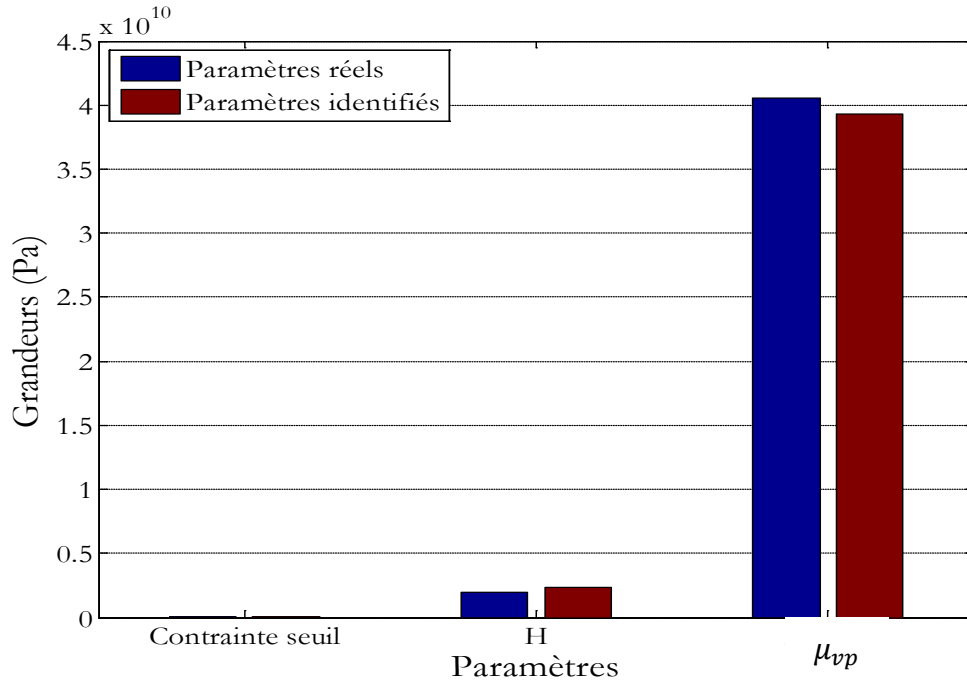


Figure III-10. Comparaison des paramètres viscoplastiques réelles et identifiés

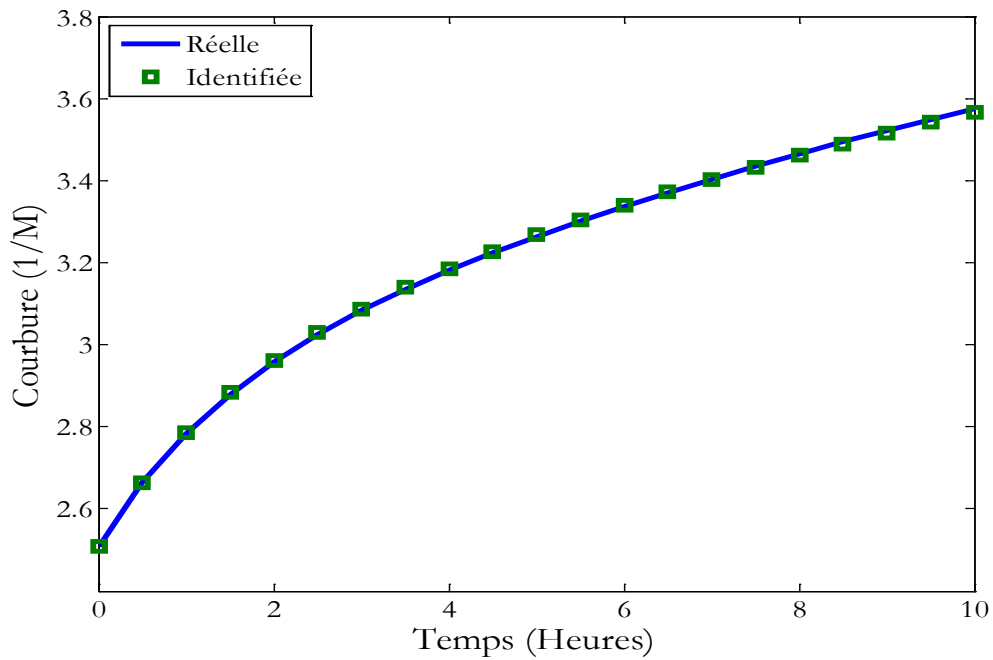


Figure III-11. Comparaison des courbures viscoplastiques réelles et identifiées

### **III.7. Bilan du chapitre**

Le chapitre étant achevé, il est lieu de synthétiser son contenu. L'identification des paramètres rhéologiques des matériaux en a fait le principal objet. Partant de son importance pour la compréhension du comportement des matériaux, différentes méthodes d'identification sont présentées. L'accent est mis ensuite sur l'identification par analyse inverse étant la plus employée. Celle-ci implique la formulation d'un problème d'optimisation traduit par une fonction objectif à minimiser. Cette fonctionnelle établit l'écart entre les résultats expérimentaux et ceux de la simulation. De ce fait, différentes techniques d'optimisation ont été élucidées tout en en jetant plus de lumière sur les méthodes métaheuristiques qui ont connu, ces dernières années, une vaste application et un grand succès dans des domaines très variés. Le comportement pris en compte étant sensible à la vitesse de déformation, un intérêt majeur a été alloué à l'identification viscoélastique viscoplastique. Le chapitre est clôturé par une application numérique pour l'identification viscoélastique viscoplastique des paramètres du comportement rhéologique d'une poutre en flexion. L'identification par analyse inverse à été favorisée. La technique d'optimisation par algorithmes génétiques a été privilégiée pour la résolution du problème. Les résultats, ayant révélé une bonne cohérence, sont présentés et discutés.

## **Chapitre IV : Modélisation rhéologique et expérimentation**

### **IV.1. Introduction**

Le présent chapitre s'intéresse à la modélisation et l'expérimentation du matériau de la matrice objet d'étude. Après un aperçu sur les matériaux composites, la lumière est jetée sur les thermoplastiques semi cristallins. Le matériau de la matrice objet d'étude, un polyamide 6 en l'occurrence, est d'abord exposée et ses propriétés présentées. Le modèle analogique global régnant son comportement rhéologique est ensuite proposé. Puis la formulation mathématique des équations du comportement est mise en place. La matrice en question étant renforcée de manière à former un composite, les techniques d'homogénéisation, permettant le passage d'un matériau hétérogène à un matériau homogène sont élucidées. Enfin intervient l'étude expérimentale : des essais de traction à différentes vitesses de déformation et de flexion en fluage sont réalisés à cet effet.

### **IV.2. Généralités sur les composites**

Un matériau composite peut être défini, de manière générale, comme l'assemblage de plusieurs matériaux. Le matériau produit a des propriétés supérieures à celles de chacun des matériaux qui le composent. Le plus souvent, les matériaux composites sont des arrangements d'une matrice et des renforts (Figure IV-1). La nature et la géométrie des renforts varient selon le type de propriétés mécaniques recherchées. Ainsi, on prévoit à titre d'exemple des renforts en carbone ou en verre tandis que leur géométrie peut être en forme de particules, de fibres courts ou continus, des plaquettes, ... etc.

#### **IV.2.1. Les matrices**

La matrice conserve la disposition géométrique des renforts et leur transmet la charge à laquelle elle est soumise. Les composites à matrice polymère sont largement utilisées dans divers domaines dont le génie civil, l'aéronautique et l'automobile [37]. En effet, leurs propriétés

mécaniques exceptionnelles lui permettent de répondre aux besoins des secteurs suscités. Il est souvent utilisé des polymères thermodurcissables ou des thermoplastiques.

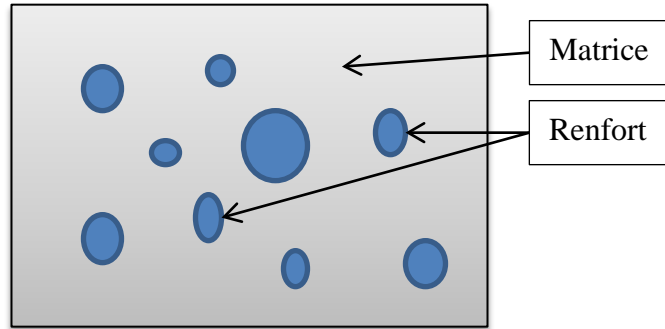


Figure IV-1. Représentation d'un matériau composite

#### IV.2.2. Les renforts

Les renforts les plus utilisés sont des fibres ou des particules. La taille et la géométrie de ces charges influencent considérablement sur les propriétés mécaniques des composites. On en cite à titre d'exemple les fibres de verre, les fibres de carbone et les fibres d'aramide. Les fibres de verre sont largement utilisées en raison de leurs divers avantages. Elles se distinguent par une bonne résistance à la température et à la corrosion tout en étant légères. Le renforcement des thermoplastiques par des fibres de verre courtes contribue fortement à une diminution de la déformation à la rupture quel que soit le taux de fibres. En revanche, l'augmentation du taux de renforts conduit à une augmentation de la résistance du composite.

#### IV.3. Généralités sur les polymères thermoplastiques

Les thermoplastiques et plus particulièrement les polymères semi-cristallins ont été de plus en plus appliqués dans l'industrie en raison de leur possibilité de répondre aux exigences mécaniques, électriques et environnementales nécessaires pour les applications structurelles allant de l'automobile et l'aéronautique aux secteurs médicaux [1, 2]. Ils présentent de nombreuses caractéristiques leur permettant d'être privilégiés dont la facilité de mise en forme, la durabilité, le recyclage, un coût et un poids relativement bas [7, 117]. Tel que leur appellation indique, ces matériaux sont partiellement cristallins tandis que l'autre part est de structure

amorphe. La cristallinité acquiert au matériau sa rigidité alors que la phase amorphe, constituée de chaînes enchevêtrées, accomplit sa souplesse et sa déformabilité.

### IV.3.1. Bibliographie sur les polyamides

Les polyamides ont fait l'objet de plusieurs travaux dans la littérature. On en cite à titre illustratif les références [1, 6, 7, 18]. Etant des polymères semi-cristallins, ils renferment deux phases dont l'une est cristalline tandis que l'autre est amorphe. Ces matériaux montrent généralement un comportement viscoélastique viscoplastique. Selon les travaux de thèse de la référence [18], le comportement d'un polyamide 6-6 est représenté par le modèle élasto-viscoplastique en loi puissance de Norton. Les équations gouvernant ce comportement s'expriment en situation unidimensionnelle par :

$$\sigma = \sigma_e + K(\varepsilon_{vp})^n + \sigma_e \left( \frac{\mu_{vp} \dot{\varepsilon}_{vp}}{\sigma_e} \right)^{1/m} \quad (\text{IV-1})$$

$$\varepsilon_{vp} = \varepsilon - \frac{\sigma}{E} \quad (\text{IV-2})$$

Où  $E$  est le module de Young,  $\sigma_e$  est le seuil d'écoulement plastique,  $K$  et  $n$  sont des paramètres d'écrouissage et  $\mu_{vp}$  et  $m$  sont des paramètres viscoplastiques.

Les paramètres d'un polymère polyamide identifiés à partir de la minimisation d'une fonction objectif établissant l'écart entre les résultats expérimentaux et les résultats simulés en traction uni-axiale sont donnés dans le Tableau IV-1.

Tableau IV-1. Paramètres élastoviscoplastique d'un polyamide à 40°C [18]

$E$ (MPa)	$K$ (MPa)	$\sigma_e$ (MPa)	$\mu_{vp}$ (MPa.s)	$n$	$m$
3000	79	40	305	0.15	4.02

Dans la référence [7], les auteurs ont proposé un modèle thermomécanique élastique viscoélastique viscoplastique pour prédire le comportement d'un polymère semi cristallin, un nylon 6 en l'occurrence. La sensibilité des paramètres du modèle à la température et à la vitesse de déformation y a été étudiée. Le modèle analogique proposé est constitué de deux éléments montés en série dont l'un représente la réponse viscoélastique et est constitué d'un ressort monté en parallèle avec un mécanisme ressort amortisseur viscoélastique ; et l'autre décrit la réponse



viscoplastique et se compose d'un patin et un amortisseur viscoplastique. Il a été conclu que les paramètres des matériaux diffèrent en traction et en compression. Les paramètres élastiques, viscoélastiques et la contrainte seuil dépendent de la température tandis que les paramètres viscoélastiques dépendent également de la vitesse de déformation.

La dépendance du comportement mécanique du polyamide 12 à la température et à la vitesse de déformation a été étudiée dans l'article [6]. Les essais ont été menés dans un intervalle de température allant de  $-25^{\circ}C$  à  $50^{\circ}C$  et dans une plage de vitesses de déformation entre  $0.00028 s^{-1}$  et  $9.4 s^{-1}$ . Une forte dépendance a été observée. Le module de Young et le seuil de plasticité diminuent considérablement avec l'augmentation de la température. Par ailleurs, ces paramètres augmentent faiblement avec l'augmentation de la vitesse de déformation.

Sur un autre plan, l'effet de la présence de l'eau dans le polyamide 6 a été étudié dans les travaux de la référence [118]. Pour ce faire, des essais en traction ont été menés avec différentes teneur en eau. Les profils d'eau sont introduits par immersion dans l'eau de mer à  $25^{\circ}C$ . Il en résulte que l'eau entraîne une augmentation de la mobilité des chaînes macromoléculaire et modifie ainsi le comportement mécanique du polymère.

Enfin, différents modèles de comportement ont été adaptés pour simuler le comportement des polymères semi-cristallins. Ces modèles prennent généralement en considération l'élasticité, la viscoélasticité et la viscoplasticité [7]. On distingue une élasticité et une viscoélasticité linéaires en petites déformations, une viscoélasticité non linéaire en déformations modérées et une viscoplasticité en grandes déformations [18]. Le comportement de ces polymères est sensible aux paramètres extérieurs (tels que la température, la vitesse de déformation, et la tri-axialité). En outre, le fluage et la relaxation significative peuvent être observés même à la température ambiante. Le comportement des matériaux polymères peut changer de fragile au viscoplastique selon les conditions de charge et la température. Leur comportement peut être expliqué physiquement en termes de leurs microstructures. Les polymères peuvent être soit amorphe ou ayant une structure semi-cristalline. Le degré de cristallinité et la taille et la répartition des cristallites dans un polymère semi-cristallin possèdent un effet important sur les propriétés mécaniques de ces matériaux [2]. En fait, jusqu'à présent, la thermomécanique viscoélastique /

viscoplastique des polymères n'est toujours pas bien comprise et modélisée [1]. Par conséquent, la modélisation de leur comportement offre encore un terrain fertile à la recherche scientifique.

#### IV.4. Modélisation rhéologique viscoélastique viscoplastique

Il existe plusieurs théories pour modéliser le comportement mécanique des matériaux soumis aux sollicitations externes. Deux grandes catégories de modèles sont souvent appliquées : les modèles micromécaniques et les modèles phénoménologiques. Les modèles micromécaniques prédisent la réponse du matériau en simulant des interactions au niveau moléculaire tandis que les théories phénoménologiques reposent sur des observations macroscopiques de volumes représentatifs de la matière. L'un des types les plus courants de théories phénoménologiques implique l'utilisation des modèles rhéologiques [117]. Ces derniers présentent des outils efficaces pour la représentation de comportements des matériaux. Ils se conçoivent par la combinaison de certains mécanismes dont le ressort, l'amortisseur et le patin.

##### IV.4.1. Modèle rhéologique proposé

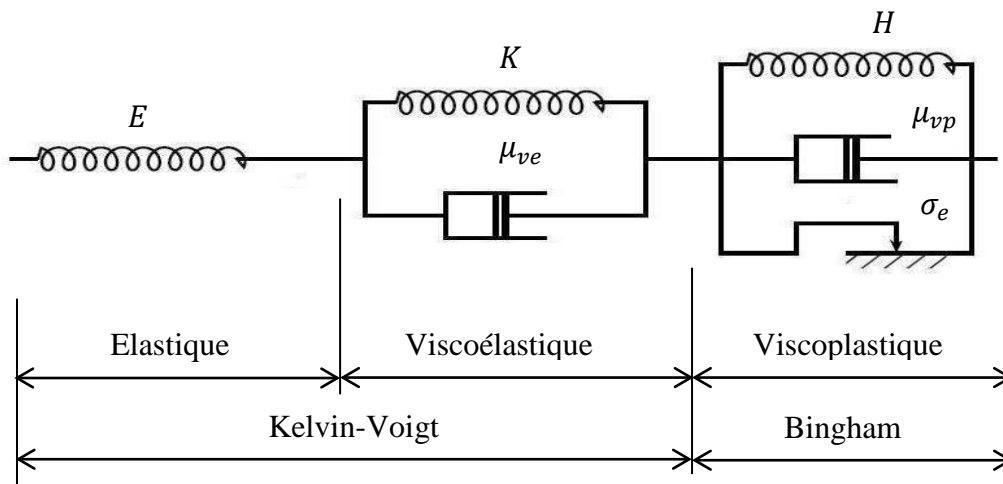


Figure IV-2. Modèle rhéologique élasto-viscoplastique

Le modèle rhéologique proposé dans ce travail de thèse est un montage en série de deux mécanismes dont l'un, représentant le comportement viscoélastique (Figure IV-2), est défini par le modèle de Kelvin-Voigt à élasticité instantanée, composé d'un ressort représentant l'élasticité instantanée monté en série avec une combinaison en parallèle d'un autre ressort et d'un autre

amortisseur reproduisant ainsi une élasticité différée (ou une viscoélasticité). Ce modèle est souvent adopté pour décrire le comportement viscoélastique des polymères [119, 120]. L'autre mécanisme, qui n'est activé que lorsque le chargement dépasse une valeur critique connue par le seuil de plasticité, représente le comportement viscoplastique décrit par le modèle généralisé de Bingham. Il est défini par l'association en parallèle d'un patin indiquant le seuil de plasticité, d'un ressort représentant l'érouissage du matériau et d'un amortisseur simulant la déformation plastique différée (ou viscoplastique). Le modèle de Bingham est appliqué pour décrire le comportement viscoplastique du bois [9, 14] et des polymères [121]. Le modèle a été appliqué avec succès pour modéliser le comportement des polymères dans les travaux de la référence [36]. De par ses composantes, ce modèle est extensible et par conséquent susceptible de simuler une grande variété de matériaux, en faisant varier les valeurs des paramètres des différents éléments constituant le modèle ou en supprimant certains des ces éléments. On peut également prévoir des fonctions non linéaires de ses paramètres en fonction des sollicitations.

#### IV.4.2. Formulation mathématique des équations de comportement

De par ces trois composantes, le modèle analogique proposé représente une réponse composée d'une part élastique instantanée, une part viscoélastique et une autre viscoplastique. Le mécanisme viscoplastique n'est opérationnel que lorsque le patin est activé, autrement dit lorsqu'un seuil de contrainte est atteint. Ceci se traduit sur le plan mathématique par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_{ve} & \sigma \leq \sigma_e \\ \varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_{ve} + \varepsilon_{vp} & \sigma > \sigma_e \end{cases} \quad (IV-3)$$

$$\begin{cases} \sigma = E\varepsilon_e = K\varepsilon_{ve} + \mu_{ve}\dot{\varepsilon}_{ve} & \sigma \leq \sigma_e \\ \sigma = \sigma_e + H\varepsilon_{vp} + \mu_{vp}\dot{\varepsilon}_{vp} & \sigma > \sigma_e \end{cases} \quad (IV-4)$$

Avec  $\varepsilon, \varepsilon_e, \varepsilon_{ve}, \varepsilon_{vp}$  sont respectivement la déformation totale, la déformation élastique instantanée, la déformation viscoélastique et la déformation viscoplastique.  $\dot{\varepsilon}_{ve}$  et  $\dot{\varepsilon}_{vp}$  étant respectivement les vitesses des déformations viscoélastique et viscoplastique.  $\sigma$  et  $\sigma_e$  représentent la contrainte et la contrainte correspondant au seuil de plasticité.  $E, K, \mu_{ve}$  sont des paramètres viscoélastiques et  $H, \mu_{vp}$  des paramètres viscoplastiques.

## IV.5. Techniques d'homogénéisation

Les techniques d'homogénéisation permettent de modéliser le comportement mécanique d'un matériau hétérogène. Il s'agit de prévoir un matériau homogène équivalent à partir des propriétés des différentes phases qui le composent. Ces techniques s'appliquent sur un volume élémentaire représentatif sur lequel est déterminé le comportement du matériau homogène équivalent.

La démarche d'une technique d'homogénéisation repose en trois étapes. D'abord, la description du matériau hétérogène à l'échelle microscopique. Ensuite, la détermination des liens des réponses mécaniques entre les deux échelles microscopiques et macroscopiques. Enfin, l'identification du comportement macroscopique du matériau.

### IV.5.1. Homogénéisation en élasticité linéaire

Nous nous limitons dans le cadre des modèles analytiques proposés dans la plupart des travaux sur les matériaux composites à matrice renforcée. Ces modèles supposent que l'adhésion entre la matrice et les fibres est parfaite de telle manière que les lois de l'élasticité peuvent être appliquées. Dans un volume élémentaire représentatif, les constituants du matériau hétérogène sont désignés comme des phases. Ainsi dans un composite à deux phases, soient une matrice et des fibres désignés respectivement par les indices «  $m$  » et «  $f$  », la fraction volumique  $v$  de chaque phase vérifie l'équation.

$$v_m + v_f = 1 \quad (\text{IV-5})$$

Le modèle de Voigt, connu aussi par la loi des mélanges fait l'hypothèse de la déformation constante. Le comportement effectif du composite est alors donné par :

$$E_c = v_m E_m + v_f E_f \quad (\text{IV-6})$$

$$\sigma_c = v_m \sigma_m + v_f \sigma_f \quad (\text{IV-7})$$

Où  $E$  et  $\sigma$  représentent respectivement le module de Young et la contrainte tandis que les indices  $m, f$  et  $c$  désignent respectivement la matrice, les fibres et le composite.

Le modèle de Reuss qui fait, contrairement au modèle de Voigt, l'hypothèse de la contrainte constante permet d'exprimer le comportement effectif du composite par :

$$E_c = \frac{E_m E_f}{v_f E_m + v_m E_f} \quad (\text{IV-8})$$

$$\sigma_c = \frac{\sigma_m \sigma_f}{v_f \sigma_m + v_m \sigma_f} \quad (\text{IV-9})$$

#### IV.5.2. Homogénéisation en viscoélasticité.

La technique d'homogénéisation des composites en élasticité linéaire peut être étendue afin de modéliser le comportement viscoélastique d'une matrice de comportement viscoélastique renforcée par des fibres élastiques [122]. En effet, le comportement viscoélastique linéaire s'exprime par la relation :

$$\sigma(t) = \int_0^t D(t-\tau) \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (\text{IV-10})$$

En appliquant le théorème de la dérivée de la transformée de Laplace ainsi qu'il est élucidé dans le chapitre I, on obtient la relation:

$$\mathcal{L}\sigma(t) = s\mathcal{L}(D(t))\mathcal{L}(\varepsilon(t)) \quad (\text{IV-11})$$

$\mathcal{L}\sigma$ ,  $\mathcal{L}(D(t))$ ,  $\mathcal{L}(\varepsilon(t))$  représentent respectivement la contrainte  $\sigma$ , la fonction de relaxation  $D$  et la déformation  $\varepsilon$  dans l'espace de Laplace.

La linéarité de la relation contrainte déformation permet d'utiliser les équations développées dans le domaine élastique linéaire. Or la solution dans l'espace temporel est obtenue par l'inversion de celle obtenue dans le domaine de Laplace.

On se reporte aux références [123-125] pour plus de détails sur les techniques d'homogénéisation.

## IV.6. Expérimentation

Afin de mettre en évidence le comportement rhéologique propre au matériau face aux sollicitations mécaniques, il est nécessaire de réaliser des essais mécaniques. Des mesures de contraintes et de déformations sont enregistrées. Ces mesures permettent de repérer les grandes lignes du comportement rhéologique du polymère et servent de références pour l'identification des paramètres de la loi qui gère le comportement du matériau.

### IV.6.1. Matériau de la matrice objet d'étude

Le matériau de la matrice considéré dans cette étude est un thermoplastique technique semi cristallin. C'est précisément un polyamide 6 de marque commerciale TECAMID 6 fourni sous formes de feuilles de 07 mm d'épaisseur (Figure IV-3).



Figure IV-3. Matériau objet d'étude (polyamide 6)

Les éprouvettes sont testées à une température de 300 K et une humidité de 20%. Les propriétés physiques du polyamide 6 sont présentées dans le Tableau IV-2.

Tableau IV-2. Propriétés physiques du polyamide 6

Capacité thermique massique ( $J/K \cdot kg$ )	Masse volumique ( $g/cm^3$ )	Température de fusion ( $^{\circ}C$ )	Adsorption d'eau (%)
1670	1.14	220	8.5

### IV.6.2. Machine d'essai

Les essais de traction à vitesse de déformation constante et de flexion en fluage sont conduits à l'aide d'une machine bi-colonnes de marque Instron 5969 de capacité de 50 *KN* (Figure IV-4), munie d'un système de contrôle et d'acquisition Bleuhill 3. La machine est équipée d'un extensomètre vidéo sans contact. A la différence des extensomètres traditionnels, l'extensomètre vidéo offre l'avantage d'effectuer une mesure directe. Il permet aussi une mesure sans aucune influence sur l'éprouvette ni glissement des arrêtes de couteau.



Figure IV-4. Machine d'essai INSTRON 5969

### IV.6.3. Techniques de mesure

La méthode de mesure utilisée dans ce travail est basée sur le principe des déformations vidéo-contrôlées. Nous avons opté pour un mode de marquage de 4 tâches tel qu'il est montré sur la Figure IV-5. Lorsque l'échantillon s'allonge sous l'effet d'une sollicitation en traction, les tâches

disposées dans le sens de la longueur s'éloignent tandis que celles disposées en largeur se rapprochent. Le dispositif de mesure vidéo-métrique consiste en une caméra reliée à un ordinateur et consacrée au suivi, au cours de la déformation, de l'évolution des tâches disposées préalablement à la surface de l'éprouvette. Un logiciel informatique dont est équipé l'ordinateur permet de traiter les images reçues en temps réel et d'en calculer les déformations correspondantes.

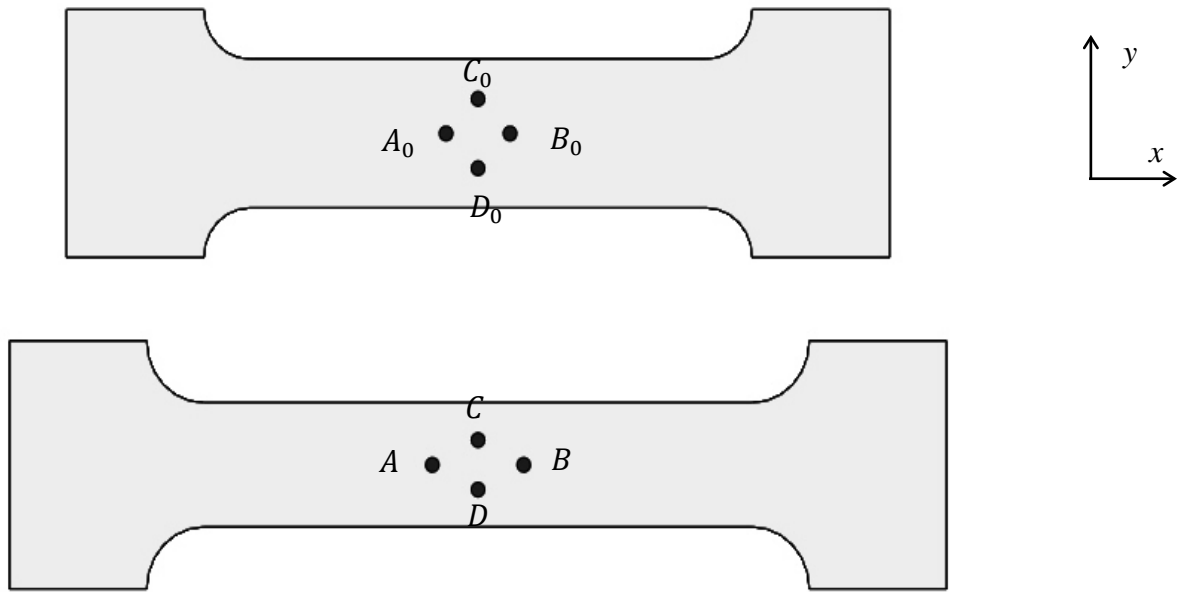


Figure IV-5. Evolution du marquage à quatre tâches au cours de la déformation.

Le but de la méthode est de déterminer la déformation longitudinale  $\varepsilon_x$  et la déformation transversale  $\varepsilon_y$  dans un élément de volume représentatif approprié du matériau où les contraintes et les déformations devraient être quasi uniformes. Ces déformations peuvent être calculées à partir du déplacement de chaque tâche. La différence des positions des tâches entre les différentes configurations permet de déterminer le mouvement et la déformation de l'échantillon. Les résultats peuvent être obtenus en temps réel au cours de l'essai ou après l'acquisition et le traitement des images. Les déformations vraies sont obtenues à partir des équations suivantes :

$$\varepsilon_x = \ln \frac{AB}{A_0B_0} \quad (\text{IV-12})$$

$$\varepsilon_y = \ln \frac{CD}{C_0D_0} \quad (\text{IV-13})$$



En supposant que le matériau est isotrope, la déformation transversale  $\varepsilon_z$  selon l'axe  $z$ , perpendiculaire au plan  $(xy)$ , est considérée identique à la déformation  $\varepsilon_y$ . La contrainte associée à la déformation vraie, dite aussi contrainte vraie, prend en compte la réduction de la section au cours de l'essai de traction. Elle se formule alors comme suit :

$$\sigma = \frac{F}{S} \exp(-\varepsilon_y - \varepsilon_z) \quad (\text{IV-14})$$

Où  $F$  et  $S$  renvoient respectivement à la force appliquée et la section initiale de l'échantillon. Celle-ci se réduit au cours de la déformation.

#### IV.6.4. Protocole expérimental en traction

L'essai de traction uni-axiale est un essai simple à mettre en œuvre. Il permet en revanche d'établir des lois de comportement aussi fiables. Afin de mettre en évidence la réponse du matériau et sa dépendance du temps, l'essai de traction uni-axiale à vitesse de déformation contrôlée est le plus adéquat. Ce dernier est conduit sur une éprouvette à section uniforme. La géométrie des éprouvettes a été établie selon la norme ASTM D638. En effet, le critère du choix des essais mécaniques est de rechercher à faire réagir, surtout sur le plan rhéologique, le matériau sur la plage de sollicitation la plus étendue pour le pousser à ses limites réactionnelles. Pour cela quatre vitesses de déformations constantes et différentes étendues sur quatre décades ont été imposées. Ces vitesses sont données dans le Tableau IV-3. Il convient de mentionner que ces vitesses correspondent aux vitesses de la traverse de la machine d'essai.

Tableau IV-3. Vitesses de déformation de l'essai de traction

Ordre	1	2	3	4
Vitesse de déformation ( $\text{Min}^{-1}$ )	0.0000646	0.000625	0.00612	0.0556

#### IV.6.5. Enregistrements expérimentaux en traction

##### IV.4.5.1. Dépendance du comportement du temps

Les résultats obtenus sont décrits par les courbes contrainte déformation de la Figure IV-6. On y voit clairement un comportement rhéologique dépendant du temps. La vitesse de déformation joue remarquablement sur la relation contrainte déformation aussi bien dans le domaine

viscoélastique que dans le domaine viscoélastique viscoplastique. Sur le plan qualitatif, l'allure des courbes est insensible à la vitesse de déformation. Ces courbes montrent en premier lieu deux domaines différents dont l'initial est linéaire tandis que l'autre est non linéaire. Puis intervient un pic de contrainte suivi par une ligne quasi constante en premier lieu mais qui finit par augmenter linéairement au cours du temps. Sur le plan quantitatif, la différence entre les courbes en fonction de la vitesse de déformation est clairement distinguée. On y constate une augmentation de la résistance du matériau avec l'augmentation de la vitesse de déformation. Ceci signifie que les propriétés du matériau dépendent de la vitesse de déformation.

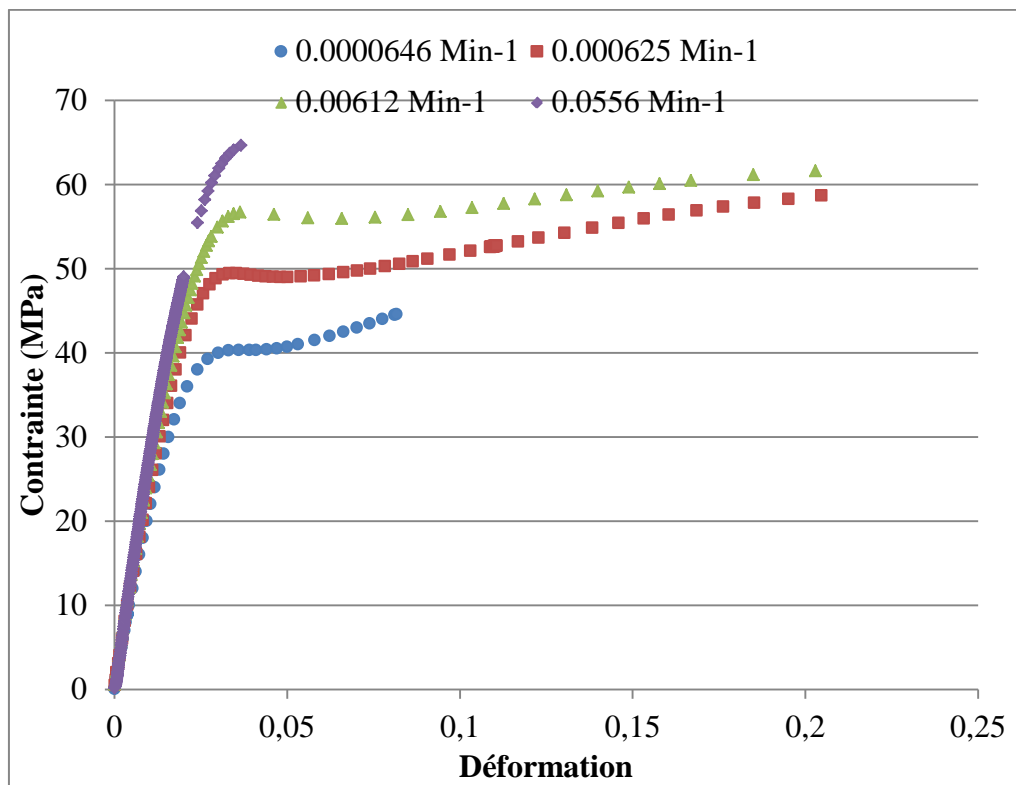


Figure IV-6. Courbes contraintes-déformations expérimentales d'un polyamide 6 à différentes vitesses de déformation.

#### VI.4.5.2. Limite élastique

Il est très difficile de déterminer la limite élastique à partir des courbes contrainte déformation des polymères. Il est bien connu que certains polymères ne se font pas de limite élastique ; les polymères fragiles en l'occurrence. Ceux-ci rompent au cours de la déformation viscoélastique. Par ailleurs, d'autres polymères voient leur limite élastique se manifester dans les courbes

contraintes-déformations soit sous la forme d'un maximum de contrainte ; soit sous la forme d'un changement de la pente [90]. La nouvelle pente peut prendre une allure linéaire ou non linéaire.

#### IV.6.6. Protocol expérimental en flexion

L'essai du fluage consiste en l'application d'une contrainte constante qui induit une déformation au cours du temps. Typiquement, il y a trois paliers : le fluage transitoire, le fluage stationnaire et le fluage tertiaire. Sous de faibles chargements, le fluage est viscoélastique tandis qu'avec des chargements dépassant la contrainte seuil de plasticité, on assiste, de plus, à un fluage viscoplastique. En flexion, ainsi qu'il est schématisé sur la Figure IV-7, une poutre rectiligne, simplement appuyée, de longueur  $l$  et section droite ( $b \times 2h$ ) est soumise à une charge constante et concentrée à distances égales des appuis. La charge  $P$  induit une flexion de la poutre qui peut être décrite par une courbure et un déplacement verticale de la fibre neutre.

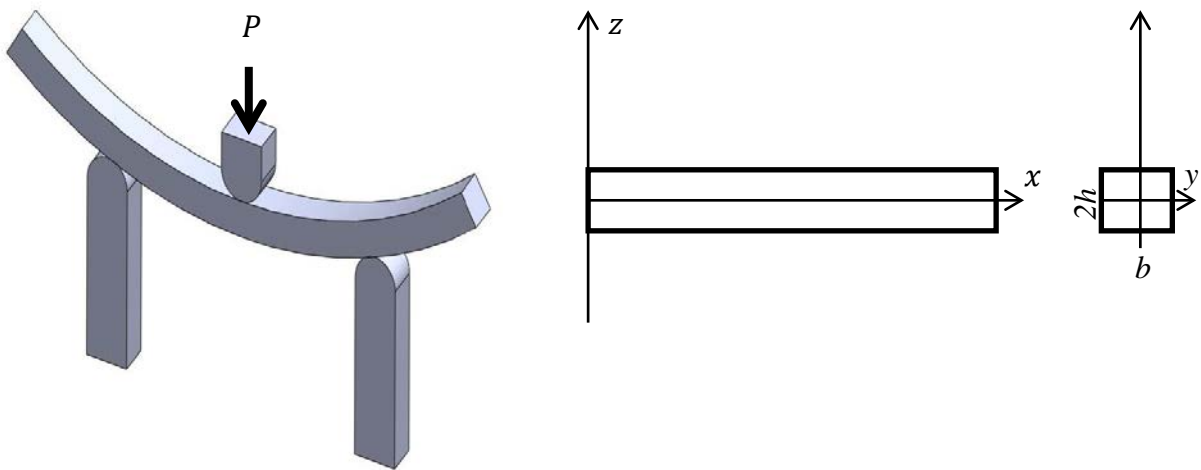


Figure IV-7. Géométrie d'une poutre en flexion trois points

#### IV.6.7. Enregistrements expérimentaux en flexion

La poutre testée est de dimensions ( $l = 110, b = 6, 2h = 7$ )  $10^{-3}m$ . Suite à l'application d'une gamme de charges concentrées de (80, 170, 200)  $N$  à distances égales des appuis de la poutre, le déplacement transversal de la fibre neutre est mesuré au cours du temps.

La Figure IV-8 représente l'évolution de la flèche au point d'application de la charge au cours du temps pour les trois charges appliquées. On y voit des courbes typiques du fluage. D'abord une flèche élastique instantanée. Puis un stade marqué par une allure transitoire qui se suit enfin par un palier stationnaire. Cette allure se traduit sur la courbe du taux d'évolution de la flèche qui montre une vitesse décroissante finissant par avoir un aspect quasi constant.

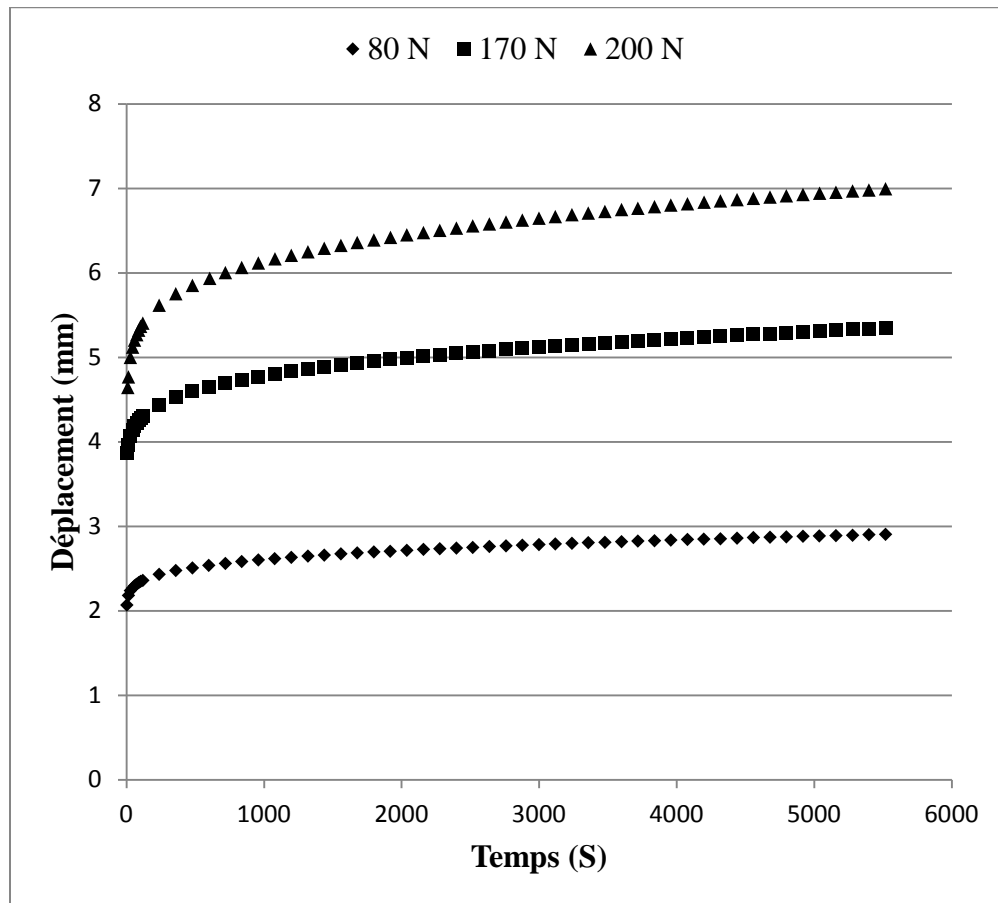


Figure IV-8. Courbes expérimentales de l'évolution de la flèche.

#### IV.7. Bilan du chapitre

Le chapitre de modélisation et d'expérimentation est accompli. Les matériaux composites et les matériaux thermoplastiques sont présentés. L'accent est mis sur les thermoplastiques étant les matériaux considérés pour la matrice objet d'étude. Le modèle analogique représentant le comportement rhéologique est proposé et les techniques d'homogénéisation sont élucidées. Le dispositif expérimental mis en place est décrit où la machine d'essai et le matériau objet d'étude sont identifiés. Il s'agit d'un essai de traction à différentes vitesses de déformations constantes et

d'un essai de fluage en flexion à différentes contraintes constantes. Les résultats obtenus suite à l'expérimentation sont présentés et commentés.

## Chapitre V : Identification et validation du modèle en traction

### V.1. Introduction

Le présent chapitre porte sur l'application du modèle rhéologique proposé en traction. Le modèle de comportement est proposé et les équations le gouvernant sont formulées. Le dispositif expérimental est mis en place, les charges sont appliquées et les mesures sont enregistrées. Il est alors lieu d'une étape d'identification des paramètres du modèle. Il est choisi une identification par analyse inverse consistant en la minimisation d'une fonction objectif établissant l'écart entre les enregistrements expérimentaux et les résultats de la simulation. Le problème de minimisation est résolu par la technique d'optimisation par algorithmes génétiques. Pour juger de la pertinence de la procédure, une comparaison des résultats expérimentaux et ceux obtenus par le modèle est présentée et discutée.

### V.2. Identification des paramètres viscoélastiques

En dessous d'un seuil de contrainte, la réponse du matériau face au chargement est uniquement viscoélastique. Le modèle de comportement viscoélastique pris en compte est représenté par le modèle rhéologique composé de Kelvin-Voigt à élasticité instantanée. Il s'ensuit que les équations gouvernant le comportement du matériau s'expriment par :

$$\sigma = E\varepsilon_e = K\varepsilon_{ve} + \mu_{ve}\dot{\varepsilon}_{ve} \quad (\text{V-1})$$

La déformation viscoélastique totale  $\varepsilon$  est la somme d'une composante élastique instantanée  $\varepsilon_e$  et d'une composante élastique différée  $\varepsilon_{ve}$ .

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_{ve} \quad (\text{V-2})$$

La vitesse de déformation élastique instantanée étant nulle, en remplaçant  $\varepsilon_e$  par sa valeur, on obtient :

$$\sigma = \frac{E}{E+K} (K\varepsilon + \mu_{ve}\dot{\varepsilon}) \quad (\text{V-3})$$

L'identification des trois paramètres  $(E, K, \mu_{ve})$  se fait en mettant en place une fonction objectif minimisant l'écart entre les mesures expérimentales et les valeurs simulées. Le problème d'optimisation est résolu par la technique des algorithmes génétiques.

$$Q_{ve}(E, K, \mu_{ve}, \sigma_c, \sigma_{ex}) = \sum_{i=1}^N (\sigma_{ex}^i - \sigma_c^i(E, K, \mu_{ve}, \varepsilon, \dot{\varepsilon}))^2 \quad (V-4)$$

Où  $N$  est le nombre de points de mesures,  $\sigma_{ex}^i$  et  $\sigma_c^i$  représentent respectivement les contraintes expérimentales et simulées par le modèle.

La technique d'optimisation par algorithmes génétiques a été appliquée pour déterminer les paramètres viscoélastiques du modèle. Ces paramètres sont injectés par la suite dans la loi de comportement. Les paramètres viscoélastiques sont identifiés pour quatre vitesses de déformation différentes. En utilisant les paramètres identifiés pour une vitesse de déformation déterminée pour la simulation du comportement à d'autres vitesses de déformation, une divergence est apparue entre les résultats expérimentaux et ceux de la simulation. Les paramètres identifiés ne sont donc adaptés que pour simuler le comportement du matériau avec la vitesse de déformation en question. Ceci est en accord les travaux des références [3, 7] qui soutient que les paramètres viscoélastiques dépendent de la vitesse de déformation. Ainsi à chaque vitesse de déformation, nous identifions les paramètres viscoélastiques adéquats.

### V.3. Identification des paramètres viscoplastiques

Le modèle de comportement viscoélastique-viscoplastique pris en compte est représenté par le modèle rhéologique composé de Kelvin-Voigt à élasticité instantanée monté en série avec le modèle généralisé de Bingham avec un écrouissage non linéaire. Une fois la contrainte atteint le seuil de plasticité, le mécanisme viscoplastique est activé. Il s'ensuit que les équations gouvernant le comportement de matériau s'expriment par :

$$\sigma = \sigma_e + H(\varepsilon_{vp})^n + \mu_{vp}\dot{\varepsilon}_{vp} \quad (V-5)$$

L'hypothèse de la partition de la déformation nous permet d'exprimer la déformation totale  $\varepsilon$  en une composante élastique instantanée  $\varepsilon_e$ , une composante élastique différée  $\varepsilon_{ve}$  et une composante viscoplastique  $\varepsilon_{vp}$ .

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_{ve} + \varepsilon_{vp} \quad (V-6)$$

De ce qui précède, on peut exprimer la contrainte par :

$$\sigma = \sigma_e + H(\varepsilon - \varepsilon_{ve} - \varepsilon_e)^n + \mu_{vp}(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_{ve} - \dot{\varepsilon}_e) \quad (V-7)$$

En considérant que la vitesse de déformation élastique instantanée est nulle, en remplaçant la déformation élastique instantanée, la déformation viscoélastique et sa vitesse par leurs formules obtenues à partir de l'Equation (V-1), on obtient :

$$\sigma = \sigma_e + H \left( \varepsilon - \frac{\sigma}{K} \left( 1 - \exp \left( -\frac{Kt}{\mu_{ve}} \right) \right) - \frac{\sigma}{E} \right)^n + \mu_{vp} \left( \dot{\varepsilon} - \frac{\sigma}{\mu_{ve}} \left( \exp \left( -\frac{Kt}{\mu_{ve}} \right) \right) \right) \quad (\text{V-8})$$

L'identification des quatre paramètres  $(\sigma_e, H, n, \mu_{vp})$  se fait en mettant en place une fonction objectif minimisant l'écart entre les mesures expérimentales et les valeurs simulées de la contrainte.

$$Q_{vp}(\sigma_e, H, n, \mu_{vp}, \sigma_c, \sigma_{ex}) = \sum_{i=1}^N (\sigma_{ex}^i - \sigma_c^i(\sigma_e, H, n, \mu_{vp}, \varepsilon, \dot{\varepsilon}))^2 \quad (\text{V-9})$$

La technique d'optimisation par algorithmes génétiques a été appliquée pour déterminer les paramètres viscoplastiques du modèle. Ces paramètres ont été injectés par la suite dans la loi de comportement. L'équation gouvernant le comportement viscoélastique-viscoplastique étant non linéaire, une méthode numérique est mise en place pour sa résolution. Pour ce faire, et comme il est difficile de déterminer la dérivée de l'Equation (V-8), les méthodes de gradients sont exclues. Ainsi la méthode numérique de dichotomie est privilégiée. Il est à mentionner que toutes les méthodes de calcul numérique sont implémentées dans le logiciel MATLAB.

#### V.4. Stratégie de travail pour l'identification des paramètres du modèle

Les équations qui gouvernent le comportement sont formulées. Le seuil de plasticité étant inconnu, la stratégie d'identification consiste en le choix d'un intervalle de seuil de plasticité compris entre deux seuils de déformation correspondant à 0.5 % et 1.5 %. Tel qu'il est illustré sur la Figure V-1, en dessous de 0.5 %, nous considérons que la réponse du matériau est uniquement viscoélastique. Au dessus de 1.5 %, nous considérons que la réponse est viscoélastique-viscoplastique. En effet, le seuil de plasticité correspond à la contrainte à laquelle le matériau commence à avoir une déformation permanente. Pour les métaux, ce seuil est pratiquement déterminé à la contrainte à laquelle correspond une déformation évaluée à 0.2 %. Par ailleurs, selon les références [23, 126], les polymères ont pratiquement une contrainte seuil correspondant à une déformation évaluée à 1 % où la courbe contrainte déformation devient nettement non linéaire.



Nous commençons alors par l'identification des paramètres viscoélastiques puis nous passons à l'identification des paramètres viscoplastiques, y compris la contrainte seuil de plasticité. Une fois la contrainte seuil de plasticité déterminée, nous procédons à une ré-identification des paramètres viscoélastiques en prenant en compte cette fois comme limite le seuil de plasticité identifié au lieu du seuil de déformation de 0.5 %. De nouveaux paramètres viscoélastiques sont alors identifiés. Ensuite une mise à jour des paramètres viscoplastiques est faite à partir d'une réidentification à la lumière des nouveaux paramètres viscoélastiques réidentifiés et du seuil de plasticité.

Ainsi l'identification viscoélastique est faite dans une plage allant jusqu'au seuil de plasticité et l'identification viscoplastique est réalisée dans une plage commençant à partir du seuil de plasticité. Les courbes sont enfin assemblées et le comportement global est identifié. Les étapes d'identification suivies sont explicitées dans ce qui suit.

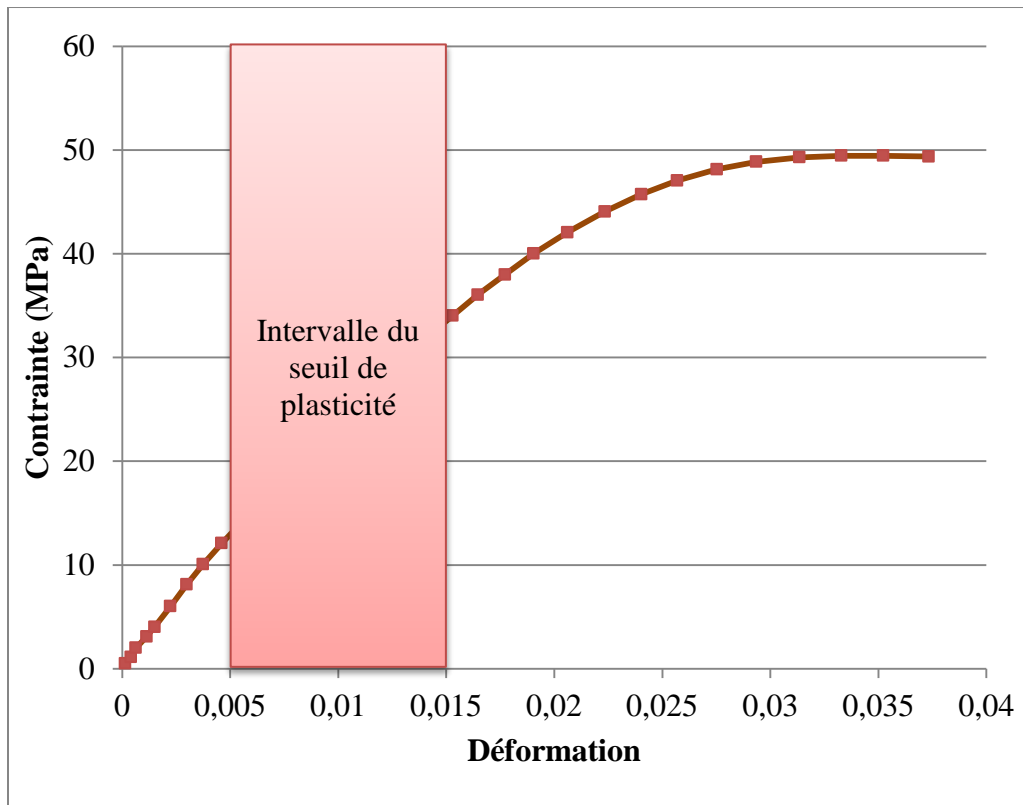


Figure V-1. Intervalle du seuil de plasticité

#### V.4.1. Identification viscoélastique au seuil d'une déformation de 0.5 %

S'agissant de déterminer les paramètres viscoélastiques, nous nous appliquons dans un domaine supposé en dessous du seuil de plasticité. Et comme ce seuil n'est pas encore déterminé, nous nous proposons une limite de déformation qui nous permet de nous assurer que nous sommes dans le domaine viscoélastique, soit un seuil de déformation de 0.5 %. La minimisation de la fonction objectif nous permet d'obtenir les paramètres recherchés. Le Tableau VI-1 présente les paramètres identifiés à partir d'un essai de traction simple à différentes vitesses de déformation. On y voit que le module  $E$  est constant et indépendant de la vitesse de déformation alors que les paramètres viscoélastiques  $K$  et  $\mu_{ve}$  en dépendent considérablement. Il est à remarquer qu'avec l'augmentation de la vitesse de déformation, le paramètre  $K$  augmente tandis que le paramètre  $\mu_{ve}$  diminue.

Tableau V-1. Paramètres viscoélastiques identifiés au seuil de 0.5% de déformation.

Vitesse de déformation ( $Min^{-1}$ )	$E$ (MPa)	$K$ (Mpa)	$\mu_{ve}$ (Mpa.Mn)
0.0000646	2.97656e+03	1.26232e+04	1.30079e+03
0.000625	2.97656e+03	2.06153e+04	1.28680e+03
0.00612	2.97656e+03	2.80049e+04	1.00000e+03
0.0556	2.97656e+03	4.39564e+04	13.64277

A titre illustratif, la courbe contrainte-déformation à une vitesse de déformation évaluée à  $0.0000646 Min^{-1}$  est présentée sur la Figure V-2. Il est à remarquer que la relation contrainte-déformation est linéaire en dessous du seuil de 0.5 % de déformation.

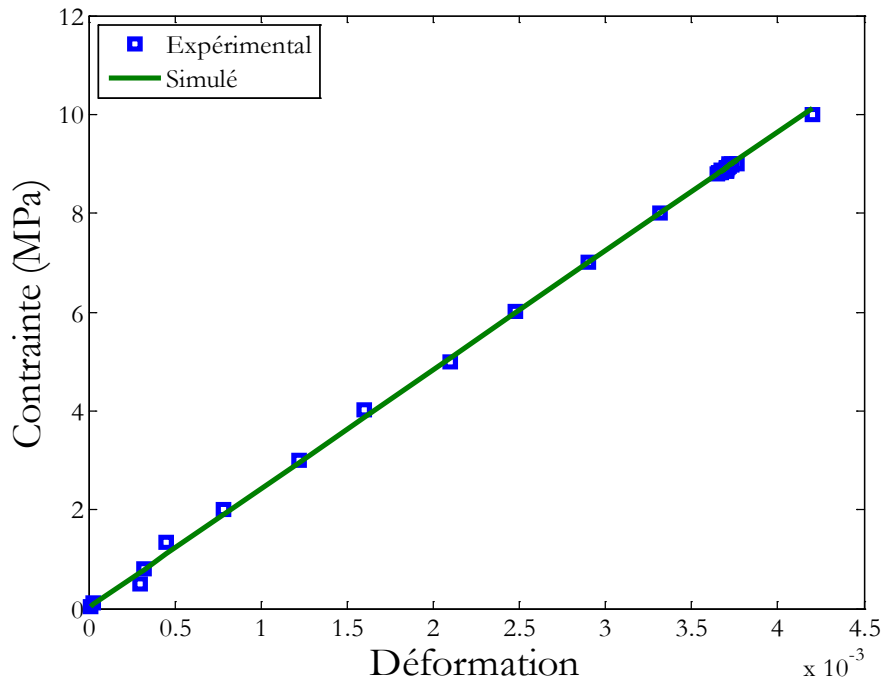


Figure V-2. Courbe contrainte déformation viscoélastique en dessous du seuil de déformation de 0.5% et à vitesse de déformation de  $.0000646 \text{ Min}^{-1}$ .

#### V.4.2. Identification viscoplastique à partir d'une déformation de 1.5 %

S'agissant de déterminer, maintenant, les paramètres viscoplastiques, nous nous appliquons dans un domaine au dessus du seuil de plasticité. Et comme ce seuil n'est pas encore déterminé, nous nous plaçons au dessus d'un seuil de déformation qui nous permet de nous assurer que nous sommes dans le domaine viscoplastique, soit un seuil de déformation de 1.5 %. Suite à l'application du code de calcul, les paramètres viscoplastiques sont déterminés. Le Tableau V-2 représente les paramètres viscoplastiques identifiés, y compris la contrainte seuil de plasticité, à partir d'un essai de traction simple à plusieurs vitesses de déformation. A l'exception du coefficient  $n$ , tous les paramètres viscoplastiques dépendent de la vitesse de déformation. Plus la vitesse de déformation est grande, plus la contrainte correspondante au seuil de plasticité est grande, plus le paramètre d'écroutissage  $H$  est grand et plus le paramètre de viscoplasticité  $\mu_{vp}$  est petit. On souligne une analogie entre les paramètres viscoélastiques  $K$  et  $\mu_{ve}$  et les paramètres viscoplastiques  $H$  et  $\mu_{vp}$  respectivement en matière de dépendance de la vitesse de déformation.

Tableau V-2. Paramètres viscoplastiques identifiés au seuil de 1.5% de déformation.

Vitesse de déformation ( $Min^{-1}$ )	$\sigma_e$ (MPa)	$H$ (MPa)	$n$	$\mu_{vp}$ (MPa.Mn)
0.0000646	20.93750	58.42951	0.28250	3.89737e+03
0.000625	22.92681	83.12233	0.28631	1.68984e+03
0.00612	23.35816	1.00404e+02	0.28843	5.01562e+02
0.0556	25.00969	1.37101e+02	0.29293	15.80347

A titre illustratif, la courbe contrainte déformation à une vitesse de déformation évaluée à  $0.0000646 Min^{-1}$  est présentée sur la Figure V-3. Il est à remarquer que la relation contrainte déformation est non linéaire au dessus du seuil de 1.5 % de déformation. Ceci s'explique par la loi de puissance qui relie la contrainte à la déformation dans le domaine viscoplastique. Ce que nous retenons principalement à partir de cette identification c'est d'abord une détermination préalable du seuil d'écoulement plastique. Une certaine divergence est observée entre la courbe expérimentale et la courbe simulée. En effet, les paramètres viscoélastiques identifiés, incertains jusqu'ici, s'impliquent dans la détermination des paramètres viscoplastiques. Ceci a certainement une influence sur la cohérence des résultats.

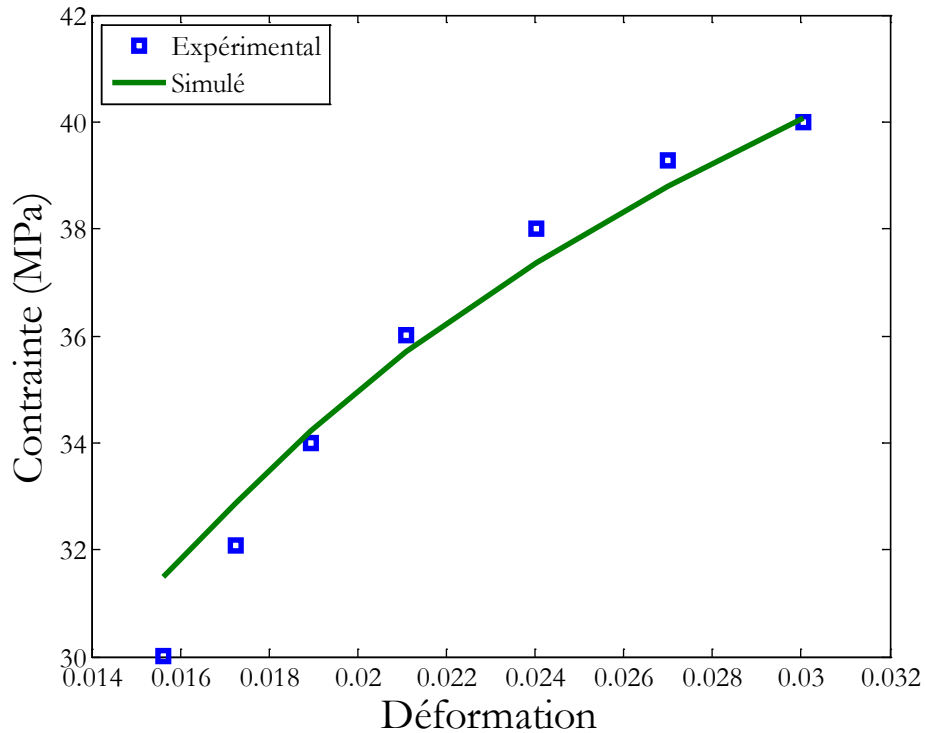


Figure V-3. Courbe contrainte déformation viscoplastique au dessus du seuil de déformation de 0.5% et à vitesse de déformation de  $0.0000646 \text{ Min}^{-1}$

### V.4.3. Réidentification viscoélastique

Pour remédier au problème de la divergence entre des résultats expérimentaux et les résultats simulés soulevé lors de l'identification viscoplastique, nous nous proposons une ré-identification viscoélastique qui prend en compte cette fois le domaine qui s'étale jusqu'au seuil de plasticité préalablement déterminé lors de l'identification viscoplastique au lieu de la limite de 0.5 %. Le Tableau V-3 représente les paramètres viscoélastiques réidentifiés. Les résultats obtenus ne sont pas trop divergents de ceux obtenus lors de la première identification.

Tableau V-3. Paramètres viscoélastiques ré-identifiés au seuil de plasticité préalable.

Vitesse de déformation ( $Min^{-1}$ )	$E$ (MPa)	$K$ (Mpa)	$\mu_{ve}$ (Mpa.Min)
0.0000646	2.97656 e03	7.31229 e03	2.38816 e04
0.000625	2.97656 e03	1.220631 e04	5.00661 e03
0.00612	2.97656 e03	1.86363 e04	7.38098 e02
0.0556	2.97656 e03	3.23085 e04	64.05767

Les courbes de la Figure V-4 présentent une comparaison des données expérimentales et des données simulées à partir des paramètres viscoélastiques réidentifiés dans un domaine qui va au-delà de la limite 0.5 % de déformation mais jusqu'au seuil de plasticité identifié. La vitesse de déformation prise en compte est  $0.0000646 Min^{-1}$ . En effet, il est conservé l'aspect linéaire avec une petite différence entre la ligne expérimentale et la ligne simulée à partir du modèle.

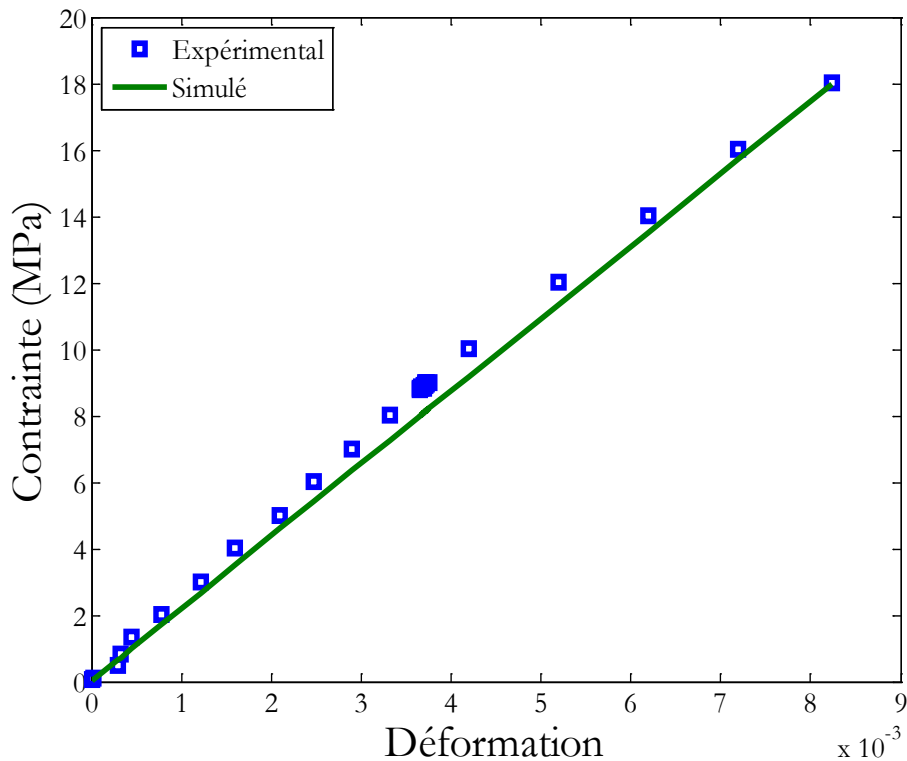


Figure V-4. Courbe contrainte déformation viscoélastique en dessous du seuil de plasticité et à vitesse de déformation de  $0.0000646 Min^{-1}$

#### V.4.4. Ré-identification viscoplastique

Les paramètres viscoélastiques étant mis à jour à partir d'un seuil de plasticité préalable, nous procédons à une ré-identification des paramètres viscoplastiques qui s'applique à partir du seuil de plasticité au lieu de la limite de déformation de 1.5 %. De nouveaux paramètres viscoplastiques sont alors déterminés, y compris la contrainte correspondant au seuil de plasticité. Ainsi tous les paramètres viscoélastiques et viscoplastiques sont actualisés. Les résultats du Tableau V-4 présentent les paramètres viscoplastiques ré-identifiés à la lumière des paramètres viscoélastiques actualisés pour différentes vitesses de déformation.

Tableau V-4. Paramètres viscoplastiques ré-identifiés au seuil de plasticité préalable.

Vitesse de déformation ( $Min^{-1}$ )	$\sigma_e$ (MPa)	$H$ (MPa)	$n$	$\mu_{vp}$ (Mpa.Min)
0.0000646	22.01515	69.84680	0.30725	6.96233 e03
0.000625	24.02029	94.94414	0.30725	3.04422 e03
0.00612	24.89926	1.22883 e02	0.30725	2.10346 e02
0.0556	26.00009	1.55818 e02	0.30725	23.11376

En comparant la Figure V-5 avec la Figure V-3, on se rend rapidement compte que les paramètres viscoplastiques actualisés sont plus justes que les paramètres préalables. L'écart entre les courbes expérimentales et les courbes simulées par le modèle devient très petit. En effet, les allures non linéaires des courbes contrainte-déformation s'avèrent également très cohérentes. De plus, les points de départ des deux courbes expérimentales et modélisées coïncident. Par conséquent la continuité lors de l'assemblage des courbes viscoélastique et viscoplastique sera pertinente. Enfin, on constate que le comportement rhéologique considéré est très compliqué. Les paramètres viscoplastiques dépendent des paramètres viscoélastiques et de la contrainte seuil de plasticité. Ainsi l'exactitude de paramètres viscoplastiques dépend de l'exactitude des paramètres viscoélastiques et celle de la contrainte seuil de plasticité d'où l'amélioration des résultats après ré-identification.

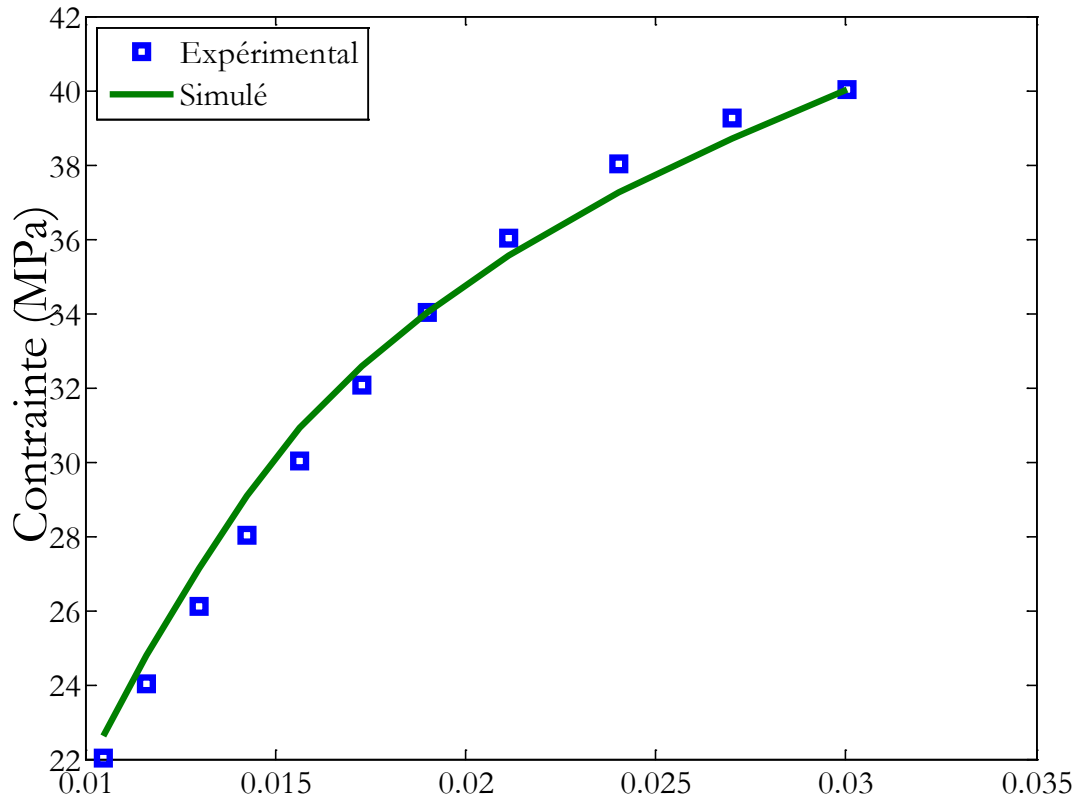


Figure V-5. Courbe contrainte déformation viscoplastique au dessus du seuil de plasticité et à vitesse de déformation de  $0.0000646 \text{ Min}^{-1}$

#### V.4.5. Assemblage des courbes

Les courbes contrainte déformation représentant les résultats simulés dans les domaines viscoélastique et viscoplastique étant tracées, il est temps de les lier afin de simuler le comportement rhéologique global du matériau. Une bonne cohérence et une continuité sont observées sur les courbes d'assemblage pour les quatre vitesses de déformation. Les courbes représentées sur la Figure V-6 illustrent la comparaison entre les résultats expérimentaux et les résultats obtenus par le modèle.



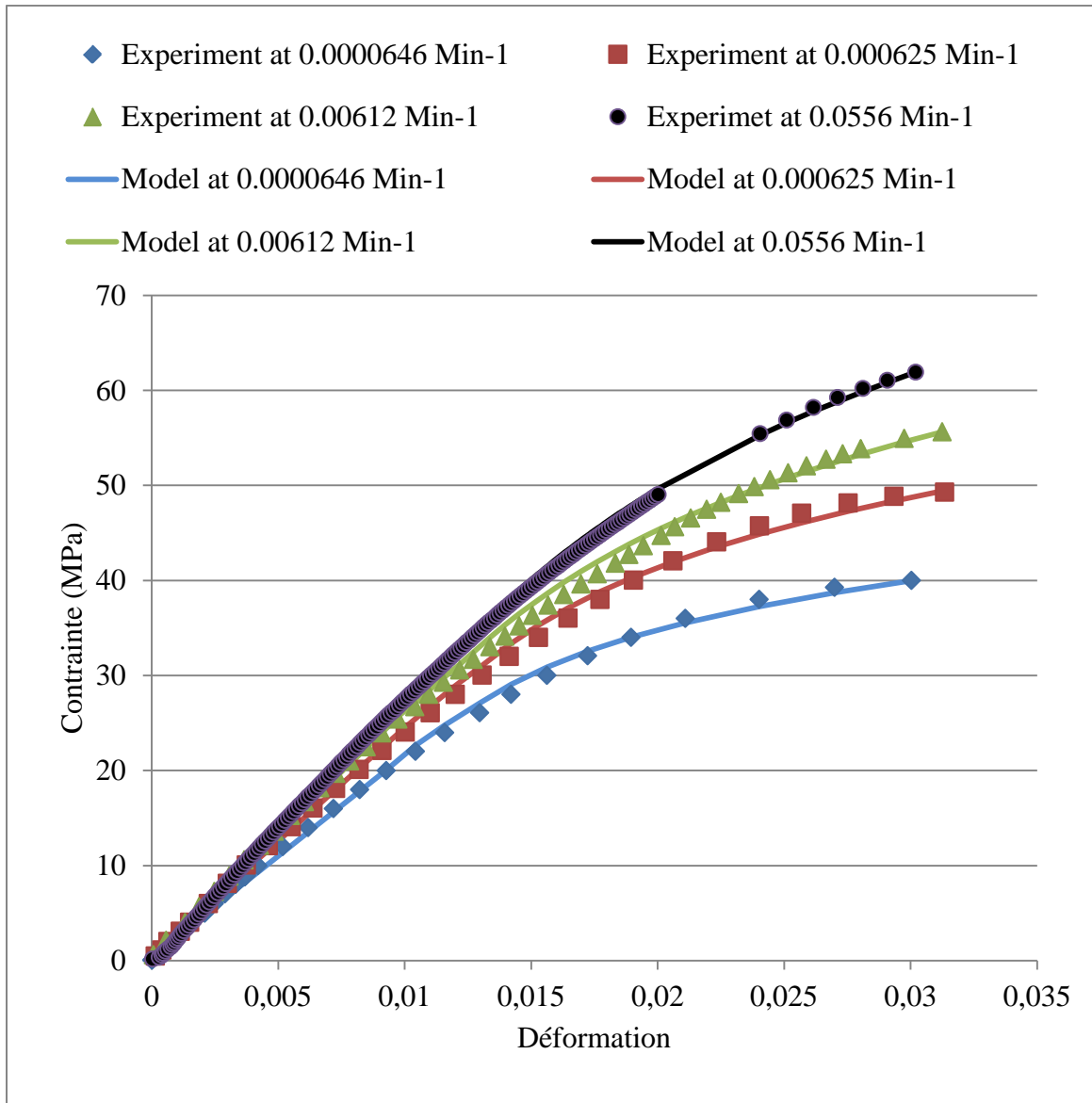


Figure V-6. Courbes comparatives expérimentation-simulation

## V.5. Discussion des résultats obtenus

### V.5.1. Courbes de contraintes déformation à différentes vitesses de déformation

Pour évaluer la pertinence du modèle rhéologique pris en compte, les courbes contraintes déformations de l'expérimentation et celles de la simulation, à quatre vitesses de déformation différentes, sont comparées. En dessous de la contrainte seuil de plasticité, les paramètres viscoélastiques étant indépendants de la déformation, il est naturel que la contrainte soit liée à la déformation par une fonction linéaire. Le seuil de plasticité étant atteint, la courbe prend une

autre allure. En effet le ressort du mécanisme viscoplastique reliant la contrainte à la déformation avec une fonction non linéaire est à l'origine de la non linéarité observée sur la courbe. L'écart enregistré entre les courbes expérimentales et celles de la simulation est minimal.

### **V.5.2. Sensibilité de la contrainte seuil de plasticité la vitesse de déformation**

La contrainte correspondant au seuil de plasticité dépend considérablement de la vitesse de déformation. En effet, plus la vitesse de déformation est grande plus la contrainte correspondant au seuil de plasticité est grande.

La Figure V-7, illustre la dépendance de la contrainte seuil de plasticité à la vitesse de déformation. Dans les travaux des références [3, 5, 6, 44, 127], les auteurs ont largement discuté la sensibilité de la contrainte seuil de plasticité à la vitesse de déformation. Différentes fonctions ont été établies. Il est à mentionner que la contrainte seuil dépend également de la température, un aspect qui n'est pas considéré dans cette étude car les essais ont été conduits à température ambiante et constante. Dans le présent travail, la dépendance peut être exprimée par une loi puissance ainsi qu'il est illustré la Figure V-7.

En outre, la Figure V-8 présente la contrainte seuil de plasticité en fonction du logarithme de la vitesse de déformation. On y remarque une augmentation linéaire de la contrainte seuil en fonction de la vitesse de déformation. Ce constat est en parfait accord avec d'autres travaux sur les polymères dont les références [5, 127, 128]. En d'autres termes, la déformation correspondant au seuil de plasticité est insensible à la vitesse de déformation tandis que la contrainte correspondant en dépend non linéairement. Dans le présent travail, la déformation correspondant à la contrainte seuil de plasticité est évaluée à 1 % quelle que soit la vitesse de déformation considérée.

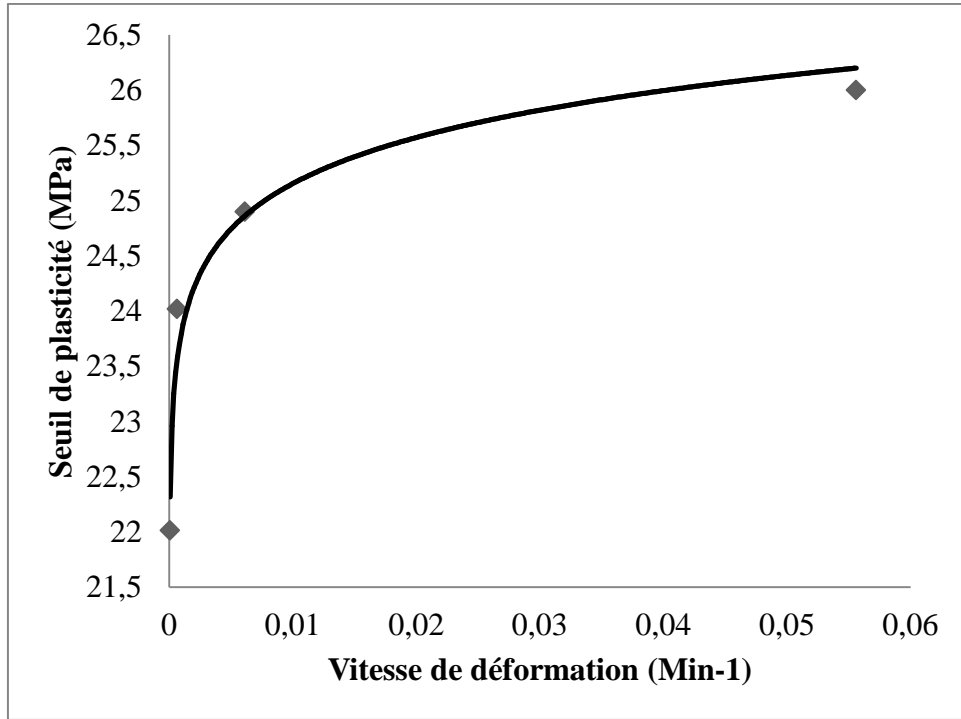


Figure V-7. Sensibilité du seuil de plasticité à la vitesse de déformation

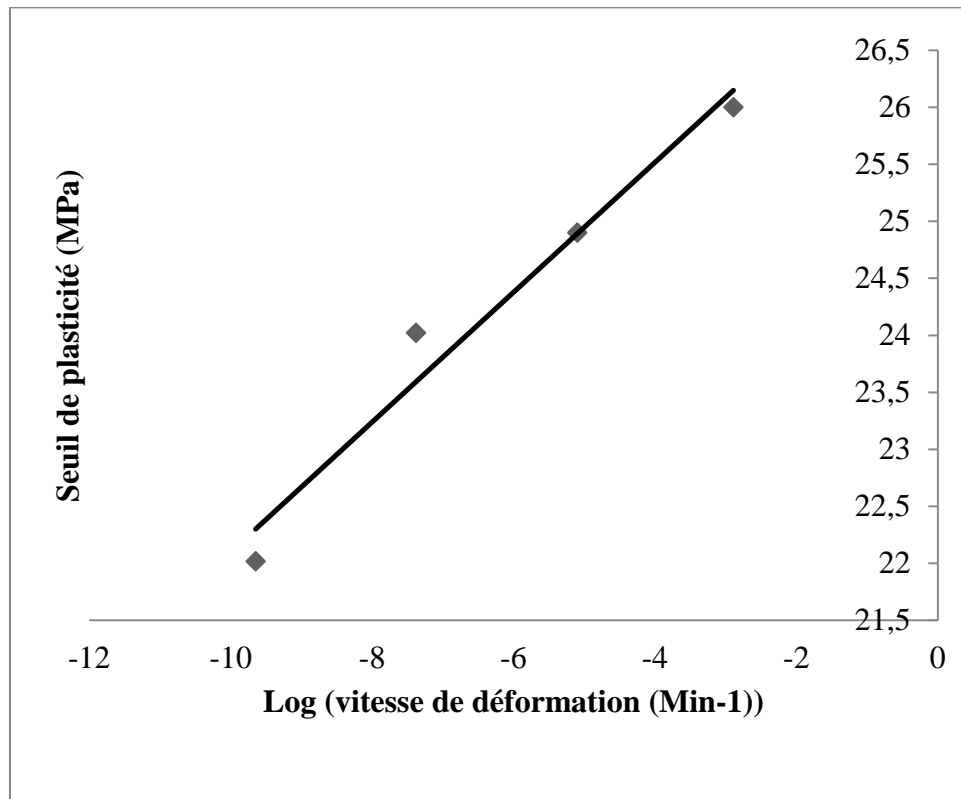


Figure V-8. Linéarité du seuil de plasticité au logarithme de la vitesse de déformation

### V.5.3. Sensibilité des paramètres à la vitesse de déformation

Afin de vérifier la dépendance des paramètres viscoélastiques et viscoplastiques de la vitesse de déformation, quatre vitesses différentes ont été prises en compte dans les essais de traction. Il s'est avéré que le module élastique  $E$  est indépendant de la vitesse de déformation alors que les deux autres paramètres viscoélastiques en dépendent non linéairement. La dépendance des paramètres viscoélastiques peut s'exprimer par des lois puissances. En se référant à la Figure V-9, on remarque que le module  $K$  augmente avec l'augmentation de la vitesse de déformation tandis que le paramètre de viscosité  $\mu_{ve}$  diminue.

Sur le plan viscoplastique, le coefficient d'érouissage  $n$  est indépendant de la vitesse de déformation tandis que les deux autres paramètres viscoplastiques en dépendent et s'y relient avec des fonctions non linéaires. En se référant à la Figure V-10, on peut remarquer une analogie sur le plan qualitatif entre les paramètres viscoplastiques  $H$  et  $\mu_{vp}$  d'une part et respectivement les paramètres viscoélastiques  $K$  et  $\mu_{ve}$  d'autre part. Ainsi avec l'augmentation de la vitesse de déformation, le module  $K$  augmente tandis que le paramètre  $\mu_{vp}$  diminue en fonction d'une loi puissance.

Pour définir les fonctions qui représentent la relation mathématique de la vitesse de déformation avec les paramètres viscoélastiques et viscoplastiques, il est considéré une technique de régression. Il en résulte qu'une loi de puissance relie aussi bien les paramètres viscoélastiques que les paramètres viscoplastiques à la vitesse de déformation. A l'exception du module élastique  $E$  et le coefficient d'érouissage  $n$  qui en sont indépendants, les fonctions obtenues sont représentés dans le Tableau V-5.

Tableau V-5. Relations des paramètres avec la vitesse de déformation

$K$	$\mu_{ve}$	$\sigma_e$	$H$	$\mu_{vp}$
$58881\dot{\epsilon}^{0,2163}$	$6,6166\dot{\epsilon}^{-0,872}$	$28,059\dot{\epsilon}^{0,0237}$	$222,27\dot{\epsilon}^{0,1182}$	$2,3512\dot{\epsilon}^{-0,877}$

Les courbes qui représentent la sensibilité des paramètres viscoélastiques à la vitesse de déformation sont illustrées sur la Figure V-9. La sensibilité des paramètres viscoplastiques est illustrée sur la Figure V-10.

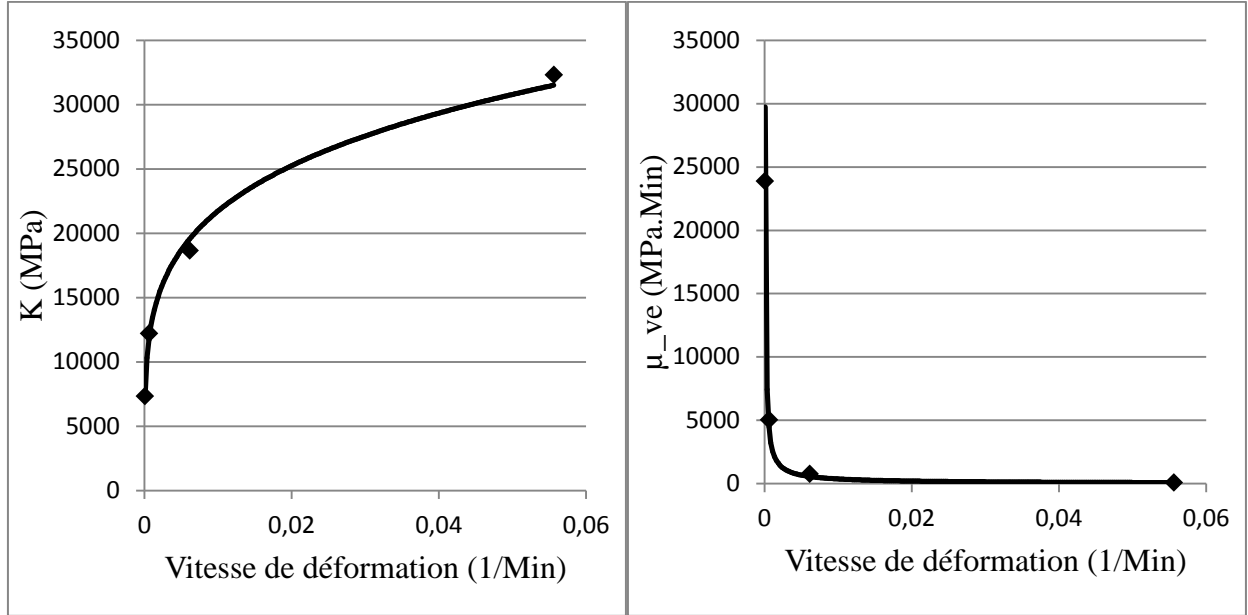


Figure V-9. Sensibilité des paramètres viscoélastiques à la vitesse de déformation

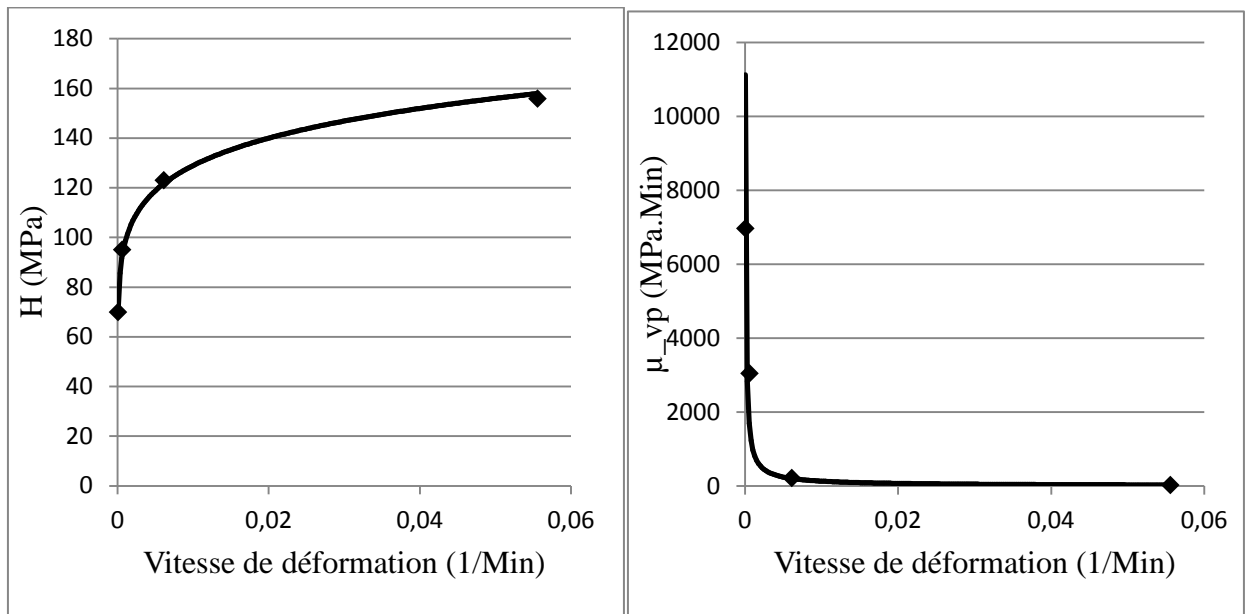


Figure V-10. Sensibilité des paramètres viscoplastiques à la vitesse de déformation

## V.6. Bilan du chapitre

Nous nous sommes intéressés dans ce chapitre, en premier lieu, à la modélisation d'une loi de comportement élasto-viscoplastique susceptible de simuler le comportement mécanique des polymères semi cristallins. Le modèle rhéologique proposé prend en compte plusieurs réponses élémentaires dont l'élasticité instantanée, la viscoélasticité, la viscoplasticité et l'écrouissage. En deuxième lieu, nous sommes passés à une étape d'identification des paramètres à partir des résultats expérimentaux obtenus suite à un essai de traction simple à différentes vitesses de déformation. Enfin les résultats de l'expérience et ceux de la simulation sont présentés et comparés. L'identification, qui consiste à la mise en place d'une fonction objectif permettant de minimiser l'écart entre les enregistrements expérimentaux et les résultats de la simulation, a été réalisée à l'aide de la technique des algorithmes génétiques.

La procédure d'identification consiste, d'abord, en le choix d'un intervalle du seuil de plasticité compris entre 0.5 %, et 1.5 % permettant une identification préalable. Une fois la contrainte seuil de plasticité déterminée, nous procédons à une réidentification des paramètres viscoélastiques en prenant en compte cette fois comme limite le seuil de plasticité et non le seuil de déformation de 0.5 %. Ensuite une mise à jour des paramètres viscoplastiques est faite à partir d'une réidentification qui prend cette fois, à la lumière des nouveaux paramètres viscoélastiques le seuil de plasticité comme limite inférieur au lieu de la limite 1.5 %. Enfin, une bonne cohérence qualitative et quantitative a été constatée entre l'expérience et la simulation.

## **Chapitre VI : Identification et validation du modèle en flexion.**

### **VI.1. Introduction**

Le présent chapitre s'intéresse à la validation du modèle pris en compte et de l'approche adoptée pour la simulation du comportement d'un composite à matrice polyamide 6 renforcée par des fibres de verre en flexion. Le modèle rhéologique pris en compte est un mécanisme analogique constitué d'une branche viscoélastique et d'un autre viscoplastique. L'approche adoptée est basée sur la relation moment courbure dans le cadre des hypothèses cinématique d'Euler-Bernoulli. Afin d'identifier les paramètres du modèle, un essai de flexion trois points en fluage est appliqué. De suite une fonctionnelle établissant l'écart entre les résultats expérimentaux et ceux du modèle est mise en place. Cette fonction étant compliquée et contenant de nombreux paramètres, il est privilégié une méthode d'analyse inverse basée sur la technique des algorithmes génétiques pour déterminer les paramètres. La simulation a permis d'illustrer le fluage du thermoplastique en flexion. Enfin, un renforcement en fibres de verre de la matrice polyamide est prévu. Une technique d'homogénéisation est proposée et les résultats obtenus sont présentés et discutés.

### **VI.2. Modélisation rhéologique**

Les modèles rhéologiques utilisés en viscoélasticité et en viscoplasticité sont souvent constitués à partir des trois modèles élémentaires représentés par le ressort, l'amortisseur et le patin. Le ressort représente le comportement élastique instantané tandis que l'amortisseur décrit le comportement visqueux. En outre, le patin indique le seuil de plasticité. Des combinaisons en série ou en parallèle de ces deux éléments permettent de produire une infinité de modèles rhéologiques. Le modèle de Kelvin-Voigt est bien adapté pour modéliser le comportement des polymères en fluage. En lui combinant en série le modèle généralisé de Bingham, on obtient un modèle élasto-viscoplastique.

En effet, les modèles élémentaires ne sont adoptés que pour l'analyse qualitative du comportement. Ils sont généralement insuffisants pour la représentation quantitative du

comportement réel des matériaux. Afin d'améliorer la représentation quantitative, il est nécessaire d'augmenter le nombre de paramètres en combinant de nombreux ressorts et d'amortisseurs. Il s'agit de la construction des modèles généralisés. Par ailleurs on peut proposer des paramètres fonctions de la contrainte ou de la déformation.

En vue de réduire le nombre de paramètres dans la mesure du possible, il est proposé, dans cette étude, un modèle viscoélastique de Kelvin-Voigt dont les paramètres, excepté le module de Young, s'expriment comme des fonctions du chargement. Par ailleurs, comme l'approche adoptée est basée sur la relation moment-courbure au lieu de la relation contrainte-déformation, on va supposer que les paramètres viscoélastiques sont des fonctions linéaires du moment fléchissant  $M$ .

$$K = AM; \mu_{ve} = BM \quad (\text{VI-1})$$

La viscoplasticité est décrite par le modèle de Bingham généralisé dont les paramètres dépendent également linéairement du moment fléchissant  $M$ .

$$H = CM; \mu_{vp} = DM \quad (\text{VI-2})$$

$A, B, C$  et  $D$  sont des constantes

### VI.2.1. Analyse viscoélastique

Cette analyse s'applique dans un domaine où le seuil de plasticité n'est pas atteint. La réponse du matériau est la somme d'une part élastique instantanée et d'une part viscoélastique tandis que la contrainte est identique dans chacune des deux branches du modèle viscoélastique. Le comportement rhéologique du matériau est alors régi par les équations suivantes :

$$\sigma = E \varepsilon_e = K \varepsilon_{ve} + \mu_{ve} \dot{\varepsilon}_{ve} \quad (\text{VI-3})$$

La déformation  $\varepsilon$  totale est la somme d'une composante élastique instantanée  $\varepsilon_e$  et une composante élastique différée  $\varepsilon_{ve}$ .

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_{ve} \quad (\text{VI-4})$$

En fluage, la contrainte est constante, soit  $\sigma_0$ . En intégrant, on obtient la relation qui relie la contrainte à la déformation totale donnée par:

$$\varepsilon(t) = J(t) \sigma_0 \quad (\text{VI-5})$$

Où  $J(t, \sigma_0)$  est une fonction du temps dite communément fonction du fluage. Elle a pour formule :



$$J(t) = \frac{1}{E} + \frac{1}{K} \left( 1 - e^{\left( -\frac{Kt}{\mu_{ve}} \right)} \right) \quad (\text{VI-6})$$

En flexion, selon les hypothèses d'Euler-Bernoulli, la déformation longitudinale est une fonction linéaire qui relie la courbure de flexion à la hauteur de la poutre. Ainsi on peut écrire l'expression de la déformation et celle de la contrainte comme suit:

$$\varepsilon(x, z, t) = -\chi(x, t)z \quad (\text{VI-7})$$

$$\sigma_0(x, z) = -\frac{1}{J(t)}\chi(x, t)z \quad (\text{VI-8})$$

Où  $\chi$  représente la courbure de flexion.  $x, z$  sont respectivement les axes selon la longueur et la hauteur de la poutre.

En désignant par  $b$  la largeur de la poutre et par  $2h$  son hauteur, le moment de flexion généré dans chaque section de la poutre est évalué à partir de l'équation d'équilibre :

$$M(x) = -b \int_{-h}^h z \sigma_0(x, z) dz \quad (\text{VI-9})$$

Tenant compte de la symétrie de la section et remplaçant la contrainte par son expression, en intégrant on obtient :

$$\chi(x, t) = \frac{M(x)}{I} J(t) \quad (\text{VI-10})$$

### VI.2.2. Analyse viscoélastique viscoplastique

Lorsque le chargement appliqué génère une contrainte au dessus du seuil de plasticité , le patin du mécanisme viscoplastique est activé. La contrainte générée dans le mécanisme viscoplastique s'exprime alors par :

$$\sigma = \sigma_e + H\varepsilon_{vp} + \mu_{vp}\dot{\varepsilon}_{vp} \quad (\text{VI-11})$$

La déformation totale produite prend, en plus des déformations élastique instantanée et élastique différée, une troisième composante qu'est la déformation viscoplastique. Elle s'exprime alors par l'équation :

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_{ve} + \varepsilon_{vp} \quad (\text{VI-12})$$

Il est bien connu que la flexion induit des champs de contrainte et de déformation non uniformes dans la section transversale suivant la hauteur de la poutre. Sous de faibles chargements, le comportement est souvent élastique linéaire ; cette non-uniformité se traduit alors par une fonction linéaire. La détermination des champs de contrainte et de déformation n'exige généralement aucun calcul particulier car le problème peut se résoudre analytiquement.

Par ailleurs, en appliquant des chargements dépassant une valeur critique, l'écoulement viscoplastique intervient et le problème se complique. En flexion trois points, deux domaines sont prévus dans le sens de la longueur de la poutre : un domaine viscoélastique et un domaine viscoélastique-viscoplastique dont la frontière correspond au moment de flexion  $M_e$  susceptible de générer la plastification de première fibre de la poutre.

En se plaçant, dans le domaine viscoélastique-viscoplastique, en raison de la non uniformité des contraintes, deux zones de comportements rhéologiques différents coexistent dans la même section tel qu'il est illustré sur la Figure VI-1 : une zone viscoélastique et une autre viscoélastique-viscoplastique. Les frontières entre les deux domaines et les deux zones viscoélastiques et viscoélastiques-viscoplastiques sont marquées respectivement par le moment seuil  $M_e$  et la hauteur  $z_e$  qui se déterminent à partir des équations suivantes :

$$M_e = \frac{\sigma_e I}{h} \quad (\text{VI-13})$$

$$\chi_e(x, t) = \frac{M_e}{I} J(t) \quad (\text{VI-14})$$

$$z_e(x, t) = \frac{h \chi_e(x, t)}{\chi(x, t)} \quad (\text{VI-15})$$

Où  $M_e$  et  $\chi_e$  représentent respectivement le moment de flexion seuil de plasticité et la courbure seuil de plasticité. Ils correspondent respectivement au moment et à la courbure qui engendrent la plastification de la première fibre de la poutre.

Admettant que la déformation élastique soit instantanée  $\dot{\varepsilon}_e = d\varepsilon_e/dt = 0$ , et remplaçant les déformations élastique  $\varepsilon_e$ , viscoélastique  $\varepsilon_{ve}$  et sa vitesse  $\dot{\varepsilon}_{ve}$  par leurs expressions, l'Equation (VI-11), on peut s'écrire:

$$\sigma = \frac{1}{R(t)} (\sigma_e + H\varepsilon + \mu_{vp}\dot{\varepsilon}) \quad (\text{VI-16})$$

$$\text{Avec } R(t) = 1 + H \left( \frac{1}{E} + \frac{1}{K} \left( 1 - \exp\left(-\frac{Kt}{\mu_{ve}}\right) \right) \right) + \mu_{vp} \left( \frac{1}{\mu_{ve}} \exp\left(-\frac{Kt}{\mu_{ve}}\right) \right)$$

L'équation de la courbure viscoélastique-viscoplastique est obtenue à partir de l'équation d'équilibre de la section :

$$M(x) = -2b \left( \int_0^{z_e} \frac{1}{J(t)} \varepsilon(x, z, t) z dz + \int_{z_e}^h \frac{\sigma_e + H\varepsilon(x, z, t) + \mu_{vp}\dot{\varepsilon}(x, z, t)}{R(t)} z dz \right) \quad (\text{VI-17})$$

En remplaçant la déformation totale et sa vitesse par leurs expressions respectivement ( $\varepsilon = -\chi z$ ) et ( $\dot{\varepsilon} = -\dot{\chi} z$ ) et intégrant, on obtient l'équation différentielle de la dérivée temporelle de la courbure :

$$\dot{\chi}(x, t) = \frac{\chi_e(t) \left( R(t) - HJ(t) - \frac{3}{2} \right) \left( \frac{\chi_e}{\chi(x, t)} \right)^2 + HJ(t) \left( \frac{\chi(x, t)}{\chi_e} \right) - \frac{M(x)R(t)}{M_e} + \frac{3}{2}}{J(t) \mu_{vp} \left( \left( \frac{\chi_e}{\chi(x, t)} \right)^3 - 1 \right)} \quad (\text{VI-18})$$

Il existe une multitude de méthodes numériques pour l'intégration des équations différentielles ordinaires telle que l'Equation ci-dessus. On distingue des méthodes explicites et des méthodes implicites. Les méthodes explicites s'avèrent intéressantes par la simplicité d'implémentation mais elles peuvent se montrer plus coûteuses en termes de temps de calcul car elles deviennent instables lorsque le pas de temps est grand. Or les méthodes implicites sont plus efficaces car elles sont inconditionnellement stables et des pas de temps plus grands peuvent être utilisés [129]. Nous privilégions par conséquent la méthode implicite d'Euler selon l'algorithme ci-dessous pour la résolution du système d'équations différentielles du taux de courbure.

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\chi}(x, t) = f(t, \chi(x, t)) \\ \text{Discrétisation spatiotemporelle} \\ i = 1, 2, 3, \dots, n - 1 \\ t_{i+1} = t_i + \Delta t \\ j = 1, 2, 3, \dots, m - 1 \\ x_{j+1} = x_j + \Delta x \\ \text{Valeurs initiales} \\ t_{1=0} ; \quad \chi_{1,j} = \frac{M_j}{EI} \\ \text{Calcul de la courbure} \\ \text{Schéma d'Euler implicite} \\ \chi_{i+1,j} = \chi_i + \Delta t f(t_i, \chi_{i+1,j}) \\ \text{Méthode de Newton - Raphson} \\ k = 1, 2, 3 \dots q \\ g(\chi_{i+1,j}) = \chi_{i+1,j} - \chi_i - \Delta t f(t_i, \chi_{i+1,j}) \\ \chi_{i+1,j}^{k+1} = \chi_{i+1,j}^k - \frac{g(\chi_{i+1,j}^k)}{\left( \frac{\partial g(\chi_{i+1,j}^k)}{\partial (\chi_{i+1,j}^k)} \right)} \\ \text{Critère d'arrêt} \\ |\chi_{i+1,j}^{k+1} - \chi_{i+1,j}^k| \leq \xi \end{array} \right\} \quad (\text{VI-19})$$

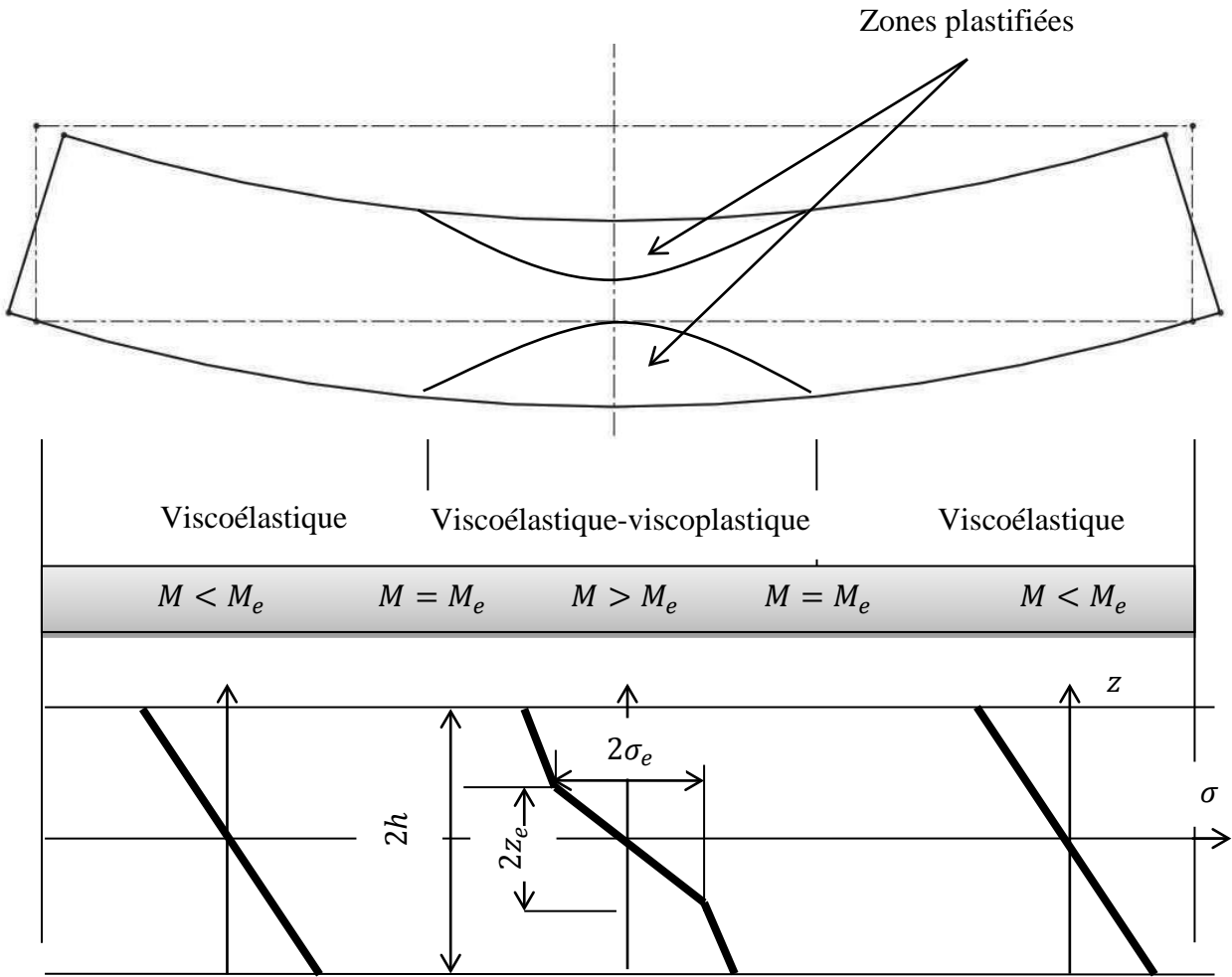


Figure VI-1. Répartition des contraintes dans les domaines viscoélastique et viscoélastique-viscoplastique

### VI.3. Identification des paramètres

#### VI.3.1. Etablissement de la fonction objectif

Les équations du modèle étant mises en place ; les données expérimentales étant enregistrées, il est lieu d'établir une fonctionnelle pour minimiser l'écart entre l'expérimentation et la modélisation. Cette fonction dite fonction objectif ou fonction de cout minimise, dans notre cas, l'écart entre le taux de courbure expérimental  $\dot{\chi}_{exp}$  et le taux de courbure modélisé  $\dot{\chi}_{mod}$ . En effet, la formule du taux de courbure renferme tous les paramètres viscoélastiques et viscoplastiques que l'on cherche à identifier

Il est à mentionner que le taux de courbure expérimental est obtenu à partir d'une dérivation numérique de la courbure expérimentale par rapport au temps. La fonction objectif prend alors la forme suivante :

$$Q = \sum_{i=1}^N \left( \dot{\chi}_{exp} - \dot{\chi}_{mod}(\chi, M, M_e, E, K, \mu_{ve}, H, \mu_{vp}) \right)^2 \quad (\text{VI-20})$$

Où  $i = 1, 2, \dots, N$  représentent les temps auxquels sont mesurés les courbures.

Il est question d'un problème d'optimisation qui nécessite le choix d'une méthode afin de le résoudre. Les méthodes métaheuristiques s'avèrent convenir bien pour ce genre de problèmes. En effet, la fonction objectif est très compliquée et contient de nombreux paramètres. Ainsi il est privilégié une méthode d'optimisation basée sur la technique des algorithmes génétiques pour évaluer les paramètres du modèle. L'implémentation est faite sous le logiciel MATLAB.

### VI.3.2. Détermination de la contrainte seuil de plasticité

Pour minimiser encore plus le nombre de paramètres à identifier à partir de la fonction objectif mise en place, nous supposons que la contrainte correspondant au seuil de plasticité est connue. Elle correspond à une déformation au niveau de 1%. Cette hypothèse est d'abord validée par les résultats de ce propre travail en traction où on a constaté que la non linéarité de la courbe contrainte déformation est localisée à une déformation avoisinant la valeur suscitée quelque soit la vitesse de déformation. On se réfère également aux travaux de références [12, 126] qui affirment que la contrainte seuil de plasticité pour les polymères correspond généralement à une déformation de 1% et marquée par le début de la non linéarité dans les courbes contrainte déformation. Pour ce faire, la contrainte imposée lors de l'essai est augmentée progressivement jusqu'à atteindre la valeur voulue (Figure VI-2). La déformation étant enregistrée au fur et à mesure, la contrainte correspondant au seuil de plasticité est déterminée. Soit 27172694.84 Pa.

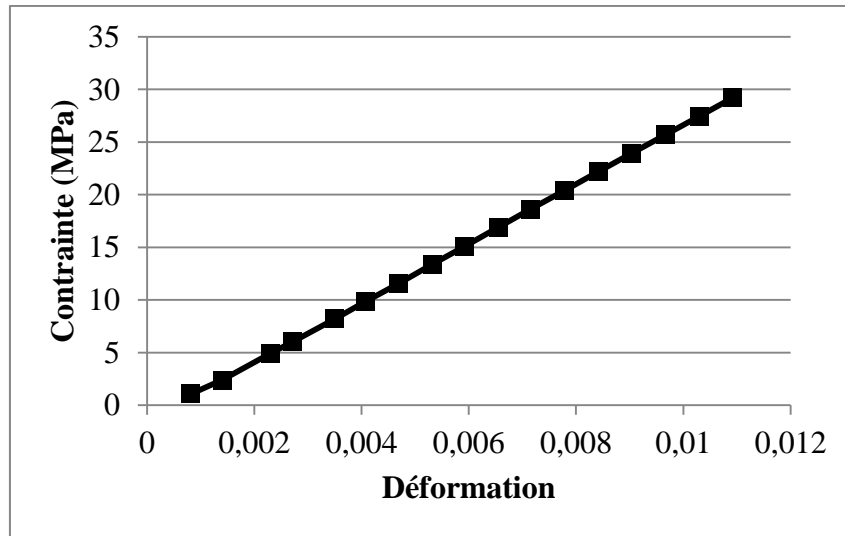


Figure VI-2. Courbe contrainte déformation pour la détermination du seuil de plasticité

## VI.4. Application au modèle homogénéisé

La matrice en polyamide 6 ayant une rigidité relativement faible, un renforcement par des fibres de verre lui acquiert une bonne résistance traduite par une augmentation du module de Young et de la contrainte seuil de plasticité. Le produit est donc un composite à matrice thermoplastique renforcé par des fibres de verre. On prévoit une technique d'homogénéisation analytique pour en modéliser le comportement effectif du composite.

### VI.4.1. Homogénéisation viscoélastique

La flexion étant analysée dans le cadre de la théorie d'Euler-Bernoulli, le cisaillement transverse est négligé. Ainsi en proposant un renforcement par fibre unidirectionnels selon la longueur de la poutre, on s'autorise une exploitation de la loi des mélanges. Le comportement du matériau homogénéisé est alors donné par

$$\sigma_{0c}(x, z) = v_f \sigma_f(x, z) + (1 - v_f) \sigma_m(x, z) \quad (\text{VI-21})$$

Où les indices  $c, f, m$  représentent respectivement le composite, les fibres et la matrice.  $v$  Désigne la fraction volumique.

En dessous du seuil de plasticité, le comportement des fibres est supposé élastique linéaire tandis que celui de la matrice est viscoélastique suivant le modèle Kelvin-Voigt à élasticité instantanée. Ceci nous permet d'écrire:

$$\sigma_{0c}(x, z) = \left( v_f E_f + (1 - v_f) \frac{1}{J(t)} \right) \chi(x, t) z \quad (\text{VI-22})$$

En intégrant l'équation d'équilibre, on obtient la formule de la courbure du composite qui s'exprime alors par :

$$\chi_c(x, t) = \frac{M(x)}{I} J_c(t) \quad (\text{VI-23})$$

$$\text{Où } J_c(t) = 1 / \left( v_f E_f + (1 - v_f) \frac{1}{J(t)} \right)$$

#### VI.4.2. Frontières viscoélastique viscoplastique

Les contraintes correspondant aux seuils de plasticité des deux constituants du composite étant connues, on se propose de déterminer la contrainte seuil de plasticité moyenne  $\sigma_{ec}$  selon la loi des mélanges. Ceci s'exprime par :

$$\sigma_{ec} = v_f \sigma_{ef} + (1 - v_f) \sigma_{em} \quad (\text{VI-24})$$

Selon la longueur, le moment seuil  $M_{ec}$  correspondant à la plastification de la première fibre de la poutre composite et la courbure de flexion correspondante  $\chi_{ec}$  s'expriment par :

$$M_{ec} = \frac{\sigma_{ec} l}{h} \quad (\text{VI-25})$$

$$\chi_{ec}(x, t) = \frac{M_{ec}}{I} J_c(t) \quad (\text{VI-26})$$

Selon la hauteur de la poutre composite, la frontière élastique  $z_{ec}$  est donnée par :

$$z_{ec}(x, t) = \frac{h \chi_{ec}(x, t)}{\chi_c(x, t)} \quad (\text{VI-27})$$

### VI.4.3. Homogénéisation viscoplastique

Dans le domaine viscoélastique-viscoplastique défini par un moment supérieur au moment seuil de plasticité, la contrainte étant reliée à la déformation totale par une relation linéaire, on se permet de procéder de la même manière que dans le domaine viscoélastique. Ainsi le modèle d'homogénéisation est donné par :

$$\sigma_c = \frac{1-v_f}{R(t)} (\sigma_{ec} + H\varepsilon + \mu_{vp}\dot{\varepsilon}) + v_f E_f \varepsilon \quad (\text{VI-28})$$

Dans un souci d'établir une analogie, on reformule l'équation ci-dessus comme suit :

$$\sigma_c = \frac{1}{R_c(t)} (\sigma_{ec} + H_c \varepsilon + \mu_{vp} \dot{\varepsilon}) \quad (\text{VI-29})$$

$$\text{Où } H_c = \left( H + \frac{R(t)v_f E_f}{1-v_f} \right); \frac{1}{R_c(t)} = \frac{1-v_f}{R(t)}$$

L'équilibre des moments dans les sections transversales dans le domaine viscoélastique-viscoplastique s'écrit :

$$M(x) = -2b \left( \int_0^{z_{ec}} \frac{1}{J_c(t)} \varepsilon(x, z, t) z dz + \int_{z_{ec}}^h \frac{\sigma_{ec} + H_c \varepsilon(x, z, t) + \mu_{vp} \dot{\varepsilon}(x, z, t)}{R_c(t)} z dz \right) \quad (\text{VI-30})$$

En intégrant, on obtient :

$$\dot{\chi}_c(x, t) = \frac{\chi_{ec}(t)}{J_c(t)} \frac{(R_c(t) - H_c J_c(t) - \frac{3}{2}) \left( \frac{\chi_{ec}}{\chi_c(x, t)} \right)^2 + H_c J_c(t) \left( \frac{\chi_c(x, t)}{\chi_{ec}} \right) - \frac{M(x) R_c(t)}{M_{ec}} + \frac{3}{2}}{\mu_{vp} \left( \left( \frac{\chi_{ec}}{\chi_c(x, t)} \right)^3 - 1 \right)} \quad (\text{VI-31})$$

L'équation obtenue est analogue à celle obtenue dans la modélisation de la matrice polyamide. On procède alors de la même manière pour sa résolution.

### VI.5. Discussion des résultats

Les équations gérant la réponse du modèle en flexion étant formulées, l'expérimentation adéquate étant réalisée, la minimisation de l'écart entre la modélisation et la simulation étant effectuée, il est lieu de présenter et discuter les résultats obtenus. L'objectif étant de déterminer les paramètres du modèle rhéologique, de les injecter dans les équations gérant le comportement



et de comparer les résultats obtenus avec les enregistrements expérimentaux. La validation du modèle et de l'approche dépend de la pertinence et la cohérence des résultats.

### VI.5.1. Paramètres identifiés en flexion

Le Tableau VI-1 présente les paramètres viscoélastiques et viscoplastiques identifiés. Le module de Young est indépendant du chargement. En flexion, on trouve que ce module élastique est moins que celui obtenu en traction. Les paramètres viscoélastiques  $K, \mu_{ve}$  et viscoplastiques  $H, \mu_{vp}$  sont des fonctions linéaires du moment de flexion dont les pentes sont représentés respectivement par les paramètres  $A, B, C, D$ .

Tableau VI-1. Paramètres viscoélastiques et viscoplastiques en flexion

Paramètres	$E$ (MPa)	$A$ (1/m <sup>3</sup> )	$B$ (s/m <sup>3</sup> )	$C$ (1/m <sup>3</sup> )	$D$ (s/m <sup>3</sup> )
Valeurs	2676.62	1711.2 e6	4269.8 e9	151.2 e6	21.9 e9

Les paramètres viscoélastiques et viscoplastiques réels du modèle rhéologique en fonction du moment de flexion sont présentés sur la Figure VI-3 à une échelle logarithmique.

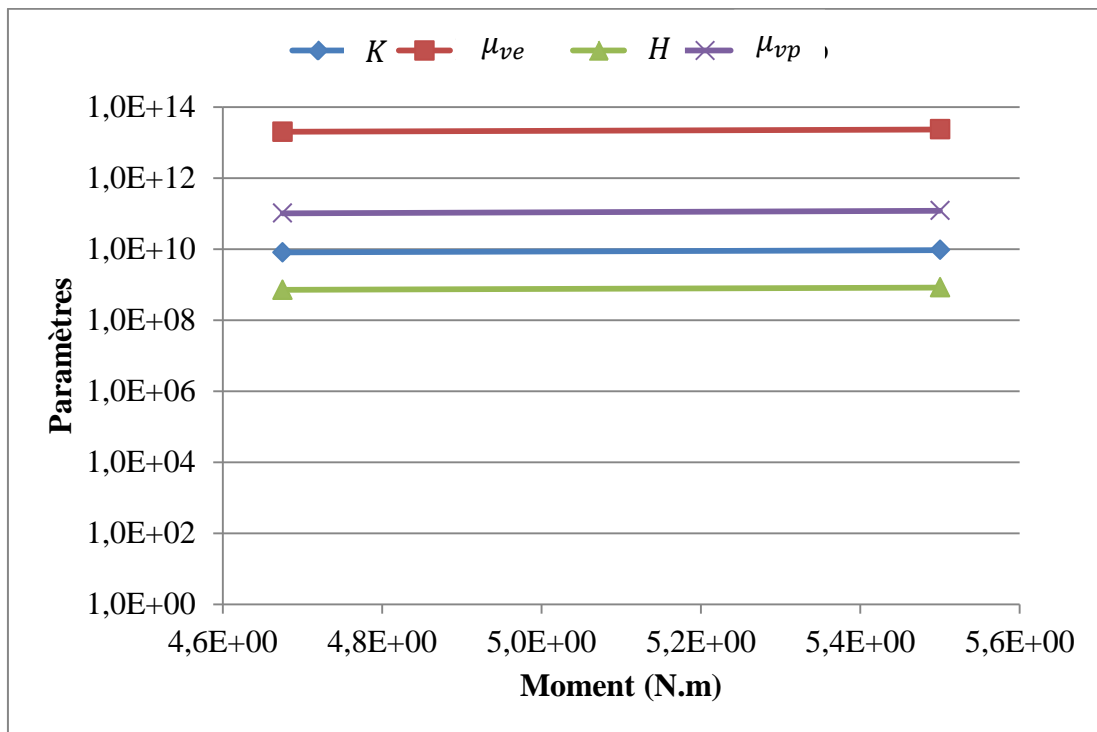


Figure VI-3. Paramètres en fonction de la contrainte à une échelle logarithmique

### VI.5.2. Courbes de la courbure en fluage

La Figure VI-4 correspond à des courbes typiques du fluage. Une courbure élastique consécutive à l'application de la charge se produit dans le matériau de façon quasi-instantanée, cette courbure augmente ensuite de manière progressive et non linéaire au cours du régime transitoire. Très vite la vitesse de courbure se stabilise, on assiste au régime stationnaire du fluage qui correspond au stade le plus long de déformation. Il est à mentionner que le fluage tertiaire n'est pas considéré dans cette étude. L'écart enregistré entre les enregistrements expérimentaux et les résultats du modèle est si faible que le modèle peut être validé.

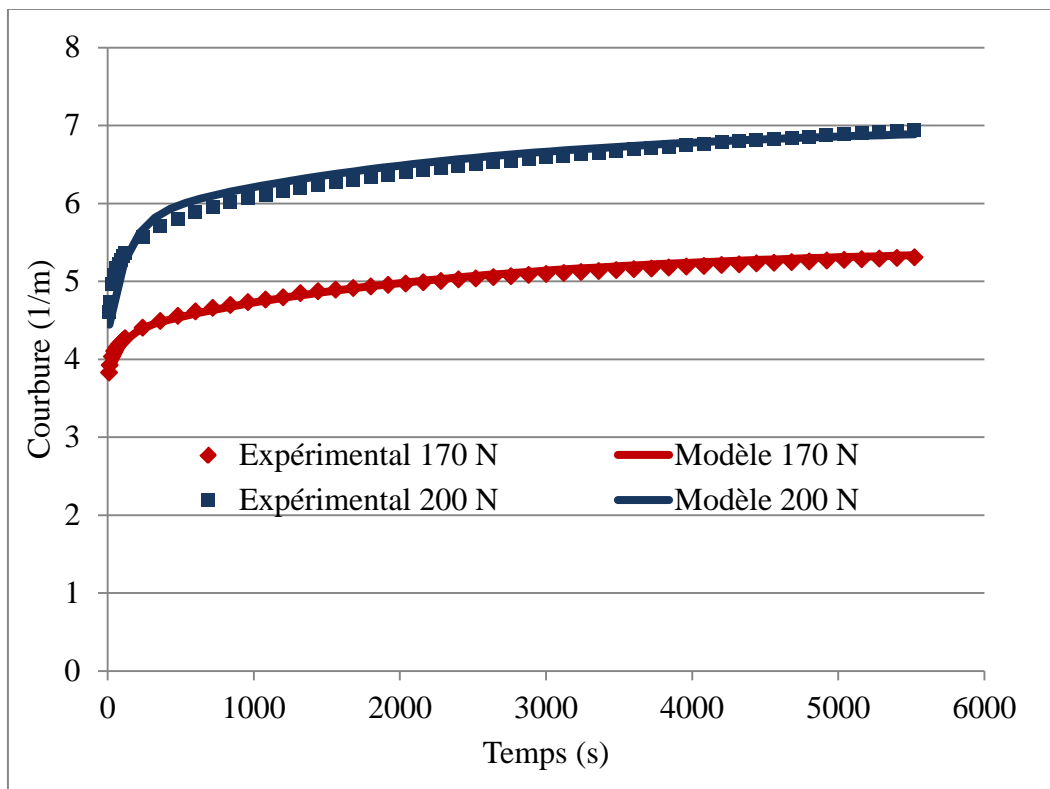


Figure VI-4. Courbes du fluage du polyamide 6 sous 170 N et 200 N

La Figure VI-5 montre l'évolution de la vitesse de courbure en fluage au cours du temps sous les deux charges constantes de 170 N et 200 N. On y observe une interprétation des courbes du fluage de la Figure VI-4. La vitesse de courbure est relativement considérable aux premiers temps qui suivent le chargement mais elle diminue de façon aussi considérable et non linéaire pendant le palier transitoire. Au palier stationnaire, elle prend une valeur très faible et constante quelque soit le chargement. Quant à la confrontation test modèle, on constate que le modèle sous-estime

faiblement la vitesse de courbure aux premiers temps pour les deux chargements différents. Les résultats se voient en revanche coïncider au palier secondaire.

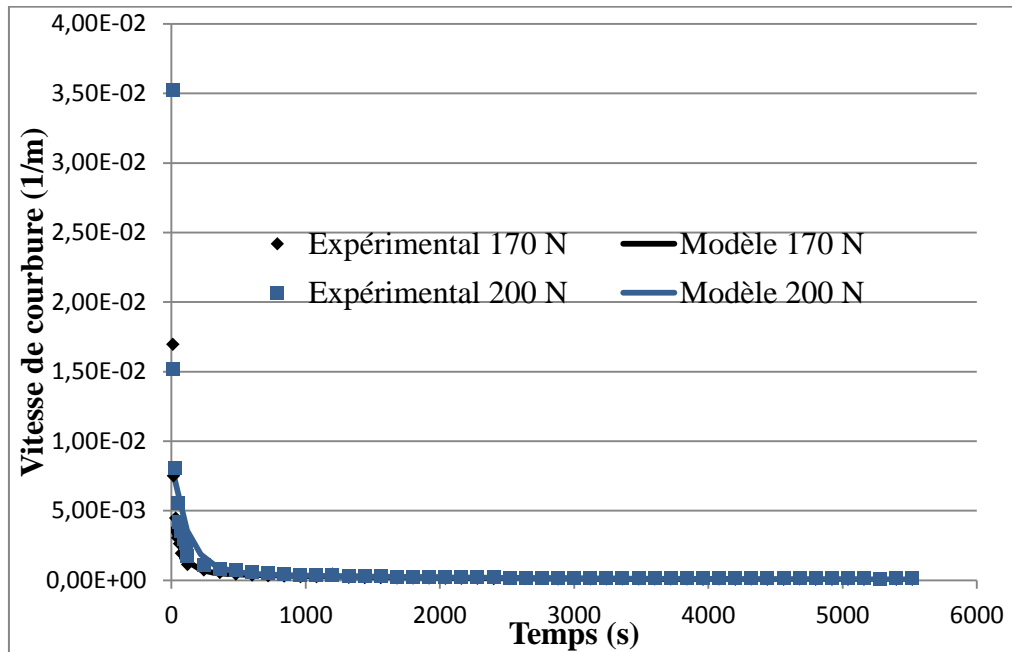


Figure VI-5. Evolution de la vitesse de courbure du polyamide 6 sous 170 N et 200 N

### VI.5.3. Répartition des contraintes et des déformations

Dans la section la plus chargée, les contraintes étant non uniformes suivant la hauteur de la poutre, l'écoulement viscoplastique ayant lieu une fois le seuil de plasticité atteint, on assiste à deux profils de contraintes dans la même section. La Figure VI-6 présente la répartition des contraintes et des déformations dans la section située à distances égales des appuis de la poutre. On y remarque que la contrainte est linéaire en fonction de la hauteur de la poutre à  $t = 0$  et prend sa valeur maximale sur les fibres externes. Cependant elle se redistribue dans la section transversale au cours du temps. A  $t = 5520$  s, on constate un profil bilinéaire dont l'intersection correspond à la contrainte seuil de plasticité située à la frontière viscoélastique  $z_e$ . La contrainte étant constante dans le cas du fluage, la diminution de la pente de la contrainte dans la zone viscoplastique est récupérée par une augmentation dans la zone viscoélastique. On se reporte à la Figure VI-7 pour suivre l'évolution de la contrainte enregistrée dans la section la plus sollicitée sur les fibres externes au cours du temps. On y voit une chute brutale juste après l'application de la charge suivie d'une diminution avec une très faible pente au cours du temps.

Quant au champ de déformation, il conserve son aspect linéaire en fonction de la hauteur de la poutre quelque soit le temps et quelque soit le chargement. Ce constat trouve son explication dans les hypothèses d'Euler-Bernoulli établissant une relation linéaire entre la déformation et la hauteur de la poutre dont la pente est la courbure. Cette dernière est un paramètre géométrique indépendant de la hauteur de la poutre.

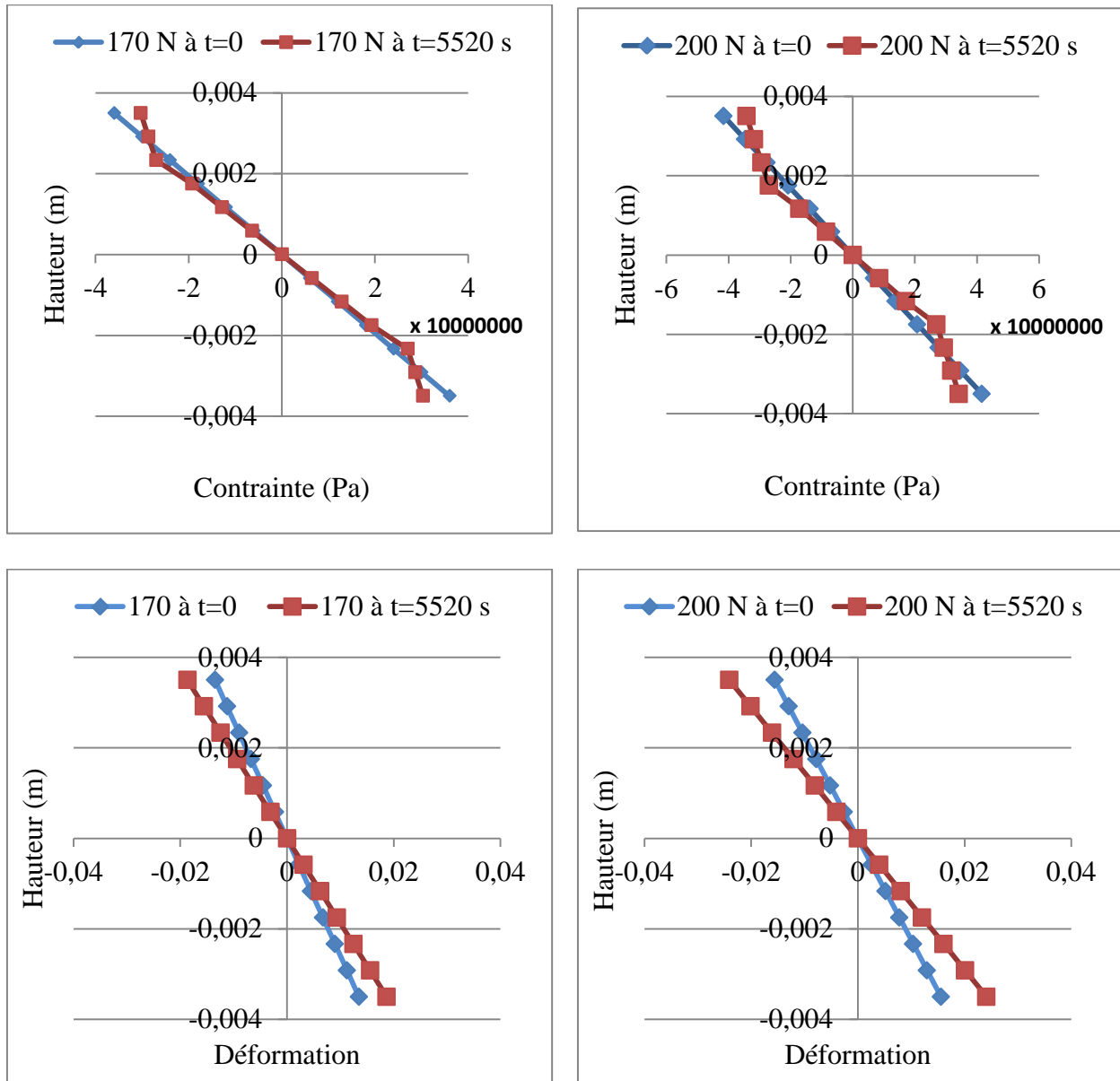


Figure VI-6. Répartition des contraintes et des déformations dans la section la plus sollicitée.

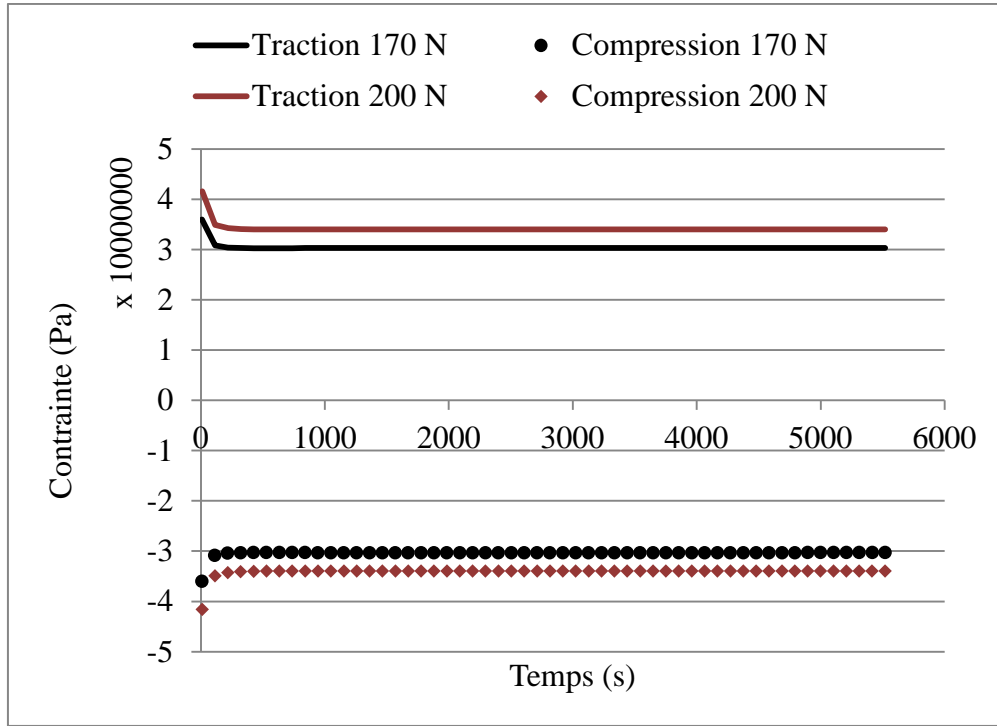


Figure VI-7. Evolution des contraintes sur les fibres externes.

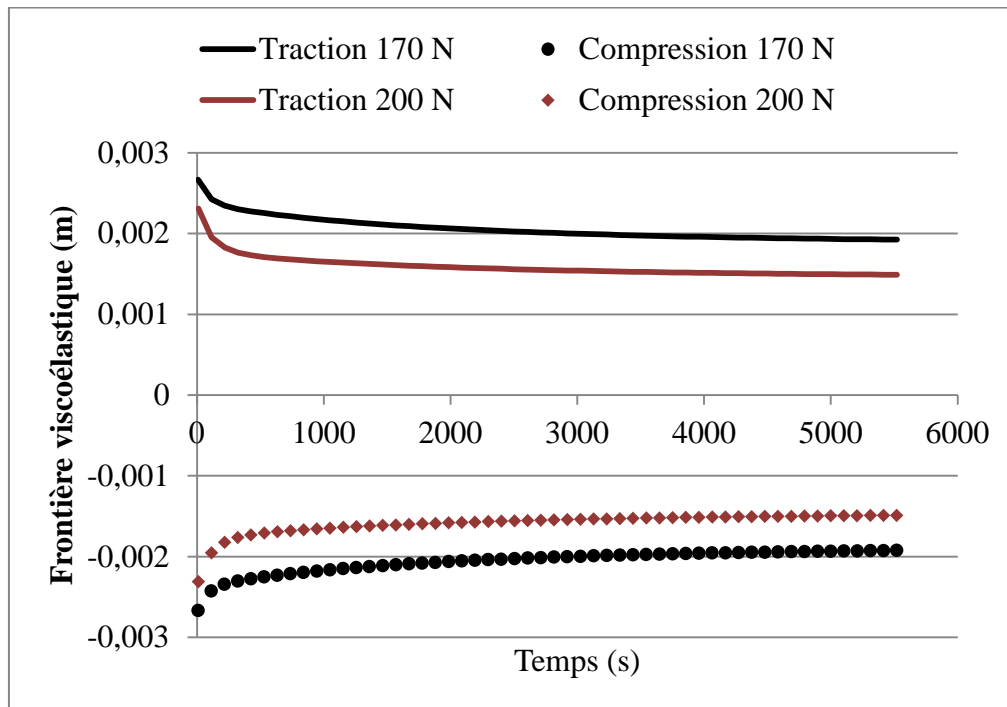


Figure VI-8. Evolution de la frontière viscoélastique.

#### **VI.5.4. Evolution de la zone viscoplastique**

Pour assurer la linéarité de la déformation en fonction de la hauteur de la poutre, les contraintes se répartissent dans la section transversale au cours du temps tel qu'il est illustré sur la Figure VI-6. De ce fait, la zone viscoplastique progresse en fonction du temps. On voit son évolution sous les deux niveaux de contraintes sur la Figure VI-8. Les courbes ont une allure semblable aux courbes du fluage. La hauteur de la zone viscoplastique étant fonction de la courbure, il est évident qu'elle est sensible au chargement. Ainsi, plus le chargement est grand, plus la zone viscoplastique est grande.

#### **VI.5.5. Influence du renfort sur les propriétés du polyamide**

Pour étudier le comportement du composite à matrice polyamide renforcée par des fibres de verre longues et unidirectionnelles, nous nous proposons des simulations à différentes fractions volumiques des fibres. Les propriétés mécaniques de ces dernières se réfèrent aux travaux de la thèse [130] avec un module de Young de  $72 \text{ GPa}$  et une contrainte seuil de  $1.5 \text{ GPa}$ . Les résultats de la simulation concernent la section la plus sollicitée d'une poutre en flexion trois points soumise à une charge concentrée de  $200 \text{ N}$  à distances égales des appuis.

##### **VI.5.5.1. Influence du renfort sur la fonction du fluage viscoélastique**

La Figure VI-9 permet de mettre en évidence l'influence des renforts en fibres sur le comportement viscoélastique de la matrice en polyamide. On y voit une chute considérable de la fonction du fluage à un renfort de 5%. En augmentant le taux des fibres, la fonction diminue aussi considérablement. Ceci traduit une grande résistance du composite sans que l'allure du fluage ne disparaisse entièrement. En outre, le taux de charge en fibres de verre permet d'augmenter la limite élastique du polyamide originalement faible tel qu'il est montré sur la Figure VI-10. En effet, avec un taux de charge de 15 % en fibres de verre, la limite élastique passe de  $27.47 \text{ MPa}$  à  $248.35 \text{ MPa}$ , ce qui est un considérable gain en matière de résistance. Cependant, le renfort en verre n'est pas sans inconvénients car il diminue la déformation à la rupture en raison de son caractère fragile.

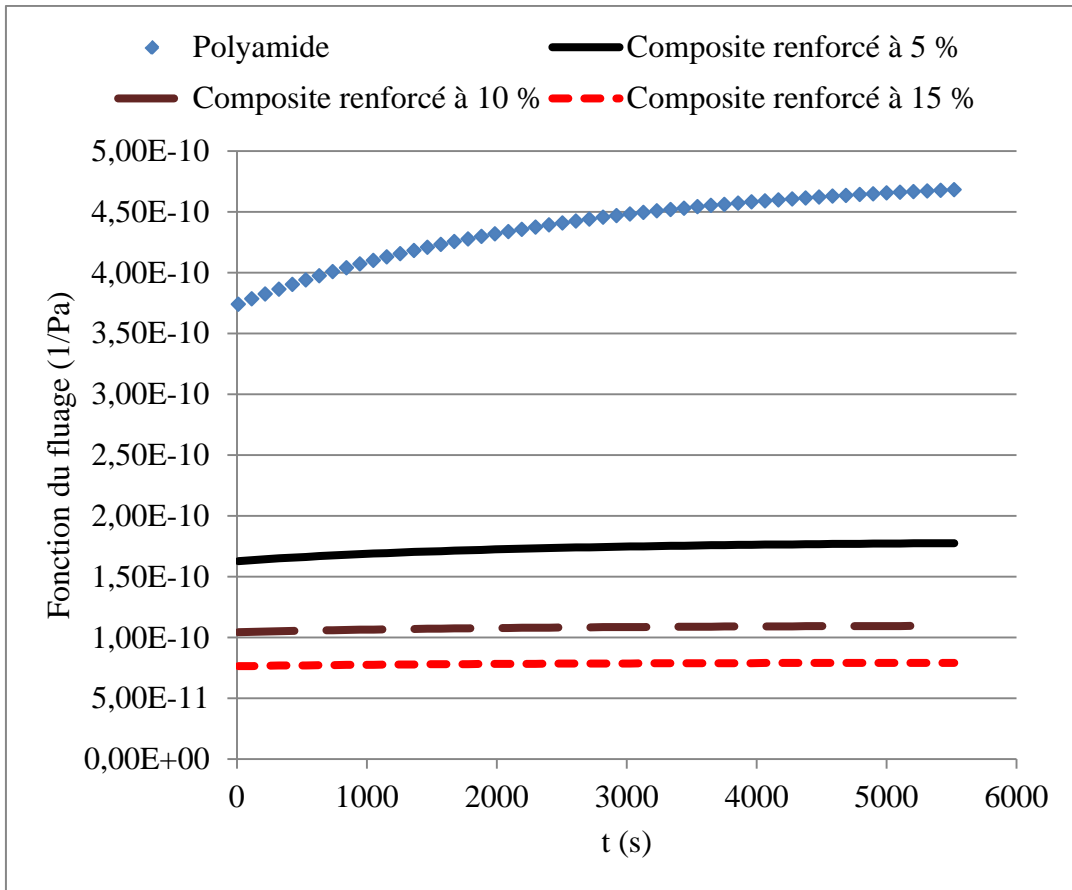


Figure VI-9. Influence du renfort sur la fonction du fluage.

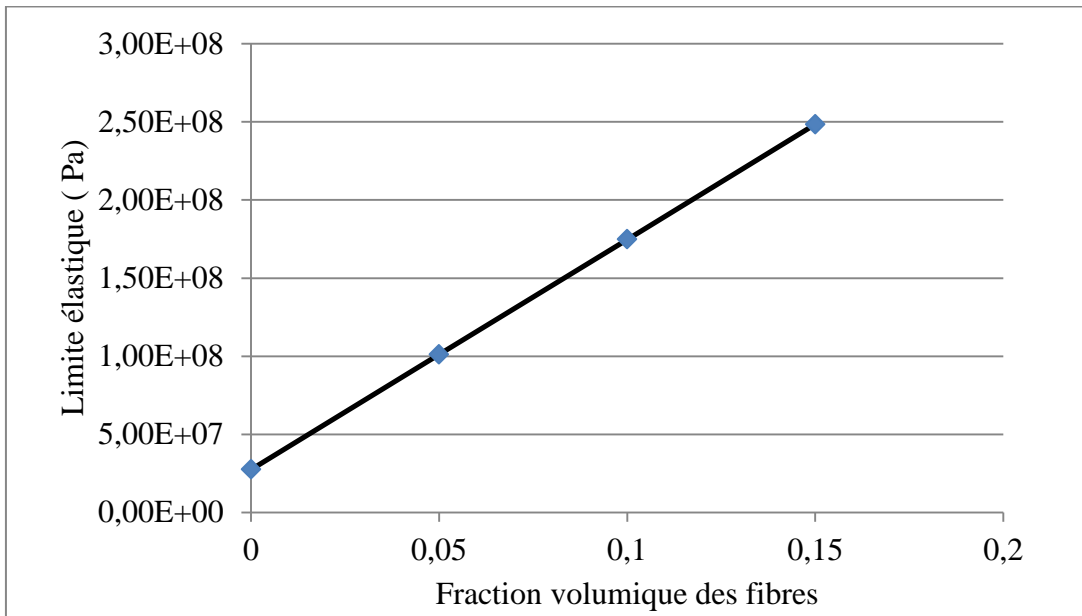


Figure VI-10. Limite élastique effective

### VI.5.5.3. Influence du renfort sur la courbure viscoélastique-viscoplastique.

La Figure VI-11 illustre la sensibilité de la courbure de flexion au taux de charge en fibres de verre. Au premier abord, nous nous rendons compte de l'importante influence du renfort en verre sur la courbure de flexion. Si l'allure du fluage est encore parente sur la courbure du composite faiblement renforcé, il n'en est pas de même avec des renforts plus grands. Ainsi avec un taux de fibres de verre de 15%, la courbure évolue à une très faible vitesse. Ceci signifie que le comportement élastique fortement rigide du verre prime sur la viscoélasticité de la matrice polyamide et domine le comportement effectif du composite. Ce constat s'interprète physiquement par la diminution du caractère visqueux du polyamide en raison de la présence des fibres de verre si rigides.

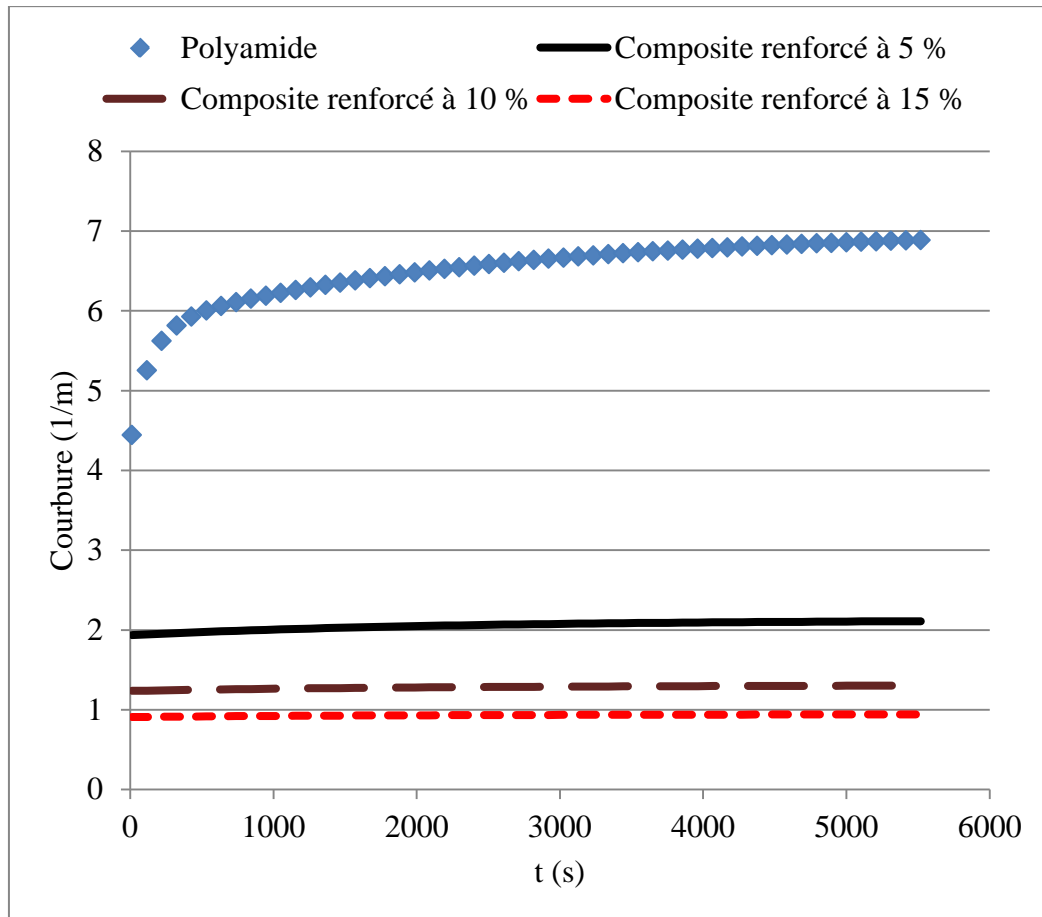


Figure VI-11. Influence du renfort sur la courbure



## VI.6. Bilan du chapitre

Nous nous sommes intéressés dans ce chapitre à la validation du modèle rhéologique proposé en flexion. Le modèle est supposé bilinéaire avec une composante viscoélastique et une autre viscoplastique. Suite à la formulation mathématique du problème, deux essais de fluage en flexion sous deux chargements différents ont été conduits. La formulation basée sur la relation moment courbure a abouti sur une équation différentielle du taux de courbure ayant exigé un calcul numérique pour sa résolution. Dans un souci de réduire le nombre de paramètres, ces derniers ont été liés au chargement, représenté par le moment de flexion, avec des fonctions linéaires. Afin de déterminer les paramètres du modèle, une fonction objectif minimisant l'écart entre le taux de courbure expérimentale et le taux de courbure modélisée est établie. La confrontation des résultats test modèle, représentée par les courbes de la courbure et du taux de courbure, ont montré une très bonne approximation. L'analyse est enfin appliquée sur un matériau hétérogène à deux phases. Il s'agit d'une matrice polyamide renforcée par des fibres de verre unidirectionnelles. Le composite est homogénéisé et l'influence du taux de charge en verre est discutée.

## Conclusion et perspectives

En conclusion, la thèse constitue une contribution dans la modélisation rhéologique du comportement viscoélastique viscoplastique d'une matrice polyamide. Une expérimentation représentée par des tests de traction et de flexion a été conduite dans le but d'identifier les paramètres du modèle. Une homogénéisation de la matrice renforcée par des fibres de verre a permis d'appliquer le modèle pour représenter le comportement des matériaux hétérogènes.

Partant de la connaissance des comportements rhéologiques des matériaux polymères, les théories de viscoélasticité et de viscoplasticité et les modèles qui s'y intègrent sont passées en revue. L'accent est mis sur les modèles analogiques représentés par le ressort, l'amortisseur et le patin. La combinaison de ces éléments en série ou en parallèle permet de générer une multitude de comportements susceptibles de prendre en compte plusieurs aspects phénoménologiques. En outre, les éléments en question peuvent être supposés en fonctions linéaires ou non linéaires des contraintes, des déformations ou des vitesses de déformation. A la lumière de ce qui précède, un modèle analogique élasto-viscoplastique prenant en compte l'élasticité instantanée, l'élasticité différée, la contrainte seuil de plasticité, la viscoplasticité et l'écroutissage est proposé.

L'expérimentation a été une étape indispensable dans ce travail. Elle a permis d'une part de mettre en évidence les phénomènes liés aux comportements des polymères dont la dépendance du comportement du temps et le fluage viscoélastique viscoplastique. D'autre part, ses résultats ont servi de référence pour l'identification des paramètres du modèle rhéologique proposé. Deux types d'essais distincts ont été conduits dans ce travail : un test de traction à différentes vitesses de déformation et un test de fluage en flexion sous différents niveaux de chargements. A la différence de la traction, la flexion génère des champs de contraintes et des déformations non uniformes dans l'éprouvette. Elle présente ainsi l'avantage d'être susceptible de tester le matériau aussi bien à la traction qu'à la compression dans un seul essai. De ce fait, une grande importance y a été allouée dans cette thèse.

Les méthodes inverses se sont avérées bien placées pour estimer les paramètres rhéologiques du modèle. Elles permettent de poser un problème d'optimisation avec une fonction objectif minimisant l'écart entre les enregistrements expérimentaux et les résultats du modèle. Plusieurs

méthodes d'optimisation sont en mesure de résoudre ce genre de problèmes. Or les méthodes métaheuristiques sont privilégiées étant donné que la fonction est très compliquée et fait intervenir un grand nombre de paramètres. Par conséquent, la technique d'optimisation par algorithmes génétiques a été favorisée dans ce travail.

En traction, l'approche adoptée a eu la particularité d'identifier la contrainte seuil de plasticité tout comme un paramètre du modèle. Celle-ci étant identifiée, deux domaines ont été distingués : un domaine viscoélastique et un autre viscoélastique-viscoplastique. Les paramètres du modèle régissant les deux domaines ont été séparément identifiés. Excepté le module de Young, qui est insensible à la vitesse de déformation, on a constaté que tous les autres paramètres y dépendent considérablement y compris la contrainte seuil de plasticité. La dépendance pourrait être traduite mathématiquement par des fonctions en loi puissance. Les paramètres étant injectés dans les équations régissant le comportement du polymère, la confrontation des résultats expérimentaux et ceux de la modélisation révèlent un très bon accord.

En flexion, l'originalité de notre stratégie consiste en proposant des paramètres rhéologiques liés au chargement par des fonctions linéaires. Cette proposition présente un double avantage. D'une part, elle permet d'utiliser des mécanismes analogiques simples sans faire recours aux modèles généralisés et ainsi réduire le nombre de paramètres. D'autre part, elle assure la simplicité de la formulation des équations de comportement. L'approche adoptée est basée sur la relation moment courbure de flexion. La flexion a donné lieu à deux domaines de comportements différents dans le sens de la longueur de la poutre : un domaine viscoélastique et un domaine viscoélastique-viscoplastique dont la frontière correspond à une valeur critique du moment correspondant à la flexion de la première fibre de la poutre. Les contraintes étant non uniformes, le modèle rhéologique étant compliqué, deux zones de comportements différents coexistent dans toute section du domaine viscoélastique-viscoplastique. Dans le domaine viscoélastique-viscoplastique, un recours aux méthodes numériques s'est imposé pour évaluer la courbure. On a également constaté une redistribution des contraintes dans les sections transversales en fonction du temps et ainsi une évolution des zones plastifiées qui suit une allure du fluage. La comparaison des résultats test modèle figurés par la courbure et sa vitesse se sont avérés très satisfaisants vu la complexité du problème.

La thèse est couronnée par une extension du modèle pour la représentation des matériaux hétérogènes. Un composite à matrice polyamide renforcé en fibres de verre est considéré. Le composite est homogénéisé, son comportement effectif est modélisé et l'influence des renforts sur sa résistance a été discutée. Les résultats ont révélé que le renforcement offre l'avantage d'une amélioration en matière de résistance définie par la fonction du fluage et la limite élastique.

Enfin, les travaux réalisés en appellent d'autres. Ainsi, apparaissent de nombreuses perspectives. En effet, la présente approche s'est principalement focalisée sur le comportement rhéologique de la matrice thermoplastique. Les renforts ont été supposés simples et unidirectionnels dans le sens du chargement. De ce fait, une prise en charge des composites beaucoup plus complexes et en situation tridimensionnelles constitue l'une de nos travaux en perspective. D'autres aspects s'y impliquent inévitablement tels que l'influence du cisaillement transverse et la flexion bi-modulaire. L'analyse devient trop complexe mais les solutions sont toujours possibles.

## Annexe : Théorie élémentaire des poutres

La poutre est un élément ayant la particularité d'avoir une dimension dont l'ordre de grandeur est supérieur aux deux autres. Les théories des poutres exploitent cette particularité en proposant des simplifications qui consistent à ramener le problème tridimensionnelle de référence à un problème unidimensionnel. Ces simplifications sont fondées sur des hypothèses cinématiques et statiques.

La théorie d'Euler-Bernoulli, qui s'applique uniquement dans le cas des poutres élancées, stipule que les sections planes de la poutre restent planes et orthogonales à la fibre moyenne après la déformation de manière à ce que le cisaillement transverse soit négligé. On se réfère aux ouvrages [57, 72] pour plus de détails. Ainsi en désignant par  $(u, v, w)$  les déplacements respectivement selon les directions  $(x, y, z)$  et par  $(\theta_x, \theta_y, \theta_z)$  les angles de rotation de la section droite respectivement aux axes  $y$  et  $z$  (Figure 1), le champ des déplacements à un temps  $t$  s'exprime par :

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, t) - z\theta_y(x, t) + y\theta_z(x, t) \quad (1)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, t) + z\theta_x(x, t) \quad (2)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, t) - y\theta_x(x, t) \quad (3)$$

En supposant que les déformations, les rotations et les déplacements sont petits et en définissant la courbure de flexion  $\chi$  comme étant la dérivée de l'angle de rotation  $\theta$  par rapport à l'axe  $x$ . Les déformations non nulles sont données par les expressions suivantes :

$$\varepsilon_{xx}(x, y, z, t) = \frac{\partial u_0(x, t)}{\partial x} - z\chi_y(x, t) + y\chi_z(x, t) \quad (4)$$

$$2\varepsilon_{xy}(x, y, z, t) = \frac{\partial v_0(x, t)}{\partial x} + \theta_z(x, t) + z\chi_x(x, t) \quad (5)$$

$$2\varepsilon_{xz}(x, y, z, t) = \frac{\partial w_0(x, t)}{\partial x} - \theta_y(x, t) - y\chi_x(x, t) \quad (6)$$

En supposant que les sections de la poutre ne subissent pas de torsion ( $\theta_x = 0$ ). Selon les hypothèses d'Euler-Bernoulli qui négligent les déformations de cisaillement, le champ de déformation finit par être uniaxial.

$$\varepsilon_{xx}(x, y, z, t) = \frac{\partial u_0(x, t)}{\partial x} - z\chi_y(x, t) + y\chi_z(x, t) \quad (7)$$

$$2\varepsilon_{xy}(x, y, z, t) = 0 \quad (8)$$

$$2\varepsilon_{xz}(x, y, z, t) = 0 \quad (9)$$

Ceci justifie l'hypothèse de l'orthogonalité des sections à la fibre moyenne avant et après la déformation de la poutre et ainsi nous permet de définir les angles de rotation  $\theta_z$  et  $\theta_y$  de la section droite par :

$$\frac{\partial v_0(x, t)}{\partial x} = -\theta_z(x, t) \quad (10)$$

$$\frac{\partial w_0(x, t)}{\partial x} = \theta_y(x, t) \quad (11)$$

Enfin le champ de déplacement prend sa forme la plus simple en supposant que la flexion est simple ( $v = 0$ ) et que la poutre ne subit pas des sollicitations axiales ( $u_0 = 0$ ).

$$u(x, y, z, t) = -z\theta_y(x, t) \quad (12)$$

$$v(x, y, z, t) = 0 \quad (13)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, t) \quad (14)$$

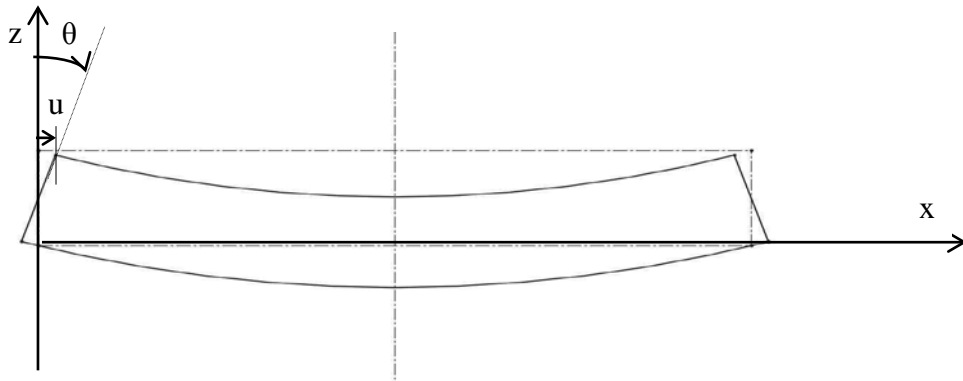


Figure VI-12. Hypothèses cinématiques d'Euler-Bernoulli

Le champ de déformation se réduit à son tour en :

$$\varepsilon_{xx}(x, y, z, t) = -z\chi_y(x, t) \quad (15)$$

Les hypothèses statiques portent sur le chargement et les conditions aux limites. En effet le principe de Saint-Venant [131] stipule qu'à une distance suffisamment loin des points d'application des efforts extérieurs, ces efforts peuvent être représentés par un torseur d'efforts équivalent dont les éléments sont une force résultante et un moment. Ces éléments de torseur équivalent peuvent être déterminés à partir de l'intégration des contraintes induites dans la section droite. La solution proposée par Saint-Venant, permettant de supprimer certaines composantes du tenseur des contraintes. Elle considère que la partie plane du tenseur des contraintes est nulle. Ainsi le tenseur de contrainte est donné :

$$\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & 0 & 0 \\ \sigma_{xz} & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (16)$$

Le cisaillement étant négligé, la seule contrainte non nulle est la contrainte longitudinale  $\sigma_{xx}$ . L'intégration de cette contrainte sur la section  $A$  dans laquelle elle est induite permet de déterminer les éléments du torseur d'efforts équivalent qui sont la force axiale  $N$  et le moment  $M$ .

$$N(x, t) = \int_A \sigma_{xx}(x, z, t) dA \quad (17)$$

$$M_y(x, t) = \int_A z\sigma_{xx}(x, z, t) dA \quad (18)$$

La loi de comportement permet enfin de résoudre le problème. Par exemple, en élasticité linéaire, la relation entre la contrainte et la déformation étant linéaire selon la loi de Hooke, le moment de flexion  $M$  aura également, après intégration de l'équation ci-dessus, une relation linéaire avec la courbure  $\chi$  qui est la dérivée de l'angle de rotation  $\theta$ .

$$M_y(x, t) = \frac{1}{EI} \chi_y(x, t) \quad (19)$$

Avec  $E$  et  $(I = \int_A z^2 dA)$  sont respectivement le module de Young et le moment d'inertie de la section par rapport à l'axe  $y$ .



## Références

- [1] A. Maurel-Pantel, E. Baquet, J. Bikard, J. L. Bouvard, and N. Billon, "A thermo-mechanical large deformation constitutive model for polymers based on material network description: Application to a semi-crystalline polyamide 66," *International Journal of Plasticity*, vol. 67, pp. 102-126, 2015.
- [2] O. U. Colak, "Modeling deformation behavior of polymers with viscoplasticity theory based on overstress," *International Journal of Plasticity*, vol. 21, pp. 145-160, 2005.
- [3] C. R. Siviour and J. L. Jordan, "High Strain Rate Mechanics of Polymers: A Review," *Journal of Dynamic Behavior of Materials*, vol. 2, pp. 15-32, 2016.
- [4] H. Abdul-Hameed, T. Messenger, F. Zaïri, and M. Naït-Abdelaziz, "Large-strain viscoelastic–viscoplastic constitutive modeling of semi-crystalline polymers and model identification by deterministic/evolutionary approach," *Computational Materials Science*, vol. 90, pp. 241-252, 2014.
- [5] A. D. Mulliken and M. C. Boyce, "Mechanics of the rate-dependent elastic–plastic deformation of glassy polymers from low to high strain rates," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 43, pp. 1331-1356, 2006.
- [6] D. A. Şerban, G. Weber, L. Marşavina, V. V. Silberschmidt, and W. Hufenbach, "Tensile properties of semi-crystalline thermoplastic polymers: Effects of temperature and strain rates," *Polymer Testing*, vol. 32, pp. 413-425, 2013.
- [7] H. Pouriayeali, S. Arabnejad, Y. B. Guo, and V. P. W. Shim, "A constitutive description of the rate-sensitive response of semi-crystalline polymers," *International Journal of Impact Engineering*, vol. 62, pp. 35-47, 2013.
- [8] R. Lakes, *Viscoelastic Materials*: Cambridge University Press, 2009.
- [9] J. Lemaitre and J. L. Chaboche, *Mechanics of Solid Materials*: Cambridge University Press, 1994.
- [10] M. T. Shaw and W. J. MacKnight, *Introduction to Polymer Viscoelasticity*: Wiley, 2005.
- [11] B. Miled, I. Doghri, and L. Delannay, "Coupled viscoelastic–viscoplastic modeling of homogeneous and isotropic polymers: Numerical algorithm and analytical solutions," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 200, pp. 3381-3394, 2011.
- [12] B. Davoodi, A. Muliana, D. Tscharnuter, and G. Pinter, "Analyses of viscoelastic solid polymers undergoing degradation," *Mechanics of Time-Dependent Materials*, vol. 19, pp. 397-417, 2015.

- [13] J.-L. Chaboche, "Thermodynamic formulation of constitutive equations and application to the viscoplasticity and viscoelasticity of metals and polymers," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 34, pp. 2239-2254, 1997.
- [14] M. Moutee, Y. Fortin, and M. Fafard, "A global rheological model of wood cantilever as applied to wood drying," *Wood Science and Technology*, vol. 41, pp. 209-234, 2007.
- [15] M. Kohandel, S. Sivaloganathan, and G. Tenti, "Estimation of the quasi-linear viscoelastic parameters using a genetic algorithm," *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 47, pp. 266-270, 2008.
- [16] C. W. Chung and M. L. Buist, "A novel nonlinear viscoelastic solid model," *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, vol. 13, pp. 1480-1488, 2012.
- [17] S. Gerlach and A. Matzenmiller, "Comparison of numerical methods for identification of viscoelastic line spectra from static test data," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 63, pp. 428-454, 2005.
- [18] B. Miled, "Coupled viscoelastic-viscoplastic modeling of homogeneous and reinforced thermoplastic polymers," Katholieke Universiteit Leuven, 2011.
- [19] J. Salençon, *Viscoélasticité pour le calcul des structures*. Palaiseau: Editions de l'école polytechnique, 2009.
- [20] S. P. Marques and G. J. Creus, *Computational viscoelasticity*: Springer Science & Business Media, 2012.
- [21] J. Besson, G. Cailletaud, J.-L. Chaboche, S. Forest, and M. Blétry, *Non-linear mechanics of materials* vol. 167: Springer, 2010.
- [22] R. A. Schapery, "Nonlinear viscoelastic solids," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 37, pp. 359-366, 2000.
- [23] D. Tscharnuter, M. Jerabek, Z. Major, and G. Pinter, "Uniaxial nonlinear viscoelastic viscoplastic modeling of polypropylene," *Mechanics of Time-Dependent Materials*, vol. 16, pp. 275-286, 2012.
- [24] R. A. Schapery, "On the characterization of nonlinear viscoelastic materials," *Polymer Engineering & Science*, vol. 9, pp. 295-310, 1969.
- [25] A. D. Drozdov, *Viscoelastic Structures: Mechanics of Growth and Aging*: Elsevier Science, 1998.
- [26] J. Argyris, I. St. Doltsinis, and V. D. da silva, "Constitutive modelling and computation of non-linear viscoelastic solids. Part I: Rheological models and numerical integration

- techniques," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 88, pp. 135-163, 1991.
- [27] E. C. Bingham, *Fluidity and Plasticity: By Eugene C. Bingham*: McGraw-Hill Book Compny, Incorporated, 1922.
- [28] P. Perzyna, "Fundamental Problems in Viscoplasticity," in *Advances in Applied Mechanics*. vol. Volume 9, pp. 243-377, Elsevier, 1966.
- [29] A. Winnicki, C. Pearce, and N. Bićanić, "Viscoplastic Hoffman consistency model for concrete," *Computers & Structures*, vol. 79, pp. 7-19, 2001.
- [30] J. R. Kim, "Laboratory development of a constitutive model for visco-elasto-plastic materials," *KSCE Journal of Civil Engineering*, vol. 3, pp. 261-271, 1999.
- [31] N. Gibson, C. Schwartz, R. Schapery, and M. Witzczak, "Viscoelastic, Viscoplastic, and Damage Modeling of Asphalt Concrete in Unconfined Compression," *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board*, vol. 1860, pp. 3-15, 2003.
- [32] L. Sun and Y. Zhu, "A serial two-stage viscoelastic–viscoplastic constitutive model with thermodynamical consistency for characterizing time-dependent deformation behavior of asphalt concrete mixtures," *Construction and Building Materials*, vol. 40, pp. 584-595, 2013.
- [33] F. Szmytka, L. Rémy, H. Maitournam, A. Köster, and M. Bourgeois, "New flow rules in elasto-viscoplastic constitutive models for spheroidal graphite cast-iron," *International Journal of Plasticity*, vol. 26, pp. 905-924, 2010.
- [34] N. Aleksy, G. Kermouche, A. Vautrin, and J. M. Bergheau, "Numerical study of scratch velocity effect on recovery of viscoelastic–viscoplastic solids," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 52, pp. 455-463, 2010.
- [35] A. D. Drozdov, "A constitutive model in viscoelastoplasticity of glassy polymers," *Polymer*, vol. 40, pp. 3711-3727, 1999.
- [36] M. Hadid, Y. Saadallah, A. Debilou, B. Guerira, and A. Guerrah, "The creep of an elastoviscoplastic beam under a bending loading," *Mechanics of Time-Dependent Materials*, vol. 18, pp. 573-587, 2014.
- [37] M. S. Al-Haik, H. Garmestani, and A. Savran, "Explicit and implicit viscoplastic models for polymeric composite," *International Journal of Plasticity*, vol. 20, pp. 1875-1907, 2004.

- [38] M. Kawai, J. Q. Zhang, Y. Xiao, and H. Hatta, "Modeling of Tension-Compression Asymmetry in Off-axis Nonlinear Rate-dependent Behavior of Unidirectional Carbon/Epoxy Composites," *Journal of Composite Materials*, vol. 44, pp. 75-94, 2010.
- [39] S. V. Thiruppukuzhi and C. Sun, "Models for the strain-rate-dependent behavior of polymer composites," *Composites Science and Technology*, vol. 61, pp. 1-12, 2001.
- [40] M. Szpieg, K. Giannadakis, and J. Varna, "Time-dependent Nonlinear Behavior of Recycled Polypropylene in High Tensile Stress Loading," *Journal of Thermoplastic Composite Materials*, vol. 24, pp. 625-652, 2011.
- [41] J. L. Chaboche, "A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories," *International Journal of Plasticity*, vol. 24, pp. 1642-1693, 2008.
- [42] S. Bodner and Y. Partom, "Constitutive equations for elastic-viscoplastic strain-hardening materials," *Journal of applied mechanics*, vol. 42, pp. 385-389, 1975.
- [43] K. Chan, S. Bodner, and U. Lindholm, "Phenomenological modeling of hardening and thermal recovery in metals," *Journal of Engineering Materials and Technology*, vol. 110, pp. 1-8, 1988.
- [44] D. Morin, G. Haugou, F. Lauro, B. Bennani, and B. Bourel, "Elasto-viscoplasticity Behaviour of a Structural Adhesive Under Compression Loadings at Low, Moderate and High Strain Rates," *Journal of Dynamic Behavior of Materials*, vol. 1, pp. 124-135, 2015.
- [45] A. J. McClung, G. P. Tandon, and J. W. Baur, "Strain rate-and temperature-dependent tensile properties of an epoxy-based, thermosetting, shape memory polymer (Veriflex-E)," *Mechanics of Time-Dependent Materials*, vol. 16, pp. 205-221, 2012.
- [46] K. Nakai and T. Yokoyama, "Strain Rate Dependence of Compressive Stress-Strain Loops of Several Polymers," *Journal of Solid Mechanics and Materials Engineering*, vol. 2, pp. 557-566, 2008.
- [47] E. M. Arruda, M. C. Boyce, and R. Jayachandran, "Effects of strain rate, temperature and thermomechanical coupling on the finite strain deformation of glassy polymers," *Mechanics of Materials*, vol. 19, pp. 193-212, 1995.
- [48] S. W. Kwon, W. L. Smith, and S. W. Lee, "Thermo-viscoplastic Modeling of Composites Exposed to Fire or High Temperature," *Journal of Composite Materials*, vol. 40, pp. 1607-1624, 2006.
- [49] R. Kumar, L. S. Ramachandra, and D. Roy, "Techniques based on genetic algorithms for large deflection analysis of beams," *Sadhana*, vol. 29, pp. 589-604, 2004.
- [50] F. Romano, "Deflections of Timoshenko beam with varying cross-section," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 38, pp. 1017-1035, 1996.

- [51] N. Jones, *Structural Impact*: Cambridge University Press, 2011.
- [52] A. P. Boresi and R. J. Schmidt, *Advanced mechanics of materials*: John Wiley & Sons, 2003.
- [53] H.-G. Kwak and S.-P. Kim, "Nonlinear analysis of RC beams based on moment–curvature relation," *Computers & Structures*, vol. 80, pp. 615-628, 2002.
- [54] G. Royer-Carfagni, "Can a moment-curvature relationship describe the flexion of softening beams?," *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 20, pp. 253-276, 2001.
- [55] M. Yekani Fard, A. Chattopadhyay, and Y. Liu, "Multi-linear stress–strain and closed-form moment curvature response of epoxy resin materials," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 57, pp. 9-18, 2012.
- [56] M. Dado and S. Al-Sadder, "A new technique for large deflection analysis of non-prismatic cantilever beams," *Mechanics Research Communications*, vol. 32, pp. 692-703, 2005.
- [57] S. P. Timoshenko and J. M. Gere, *Theory of Elastic Stability*: McGraw-Hill, 1963.
- [58] K. Bisshopp and D. Drucker, "Large deflection of cantilever beams," *Quarterly of Applied Mathematics*, vol. 3, 1945.
- [59] G. Lewis and F. Monasa, "Large deflections of cantilever beams of non-linear materials of the Ludwick type subjected to an end moment," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 17, pp. 1-6, 1982.
- [60] J. G. Freeman, "Mathematical theory of deflection of beam," *Philosophical Magazine Series 7*, vol. 37, pp. 855-862, 1946.
- [61] M. A. Vaz and M. Caire, "On the large deflections of linear viscoelastic beams," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 45, pp. 75-81, 2010.
- [62] W. F. Schmidt, "Nonlinear bending of beams using the finite element method," *Computers & Structures*, vol. 8, pp. 153-158, 1978.
- [63] Y. Tada and G. C. Lee, "Finite element solution to an elastica problem of beams," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 2, pp. 229-241, 1970.
- [64] M. Saje and S. Srpčič, "Large deformations of in-plane beam," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 21, pp. 1181-1195, 1985.

- [65] F. Xi, F. Liu, and Q. M. Li, "Large deflection response of an elastic, perfectly plastic cantilever beam subjected to a step loading," *International Journal of Impact Engineering*, vol. 48, pp. 33-45, 2012.
- [66] S. Al-Sadder and R. A. O. Al-Rawi, "Finite difference scheme for large-deflection analysis of non-prismatic cantilever beams subjected to different types of continuous and discontinuous loadings," *Archive of Applied Mechanics*, vol. 75, pp. 459-473, 2006.
- [67] J. Wang, J.-K. Chen, and S. Liao, "An explicit solution of the large deformation of a cantilever beam under point load at the free tip," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 212, pp. 320-330, 2008.
- [68] B. S. Shvartsman, "Analysis of large deflections of a curved cantilever subjected to a tip-concentrated follower force," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 50, pp. 75-80, 2013.
- [69] L. Chen, "An integral approach for large deflection cantilever beams," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 45, pp. 301-305, 2010.
- [70] H. Tari, "On the parametric large deflection study of Euler–Bernoulli cantilever beams subjected to combined tip point loading," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 49, pp. 90-99, 2013.
- [71] V. M. H. Ang, W. Wang, and T.-S. Low, "On the estimation of the large deflection of a cantilever beam," in *Industrial Electronics, Control, and Instrumentation, 1993. Proceedings of the IECON '93.*, vol.3, pp. 1604-1609, 1993.
- [72] S. Timoshenko and J. N. Goodier, *Theory of elasticity*, 3rd ed. New York, NY: McGraw-Hill, 1970.
- [73] C. Wang, J. N. Reddy, and K. Lee, *Shear deformable beams and plates: Relationships with classical solutions*: Elsevier, 2000.
- [74] S. P. Timoshenko, "On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars," *Philosophical Magazine Series 6*, vol. 41, pp. 744-746, 1921.
- [75] J. N. Reddy, C. M. Wang, and K. H. Lee, "Relationships between bending solutions of classical and shear deformation beam theories," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 34, pp. 3373-3384, 1997.
- [76] J. N. Reddy, "A simple higher-order theory for laminated composite plates," *Journal of applied mechanics*, vol. 51, pp. 745-752, 1984.
- [77] M. Levinson, "A new rectangular beam theory," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 74, pp. 81-87, 1981.

- [78] J. Lemaître and J.-L. Chaboche, *Mechanics of solid materials*. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- [79] T. Kaneko, "On Timoshenko's correction for shear in vibrating beams," *Journal of Physics D: Applied Physics*, vol. 8, p. 1927, 1975.
- [80] N. Dusunceli, O. U. Colak, and C. Filiz, "Determination of material parameters of a viscoplastic model by genetic algorithm," *Materials & Design*, vol. 31, pp. 1250-1255, 2010.
- [81] A. Gavrus, "Identification automatique des paramètres rhéologiques par analyse inverse," *École Nationale Supérieure des Mines de Paris*, 1996.
- [82] T. Harth, S. Schwan, J. Lehn, and F. G. Kollmann, "Identification of material parameters for inelastic constitutive models: statistical analysis and design of experiments," *International Journal of Plasticity*, vol. 20, pp. 1403-1440, 2004.
- [83] L.-O. Nordin and J. Varna, "Methodology for parameter identification in nonlinear viscoelastic material model," *Mechanics of Time-Dependent Materials*, vol. 9, pp. 57-78, 2005.
- [84] X.-T. Feng, B.-R. Chen, C. Yang, H. Zhou, and X. Ding, "Identification of visco-elastic models for rocks using genetic programming coupled with the modified particle swarm optimization algorithm," *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, vol. 43, pp. 789-801, 2006.
- [85] R. Lewandowski and B. Chorążyczewski, "Identification of the parameters of the Kelvin–Voigt and the Maxwell fractional models, used to modeling of viscoelastic dampers," *Computers & Structures*, vol. 88, pp. 1-17, 2010.
- [86] G. Y. Wang and M. Wang, "Multi-Parameter Identification of Geomembrane Viscoelastic-Plastic Creep Constitutive Model by Genetic Algorithm," in *Applied Mechanics and Materials*, pp. 182-188, 2011.
- [87] A. Andrade-Campos, R. de-Carvalho, and R. A. F. Valente, "Novel criteria for determination of material model parameters," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 54, pp. 294-305, 2012.
- [88] Z. Xiao, Y. Haitian, and H. Yiqian, "Identification of constitutive parameters for fractional viscoelasticity," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 19, pp. 311-322, 2014.
- [89] W. Zhang, C. Cho, and Y. Xiao, "An effective inverse procedure for identifying viscoplastic material properties of polymer Nafion," *Computational Materials Science*, vol. 95, pp. 159-165, 2014.

- [90] Y. Tillier, "Identification par analyse inverse du comportement mécanique des polymères solides: applications aux sollicitations multiaxiales et rapides," École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1998.
- [91] A. Tarantola, *Inverse problem theory and methods for model parameter estimation* vol. 89: siam, 2005.
- [92] S. S. Rao and S. Rao, *Engineering optimization: theory and practice*: John Wiley & Sons, 2009.
- [93] S. Kim and K. L. Kreider, "Parameter identification for nonlinear elastic and viscoelastic plates," *Applied Numerical Mathematics*, vol. 56, pp. 1538-1554, 2006.
- [94] J. Snyman, *Practical mathematical optimization: an introduction to basic optimization theory and classical and new gradient-based algorithms* vol. 97: Springer Science & Business Media, 2005.
- [95] D. E. Golberg, "Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning," *Addion wesley*, 1989.
- [96] J. H. Holland, *Adaptation in natural and artificial systems: an introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence*: U Michigan Press, 1975.
- [97] J. McCall, "Genetic algorithms for modelling and optimisation," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 184, pp. 205-222, 2005.
- [98] J. T. Alander, *An indexed bibliography of genetic algorithms: Years 1957-1993*: Art of CAD, 1994.
- [99] M. Dorigo, "Optimization, learning and natural algorithms," *Ph. D. Thesis, Politecnico di Milano, Italy*, 1992.
- [100] M. Dorigo and C. Blum, "Ant colony optimization theory: A survey," *Theoretical Computer Science*, vol. 344, pp. 243-278, 2005.
- [101] C. Blum, "Ant colony optimization: Introduction and recent trends," *Physics of Life Reviews*, vol. 2, pp. 353-373, 2005.
- [102] T. Liao, T. Stützle, M. A. Montes de Oca, and M. Dorigo, "A unified ant colony optimization algorithm for continuous optimization," *European Journal of Operational Research*, vol. 234, pp. 597-609, 2014.
- [103] S. Aflaki and P. Hajikarimi, "Implementing viscoelastic rheological methods to evaluate low temperature performance of modified asphalt binders," *Construction and Building Materials*, vol. 36, pp. 110-118, 2012.



- [104] A. Arikoglu, "A new fractional derivative model for linearly viscoelastic materials and parameter identification via genetic algorithms," *Rheologica Acta*, vol. 53, pp. 219-233, 2014.
- [105] M. Di Paola, A. Pirrotta, and A. Valenza, "Visco-elastic behavior through fractional calculus: an easier method for best fitting experimental results," *Mechanics of Materials*, vol. 43, pp. 799-806, 2011.
- [106] L. M. C. Simões, "Pareto solution of an inverse problem in elastoplasticity," *Advances in Engineering Software*, vol. 16, pp. 103-110, 1993.
- [107] E. Omerspahic, K. Mattiasson, and B. Enquist, "Identification of material hardening parameters by three-point bending of metal sheets," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 48, pp. 1525-1532, 2006.
- [108] G. Maier, F. Giannessi, and A. Nappi, "Indirect identification of yield limits by mathematical programming," *Engineering Structures*, vol. 4, pp. 86-98, 1982.
- [109] R. A. Duckett, S. Rabinowitz, and I. M. Ward, "The strain-rate, temperature and pressure dependence of yield of isotropic poly(methylmethacrylate) and poly(ethylene terephthalate)," *Journal of Materials Science*, vol. 5, pp. 909-915, 1970.
- [110] P.-A. Eggertsen and K. Mattiasson, "An efficient inverse approach for material hardening parameter identification from a three-point bending test," *Engineering with Computers*, vol. 26, pp. 159-170, 2010.
- [111] J. Malesza, "Identification of Bending Moment in Semi-fixed Beam," *Procedia Engineering*, vol. 57, pp. 746-753, 2013.
- [112] F. Yoshida, M. Urabe, and V. Toropov, "Identification of material parameters in constitutive model for sheet metals from cyclic bending tests," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 40, pp. 237-249, 1998.
- [113] L. Antonelli, P. Salvini, F. Vivio, and V. Vullo, "Identification of elasto-plastic characteristics by means of air-bending test," *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 183, pp. 127-139, 2007.
- [114] F. Yoshida, M. Urabe, R. Hino, and V. V. Toropov, "Inverse approach to identification of material parameters of cyclic elasto-plasticity for component layers of a bimetallic sheet," *International Journal of Plasticity*, vol. 19, pp. 2149-2170, 2003.
- [115] E. Brahim, S. Guessasma, A. Imad, and N. Benseddiq, "Identification of the mechanical behaviour of biopolymer composites using multistart optimisation technique," *Materials & Design*, vol. 51, pp. 391-397, 2013.

- [116] M. Hadid, Y. Saadallah, and M. Bahri, "The Stress Field in a Flexed Beam with an Elastoviscoplastic Behavior," *Advanced Materials Research*, vol. 856, pp. 373-378, 2014.
- [117] D. Holmes, J. Loughran, and H. Suehrcke, "Constitutive model for large strain deformation of semicrystalline polymers," *Mechanics of Time-Dependent Materials*, vol. 10, pp. 281-313, 2006.
- [118] P.-Y. Le Gac, M. Arhant, M. Le Gall, and P. Davies, "Yield stress changes induced by water in polyamide 6: Characterization and modeling," *Polymer Degradation And Stability*, vol. 137, pp. 272-280, 2017.
- [119] E. Riande, *Polymer viscoelasticity: stress and strain in practice* vol. 55: CRC Press, 2000.
- [120] H. Ashrafi and M. Farid, "A mathematical boundary integral equation analysis of standard viscoelastic solid polymers," *Computational Mathematics and Modeling*, vol. 20, pp. 397-415, 2009.
- [121] T. C. Papanastasiou and A. G. Boudouvis, "Flows of viscoplastic materials: Models and computations," *Computers & Structures*, vol. 64, pp. 677-694, 1997.
- [122] A. E. Mourid, R. Ganesan, and M. Lévesque, "Prédiction du comportement viscoélastique de matériaux composites textiles par une approche d'homogénéisation," presented at the Comptes Rendus des JNC 17, 2011.
- [123] S. Mercier, A. Molinari, S. Berbenni, and M. Berveiller, "Comparison of different homogenization approaches for elastic–viscoplastic materials," *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, vol. 20, p. 024004, 2012.
- [124] M. Lévesque, "Modélisation du comportement mécanique de matériaux composites viscoélastiques non linéaires par une approche d'homogénéisation," Thèse de Doctorat, Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, 2004.
- [125] S. J. Hollister and N. Kikuchi, "A comparison of homogenization and standard mechanics analyses for periodic porous composites," *Computational Mechanics*, vol. 10, pp. 73-95, 1992.
- [126] D. L. Schodek, P. Ferreira, and M. F. Ashby, *Nanomaterials, nanotechnologies and design: an introduction for engineers and architects*: Butterworth-Heinemann, 2009.
- [127] V. Srivastava, S. A. Chester, N. M. Ames, and L. Anand, "A thermo-mechanically-coupled large-deformation theory for amorphous polymers in a temperature range which spans their glass transition," *International Journal of Plasticity*, vol. 26, pp. 1138-1182, 2010.

- [128] C. Bauwens-Crowet, J. Bauwens, and G. Homes, "Tensile yield-stress behavior of glassy polymers," *Journal of Polymer Science Part A-2: Polymer Physics*, vol. 7, pp. 735-742, 1969.
- [129] A. Quarteroni, R. Sacco, and F. Saleri, *Méthodes numériques* Milano: Springer-Verlag Italia, 2004.
- [130] A. Al-Maghribi, "Comportement des matériaux composites à fibres courtes: applications à l'impact basse vitesse," Université Toulouse III-Paul Sabatier, 2008.
- [131] A. Saint-Venant, "Mémoire sur la flexion des prismes," *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, vol. 1, pp. 89-189, 1856.

**Résumé :** Etant des matériaux largement exploités dans diverses applications, l'étude des composites requiert un intérêt majeur. La présente thèse porte principalement sur la modélisation du comportement rhéologique des composite à matrice thermoplastique, la mise en évidence de leur comportement par l'expérimentation et l'identification des paramètres qui pilotent la loi de comportement. Le matériau de la matrice objet d'étude est un polyamide 6. Le modèle rhéologique proposé prend en compte l'élasticité instantanée, la viscoélasticité et la viscoplasticité. Des essais de traction à différentes vitesses de déformation et de flexion en fluage ont été conduits. Les paramètres du modèle rhéologique sont identifiés au moyen d'une analyse inverse. Il s'agit d'établir une fonctionnelle minimisant l'écart entre les enregistrements expérimentaux et les résultats obtenus par le modèle. Le problème d'optimisation est résolu à l'aide de la technique des algorithmes génétiques. En traction à vitesse de déformation constante, il est constaté que les paramètres du modèle dépendent en loi puissance de la vitesse de déformation. En flexion en fluage, les paramètres dépendent linéairement du moment de flexion. La confrontation des résultats du modèle aux enregistrements expérimentaux révèle une très bonne cohérence. Par conséquent, le modèle et l'approche sont validés. La matrice thermoplastique étant renforcée par des fibres, une technique d'homogénéisation a permis d'appliquer le modèle sur le composite.

**Mots clefs :** Viscoélastique ; viscoplastique ; thermoplastique ; flexion ; composite ; homogénéisation ; identification des paramètres.

**Abstract :** Being materials widely exploited in various applications, the study of composites requires a major interest. The present thesis focuses on the modeling of the rheological behavior of thermoplastic matrix composites, the demonstration of their behavior by experimentation and the identification of the parameters that govern the constitutive law. The material of the matrix object of study is a polyamide 6. The proposed rheological supports instantaneous elasticity, viscoelasticity and viscoplasticity. Traction tests at different strain-rates and creep bending were conducted. The parameters of the rheological model are identified by means of an inverse analysis. This is to establish a functional minimizing the difference between experimental and simulation results. The optimization problem is solved using the genetic algorithms technique. In traction at constant strain-rate, it is found that the parameters of the model depend in law on the power of the strain-rate. In creep bending, the parameters depend linearly on the bending moment. The comparison of the results of the model with the experimental records reveals a very good coherence. Therefore, the model and the approach are validated. The thermoplastic matrix being reinforced by fibers, a homogenization technique allowed the model to be applied to the composite.

**Keywords :** Viscoelastic ; viscoplastic ; thermoplastic ; flexion ; composite ; homogenization ; identification of parameters.

**ملخص:** تحظى دراسة المواد المركبة باهتمام كبير كونها تتوفر على خصائص تسمح لنا باستخدامها في مختلف التطبيقات. تركز هذه الأطروحة على نمذجة السلوك الريولوجي للمادة الأساس، إظهار سلوكها عن طريق الاختبار الميكانيكي و تحديد الوسائط التي تتحكم بقانون سلوكها. تتمثل المادة الأساس تحت الدراسة في البولي أميد 6. النموذج الريولوجي المقترح يدعم المرونة الفورية، المرونة اللزجة و اللدونة اللزجة. أجريت اختبارات الشد بسرعات تشوه مختلفة و اختبارات انحناء تحت شحن ثابت. يتم تحديد وسائط النموذج الريولوجي بواسطة تحليل عكسي يركز على إنشاء دالة للتقليل من الفارق بين النتائج التجريبية والنتائج التي تم الحصول عليها من قبل النموذج. يتم حل مشكلة التحسين باستخدام تقنية الخوارزميات الجينية. في اختبارات الشد بسرعات تشوه مختلفة وجدنا أن وسائط نموذج تتعلق بسرعة التشوه. أما في الانحناء، الوسائط المتحصل عليها لها علاقة خطية بعزم الانحناء. كشفت المقارنة بين نتائج النموذج و التسجيلات التجريبية عن تناسق جيد. و نتيجة لذلك تم التحقق من صحة النموذج والمنهج المتبع. في النهاية قمنا بتطبيق النموذج على مادة مركبة من بولي أميد مقوى بألياف الزجاج باستغلال تقنية التجانس.

**الكلمات المفتاحية :** المرونة اللزجة ؛ اللدونة اللزجة ؛ الترموبلاستيك ؛ الانحناء ؛ المواد المركبة ؛ التجانس ؛ تحديد الوسائط.