République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTE des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Thèse présentée en vue de l'obtention du diplôme de

Doctorat en Sciences en Mathématiques

Option : Mathématiques pures

Par Mr. Chenini Lahcen

Titre :

Inégalités dans les algèbres de Banach commutative ne possédant aucun idempotent non nul

Membres du Comité d'Examen :

Mr	Zouhir Mokhtari	Prof	Univ. Batna1. Batna	Président
Mr	Abdelkader Mokhtari	Prof	Univ. A. T. Laghouat	Rapporteur
Mr	Maamar Benbachir	Prof	Univ. Blida1. Blida	Examinateur
Mr	Abita Rahmoune	MCA	Univ. A. T. Laghouat	Examinateur
Mr	Mencer Tidjani	Prof	Univ. M. K. Biskra	Examinateur
Mr	Nadji Hermas	Prof	Univ. A. Z. Djelfaa	Examinateur

Soutenue publiquement le: 17/02/2022

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTE des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Thèse présentée en vue de l'obtention du diplôme de

Doctorat en Sciences en Mathématiques

Option : Mathématiques pures

Par Mr. Chenini Lahcen

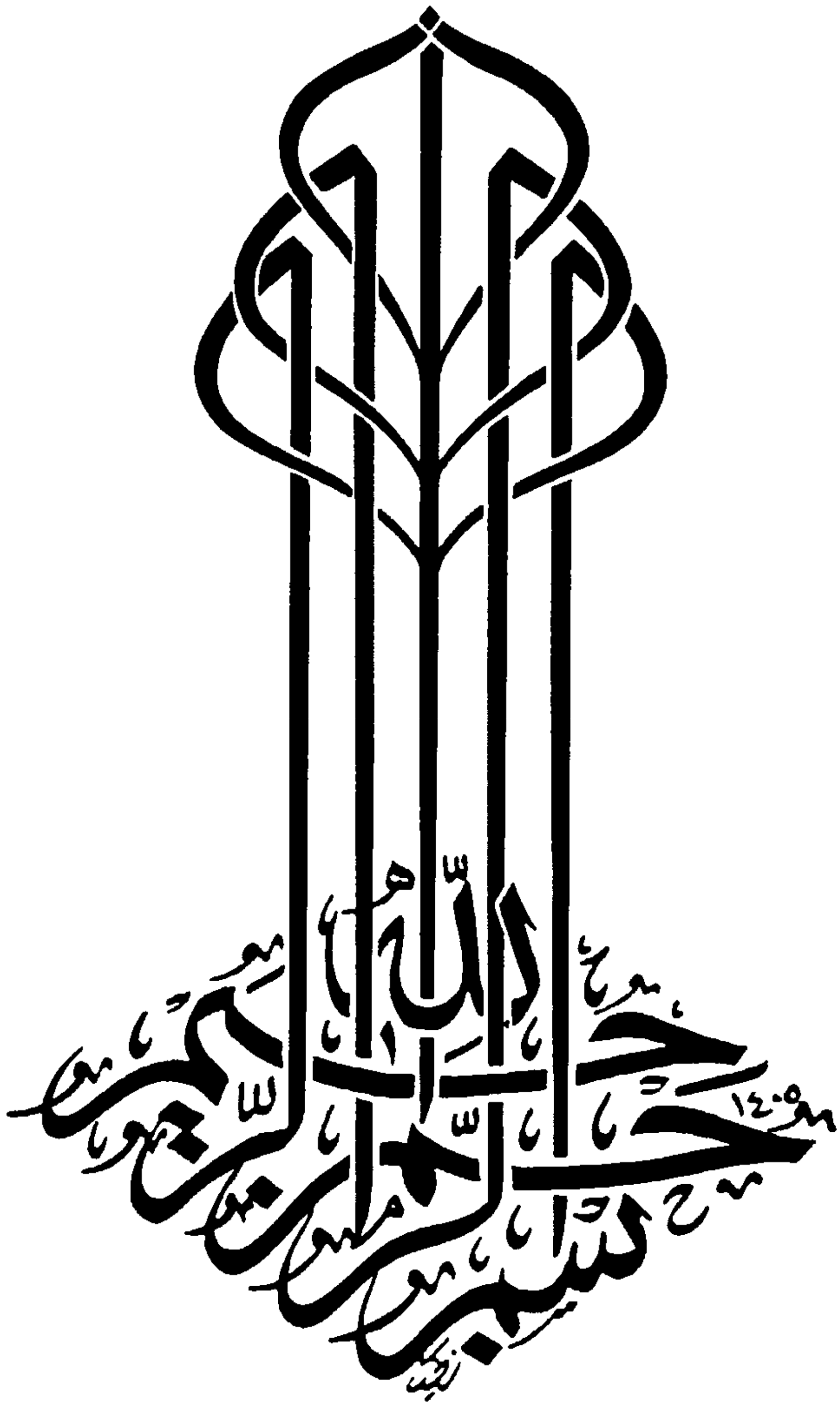
Titre :

Inégalités dans les algèbres de Banach commutative ne possédant aucun idempotent non nul

Membres du Comité d'Examen :

Mr	Zouhir Mokhtari	Prof	Univ. Batna1. Batna	Président
Mr	Abdelkader Mokhtari	Prof	Univ. A. T. Laghouat	Rapporteur
Mr	Maamar Benbachir	Prof	Univ. Blida1. Blida	Examinateur
Mr	Abita Rahmoune	MCA	Univ. A. T. Laghouat	Examinateur
Mr	Mencer Tidjani	Prof	Univ. M. K. Biskra	Examinateur
Mr	Nadji Hermas	Prof	Univ. A. Z. Djelfaa	Examinateur

Soutenue publiquement le: 17/02/2022


بسم الله الرحمن الرحيم
١٤٠٩

كلمـــــــة شكـــــــر

الحمد لله الذى أعانني بفضله على إنجاز هذا العمل العلمي المتواضع، يأرب لك الحمد كما يا ينبغي لجلال وجهك وعظيم سلطانك.

الحمد لله الذي يسر لي إتمام هذا الجهد المتواضع، والذي ما كان ليتم لولا فضل الله أولا ثم فضل أصحاب الفضل، الذين ذللوا لي الصعاب، وأفاضوا علي بعلمهم، ولم يبخلوا علي بنصحهم، حتى أثمر جهدي، وظهر هذا العمل المتواضع إلى حيز الوجود.
والصلاة والسلام على أشرف المرسلين، ومعلم المعلمين، سيدنا محمد بن عبد الله خاتم الأنبياء، وإمام المرسلين، القائل فيما روي عن ابن عمر رضي الله عنهما في الحديث الشريف

«مَنِ اسْتَعَاذَ بِاَللَّهِ فَأَعِيذُوهُ، وَمَنْ سَأَلَ بِاَللَّهِ فَأَعْطُوهُ، وَمَنْ دَعَاكُمْ فَأَجِيبُوهُ، وَمَنْ صَنَعَ إلَيْكُمْ مَعْرُوفًا فَكَافِئُوهُ، فَإِنْ لَمْ تَجِدُوا مَا تُكَافِئُونَهُ، فَادْعُوا لَهُ حَتَّى تَرَوْا أَنَّكُمْ قَدْ كَافَأْتُمُوهُ »
قال سعيد بن جبير رحمه الله تعالى : « لا يزالُ الرَّجلُ عَالِماً ما تَعلَّمَ، فإذا تَرَكَ التَّعلُّمَ وظَنَّ أنّه قد استغن واكتفى بما عنده فهو أَجْهَلُ ما يكون »
وعملا بقول النبي صلى الله عليه : « لا يَشْكُرُ اللَّهَ مَنْ لا يَشْكُرُ النَّاسَ »

وانطلاقًا من هذه المعاني السامية، فإنني أتشرف بتقديم الشكر والتقدير والعرفان إلى كل من ساهم في إنجاز هذا العمل، وأخص بالشكر العميق كلا من :

البروفيسور مختاري عبدالقادر من جامعة عمار الثليجي بالأغواط الذي تفضل بالإشراف علي هذه الرسالة، فوجدت منه العطاء الوافر، والعلم الزاخر، والنصح السديد، والتوجيه الرشيد، ورحابة الصدر، وحسن المعاملة مما أعانني على إتمام هذا الجهد فجزاه الله عني وعن طلاب العلم خير الجزاء .

فشكري موصول الى السادة الأساتذة أعضاء لجنة المناقشة الكرام على تفضلهم بقبول مناقشة هذه الأطروحة وعلى ما سوف يقدمونه من توجيهات سديدة تدعم هذا البحث و تسهم في إخراجه بشكل أفضل فجزاءهم الله عني خير الجزاء: ...وبعد؛

كما أتوجه بأسمى آيات الشكر والتقدير والعرفان بالجميل **للبروفيسور مختاري زهير** من **جامعة بسكرة** لتفضله بترأسه على هذه الأطروحة، نسأل الله أن يجعل ذلك في ميزان حسناته، ويجزيه عَنا خير الجزاء على كل ما قدم لطلبت العلم عموما وطلب الرياضيات على ووجه الخصوص.

كما أتقدم بالشكر الجزيل، والثناء الوافر للأستاذ الفاضل **البروفيسور امعمر بلبشير** من **جامعة البليدة1** على تكرم سيادته بالحضور وتحمل عناء السفر ليشرفني **بمناقشة** هذا العمل المتواضع ويمنحني من وقته وعلمه الثمين .فلسيادته منا كل الاحترام والتقدير فجزاه لله عنا وعن اسرة الرياضيات عامة خير الجزاء .

كلمـــــــــة شكـــــــــر

أما أستاذنا الفاضل **الدكتور مناصر تجاني** من **جامعة بسكرة** الذي يعد قيمة علمية وأخلاقية و قدوة في حسن الخلق والتواضع والعلم الغزير، فلسيادته أتوجه بخالص الشكر والتقدير والامتنان لتقبل سيادته **مناقشة** هذا العمل العلمي المتواضع راجيا من الله ان يحفظ سيادته من كل مكروه وان يجازيه الله خير الجزاء.

وأتقدم بعظيم شكري وامتناني إلى أستاذنا الفاضل **الدكتور عبيتة رحمون** من جامعة الأغواط على تكرم سيادته بالحضور وتحمل عناء السفر ليشرفني **بمناقشة** هذا العمل المتواضع ويمنحني من وقته وعلمه الثمين فجزاه الله عني خير الجزاء ،وبارك الله له في صحته وعلمه وعمله وأهله وجزاه الله عنا خير الجزاء في الدارين.

ولا يحسبن أحدا أن أواخر الأمور قد أنستني أوائلها **فإلى البروفيسورناجي هرمــاس** من جامعة الجلفة الذي تعلمت معه و منه معاني وحب الرياضيات ايام كنا طلبة في اواخر الثمانينات وبداية التسعينات من القرن الماضي .
وعرفانا مني بالجميل أتقدم بعظيم شكري وامتناني على تكرم سيادته بالحضور وتحمل عناء السفر ليشرفني بدعوته للحضور واثراء هذا العمل المتواضع ويمنحني من وقته وعلمه الثمين فجزاه الله عني خير الجزاء ،وبارك الله له في صحته وعلمه وعمله وأهله وأدعو الله **أن** يبارك فيه ويمده بوافر الصحة والعافية فجازه الله عنا خير الجزاء.

إلى كل الزملاء الكرام في قسمي الرياضيات بجامعتي الاغواط و غرداية وعلى رأسهم أستاذنا الكريم **البروفيسور قرباتي قدور** الذي كان دائمًا إلى جانبي حيث لم يبخل علينا بمساعداته وتوجيهاته فجزاه الله عنا وعن طلاب العلم خير الجزاء.
إلــى من علموني حروفاً من ذهب وكلمات من درر و عبارات من أسمى و أجلى عبارات في العلم إلــى من صاغوا لي من علمهم حروفا ومن فكرهم منارة تنير لنا مسيرة العلم والنجاح إلــى أساتذتي الكرام كلا باسمه و كلا حسب موقعه من الابتدائي الى الجامعي فالله أسال الرحمة والمغفرة لكل منهم من مات ، ورجاء إن يلحقهم من الأجر ذلك وذخره، وان يمدى الله الصحة والعافية وطول العمر لكل من هو حي يرزق .

وختاما أدعوا الله عز وجل أن يكون هذا العمل بداية موفقة على طريق البحث العلمي و ان يكون فيه الخير والثواب للدين و الدنيا، وان أكون وفقت فيما إليه قصدت.

وفي النهاية لا أدعي انني قد بلغت الكمال ، فالكمال لله وحده ، فإن كنت قد أصبت فمن الله المنان ، وان كنت قد أخطأت فمن نفسي ومن الشيطان, فالله ورسوله صلى الله عليه وسلم منه بريئان، وآخر دعونا أن الحمد لله رب

الباحث شنيني لحسن

إهداء

قال الله تعالى في كتابه الكريم

بسم الله الرحمن الرحيم

(فَاذْكُرُونِي أَذْكُرْكُمْ وَاشْكُرُوا لِي وَلَا تَكْفُرُونِ) (سورة البقرة، الآية 152)

الحمد لله على نعمه التي لا تعد ولا تحصى، الحمد لله دائماً وأبداً.
اهدي هذا العمل المتواضع الى

إلى من بلغ الرسالة وأدى الأمانة .. ونصح الأمة .. إلى نبي الرحمة ونور العالمين
سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم تسليما كثيرا

طوبى لمن حين العطاء يشكر، وحين الذنب يستغفر، وحين البلاء يصبر، ويعلم أن رزقه بيد الله إن تقدم أو تأخر.

الى روح أمي الغالية اللهم ارحهما واغفر لها و طيب ثراها و اكرم مثواها واجعل الجنة مستقرها و مأواها ونور مرقدها و عطر مشهدها و طيب مضجعها وآنس وحشتها و ارحم غربتها و قها عذاب القبر و عذاب النار و نقها من خطاياها كما ينقى الثوب الأبيض من الدنس و فسح لها في قبرها و اجعلها روضة من رياض الجنة و نقلها من ضيق اللحود و القبور إلى سعة الدور و القصور مع الذين أنعمت عليهم من الصديقين و الصالحين والشهداء . اللهم ارحم جميع موتى المسلمين واكتبهم في الشهداء الذين توفيتهم في هذا الوباء يارب العالمين

إلى أبي المبجل أطال الله في عمره وأمده بالصحة و العافية.

إهداء

الى أعز الناس ...أهدي ثمرة ,,,جهدي الدؤوب

إلى اخواتي الأعزاء كل من مبارك ومصطفى مع زوجاتهم وأولادهم.
إلى كل من أخواتي وأزواجهن وأولادهن إلى كل الأهل والأقارب ... جميعا وفقهم الله وسدد خطاهم.

الى رفيقة دربي زوجتي العزيزة وسندي ومعيني ومن لها الفضل في انجاز هذا العمل وإخراجه بعد الله بما حباني بها من وقفات ومؤازرة لتذليل كل الصعاب. الى أبنـائي و فلذات كبدي و قرة عيني عصام وصلاح ودعاء ومحمد على مبادرتهم بتهيئة الجو المناسب لي دوماً رغم تقصيري بحقهم أحياناً بسبب انشغالي عنهم ولتكون لهم نبراساً يخلق الدافع لديهم لمواصلة تحصيلهم العلمي لبلوغ أعلى الدرجات العلمية
إلى من يكن لي المودة والمحبة
اهدي عملي هذا الى كل المرضى الذين يعانون في صمت والى كل من يقوم بمساعدتهم من جنود الجيش الابيض .وإلى كل من مسح على رأس يتيم، واهتم بأمره .
الى جميع طلبة قسم الرياضيات والاعلام الالي بجامعة غرداية و إلى كل الأصدقاء الأوفياء والزملاء الأعزاء التي جمعتني بهم الحياة
إلى كل من جال مفكرتي وسقط سهوا من قلمي ولم تكتبهم مذكرتي
إلى كل من تصفح هذه المذكرة وانتفع بها وتذكرنا بدعائهم
إلى كل من يبحث عن المعرفة بين ثنايا هذه المذكرة
إلى كل من يعرفني ولا أعرفه

إلى جميع من كان له دور و إسهام في مساعدتي لإنجاز هذا العمل جزاءهم الله عني خير الجزاء.
وأسال الله أن ينفعنا به و يجعله خالصاً لوجهه الكريم.

الباحث شنيني لحسن

ملخص

نهتم في هذه الاطروحة بدراسة بعض المتباينات في جبور باناخ التبديلية , ذات وحدة مقربة ومحدودة و التي لا تملك عنصر عديمة النمو. لقد تم اثبات في الفصل الرابع من هذه الاطروحة و اعتمادا على المقال العلمي المرقم تحت $[16]$ حيث أنه إذا كانت A جبر باناخ تبديلي يحتوي على وحدة تقريبية تسلسلية محدودة $(e_n)_n$ بحيث يكون :

$$\lim\ \inf_{n\to+\infty}\|e_n^3 - e_n\| < \frac{2}{3\sqrt{3}} \quad \text{و} \quad \|e_n\| < 1$$

اذا الجبر A يملك وحدة مقربة ومحدودة و التي لا تملك عنصر عديمة النمو انظر نظرية 4 .1 . و التوطئة 2.4 اي بمعنى المخالفة انه اذا كان الجبر A لا يملك وحدة مقربة ومحدودة و التي لا تملك عنصر عديمة النمو عندئذ فان النتيجة 1.4

$$\lim_{n\to+\infty}\inf\|e_n^3 - e_n\| \geq \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

اذن A لديه وحدة متسلسلة تقريبية محدودة تتكون من عناصر عديمة القوى كما تمت دراسة الخصائص المختلفة المتعلقة بهذا النوع من المتباينات كتطبيق، نعطي المثال التالي، الجبر الجزئي المغلق الذي تم إنشاؤه بواسطة نصف زمرة مستمرة $(T(t))_{t>0}$ ومحدودة في نقطة الأصل كما هو موضح في القسم 3 من هذا الفصل.

اضافة الى الفصلين الاول والثاني لتمهيديين فان الفصل الثالث يتمحور دراسة جبور باناخ التبديلية التي تملك وحدة مقربة ومحدودة مدعما ذلك ببعض الامثلة التوضيحية .

الكلمات المفتاحية: وحدة تقريبية ; نصف زمرة ; جبر باناخ ; عنصر عديم النمو .

Résumé

Dans cette thèse, nous nous intéressons à l'étude de certaines inégalités dans une algèbre de Banach commutative A possédant une unité approchée borné séquentielle qui ne possède aucun idempotent non nul. Il a été prouvé dans le quatrième chapitre de cette thèse et d'après l'article scientifique référé sous $[16]$ tel que si A est une algèbre commutative de Banach contenant unité approché borné séquentielle $(e_n)_n$ telle que :
$\|e_n\| < 1$ et $lim\ inf_{n\to+\infty}\|e_n^3 - e_n\| < \frac{2}{3\sqrt{3}}$.
Donc A possède une unité approchée borné séquentielle ne possède aucun idempotent non nul.

Les différentes propriétés liées à ce type d'inégalités ont été étudiées comme application. Nous donnons l'exemple suivant, une sous algèbre fermée qui est construite par un semi-groupe continu $(T(t))_{t>0}$ et bornée au point d'origine comme le montre la section 3 de ce chapitre.

En plus des premier et deuxième chapitres que l'introduction, le troisième chapitre se concentre sur l'étude des Algèbres de Banach, commutatives qui a une unité approché borné, soutenue par quelques exemples illustratifs.

Mots-clés: unité approchée ; semi-groupe ; algèbre de Banach; élément idempotent.

Abstract

In this thesis, we are interested in the study of certain inequalities in a commutative Banach algebra possessing a bounded sequential approximate unit that has nonzero idempotent. It was proved in the fourth chapter of this thesis and according to the scientific article referred under $[16]$, such that if A is a commutative Banach algebra containing approximate bounded sequential unit $(e_n)_n$ such that $\|e_n\| < 1$ and $\lim\ \inf_{n\to+\infty}\|e_n^3 - e_n\| < \frac{2}{3\sqrt{3}}$.

so A has abounded sequential approximate unit has nonzero idempotent.

The different properties linked to this type of inequality have been studied as an application. We give the following example, a closed sub algebra which is constructed by a continuous semi-group and bounded at the point of origin as shown in section 3 of this chapter.

In addition to the first and second chapters as the introduction, the third chapter focuses on the study of commutative Banach Algebras, which has abounded approximate unit, supported by some illustrative examples.

Keywords: Approximate unit; semigroup; Banach algebra; idempotent element.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Une suite $(e_n)_n$ d'éléments d'une algèbre de Banach A est dite unité approchée bornée séquentielle ($u.a.b.s.$) s'il existe une constante M telle que :

$$\|e_n\| < M \text{ pour } n \in \mathbb{N} \text{ et } \forall x \in A \lim_{n\to\infty} e_n x = \lim_{n\to\infty} x e_n = x.$$

On dit que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ ou $u_n \in A$ est normalement convergente si et seulement si la série (réelle) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|$ est convergente.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in A$ tel que $\|x\| < 1$, on a $(e+x)^\alpha = e + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$.

Dans une algèbre de Banach un élément idempotent est un élément x tel que $x^2 = x$. Il est dit non trivial si x est non nul et s'il est différent de e (e désigne l'élément neutre de l'algèbre A).

Soit A une algèbre de Banach commutative, et soit $x \in A$, le point de départ est la construction des idempotents A. On montre que si

$$\|x\| < \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ et } \left\|x^3 - x\right\| \leq \frac{2}{\sqrt{3}},$$

alors on a un idempotent.

$$p(x) = \frac{e}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(e + \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(e + \frac{3\sqrt{3}}{2}x^3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x\right)^{\frac{-1}{2}}, \text{ (Lemme 4.1).}$$

Dans le cas où l'algèbre A possède une unité approchée séquentielle $(e_n)_n$ telle que :

$$\left\|\frac{\sqrt{3}}{2}e_n\right\| < 1 \text{ et } \left\|e_n^3 - e_n\right\| < \lambda, \ 0 < \lambda < \frac{2}{\sqrt{3}},$$

alors $(e_n)_n$ est une unité approchée bornée séquentielle formée par des idempotents (théorème 4.1).

Si $(T(t))_{t>0}$ un semi-groupe continu, et si A l'algèbre engendrée par le semi-groupe, on montre alors que si A n'est pas unitaire, alors la distance $\|T(3t) - T(t)\|$ ne peut pas devenir petite près de l'origine, plus précisément on a

$$\limsup_{t \to 0^+} \|T(3t) - T(t)\| \geq \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Dans le cas d'une algèbre de Banach commutative possédant une unité approchée bornée séquentielle $(e_n)_n$ bornée et si A ne possède aucun idempotent non nul, alors

$$\liminf_{n \to +\infty} \left\| e_n^3 - e_n \right\| \geq \frac{2}{3\sqrt{3}} \text{ (corollaire 4.1).}$$

Le chapitre 1 constitue un rappel des algèbres de Banach. Le chapitre 2 présente les semi-groupes dans une algèbre de Banach. Par contre le chapitre 3 est consacré aux unités approchées bornées dont les résultats obtenus font l'objet d'une publication internationale à une revue de catégorie A [2]. Finalement, le manuscrit est clôturé par une conclusion qui comprend un bilan de notre travail ainsi que les persepctives envisagées.

CHAPITRE 1

ALGÈBRES DE BANACH COMMUTATIVES

1.1 Généralités

Dans la suite, A est une algèbre de Banach commutative complexe avec élément unité e.

Définition 1.1 *[3, 4]Soit A un espace vectoriel, muni d'une troisième loi nommée multiplication. A est une algèbre si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. $x(yz) = (xy)z \quad \forall\, x, y, z \in A.$
2. $(x + y)z = xz + yz, \quad x(y + z) = xy + xz \quad \forall\, x, y, z \in A.$
3. $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y) \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}\ \forall\, x, y \in A.$

Si $xy = yx$ pour tout $x, y \in A$, alors l'algèbre A est commutative.

S'il existe $e \in A$ tel que $xe = ex$ pour tout $x \in A$, alors l'algèbre A est unitaire et e est l'élément unité de A.

Un élément x de A est inversible s'il existe un élément $y \in A$, $xy = yx = e$, et on notera x^{-1} l'inverse de l'élément x et $Inv(A)$ l'ensemble des éléments inversibles de l'algèbre A.

Si A est un espace vectoriel normé, tel que

$$\forall x,\ y \in A : \left\|xy\right\| \leq \|x\| \left\|y\right\|. \tag{1.1}$$

Alors A est une algèbre normée. De plus $\|e\| = 1$.

Si A est complète pour cette norme, alors l'algèbre A est appelée une algèbre de Banach.

Sous-algèbre

Définition 1.2 *[5]Soit A une algèbre sur le corps K. Un sous espace vectoriel $B \subseteq A$ est appelé sous-algèbre de A si*

$$x \in B,\ y \in B \text{ implique } xy \in B.$$

Remarque 1.1 *À partir de cette inégalité :*

$$\forall\, x, y \in A : \left\|xy\right\| \leq \|x\| \left\|y\right\|, \tag{1.2}$$

alors la multiplication dans l'algèbre de Banach est une opération

$$(x, y) \longmapsto xy$$

continue pour les deux variable x, y puisque si

$$x_n \longrightarrow x$$

et
$$y_n \longrightarrow y$$
alors
$$x_n y_n \longrightarrow xy.$$
Car
$$x_n y_n - xy = (x_n - x)\, y_n + x\,(y_n - y)\,.$$
En particulier, si $x_n \longrightarrow x$ *et* $y_n \longrightarrow y$ *donc*
$$x_n y \longrightarrow xy \text{ et } xy_n \longrightarrow xy. \tag{1.3}$$
On peut Remplacer (1.2) par (1.3)

Remarque 1.2 *Si A admet un élément unité e, alors e est unique car si e, e' deux éléments unités on a $ee' = e'e = e$.*

Définition 1.3 *Soit A une algèbre, un sous-algèbre $I \subset A$ s'appelle idéal à gauche de l'algèbre A si :*
$$x \in A,\ \ y \in I, \text{ alors } xy \in I.$$
un idéal à droite si
$$y \in A,\ z \in I, \text{ alors } zy \in I.$$
Un idéal qui est à la fois idéal à gauche et idéal à droite est appelé idéal bilatère. Dans toute algèbre A, il existe deux idéaux triviaux $I = \{0\}$ et $I = A$ tous les autres idéaux sont appelés idéaux propres. Un idéal maximal est un idéal propre qui n'est contenu dans aucun idéal propre.

Algèbre quotient

Définition 1.4 *Dans l'espace quotient A/I d'une algèbre par son idéal I, on peut définir pour les éléments de A non seulement les opérations linéaires mais encore une multiplication : soient $x \in \dot{x}$, $y \in \dot{y}$ on définit le produit $\dot{x}\dot{y}$ comme classe contenant le produit xy .*

1.2 Adjonction d'une unité [1]

Supposons que l'algèbre A n'admet pas d'élément unité. Alors on peut ramener le cas non unitaire au cas unitaire par une opération standard dite *adjonction* *d'une unité* [6] (d'ailleurs c'est possible même si l'algèbre originale A est unitaire). On munit l'ensemble $A^{\#} = A \times \mathbb{C}$ par des opérations :

$$\begin{aligned} (x,\lambda) + (y,\mu) &= (x+y, \lambda+\mu)? \\ \alpha\,(x,\lambda) &= (\alpha x, \alpha\lambda)? \\ (x,\lambda)\,(y,\mu) &= (xy + \lambda y + \mu x, \lambda\mu) \end{aligned}$$

et $x, y \in A,\ \ \lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Théorème 1.1 *$A^{\#}$ est une algèbre admettant un élément unité $e = (0,1)$.*

On identifié A à l'idéal maximal de $A^{\#}$ formée des éléments $(x,0)$ et on écrit $x+\lambda e$ au lieu de (x,λ).
Démonstration. La fonction $(a,\lambda) \to \|a\||\lambda|$ définit bien une norme. De plus, si (a_n, λ_n) est une suite de Cauchy, alors a_n et λ_n sont toutes deux de Cauchy. On déduit alors de la complétude de $\mathcal{A}$ et de $\mathbb{C}$ que $A^{\#}$ est complète pour cette norme. Donc $A^{\#}$ est une algèbre de Banach. ■

Exemple d'algèbre de Banach sans élément unité

Définition 1.5 *[7]On désigne par $L^1(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ intégrable au sense de Lebesgue, pour $f \in L^1(\mathbb{R})$ on pose :*

$$\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt$$

$\|.\|_1$ est une norme sur $L^1(\mathbb{R})$ et muni se cette norme $L^1(\mathbb{R})$ est un espace de Banach.

pour f et g éléments de $L^1(\mathbb{R})$, on définit le produit convolution de f par g et on note $f * g$ la fonction

$$[f * g](x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt.$$

L'intégrale ci-dessus est bien définie presque partout.

Proposition 1.1 *[7]Soient f, g et h des éléments dans $L^1(\mathbb{R})$. Alors :*

1) $f * g = g * f$.
2) $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ *et* $f * g$ *est un élément de* $L^1(\mathbb{R})$.
3) $f * (g * h)$ *et* $(f * g) * h \in L^1(\mathbb{R})$ *avec* $f * (g * h) = (f * g) * h$.
4) $f * (\alpha g + h)$ *et* $\alpha f * g + f * h \in L^1(\mathbb{R})$ *avec* $f * (\alpha g + h) = \alpha f * g + f * h$ *pour tout* $\alpha \in \mathbb{C}$

Démonstration. Soient $f, g, h \in L^1(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, alors :

1.

$$\begin{aligned}(f*g)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t)f(t)dt \\ &= \int_{+\infty}^{-\infty} g(s)f(x-s)d(x-s) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(s)f(x-s)ds = (g*f)(x)\end{aligned}$$

2. en utilisant le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}\|f*g\|_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} |(f*g)(x)|dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt|dx \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)||g(x-t)|dx\right] dt\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\|f*g\|_1 &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)||g(x-t)|dx\right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)||g(x-t)|dt\right] dx \\ &= \|f\|_1\|g\|_1, \text{ où } y = x-t\end{aligned}$$

d'où

$$\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1, \text{ alors } f*g \in L^1(\mathbb{R})$$

3. Pour démontrer $f*(g*h)$ et $(f*g)*h \in L^1(\mathbb{R})$ en utilisant **2)** et le produit de convolution est associatif car

$$\begin{aligned}(f*(g*h))(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f((y-x)-t)g(t)dt\right) h(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y-T)g(T-x)h(x)dxdT \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y-T)\int_{-\infty}^{+\infty} (g(T-x)h(x)dx)\,dT \\ &= ((f*g)*h)(y), \text{ où } T = x+t, \text{ soit } t = T-x, \text{ et } dt = dT.\end{aligned}$$

4. On utilise la même technique.
   D'après la proposition (1.1), l'espace $L^1(\mathbb{R})$ est une algèbre de Banach commutative non unitaire, et par une opération standard dite adjonction d'une unité on munit l'ensemble $L^{1\sharp} = L^1(\mathbb{R}) \times \mathbb{C} = \{(f,\alpha)/f \in L^1(\mathbb{R}), \alpha \in \mathbb{C}\}$.
   On écrit $f + \alpha I$ au lieu de (f,α) et I la fonction identique.
$$\begin{aligned}(f,\alpha)+(g,\beta) &= (f+g,\alpha+\beta),\\ (f,\alpha)(g,\beta) &= (fg+\alpha g+\beta f,\alpha\beta),\end{aligned}$$
   est la norme :
$$\|(f,\alpha)\| = \|f\|_{L^1} + |\alpha|.$$
   On obtient une algèbre de Banach unitaire.

■

Exemple 1 **i)** *L'espace $B(E)$ des opérateurs bornés sur l'espace de Banach E, muni de la norme*
$$\|T\|_{B(E)} = \sup_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|_E}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\|_E$$
et l'opération composition définie par
$$G : E \xrightarrow{T} E \xrightarrow{S} E,\ x \longmapsto Tx \longmapsto STx$$
$B(E)$ est une algèbre de Banach. En effet d'après la définition de la norme, il résulte
$$\|G\| \leq \|S\|\,\|T\|,$$
par suite la composition de deux opérateurs de $B(E)$ est continue. Si $E \neq \{0\}$, l'espace $B(E)$ est une algèbre de Banach unitaire, l'élément unité $1_{B(E)} = Id_E$.

ii) *L'ensemble $K(E)$ des opérateurs compacts de $B(E)$ est un idéal bilatère de l'algèbre de Banach $B(E)$.*

iii) *Soit K un espace compact non vide, considérons l'espace de Banach $C(K)$ des fonctions continues sur K à valeurs complexes muni du produit usuel :*
$$(fg)(z) = f(z)\,g(z),\ z \in K$$
et de la norme
$$\|f\| = \sup_{z\in K} |f(z)|$$
C'est une algèbre de Banach commutative unitaire ; l'élément unité est la fonction constante 1.

iv) *L'espace* $C^{\infty}(X)$ *des fonctions continues bornées sur un espace topolo-gique* X*, muni des opérations habituelles est une algèbre. Cas particulier du précédent, l'espace* $C(X)$ *des fonctions continues sur un espace compact* X *est une algèbre .*

v) *l'espace* $C_0(X)$ *des fonctions continues et nulles à l'infini sur un espace localement compact* X *muni de la norme de convergence uniforme, et les opérations habituelles, est une algèbre.*

vi) *L'espace vectoriel* $C_c(\mathbb{R}^n)$ *des fonction continues à support compact dans* $\mathbb{R}^n$*, muni du produit convolutif est une algèbre commutative non unitaire. Prouve de l'associativité : Soient* f, g *et* h *trois éléments de* $C_c(\mathbb{R}^n)$*. Pour* $a \in \mathbb{R}^n$ *donné, la fonction*

$$x,\ y \longmapsto f(a-x-y)\,g(x)\,h(y)$$

est continue et à support compact sur $\mathbb{R}^{2n}$*, donc intégrable sur* $\mathbb{R}^{2n}$ *en appliquant le théorème de Fubini :*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{2n}} f(a-x-y)\,g(x)\,h(y)\,dxdy &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(a-x-y)\,g(x)\,dx\right)h(y)\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}(f*g)(a-y)\,h(y)\,dy = [(f*g)*h](a).\end{aligned}$$

En intégrant d'abord par rapport à y *on trouve que l'intégrale considérée est égale à* $[(f*h)*g](a)$ *. La commutativité de la convolution permet alors de conclure.*

vii) *Soit* $L^1(\mathbb{R})$ *l'espace des fonctions intégrables*

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$

muni de la norme

$$\left\|f\right\|_{L^1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|f(t)\right| dt$$

et du produit

$$(f*g)(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,g(s-t)\,dt$$

est une algèbre de Banach non unitaire, et par adjonction d'une unité l'espace $L^1(\mathbb{R}) \times \mathbb{C}$ *muni de la norme*

$$\left\|(f,\lambda)\right\| = \left\|f\right\|_{L^1} + |\lambda|$$

et la multiplication

$$(f,\lambda)(g,\mu) = (f * g + \lambda g + \mu f, \lambda\mu)$$

est une algèbre de Banach unitaire.

viii) *l'espace de Banach* $L^1([0,1])$*, muni de la norme*

$$\left\|f\right\| = \int_0^1 \left|f(t)\right| dt, \ \ f \in L^1([0,1])$$

et pour $f,g \in L^1([0,1])$*, on définie* $f * g$ *par*

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-s)\, g(s)\, ds,\ t \in [0,1]$$

est une algèbre de Banach qui s'appelle algèbre de Volterra. Elle n'admet pas d'élément unité.

1.3 Morphismes d'algèbres

Soient A, B deux algèbres sur un même corps $\mathbb{k}$. Une application $\psi : A \longrightarrow B$ s'appelle morphisme (homomorphisme) de l'algèbre A dans l'algèbre B si elle est un morphisme de l'espace vectoriel A dans l'espace vectoriel B et si deux éléments quelconques x_1, x_2 de l'algèbre A satisfont à la relation : $\psi(x_1.x_2) = \psi(x_1).\psi(x_2)$. Un morphisme ψ de l'algèbre A dans l'algèbre B s'appelle isomorphisme de l'algèbre A dans l'algèbre B s'il est un isomorphisme de l'espace vectoriel A dans l'espace vectoriel B .

Remarque 1.3 *Un morphisme complexe sur l'algèbre A est un morphisme non identiquement null de l'algèbre A dans l'algèbre* $\mathbb{C}$ *.*

Proposition 1.2 *Si* ψ *un morphisme complexe sur l'algèbre A ayant un élément unité e, alors* $\psi(e) = 1$ *et* $\psi(x) \neq 0$ *pour tout x inversible dans A.*

Démonstration. Puisque f est non identiquement nulle, il existe $y \in A$ tel que

$$f(y) \neq 0.$$

Comme $f(y) = f(ye) = f(y) f(e)$ donc $f(e) = 1$. Si x est inversible, alors

$$f(x) f\left(x^{-1}\right) = f\left(xx^{-1}\right) = f(e) = 1.$$

Par conséquent $f(y) \neq 0$. ■

1.4 Homomorphismes et algèbres quotients

Proposition 1.3 *Soit I un idéal propre fermé dans une algèbre de Banach A et soit l'application quotient*

$$P : A \longrightarrow A/I, \;\; x \longmapsto \dot{x}$$

Alors l'espace A/I muni de la norme quotient est une algèbre de Banach et P est un homomorphisme.

Démonstration. D'après la proposition1.3, l'espace A/I muni de la norme quotient est un espace de Banach, nous montrerons que A/I est une algèbre de Banach. Si $x' - x \in I$ et $y' - y \in I$, on a

$$x'y' - xy = (x' - x)\, y' + x\,(y' - y)\,, \tag{1.4}$$

par la suite $x'y' - xy \in I$, donc $P\,(x'y') = P\,(xy)$. La multiplication dans A/I est défini par :

$$P\,(x)\, P\,(y) = P\,(xy)\,,\;\; x, y \in A, \tag{1.5}$$

d'après la remarque 1.3, l'espace A/I est une algèbre. D'autre part, puisque $\|P\,(x)\| \leq \|x\|$, d'après la définition de la norme quotient, donc P est continue. Soient $x_i \in A$ $(i = 1, 2)$ et $\delta > 0$. Alors

$$\left\|x_i + y_i\right\| \leq \|P\,(x_i)\| + \delta\,,\;\; (i = 1, 2). \tag{1.6}$$

Puisque

$$(x_1 + y_1)\,(x_2 + y_2) \in x_1x_2 + I,$$

on a

$$\|P\,(x_1x_2)\| \leq \left\|(x_1 + y_1)\,(x_2 + y_2)\right\| \leq \left\|x_1 + y_1\right\| \left\|x_2 + y_2\right\|, \tag{1.7}$$

et d'après (1.6) on a

$$\|P\,(x_1)\, P\,(x_2)\| \leq \|P\,(x_1)\|\, \|P\,(x_2)\|\,. \tag{1.8}$$

Finalement si e est l'élément unité de A, alors (1.5) montre que $P\,(e)$ est l'élément unité de A/I, et puisque $P\,(e) \neq 0$, (1.8) montre que

$$\|P\,(e)\| \geq 1 = \|e\|\,.$$

Puisque

$$\|P\,(x)\| \leq \|x\|\,,\;\; \text{pour tout } x \in A,$$

alors

$$\|P\,(e)\| = 1.$$

■

Remarque 1.4 *L'algèbre quotient A/I est commutative dès que l'algèbre A l'est.*

1.4.1 Propriétés fondamentales du spectre

Définition 1.6 *Soit x un élément d'une algèbre de Banach A. On appelle spectre de x l'ensemble :*

$$\sigma(x) = \left\{\lambda \in \mathbb{C},\ (\lambda e - x)^{-1} \text{ n'est pas inversible dans } A \right\}.$$

Le rayon spectral de x est le nombre :

$$r(x) = \sup\left\{|\lambda|,\ \lambda \in \sigma(x)\right\}.$$

Définition 1.7 *Soit A une algèbre de Banach et soit $InvA$ l'ensemble de tout les éléments inversibles de A. Si $x, y \in InvA$ alors $y^{-1}x$ est l'inverse de $x^{-1}y$.*

Proposition 1.4 *Soit A une algèbre de Banach, et $x \in A$ tel que $\|x\| < 1$. Alors*

i) *$e - x$ est inversible et $(e-x)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$.*

ii) $\left\|(e-x)^{-1} - e - x\right\| \leq \frac{\|x\|^2}{1-\|x\|}$.

iii) $\left|\psi(x)\right| < 1$ *pour tout homomorphisme complexe ψ sur A.*

Démonstration. Puisque $\|x^n\| \leq \|x\|^n$ et $\|x\| < 1$, les éléments

$$s_n = e + x + x^2 + \dots + x^n \tag{1.9}$$

forment une suite de Cauchy dans A. Comme A est complet, il existe $s \in A$ tel que $s_n \longrightarrow s$. On a

$$s_n(e-x) = e - x^{n+1} = (e-x)s_n,$$

et $x^n \longrightarrow 0$. La continuité de la multiplication implique que s est l'inverse de $e - x$. D'après (1.9), on a

$$\|s_n - e - x\| = \left\|x^2 + x^3 + \dots\right\| \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \|x\|^n = \frac{\|x\|^2}{1 - \|x\|}.$$

iii) Supposons que $\lambda \in \mathbb{C}$ et $|\lambda| \geq 1$, d'après **(i)** l'élément $e - \lambda^{-1}x$ est inversible et d'après la proposition 1.2, on a

$$1 - \lambda^{-1}\psi(x) = \psi\left(e - \lambda^{-1}x\right) \neq 0.$$

Donc $\psi(x) \neq \lambda$. Ainsi

$$\left|\psi(x)\right| < 1,$$

pour tout homomorphisme complexe ψ sur A . ■

Théorème 1.2 *Soit A une algèbre de Banach et soit $x \in InvA$, $h \in A$. Si*

$$\|h\| < \frac{1}{2}\|x\|^{-1},$$

alors

$$x + h \in InvA.$$

Démonstration. Puisque

$$x + h = x\left(e + x^{-1}h\right),$$

et

$$\left\|x^{-1}h\right\| \leq \frac{1}{2},$$

d'après le théorème 1.1, il résulte que

$$x + h \in InvA.$$

■

Théorème 1.3 *Soit A une algèbre de Banach et soit x un élément de A. Alors on a :*

i) *$InvA$ est un sous ensemble ouvert de A.*

ii) *L'application $x \longmapsto x^{-1}$est continue.*

Démonstration. i) D'après le théorème1.2, l'ensemble $InvA$ est ouvert.

ii) Soit $a \in InvA$ et $\|x\| < \left\|a^{-1}\right\|^{-1}$. Alors la série $\sum_{i=0}^{\infty}\left(xa^{-1}\right)^i$ est convergente dans A et

$$(a - x)^{-1} = a^{-1}\sum_{i=0}^{\infty}\left(xa^{-1}\right)^i.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\left\|(a-x)^{-1} - a^{-1}\right\| &= \left\|a^{-1}\sum_{i=1}^{\infty}\left(xa^{-1}\right)^i\right\| \\
&\leq \left\|a^{-1}\right\|\sum_{i=1}^{\infty}\|x\|^i\left\|a^{-1}\right\|^i = \frac{\|x\|\left\|a^{-1}\right\|^2}{1 - \|x\|\,\|a^{-1}\|},
\end{aligned}$$

donc

$$(a - x)^{-1} \longrightarrow a^{-1} \text{ pour}$$

■

Remarque 1.5 *Soit A une algèbre de Banach et soit x un élément de A, si $\lambda \in \sigma(x)$, d'après le proposition 1.4, il résulte que $\left[\lambda\left(e - \frac{x}{\lambda}\right)\right]^{-1}$ n'est pas inversible implique*

$$\left\|\frac{x}{\lambda}\right\| \geq 1,$$

donc

$$|\lambda| \leq \|x\|.$$

Ainsi

$$\sigma(x) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}, \ |\lambda| \leq \|x\|\}.$$

Définition 1.8 *Soit A une algèbre unitaire, et soit x un élément de A. La résolvante de x est l'ensemble :*

$$\varrho(x) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \lambda e - x \in InvA\},$$

c'est-à- dire

$$\varrho(x) = \mathbb{C} \setminus \sigma(x).$$

La fonction résolvante de x définie par :

$$R : \varrho(x) \longrightarrow InvA, \ \lambda \longmapsto (\lambda e - x)^{-1}$$

Proposition 1.5 *La résolvante d'un élément x de A a les propriétés suivantes :*

i) $R(\lambda; x) R(\mu; x) = R(\mu; x) R(\lambda; x)$.

ii) *Si $\lambda, \mu \in \varrho(x)$, alors*

$$R(\lambda; x) - R(\mu; x) = (\mu - \lambda) R(\lambda; x) R(\mu; x).$$

iii) *Si $\lambda \in \mathbb{C}$ et $|\lambda| > \|x\|$, alors $\lambda \in \varrho(x)$ et on a :*

$$R(\lambda; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^{n+1}}.$$

Démonstration.
i) on a

$$\begin{aligned} R(\lambda; x) R(\mu; x) &= (\lambda e - x)^{-1} (\mu e - x)^{-1} = [(\mu e - x)(\lambda e - x)]^{-1} \\ &= [(\lambda e - x)(\mu e - x)]^{-1} = (\mu e - x)^{-1} (\lambda e - x)^{-1} \\ &= R(\mu; x) R(\lambda; x) \end{aligned}$$

ii) soient $\lambda, \mu \in \varrho(x)$ on a

$$R(\lambda; x) = R(\lambda; x) R(\mu; x)(\mu e - x),$$

et

$$R(\mu;x) = R(\mu;x)\, R(\lambda;x)\,(\lambda e - x)\,,$$

donc

$$R(\lambda;x) - R(\mu;x) = (\mu - \lambda)\, R(\lambda;x)\, R(\mu;x)$$

iii) soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| > \|x\|$. Alors $\left\|\lambda^{-1}x\right\| < 1$, d'où

$$\left(e - \lambda^{-1}x\right) \in InvA.$$

Il résulte d'après le théorème 1.2 que

$$\left(e - \lambda^{-1}x\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\lambda^{-1}x\right)^{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^n}.$$

Par conséquent

$$R(\lambda;x) = (\lambda e - x)^{-1} = \lambda^{-1}\left(e - \lambda^{-1}x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^{n+1}}.$$

■

Lemme 1.1 *Soit A une algèbre de Banach unitaire, et soit $x \in A$ quelque soit $g \in A'$ le dual topologique de A, la fonction $g \circ R$ est holomorphe de plus*

$$\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \left|g(R(\lambda;x))\right| = 0.$$

Démonstration. Fixons $\mu \in \varrho(x)$ et soit $\lambda \in \varrho(x) \setminus \{\lambda\}$; posons $f = g \circ R$ alors

$$\begin{aligned} \frac{f(\lambda) - f(\mu)}{\lambda - \mu} &= \frac{g(R(\lambda;x) - R(\mu;x))}{\lambda - \mu} \\ &= g(-R(\lambda;x)\, R(\mu;x)) \underset{\lambda \longrightarrow \mu}{\longrightarrow} -g\left(R(\mu;x)^2\right), \end{aligned}$$

d'après le théorème 1.2, $g\left(R(\mu;x)^2\right)$ existe. Donc f est holomorphe sur $\varrho(x)$.

D'autre part on a

$$\begin{aligned} \left|g(R(\lambda;x))\right| &\leq \left\|g\right\| \|R(\lambda;x)\| = \left\|f\right\| \left\|(\lambda e - x)^{-1}\right\| \\ &= \left\|f\right\| \frac{1}{|\lambda|} \left\|\left(e - \frac{1}{\lambda}x\right)^{-1}\right\|. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \left|g(R(\lambda;x))\right| \leq 0.$$

Donc

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \left|g(R(\lambda;x))\right| = 0.$$

■

Théorème 1.4 *Soit A une algèbre de Banach unitaire, et soit $x \in A$, alors le spectre de x, $\sigma(x)$ est compact et non vide.*

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ si $\lambda > \|x\|$ alors

$$\left(e - \lambda^{-1}x\right) \in InvA,$$

d'après le théorème 1.2. Il en est de même $\lambda e - x$. Ainsi $\lambda \notin \sigma(x)$ donc $\sigma(x)$ est un ensemble borné. Pour démontrer que $\sigma(x)$ est fermé, on définit

$$g : \mathbb{C} \longrightarrow A,\ \lambda \longmapsto g(\lambda) = \lambda e - x.$$

Alors g est continue et le complémentaire de $g^{-1}(InvA)$ est fermé, d'après le théorème 1.3. Ainsi $\sigma(x)$ est compact .

D'autre part supposons que $\sigma(x) = \Phi$, par suite l'application

$$f : \mathbb{C} \xrightarrow{R} A \xrightarrow{g} \mathbb{C},\ \lambda \longmapsto g(R(\lambda; x))$$

est holomorphe sur $\mathbb{C}$, donc continue, alors bornée sur $\mathbb{C}$. De plus d'après le lemme 1.1 on a

$$\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} g(R(\lambda; x)) = 0,$$

et d'après le théorème de *Liouville*, l'application f est constante mais

$$\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} f(\lambda) = 0,$$

donc

$$f(\lambda) = 0,\ \forall f \in A'.$$

D'après le théorème de *Hahn-Banach*, on a

$$R(\lambda; x) = 0 \iff (\lambda e - x)^{-1} = 0,$$

contraduction, donc le spectre $\sigma(x)$ est non vide. ∎

Lemme 1.2 *Soient $s_1, s_2, ...$ des nombres réels. Si*

$$s_{n+m} \le s_n.s_m,\ \textit{pour tout } n, m \in \mathbb{N},$$

alors $\lim\limits_{n\to\infty} s_n^{\frac{1}{n}}$ existe et égale à $\inf\limits_n s_n^{\frac{1}{n}}$.

Démonstration. Posons $t = \inf_n s_n^{\frac{1}{n}}$ et soit $\varepsilon > 0$. Pour k fixer tel que $s_k^{\frac{1}{k}} < t + s$. Quelque soit $n \geq k$ on a

$$n = n_1 k + r\ ,\ 0 \leq r \leq k-1 \text{ et } n \geq 1.$$

Alors

$$s_n \leq s_r . s_k^{n_1} \leq \max\{1, s_1, s_2, ..., s_{k-1}\} . (t+\varepsilon)^{kn_1}$$

et

$$s_n^{\frac{1}{n}} \leq (\max\{1, s_1, s_2, ..., s_{k-1}\})^{\frac{1}{n}} . (t+\varepsilon)^{\frac{kn_1}{n}} \longrightarrow t + \varepsilon \text{ lorsque } n \longrightarrow \infty$$

puisque

$$\frac{kn_1}{n} \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Ainsi

$$\limsup_{n\longrightarrow\infty} s_n^{\frac{1}{n}} \leq t + \varepsilon$$

quelque soit $\varepsilon > 0$ alors

$$\lim_{n\to\infty} s_n^{\frac{1}{n}} = t = \inf_n s_n^{\frac{1}{n}}.$$

■

Théorème 1.5 *Soit x un élément d'une algèbre de Banach. Alors*

$$r(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_n \|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Démonstration. Puisque

$$\left\|x^{n+m}\right\| \leq \|x^m\| \, \|x^n\| \text{ pour tout } n, m.$$

D'après le lemme 1.2 la limite $\lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$ existe et égale à $\inf_n \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| > \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$ donc $\left\|\frac{x}{\lambda}\right\| < 1$. D'après la proposition 1.5 on a

$$(x - \lambda e)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-x^n}{\lambda^{n+1}}.$$

Par conséquent

$$r(x) \leq \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

D'autre part pour $\lambda \neq 0$ la fonction

$$f(\lambda) = \lambda^{-1}\left(\lambda^{-1} e - x\right)$$

est analytique sur l'ensemble

$$\left\{\lambda \in \mathbb{C},\ 0 < |\lambda| < [r(x)]^{-1}\right\}$$

et continue sur

$$\left\{\lambda \in \mathbb{C},\quad |\lambda| < [r(x)]^{-1}\right\}.$$

Donc f est analytique sur l'ensemble

$$\left\{\lambda \in \mathbb{C},\quad |\lambda| < [r(x)]^{-1}\right\},$$

si $r(x) = 0$, alors f est analytique sur $\mathbb{C}$. Pour $|\lambda| < \|x\|^{-1}$ on peut écrire

$$f(\lambda) = (e - \lambda x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \lambda^n.$$

Par conséquent on a

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \lambda^n, \text{ pour tout } \lambda,\ |\lambda| < [r(x)]^{-1}.$$

Le rayon de convergence de cette série, égale à

$$\left(\limsup_{n\longrightarrow\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}\right)^{-1}$$

et donc au moins égale à $[r(x)]^{-1}$ c'est-à-dire

$$r(x) \geq \limsup_{n\longrightarrow\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Ainsi

$$r(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_n \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$$

■

Théorème 1.6 (Gelfand-Mazur) *A est une algèbre de Banach telle que tout élément non nul x de A est inversible. Alors A est isométriquement isomorphe au corps* $\mathbb{C}$ *.*

Démonstration. Soit l'application

$$\varphi : A \longrightarrow \mathbb{C},\ x \longmapsto \lambda \text{ où } \lambda e = x,$$

on a $\sigma(x) \neq \emptyset$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $(\lambda e - x)^{-1}$ n'existe pas, donc

$$\lambda e - x = 0 \text{ implique } \lambda e = x,$$

alors l'application φ est bien définit et bijective parce qu'il existe un unique élément λ tel que $\lambda e = x$. L'application φ est donc isomorphisme de A sur $\mathbb{C}$, qui est aussi une isométrie puisque

$$\left|\varphi(x)\right| = |\lambda| = \|x\|, \text{ pour tout } x \in A.$$

■

Théorème 1.7 *Soient A, B deux algèbres de Banach sur un même corps $\mathbb{k}$, $\varphi : A \longrightarrow B$ un morphisme et x un élément de A. Alors*

$$\sigma_B(\varphi(x)) \subset \sigma_A(x).$$

Démonstration. Soit $\lambda \in \varrho_A(x)$ la résolvante de x dans A et soit $y = (\lambda e_A - x)$, on a

$$(\lambda e_A - x)\, y = y\,(\lambda e_A - x) = e_A.$$

Par suite

$$\varphi((\lambda e_A - x)\, y) = \varphi(y\,(\lambda e_A - x)) = \varphi(e_A),$$

d'où

$$\begin{aligned} (\lambda\varphi(e_A) - \varphi(x))\,\varphi(y) &= \varphi(y)\,(\lambda\varphi(e_A) - \varphi(x)) = e_B, \\ (\lambda e_B - \varphi(x))\,\varphi(y) &= \varphi(y)\,(\lambda e_B - \varphi(x)) = e_B \end{aligned}$$

Donc $\lambda \in \varrho_B(\varphi(x))$. ■

Les éléments quasinilpotents et les éléments nilpotents

Définition 1.9 *Soit A une algèbre unitaire.*

i) *Un élément x de A est dit quasinilpotent si $r(x) = 0$, c'est-à-dire $\sigma(x) = \{0\}$.*

ii) *Un él ément x de A est dit nilpotent si $x^n = 0$ pour certain $n \in \mathbb{N}$. On note par $\mathfrak{I}(A)$ l'ensemble des éléments quasinilpotents de A.*

Proposition 1.6 *Soit A une algèbre unitaire et $x \in A$. Alors si x est nilpotent alors $x \in \mathfrak{I}(A)$.*

Démonstration. D'après le théorème 1.5 on a

$$r(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}},$$

mais $x^m = 0$, donc

$$r(x) = \lim_{k\to\infty} \left\|x^m x^k\right\|^{\frac{1}{m+k}} = 0.$$

■

Diviseur de zéro et diviseur de zéro topologique

Définition 1.10 *Un élément x d'une algèbre de Banach commutative A est dit diviseur de zéro si*

$$xa = 0, \text{ pour un élément non nul } a \in A.$$

Définition 1.11 *Un élément x d'une algèbre de Banach commutative A est dit diviseur de zéro topologique si*

$$\inf \{\|xa\| ; \ a \in A, \ \|x\| = 1\} = 0.$$

Tout diviseur de zéro est diviseur de zéro topologique.

Théorème 1.8 *Soit a un élément d'une algèbre de Banach commutative A. Alors si a est inversible alors a est non diviseur de zéro topologique.*

Démonstration. Supposons que b est l'inverse de a, $ba = e_A$. Pour $x \in A$ tel que $\|x\| = 1$ on a

$$1 = \|x\| = \|bax\| \leq \|b\| \, \|ax\| .$$

Ainsi

$$\inf \{\|ax\| ; \ x \in A, \ \|x\| = 1 \ \} \geq \|b\|^{-1} > 1.$$

alors a est non diviseur de zéro topologique. ■

Remarque 1.6 *Si λ appartient à la frontière du spectre d'un élément x, $x - \lambda e$ est diviseur de zéro topologique ; il en résulte que $x - \lambda e$ ne peut etre inversible dans aucune algèbre de Banach unitaire commutative ou non, contenant A, on dit parfois que λ est une "singularité spectrale permanente de x".*

Radical d'une algèbre de Banach commutative

Théorème 1.9 *Soit A une algèbre de Banach commutative. Alors*

i) *L'adhérence d'un idéal propre de A est un idéal propre.*

ii) *Tout idéal propre de A contenu dans un idéal maximal de A.*

iii) *Tout idéal maximal de A est fermé.*

Démonstration. i) Soit I un idéal propre de A, alors $I \cap InvA = \emptyset$. D'après le théorème 1.7, on a

$$d\,(e_A, I) \geq 1$$

puisque les éléments de la boule ouverte $B\,(e_A, 1)$ sont inversibles. Donc $e_A \notin I$ car $\overline{I} = \{x, \quad d\,(x, I) = 0\}$. Alors $\overline{I}$ est un idéal propre.

ii) Soit F la famille de tous les idéaux propres de A contenant I. F est un ensemble ordonné par la relation d'inclusion des ensembles.

Soit H un sous ensemble totalement ordonné de F tel que :

$$H = \{I_\alpha\}_{\alpha \in J}$$

et soit

$$M = \bigcup_{\alpha \in J} I_\alpha.$$

M est un sous espace vectoriel puisque H est totalement ordonné. M est un idéal maximal de H. Ainsi F est inductif. D'après le lemme de Zorn, F admet un élément maximal I_m.

iii) Supposons que

$$\overline{M} = A,$$

d'après le théorème 1.3, on a

$$M \cap InvA \neq \Phi.$$

Mais ceci est contraire à

$$M \neq A.$$

Ainsi $M = \overline{M}$ puisque M est maximal. ∎

Théorème 1.10 *Soit A une algèbre de Banach commutative. Alors tout idéal maximal de A est fermé et de codimension* 1.

Démonstration. Soit I un idéal maximal de A, d'après le théorème 1.9, I est fermé. De plus A/I est une algèbre de Banach commutative et tous les éléments non nuls de A/I sont inversibles d'après le théorème 1.6 de Gelfand-Mazur $\dim A/I = 1$. ∎

Idéaux réguliers

Définition 1.12 *Un idéal d'une algèbre de Banach commutative est dit régulier si l'algèbre A/I est unitaire, c'est-à-dire s'il existe un élément u de A vérifiant*

$$ux - x \in I, \text{ pour tout } x \in A.$$

u est appelé unité modulo.

Remarque 1.7

i) *Si u est un unité modulo, on a $u \notin I$.*

ii) *Si A est unitaire, tout idéal est régulier.*

iii) *Tout idéal contenant un idéal régulier est régulier.*

iv) *D'après le lemme de Zorn, on voit que tout idéal régulier est contenu dans un au moins un idéal régulier maximal.*

Définition 1.13 *Soit A une algèbre de Banach commutative, le radical de A est l'intersection de ses idéaux réguliers maximaux. Il sera noté $radA$. L'algèbre A est dite radicale si $radA = A$.*

Théorème 1.11 *Soit A une algèbre de Banach commutative unitaire, les ensembles suivants sont équivalents :*

i) *L'intersection des idéaux maximaux de A.*

ii) *L'ensemble $\{x \in A,\ e_A - ax \in InvA \text{ pour tout } a \in A\}$.*

Démonstration. Supposons que $e_A - ax$ est inversible pour tout $a \in A$, et soit I un idéal maximal de A tel que $x \notin I$. Alors $I + Ax$ est un idéal et

$$I \subset I + Ax,$$

donc

$$I + Ax = A.$$

Ainsi il existe $a \in A$ tel que

$$e_A - ax \in I$$

et puisque $e_A - ax \in InvA$, alors $e_A \in I$, d'où la contradiction. D'autre part, soit $x \in \cap I_m$, I_m idéal maximal de A. Supposons qu'il existe $a \in A$ tel que

$$e_A - ax \notin InvA.$$

Ainsi

$$\sigma(ax) \neq \{0\}.$$

Soit $\lambda \in \sigma(ax)$ tel que

$$|\lambda| = r(ax) > 0,$$

d'après le théorème 1.3, et la remarque 1.6, $\lambda e_A - ax$ est diviseur de zéro topologique, donc $\lambda e_A - ax$ est non inversible. Par conséquent $A(\lambda e_A - ax)$ est un idéal propre, ainsi il existe un idéal maximal J tel que

$$A(\lambda e_A - ax) \subset J,$$

on a $\lambda e_A - ax \in J$ et $x \in J$ car $x \in \cap I_m$. Donc

$$e_A = \lambda^{-1}(\lambda e_A - ax) + \lambda^{-1} ax \in J,$$

d'où la contradiction. ■

Remarque 1.8 *Lorsque l'algèbre A soit unitaire d'après le théorème 1.11 on a :*

$$radA = \{x \in A,\ e_A - ax \in InvA \text{ pour tout } a \in A\}.$$

Si A est non unitaire, le radical de A c'est l'intersection des idéaux maximaux de $A^{\#}$.

Définition 1.14 *Soit A une algèbre de Banach. A est dite semi-simple si $radA = \{0\}$.*

Proposition 1.7 *Soit A une algèbre de Banach unitaire, on a*

$$radA \subset \mathfrak{I}(A).$$

Démonstration. Soit $a \in radA$, alors $e_A - \lambda^{-1}a \in radA$ pour tout $\lambda \neq 0$, donc

$$\sigma(a) = \{0\}.$$

D'où $a \in \mathfrak{I}(A)$. ■

Proposition 1.8 *Soit A une algèbre de Banach commutative unitaire, on a*

i) *Si I est un idéal de A et $I \subset \mathfrak{I}(A)$, alors $I \subset radA$.*

ii) *$radA = \mathfrak{I}(A)$.*

Démonstration. Soit $a \in radA$, alors $e_A - \lambda^{-1}a \in radA$ pour tout $\lambda \neq 0$, donc
i) Soit $a \in I$. Pour tout $b \in A$, on a $ba \in I$. Par suite $ba \in \mathfrak{I}(A)$ d'après la proposition 1.7, on a

$$e_A - ba \in InvA, \text{ pour tout } b \in A,$$

et d'après la remarque 1.8, il résulte que $a \in radA$.
ii) Soient $a \in \mathfrak{I}(A)$ et $b \in A$, puisque A est commutative on a

$$(ba)^n = b^n a^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

D'où

$$\left\|(ba)^n\right\|^{\frac{1}{n}} = \|b^n a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|b\| \, \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi

$$ba \in \mathfrak{I}(A),$$

donc $\mathfrak{I}(A)$ est un idéal de A, d'après (i) il résulte que $\mathfrak{I}(A) \subset radA$. ■

Théorème 1.12 *Soit A une algèbre de Banach commutative, alors*

i) *$A/radA$ est semi-simple.*

ii) *Un élément $x \in A$ est inversible si et seulement si $x + radA$ est inversible dans $A/radA$.*

Démonstration. i) Soit la projection canonique

$$P : A \longrightarrow A/radA, \ x \longrightarrow P(x) = \dot{x}.$$

Si $x \in A$ et $x \notin radA$, alors il existe un idéal maximal I tel que $x \notin I$ puisque $radA \subset I$, on a

$$P(z) = \{y, \ z - y \in radA\} = z + radA$$

et

$$P(I) = \{P(z), \ z \in I\} = \{z + radA, \ \ z \in I\},$$

donc

$$P(I) = I + radA$$

$P(I)$ est un idéal maximal dans $A/radA$, et $P(x) = x + radA \notin P(I)$. Puisque

$$P(I) \subset rad(A/radA),$$

ainsi

$$x + radA \notin rad(A/radA).$$

$P(x)$ est un élément arbitraire de $A/radA$. Alors $A/radA$ est semi-simple.

ii) Si $x \in InvA$, alors $P(x) \in Inv(A/radA)$, d'après le théorème 1.11.

Réciproquement, si $P(x) \in Inv(A/radA)$ alors il existe $y \in A$ tel que

$$xy \in e_A + radA,$$

d'après le théorème 1.11 l'élément $e_A + e_A(xy - e_A) = xy$ est inversible. Par conséquent $x \in InvA$. ■

Exemple 2 *L'algèbre $B(E)$ est semi-simple pour tout espace de Banach E avec* $\dim E \geq 1$.

En effet, soit $T \in B(E)$, $T \neq 0$. Alors $Tx \neq 0$ pour un $x \in E$ tel que $x \neq 0$. On choisit $g \in E'$ tel que $g(Tx) = 1$ et soit $S \in B(E)$ tel que

$$Sy = g(y)x, \ \ y \in E.$$

Alors $STx = x$, donc $1 \in \sigma(ST)$. D'après le théorème 1.11, il résulte que $T \notin radB(E)$. Ainsi $B(E)$ est semi-simple.

Caractères

Définition 1.15 *Soit A une algèbre de Banach commutative. On appelle caractère de A tout homomorphisme complexe de A dans $\mathbb{C}$.*

Théorème 1.13 *Soit A une algèbre de Banach commutative, alors*

i) *Si ψ est un homomorphisme complexe sur A, alors $\ker \psi$ est un idéal maximal.*

ii) *Si $I \subset A$ est un idéal maximal de A, alors*

$$A = \{x + \lambda e_A,\ \ x \in I, \lambda \in \mathbb{C}\}$$

et l'application

$$\psi : A \longrightarrow \mathbb{C},\ \ x + \lambda e_A \longmapsto \psi(x + \lambda e_A) = \lambda$$

est une homomorphisme complexe, $\ker \psi = I$.

Démonstration. On a

$$\ker \psi = \{x \in A, \quad \psi(x) = 0\}.$$

Supposons que $\ker \psi$ n'est pas un idéal maximal, d'après le lemme de Zorn, il existe I_m un idéal maximal tel que

$$\ker \psi \subset I \subset A.$$

Soit $x_0 \in I$ et $x_0 \notin \ker \psi$ donc $\psi(x_0) \neq 0$, et d'après le théorème 1.10, on a

$$\forall x \in A :\ \ x = \psi(x)\, x_0 + y,\ \ y \in \ker \psi.$$

Ainsi

$$e_A = x_0 + y \in I_m,\ \ y \in \ker \psi,$$

donc I_m est un idéal trivial, $I_m = A$.

ii) D'après le théorème 1.10, ψ est bien définit et

$$A = \{x + \lambda e_A,\ \ x \in I, \lambda \in \mathbb{C}\},$$

ψ est homomorphisme puisque si $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned}\psi((x + \lambda e_A)(y + \mu e_A)) &= \psi(xy + \mu x + \lambda y + \lambda\mu e_A)\\ &= \lambda\mu = \psi(x + \lambda e_A)\,\psi(y + \mu e_A).\end{aligned}$$

■

Remarque 1.9 *Soit A une algèbre de Banach commutative. On note par $\hat{A}$ l'ensemble de tout les homomorphismes complexe de A sur $\mathbb{C}$.*

Théorème 1.14 *Soit x un élément d'une algèbre de Banach commutative A. Alors :*

i) *Si $\psi \in \hat{A}$, alors $\psi(x) \in \sigma(x)$.*

ii) *Si $\lambda \in \sigma(x)$, alors il existe $\psi \in \hat{A}$ tel que $\psi(x) = \lambda$.*

iii) *Un élément $x \in A$ est inversible si et seulement si $\psi(x) \neq 0$ pour tout $\psi \in \hat{A}$.*

Démonstration. i) Si $\psi \in \hat{A}$, alors $x - \psi(x) e_A \in \ker \psi$ et puisque $\ker \psi$ est un idéal propre, l'élément $x - \psi(x) e_A$ est non inversible, donc

$$\psi(x) \in \sigma(x).$$

ii) Si $\lambda \in \sigma(x)$, alors $x - \lambda e_A$ est un élément d'un idéal propre. Par suite, il existe un idéal I_m maximal tel que $x - \lambda e_A \in I_m$, d'après le théorème 1.13 il existe $\psi \in \hat{A}$ tel que $\ker \psi = I_m$. Ainsi

$$\psi(x - \lambda e_A) = 0,$$

donc

$$\psi(x) = \lambda.$$

iii) D'après (i) on a

$$\psi(x) \in \sigma(x),$$

donc $\psi(x) e_A - x$ est non inversible. Supposons que $\psi(x) = 0$, par suite x est non inversible, d'où contradiction. Ainsi $\psi(x) \neq 0$. ■

Théorème 1.15 *Soit A une algèbre de Banach commutative, et ψ un homomorphisme complexe. Alors ψ est continu et $\|\psi\| = 1$.*

Démonstration. Pour $x \in A$ on a $\psi(x) \in \sigma(x)$. Ainsi

$$|\psi(x)| < r(x) \leq \|x\|,$$

par suite ψ est continu. D'autre part on a $\|\psi\| \leq 1$, et puisque $\psi(e_A) = 1$ alors $\|\psi\| = 1$. ■

Exemple 3 *D'après le théorème 1.14, le spectre de l'algèbre L^1 est l'ensemble M des formes linéaires continues non nulles ϕ sur L^1 telle que*

$$\forall f, g \in L^1,\ \phi(f * g) = \phi(f)\phi(g).$$

Pour tout $\zeta \in \mathbb{R}^d$, la forme linéaire ϕ_ζ définie par

$$\forall f \in L^1 \;\; \phi_\zeta (f) = \int e^{i\zeta x} f(x)\, dx$$

appartient à M. En effet l'application ϕ_ζ est linéaire et continue puisque pour $x \in \mathbb{R}^d$, l'application de $\mathbb{R}^d$ vers $\mathbb{R}$, $\zeta \longmapsto e^{ix\zeta} f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^d$ et pour $\zeta \in \mathbb{R}^d$, $x \in \mathbb{R}^d$, $\left|e^{ix\zeta} f(x)\right| = \left|f(x)\right|$. Le théorème de convergence dominée assure la continuité dans ces conditions de l'application ϕ_ζ. D'autre part on a d'après le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} \phi_\zeta (f * g) &= \int e^{i\zeta y} g(y) \left(\int e^{i\zeta(x-y)} f(x-y)\, dx \right) dy \\ &= \int e^{i\zeta y} g(y)\, dy \int e^{i\zeta x} f(x)\, dx \\ &= \phi_\zeta (f)\, \phi_\zeta (g) . \end{aligned}$$

De plus, ϕ_ζ n'est pas nulle car la fonction $t \longmapsto e^{i\zeta t}$ n'est pas nulle et de norme inférieure ou égale à 1.

Topologie de Galfand

Définition 1.16 *Soit A une algèbre de Banach, la topologie faible∗ désignée par $\sigma(A', A)$ est la topologie la moins fine sur A' rendant continues toutes les applications $(\varphi_x)_{x \in A'}$, et φ_x définie par*

$$\varphi_x : A' \longrightarrow \mathbb{C},\; \phi \longmapsto \varphi_x\left(\phi\right) = \varphi(x) .$$

Définition 1.17 *Soit A une algèbre de Banach commutative unitaire et soit $\hat{A}$ l'ensemble de tout les caractères de A, la topologie de Galfand de $\hat{A}$ est la topologie induite sur $\hat{A}$ par la topologie faible∗ $\sigma(A', A)$, c'est'-à-dire, la topologie la moins fine sur A' rendant continues toutes les applications $(\hat{a}_x)_{x \in A}$ tel que*

$$\hat{a}_x : \hat{A} \longrightarrow \mathbb{C},\; \psi \longmapsto \hat{a}_x(\psi) = \psi(x) .$$

Théorème 1.16 *Soit A une algèbre de Banach commutative unitaire et soit $\hat{A}$ l'ensemble de tout les caractères de A. Alors $\hat{A}$ est compact pour la topologie faible∗.*

Démonstration. Pour tout $a, b \in A$ on définit les ensembles :

$$K_{e_A} = \{\psi \in A',\; \psi(e_A) = 1\},$$

$$K_{a,b} = \{\psi \in A',\; \psi(ab) = \psi(a)\, \psi(b)\},$$

par suite
$$\hat{A} = \cap \{K_{a,b} \ , a, b \in A\} \cap K_{e_A}.$$
On montre que les ensembles $K_{a,b}$, K_{e_A} sont compacts. Soient les applications
$$\begin{aligned} f_{e_A} &: A' \longrightarrow \mathbb{C},\ \psi \longmapsto f_{e_A}(\psi) = \psi(e_A) = 1, \\ f_{a,b} &: A' \longrightarrow \mathbb{C},\ \psi \longmapsto f_{a,b}(\psi) = \psi(ab) = \psi(a)\psi(b). \end{aligned}$$
On a
$$\left| f_{e_A}(\psi) \right| = \left| \psi(e_A) \right| \leq \|e_A\| = 1.$$
Ainsi, f_{e_A} est fortement continue. Et d'après la définition de $f_{a,b}$ il résulte que $f_{a,b}$ est continue pour la topologie faible∗. D'autre part on a
$$\begin{aligned} K_{e_A} &= f_{e_A}^{-1}(1), \\ K_{a,b} &= f_{e_A}^{-1}(\psi(a)\psi(b)) \end{aligned}$$
et puisque l'image réciproque par une application continue d'un fermé est fermée, donc K_{e_A}, $K_{a,b}$ sont fermés.

Par suite, l'ensemble $\hat{A}$ est fermé pour la topologie faible∗. De plus on a
$$\hat{A} \subset \overline{B}_{A'} = \left\{ \psi \in A', \quad \left\| \psi \right\| \leq 1 \right\},$$
où $\overline{B}_{A'}$ désigne la boule unité fermée pour la topologie forte dans A', car si $\psi \in \hat{A}$ alors $\left\| \psi \right\| = 1$, d'après le théorème 1.15. Et d'après le théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki, la boule $\overline{B}_{A'}$ est compacte pour la topologie faible∗, ainsi $\hat{A}$ est compact pour la topologie faible∗. ■

Transformation de Gelfand

Soit A une algèbre de Banach commutative unitaire et soit $\hat{A}$ l'ensemble de tout les caractères de A, et soit $C\left(\hat{A}\right)$ l'algèbre de Banach de toutes les fonction complexes continues sur $\hat{A}$ muni de la norme de convergence uniforme.

Définition 1.18 *L'application*
$$G : A \longrightarrow C\left(\hat{A}\right),\ a \longmapsto G(a)(\psi) = \psi(a),$$
où $\psi \in \hat{A}$ est appelée transformation de Gelfand.

Remarque 1.10 *Si A n'est pas unitaire on définit la transformation de Gaelfand comme :*

$$G : A \longrightarrow \widehat{A^{\#}},\ a \longmapsto G(a)(\psi) = \psi(a).$$

Théorème 1.17 *Soit A une algèbre de Banach commutative unitaire. Alors*

i) $G(a)\left(\hat{A}\right) = \sigma(a),\ a \in A$.

ii) $\|G(a)\| = r(a)$.

iii) $G : A \longrightarrow C\left(\hat{A}\right)$*, est un homomorphisme continu et* $\left\|\psi\right\| = 1$.

iv) $G(a) = 0 \iff \sigma(a) = \{0\} \iff a \in radA$.

Démonstration. i) on a

$$\begin{aligned} G(a)\left(\hat{A}\right) &= \left\{G(a)(\psi),\quad \psi \in \hat{A}\right\} \\ &= \left\{\psi(a),\quad \psi \in \hat{A}\right\} \\ &= \sigma(a). \end{aligned}$$

ii) D'après (i) on a

$$\begin{aligned} \|G(a)\| &= \sup\left\{G(a)(\psi),\quad \psi \in \hat{A}\right\} \\ &= \sup\left\{|\lambda|,\quad \psi \in \hat{A}\right\} = r(a). \end{aligned}$$

iii) L'application G est homomorphisme continu puisque $\psi \in \hat{A}$. D'après (ii), $\|G\| \leq 1$ et comme

$$\|G(e_A)\| = r(e_A) = 1,$$

donc $\|G\| = 1$.

iv) On a

$$\begin{aligned} G(a) &= 0 \iff \|G(a)\| = 0 \\ &\iff r(a) = 0 \\ &\iff \sigma(a) = \{0\} \\ &\iff a \in radA. \end{aligned}$$

■

Remarque 1.11 *Soit A une algèbre de Banach commutative unitaire. Alors d'après la proposition 1.8 et le théorème 1.17, il résulte que*

$$\ker G = radA = \Im(A).$$

Remarque 1.12 *D'après la remarque 1.10, si A est semi-simple alors G est injective.*

Idempotents dans les algèbres de Banach

Définition 1.19 *Soit A une algèbre de Banach, un élément p de A est dit idempotent si $p^2 = p$. On dit que deux idempotents p et q sont orthogonals et on note $p \perp q$ si*

$$pq = qp = 0.$$

Théorème 1.18 *Soit A une algèbre de Banach sur le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soit f une fonction définie sur $]0, +\infty[$ dans A vérifie*

i) *pour* $0 < \zeta_1, \zeta_2 < +\infty$

$$f(\zeta_1 + \zeta_2) = f(\zeta_1) f(\zeta_2)$$

ii) $\lim_{\zeta \longrightarrow 0^+} f(\zeta) = J$ *existe.*

Alors J est un idempotent de A et $f(\zeta) = Jf(\zeta) = f(\zeta) J$. De plus, f est continue pour $\zeta \geq 0$ si $f(0) = J$ par définition.

Démonstration. On a

$$J = \lim_{\zeta+\eta \longrightarrow 0} f(\zeta + \eta) = \lim_{\zeta \longrightarrow 0, \eta \longrightarrow 0} f(\zeta) f(\eta) = J^2.$$

De plus on a d'après (i)

$$\lim_{\eta \longrightarrow 0} f(\zeta + \eta) = f(\zeta) J = Jf(\zeta).$$

La fonction f est continue pour $\zeta \geq 0$, voir [8, 9, 10]. ■

Théorème 1.19 *Soit A une algèbre de Banach sur le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soit f une fonction définie sur $]0, +\infty[$ à valeurs dans A vérifie*

i) *pour* $0 < \zeta_1, \zeta_2 < +\infty$

$$f(\zeta_1 + \zeta_2) = f(\zeta_1) f(\zeta_2).$$

ii) $\lim_{\zeta \longrightarrow 0^+} f(\zeta) = J$ *existe .*

Alors il existe un élément $a \in A$ tel que $a = Ja = aJ$ et

$$f(\zeta) = J + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\zeta^n}{n!} a^n.$$

La série est absolument convergente pour tout $\zeta \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et vérifie (i).

Démonstration. D'après le théorème 1.18,

$$J^2 = J et f(\zeta) = f(\zeta)\,J = Jf(\zeta) \text{ pour tout } \zeta > 0.$$

Soit la sous algèbre $A_0 = JAJ$ où J est l'élément unité. Donc

$$A = \{x \in A \text{ tel que } Jx = xJ = x\},$$

ainsi A_0 est fermé dans A, donc complet. Puisque f est continue pour $\zeta \geq 0$ d'après le théorème 1.18, l'intégrale

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\zeta)\,d\zeta = b$$

existe pour $0 \leq \alpha < \beta < +\infty$, on a donc

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\zeta)\,d\zeta \in A_0$$

et on a

$$\lim_{\beta \longrightarrow \alpha} \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(\zeta)\,d\zeta = f(\alpha) \text{ pour tout } \alpha \geq 0.$$

En particulier il existe $\delta > 0$ tel que

$$\left\| \beta^{-1} \int_{0}^{\beta} f(\tau)\,d\tau - J \right\| < 1 \text{ pour } 0 < \beta < \delta$$

parce qu'il $\beta^{-1} \int_{0}^{\beta} f(\tau)\,d\tau$ est inversible dans A_0 pour $\beta \in]0, \delta[$. Par suite

$$\int_{0}^{\beta} f(\zeta + \tau)\,d\tau - \int_{0}^{\beta} f(\tau)\,d\tau = [f(\zeta) - J] \int_{0}^{\beta} f(\tau)\,d\tau,$$

d'où

$$\frac{1}{\zeta} \int_{\beta}^{\beta+\zeta} f(\tau)\,d\tau - \frac{1}{\zeta} \int_{0}^{\zeta} f(\tau)\,d\tau = \frac{1}{\zeta} [f(\zeta) - J] \int_{0}^{\beta} f(\tau)\,d\tau.$$

Pour $\beta \in]0,\delta[$ on obtient

$$\frac{1}{\zeta}\left[f(\zeta)-J\right]=\left[\frac{1}{\zeta}\int_{\beta}^{\beta+\zeta} f(\tau)\,d\tau-\frac{1}{\zeta}\int_{0}^{\zeta} f(\tau)\,d\tau\right]\left[\int_{0}^{\beta} f(\tau)\,d\tau\right]^{-1} \tag{1.10}$$

lorsque $\zeta \longrightarrow 0$ il résulte que $\lim\limits_{\zeta\longrightarrow 0}\frac{1}{\zeta}\left[f(\zeta)-J\right]=a$ tel que a existe et appartient à A_0. Lorsque $\zeta \longrightarrow 0$ dans (1.10), on obtient $f(\beta)-J=a\int\limits_{0}^{\beta} f(\tau)\,d\tau$, valable pour tout $\beta \in \mathbb{R}^{+}$. Par suite on peut construire par récurrence

$$f(\zeta)=J+\frac{\zeta}{1!}a+\frac{\zeta^{2}}{2!}a^{2}+\ldots+\frac{\zeta^{n}}{n!}a^{n}+\frac{a^{n+1}}{n!}\int_{0}^{\zeta}(\zeta-\tau)^{n} f(\tau)\,d\tau,$$

et quand $n \longrightarrow +\infty$ on obtient $f(\zeta)=J+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta^{n}}{n!}a^{n}$. ■

CHAPITRE 2

SEMI-GROUPES DANS UNE ALG ÈBRE DE BANACH

2.1 Semi-groupes dans une alg èbre de Banach

Définition 2.1 *Soit A une alg èbre de Banach, un semigroupe de A est une famille* $(T(t))_{t>0}$ *d'éléments de A vérifiant pour tout couple* s, t *de réels strictement positifs la condition*

$$T(t+s) = T(t).T(s)$$

On notera $[Sp(T(t)_{t>0})]^{-}$ *la sous alg èbre fermée de A engendré par le semi- groupe* $(T(t))_{t>0}$*.*
On dira qu'un semigroupe $(T(t))_{t>0}$ *est continu en norme si*

$$\lim_{h\to 0} \|T(t+h) - T(t)\| = 0 \textit{ pour tout } t > 0$$

et on dira que $(T(t))_{t>0}$ *admet une limite en norme à l'origine s'il existe* $J \in A$ *tel que*

$$\lim_{h\to 0} \|T(t) - J\| = 0.$$

Semigroupes analytiques

Définition 2.2 *Soient A une alg èbre de Banach et* $(T(t))_{t\in H}$ *où* $H = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}\, z > 0\}$ *une famille des éléments de A est dit semigroupe analytique si l'application*

$$H \longrightarrow A,\ t \longmapsto T(t)$$

est analytique et vérifier $T(t+s) = T(t).T(s),\ (t,\ s \in H)$

Théor ème de Sinclair

Lemme 2.1 *Soit A une alg èbre de Banach commutative, et soit* $(e_n)_{n\geq 0}$ *une suite bornée de borne M. Pour* $k \in \mathbb{N}$ *et* $a \in A$ *on a*

$$\left\|a^k + (e_n - e)^k - (a + e_n - e)^k\right\| \underset{n\longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$$

si $ae_n \longrightarrow a\ \ n \longrightarrow +\infty$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}(a + e_n - e)^k &= \sum_{p=0}^{k} C_p^k a^p (e_n - e)^{k-p} \\ &= \sum_{p=1}^{k-1} C_p^k a^p (e_n - e)^{k-p} + (e_n - e)^k + a^k\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\left(a^k + e_n - e\right)^k - (e_n - e)^k - a^k &= \sum_{p=1}^{k-1} C_p^k (e_n - e)^{k-p} a^p \\ &= a(e_n - e) \sum_{p=1}^{k-1} C_p^k (e_n - e)^{k-p-1} a^{p-1}\end{aligned}$$

et alors

$$\begin{aligned}\left\|(a + e_n - e)^k - a^k - (e_n - e)^k\right\| &\leq \|a(e_n - e)\| \sum_{p=1}^{k-1} C_p^k \|a\|^{p-1} \|e_n - e\|^{k-p-1} \\ &\leq \|a(e_n - e)\| \sum_{p=1}^{k-1} C_p^k \|a\|^{p-1} (M+1)^{k-p-1}\end{aligned}$$

Comme $\|e_n a - a\| \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$ et comme $\sum\limits_{p=1}^{k-1} C_p^k \|a\|^{p-1} (M+1)^{k-p-1} < +\infty$. On a

$$\left\|(a + e_n - e)^k - a^k - (e_n - e)^k\right\| \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$$

■

Définition 2.3 *Soit A une alg èbre de Banach, E un espace de Banach et $(a, x) \longmapsto ax$ une application de $A \times E \longrightarrow E$. On dit que E est un A-module de Banach, s'il existe une constante k $(k > 0)$ telle que*

$$\|ax\| \leq k \|a\| \|x\| \text{ pour tout } a \in A, \text{ et tout } x \in E.$$

Remarque 2.1 *Soit E un A-module de Banach si A est non unitaire et $A^{\#}$ l'alg èbre obtenit par l'adjonction d'une unité on pose :*

$$(a + \lambda e) x = ax + \lambda x \quad (a \in A,\ x \in E,\ \lambda \in \mathbb{C})$$

on a

$$\|(a + \lambda e) x\| = \|ax + \lambda x\| \leq k [\|a\| + |\lambda|] \|x\|$$

donc E est un $A^{\#}$-module.

Remarque 2.2 *Soit E un A-module de Banach. On peut toujours renormer E pour obtenir $k = 1$ on pose*

$$|||x||| = \sup_{\substack{b \in A^{\#} \\ \|b\| \leq 1}} \|bx\|$$

alors

$$\|x\| \leq |||x||| \leq k\,\|x\|$$

par suite $|||.|||$ *est équivalente a la norme* $\|.\|$, *et*

$$|||bx||| \leq \|b\|\,|||x|||\,,\ \forall x \in A, \forall b \in E$$

On supposera donc dans la suite que E est un A-module de Banach et que

$$\|ax\| \leq \|a\|\,\|x\| \ \ pour\ a \in A \ \ et\ x \in E$$

On pose

$$F = A.E = \{y = ax,\ \ a \in A, x \in E\ \}$$

et $G = [Sp\,(F)]^{-}$ *l'alg èbre engendrée par F.*

Lemme 2.2 *Soit* $(e_n)_{n\geq 0}$ *une suite bornée de A de borne M. Soit K un compact de* $\mathbb{C}$, *soit* $x \in E$ *soit* $u \in A^{\#}$*on pose*$v = u - \chi_\circ\,(u)\,e$

i) *Si* $xe_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} x$, *on a :* $\exp\,(t\,(e_n - e)) \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} x$ *uniformément sur K.*

ii) *Si* $ve_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} v$ *alors*

$$\overline{\lim_{n\longrightarrow+\infty}} \sup_{t\in K} \left\{ \begin{array}{c} \left\|\exp\,(tu)\exp t\,(e_n - e) - \exp tu\right\| \\ -\exp\,[\mathrm{Re}\,(t\chi_\circ\,(u))]\,[\exp|t|\,(M+1) - 1] \end{array} \right\} \leq 0$$

Démonstration. i) On a

$$\begin{aligned} \left\|\exp t\,(e_n - e)\,x - x\right\| &= \left\|\sum_{k=1}^{+\infty} t^k \frac{(e_n - e)^k}{k\,!} x\right\| \\ &= \left\|(e_n - e)\,x \sum_{k=1}^{+\infty} t^k \frac{(e_n - e)^{k-1}}{k\,!}\right\| \\ &\leq \|e_n x - x\| \left\|\sum_{k=1}^{+\infty} |t|^k\ \frac{(M+1)^{k-1}}{k\,!}\right\| \end{aligned}$$

Comme la série $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} |t|^k\ \frac{(M+1)^{k-1}}{k\,!}$ est normalement convergente, on a

$$\left\|\exp t\,(e_n - e)\,x - x\right\| \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0 uniformément\ sur\ K.$$

ii)$\left\|\exp tu \quad \exp t\,(e_n - e) - \exp tu\right\|$

$$\begin{aligned}
&= \left\|\exp t\,(v + \chi_\circ(u)\,e)\exp t\,(e_n - e) - \exp t\,(v + \chi_\circ(u)\,e)\right\| \\
&= \left\|\exp(t\chi_\circ(u)\,e) \quad [\exp t\,(v + e_n - e) - \exp(tv)]\right\| \\
&= \left\|\exp(t\chi_\circ(u)\,e)\sum_{k=1}^{+\infty} t^k \frac{(v + e_n - e)^k - v^k}{k\,!}\right\| \\
&\leq \exp[\mathrm{Re}\,(t\chi_\circ(u))]\sum_{k=1}^{+\infty} t^k \frac{(v + e_n - e)^k - v^k}{k\,!}
\end{aligned}$$

D'autre part on a $v \in A$. Donc

$$\sum_{k=1}^{m} L^k \frac{\left\|(v + e_n - e)^k - v^k - (e_n - e)^k\right\|}{k\,!} \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$$

pour tout $m \geq 1$, lemme 2.1, ou $L = \sup\limits_{t \in K} |t|$. De plus

$$\left\|\sum_{k=1}^{m} t^k \frac{(e_n - e)^k}{k\,!}\right\| \leq \sum_{k=1}^{m} |t|^k \,\frac{(M+1)^k}{k\,!} \leq [\exp(|t|\,(M+1)) - 1]$$

on a alors pour tout $m \geq 1$ et pour tout $t \in K$.

$$\begin{aligned}
&\left\|\sum_{k=1}^{+\infty} t^k \frac{(v + e_n - e)^k - v^k}{k\,!}\right\| \\
&\leq \sum_{k=1}^{m} \frac{|t|^k}{k\,!}\left\|(v + e_n - e)^k - v^k - (e_n - e)^k\right\| \\
&+ \exp|t|\,(m+1) - 1 + \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{|t|^k\,\|v\|^k}{k\,!} + \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{|t|^k\,(1 + M + \|v\|)^k}{k\,!}
\end{aligned}$$

par suit

$$\begin{aligned}
&\left\|\exp tu \quad \exp t\,(e_n - e) - \exp tu\right\| - \exp[\mathrm{Re}\,(t\chi_\circ(u))]\,[\exp|t|\,(M+1) - 1] \\
&\leq \exp[\mathrm{Re}\,(t\chi_\circ(u))]\left\{\begin{array}{c} \sum_{k=1}^{m} \frac{|t|^k}{k\,!}\left\|(v + e_n - e)^k - v^k - (e_n - e)^k\right\| \\ + \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{|t|^k\|v\|^k}{k\,!} + \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{|t|^k(1+M+\|v\|)^k}{k\,!} \end{array}\right\} \\
&\leq \exp(\alpha)\left\{\begin{array}{c} \sum_{k=1}^{m} \frac{L^k}{k\,!}\left\|(v + e_n - e)^k - v^k - (e_n - e)^k\right\| \\ + \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{L^k}{k\,!}\,\|v\|^k + \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{L^k}{k\,!}\,(1 + M + \|v\|)^k \end{array}\right\}
\end{aligned}$$

ou $\alpha = \sup_{t\in K} [\mathrm{Re}\,(t\chi_\circ(u))]$. Donc

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim_{n\longrightarrow+\infty}} \sup_{t\in K} \left\{ \begin{array}{c} \left\|\exp(tu)\exp t(e_n - e) - \exp tu\right\| \\ -\exp\left[\mathrm{Re}\,(t\chi_\circ(u))\right]\left[\exp|t|(M+1)-1\right] \end{array} \right\} \\
\leq\ & \exp(\alpha)\left\{ \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{L^k}{k\,!}\|v\|^k + \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{L^k}{k\,!}(1+M+\|v\|)^k \right\}
\end{aligned}$$

Comme cette inégalité est vérifiée pour tout $m \geq 1$, on a bien

$$\overline{\lim_{n\longrightarrow+\infty}} \sup_{t\in K} \left\{ \begin{array}{c} \left\|\exp(tu)\exp t(e_n - e) - \exp tu\right\| \\ -\exp\left[\mathrm{Re}\,(t\chi_\circ(u))\right]\left[\exp|t|(M+1)-1\right] \end{array} \right\} \leq 0.$$

■

Lemme 2.3 *Soit A une alg èbre de Banach commutative à unité approchée bornée de borne M. Alors pour tout couple $(a, y) \in A \times G$, il existe une suite $(e_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de A telle que*

$$\left\|e_n y - y\right\| + \|e_n a - a\| \underset{n\,\longrightarrow\,+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ avec } \sup_{n\geq 1}\|e_n\| \leq M.$$

Démonstration. $G = [Sp(F)]^-$ implique que pour tout $n \geq 1$, il existe $b_1, b_2, ..., b_p \in A$ et $y_1, y_2, ..., y_p \in E$ tels que

$$\left\| y - \sum_{i=1}^{p} b_i y_i \right\| < \frac{1}{n(1+M)}$$

Il existe $e_n \in A$ tel que$\|e_n\| \leq M$, $\|e_n a - a\| \leq \frac{1}{n}$ et tel que

$$\|e_n b_i - b_i\| \leq \frac{2^{-i}}{n\left(1 + \left\|y_i\right\|\right)} \text{ pour } 1 \leq i \leq p.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\left\|e_n y - y\right\| &\leq M\left\| y - \sum_{i=1}^{p} b_i y_i \right\| + \left\| e_n\left(\sum_{i=1}^{p} b_i y_i\right) - \sum_{i=1}^{p} b_i y_i \right\| \\
&\quad + \left\| \sum_{i=1}^{p} b_i y_i - y \right\| \\
&\leq \frac{M}{n(1+M)} + \sum_{i=1}^{p} \frac{2^{-i}}{n} + \frac{1}{n(1+M)} \leq \frac{2}{n}
\end{aligned}$$

Donc
$$\|e_na-a\| \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ et } \left\|e_ny-y\right\| \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

■

Théorème 2.1 (Théor ème de Sinclair) *Soit A une alg èbre de Banach commutative à unité approchée bornée $(e_n)_{n\geq 0}$de borne M. Pour tout $x\in G$, il existe un semigroupe analytique*
$$\left(b^t\right)_{\operatorname{Re} t>0} \text{ dans } A \text{ tel que}$$

i) $\left\{\left\|b^t\right\|\right\}$ *est borné pour* $|t|\leq 1$ *et* $\operatorname{Re} t>0$.

ii) $x\in b^tG$ *pour tout* $t\in\mathbb{C}$ *avec* $\operatorname{Re} t>0$.

iii) $b^tx \underset{\substack{t\longrightarrow 0\\ \operatorname{Re} t>0}}{\longrightarrow} x$

Démonstration. Par récurrence on va définir une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de A telle que si on pose
$$\begin{aligned} b_n &= \exp\left(-ne+f_1+f_2+\ldots+f_n\right), \\ b_n^t &= \exp\left(-tne+tf_1+tf_2+\ldots+tf_n\right) \text{ pour } t\in\mathbb{C}, \\ b_0^t &= b_0=e \text{ pour } t\in\mathbb{C}\end{aligned}$$

on ait
$$\left\|f_n\right\|\leq M,\quad \left\|\left(b_n^t-b_{n-1}^t\right)x\right\|\leq 2^{-n} \text{ pour } |t|\leq n \tag{2.1}$$
$$\left\|\left(b_n^t-b_{n-1}^t\right)\right\|\leq 2^{-n}+\exp\left[-(n-1)\operatorname{Re} t\right]\left[\exp\left(|t|\left(M+1\right)\right)\right] \tag{2.2}$$
$$\text{pour } |t|\leq n \text{ et ceci pour tout } n\geq 1$$

Pour $n=1$ on veut que
$$\left\|\exp t\left(f_1-e\right)x-x\right\|\leq\frac{1}{2} \text{ pour } |t|\leq 1$$

Ceci résulte des lemmes 2.2 et 2.3 avec $u=0$, $K=\overline{D\left(0,1\right)}$,et $f_1=e_n$ avec n assez grand. Supposons qu'on a construit $f_1,f_2,\ldots,f_{n-1}$.

On pose $u=f_1+f_2+\ldots+f_{n-1}-(n-1)e$, $K=\overline{D\left(0,n\right)}$. Alors on a
$$\exp\left(tu\right)=b_{n-1}^t$$

On cherche f_n avec

$$\begin{aligned}\left\|f_n\right\| &\leq M, \left\|\exp(tu)x - \exp t(u + f_n - e)x\right\| < 2^{-n} \\ &\text{et } \left\|\exp(tu)x - \exp(tu + t(f_n - e))x\right\| \\ &< 2^{-n} + [\exp|t|((M+1)) - 1]\exp[-(n-1)\operatorname{Re} t] \text{ pour tout } t \in K\end{aligned}$$

L'existence de f_n résulte des lemmes 2.1 et 2.2. Donc on peut construire la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ par récurrence. Soit K un compacte de $\Lambda = \{t \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} t > 0\}$. Il existe $L > 0$ et $\delta > 0$ tels que $\operatorname{Re} t > \delta$ pour tout $t \in K$, et $|t| \leq L$ pour tout $t \in K$. Pour $n \geq L$ on obtient

$$\left\|b_{n-1}^t - b_n^t\right\| \leq 2^{-n} + \exp(-(n-1)\delta) . \exp L(M+1) - 1$$

donc la suite $(b_n^t)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur tout compact K de Λ vers une limite que l'on note b^t. On a

$$\begin{aligned}b^{t+s} &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} b_n^{t+s} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \exp[(t+s)(-ne + f_1 + f_2 + ... + f_n)] \\ &= \lim_{n\rightarrow+\infty} \exp t(f_1 + f_2 + ... + f_n - ne) . \lim_{n\rightarrow+\infty} \exp s(f_1 + f_2 + ... + f_n - ne) \\ &= b^t . b^s \text{ pour } t, s \in \Lambda\end{aligned}$$

Donc $(b^t)_{\operatorname{Re} t>0}$ est un semigroupe. L'application $t \longrightarrow b_n^t$ est continue sur Λ pour tout n, donc l'application $t \longrightarrow b^t$ est aussi continue car b^t est limite uniforme sur tout compact K de Λ d'applications continues. Soit l une forme linéaire continue sur $A^\#$.

On a

$$\left\|l\left(b_n^t\right) - l\left(b_{n-1}^t\right)\right\| \leq |||l||| \left\|b_n^t - b_{n-1}^t\right\| \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ pour tout } t \in K$$

donc la suite $(l(b_n^t))$ converge uniformément sur tout compact K de Λ vers une limite $l(b^t)$. Comme l'application $t \longrightarrow l(b^t)$ est analytique sur Λ pour tout l alors

$(b^t)_{\operatorname{Re} t>0}$ est analytique. Pour $|t|<1$, $\operatorname{Re} t>0$ on a :

$$\begin{aligned}
\left\|b^t - e\right\| &= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\sum_{p=0}^{n}\left\|b_p^t - b_{p-1}^t\right\| \\
&\leq \lim_{n\longrightarrow+\infty}\sum_{p=0}^{n}\left[\exp\left(-(p-1)\operatorname{Re} t\right)\left(\exp\left(|t|\left(M+1\right)\right)-1\right)\right]+1 \\
&= \left[\exp|t|\left(M+1\right)-1\right]\sum_{p=1}^{+\infty}\exp\left[-(p-1)\operatorname{Re} t\right]+1 \\
&= \left[\exp|t|\left(M+1\right)-1\right]\sum_{p=1}^{+\infty}\left[\exp\left(-\operatorname{Re} t\right)\right]^p.\exp\left(\operatorname{Re} t\right)+1 \\
&= \left[\exp|t|\left(M+1\right)-1\right]\frac{1}{1-\exp\left(-\operatorname{Re} t\right)}+1.
\end{aligned}$$

D'où

$$\sup_t\left\|b^t\right\| \leq \sup_t\left\|b^t - e\right\| + 1 \leq +\infty.$$

Le semigroupe $(b^t)_{\operatorname{Re} t>0}$ est dans A car

$$\chi_0\left(b_n^t\right) = \exp\left(-nt\right), \left|\chi_0\left(b_n^t\right)\right| = \exp\left(-\operatorname{Re} t\right) \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc $\chi_0\left(b^t\right) = 0$ pour tout $t\in\Lambda$,et $b^t\in A$ pour $t\in\Lambda$. La suite (xb_n^t) converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$ vers une fonction $\varphi(t)$ continue de $\mathbb{C}$ dans G d'apr ès (2.1). Pour $t\in\Lambda$, on a

$$xb_n^{-t}b_n^t = x, \text{et } \lim_{n\longrightarrow+\infty} xb_n^{-t}b_n^t = \varphi(-t)\, b^t = x.$$

D'où

$$x\in b^t G \text{ pour tout } t\in\Lambda.$$

Comme φ est continue, on a

$$\varphi(t) \underset{\substack{t\to 0\\ t\in\Lambda}}{\longrightarrow} \varphi(0) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} xb_n^0 = x.$$

Donc

$$xb^t \underset{\substack{t\to 0\\ t\in\Lambda}}{\longrightarrow} x$$

■

Remarque 2.3 **i)** *Si l'unité approchée bornée est bornée par* 1, *on peut supposer que*

$$\left\|b^t\right\| \leq 1 \text{ pour tout } t > 0.$$

ii)

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t > o}} \left\|yb^t - y\right\| = 0 \text{ pour tout } y \in [xG]^- .$$

Démonstration. i) Si $M = 1$, on a

$$\begin{aligned}
\left\|b_n^t\right\| &= \left\|\exp\left[t\left(e_1 + e_2 + ... + e_n - ne\right)\right]\right\| \\
&= \exp\left[-n \operatorname{Re} t\right] \left\|\exp\left[t\left(e_1 + e_2 + ... + e_n\right)\right]\right\| \\
&= \exp\left[-n \operatorname{Re} t\right] \exp\left(nt\right) = 1 \text{ pour } t > o
\end{aligned}$$

D'où

$$\left\|b^t\right\| = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left\|b_n^t\right\| \leq 1 \text{ pour tout } t > 0$$

i) Posons $\lambda = \sup\limits_{0 < t \leq 1} \left\|b^t\right\|$, et soit $z \in \mathbb{C}$; on a

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{t \to 0^+ \\ t > o}} \left\|yb^t - y\right\| &\leq \lim_{t \to 0} \sup \left\{\left\|yb^t - xzb^t\right\| + \left\|xzb^t - xz\right\| + \left\|xz - y\right\|\right\} \\
&\leq (1 + \lambda) \left\|y - xz\right\| .
\end{aligned}$$

$$\text{Comme } y \in [xG]^-, \text{ on a } \lim_{t \to 0^+} \left\|yb^t - y\right\| = 0$$

■

Corollaire 2.1 (Théor ème de factorisation de Cohen) *L'ensemble*

$$F = A.E = \{y = ax \, , a \in A, x \in E\}$$

est un sous espace vectoriel fermé de E.

Démonstration. Il résulte du théor ème 2.1 (ii) que $F = G$. ■

Exemple 4 *L'alg èbre de Volterra* $L^1[0, 1]$ *ne poss ède aucun semi-groupes analytique.*

Continuité des semi-groupes dans une alg èbre de Banach commutative séparable

Théorème 2.2 *Soit A une alg èbre de Banach commutative séparable et soit $(a^t)_{t>0}$ un semigroupe dans A . Alors il existe deux suites (r_n) et (s_n) de terme positive telle que*

$$\lim_{n \to +\infty} r_n = \lim_{n \to +\infty} s_n = 0$$

et

$$\lim_{n \to +\infty} \left\|a^{t+r_n} - a^t\right\| = \lim_{n \to +\infty} \left\|a^{t-s_n} - a^t\right\| = 0 \text{ pour tout } t > 0.$$

Démonstration. Soit t_0 fixé, $t_0 > 0$ et supposons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\inf_{0<h \leq \alpha} \left\|a^{t_0} - a^{t_0+h}\right\| > 0.$$

On peut supposer que $\alpha < t_0$. On pose

$$\delta(t) = \inf_{0<h \leq \alpha} \left\|a^t - a^{t+h}\right\|$$

et comme

$$\left\|a^{t_0} - a^{t_0+h}\right\| \leq \left\|a^{t_0-t}\right\| \left\|a^t - a^{t+h}\right\| \quad (t < t_0, h > 0)$$

on a

$$\delta(t_0) \leq \left\|a^{t_0-t}\right\| \delta(t) \text{ pour tout } t < t_0 .$$

Si $m \in \mathbb{N}$ on pose

$$\Omega_m = \left\{t \in [t_0 - \alpha, t_0[\, , \left\|a^{t_0-t}\right\| \leq m\right\}$$

Alors

$$[t_0 - \alpha, t_0[\, = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$$

ainsi il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que Ω_n est non dénombrable.On a pour tout $t \in \Omega_n$

$$\delta(t) \geq \frac{\delta(t_0)}{\|a^{t_0-t}\|} \geq \frac{\delta(t_0)}{n}$$

posons

$$\zeta = \frac{\delta(t_0)}{2n}, \text{ et pour } t > 0; \; B_t = \left\{x \in A \, , \left\|x - a^t\right\| < \zeta\right\}.$$

Si $t, t_0 \in \Omega_n$ et $t < t'$ on a

$$0 < t - t' < \alpha \text{ et } \|t - t'\| \geq \delta(t) > 2\zeta.$$

Ainsi $B_t \cap B_{t'} = \Phi$ et la famille $(B_t)_{t\in\Omega_n}$ est une famille nondénombrable disjointe de boules ouvertes. Ce qui contredit la séparabilité de A, par conséquent

$$\inf_{0<h\leq\alpha} \left\|a^{t+h} - a^t\right\| = 0 \text{ pour tout } t > 0 \text{ et tout } \alpha > 0.$$

par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on peut choisir $r_n \in \left]0, \frac{1}{n}\right[$ tel que

$$\left\|a^{\frac{1}{n}+r_n} - a^{\frac{1}{n}}\right\| < \frac{1}{n}\inf_{m<n}\left\{\left(1 + \left\|a^{\frac{1}{m}} - a^{\frac{1}{n}}\right\|\right)^{-1}\right\}.$$

On obtient

$$\left\|a^{\frac{1}{m}+r_n} - a^{\frac{1}{m}}\right\| < \frac{1}{n}\text{pour tout } m \in \mathbb{N} \text{ et pour tout } n > m$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty}\left\|a^{\frac{1}{m}+r_n} - a^{\frac{1}{m}}\right\| = 0,\ (m \in \mathbb{N}).$$

Si $t > 0$ il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{m} < t$ et

$$\limsup_{n\to+\infty}\left\|a^{t+r_n} - a^t\right\| \leq \left\|a^{t-\left(\frac{1}{m}\right)}\right\| \limsup_{n\to+\infty}\left\|a^{\frac{1}{m}+r_n} - a^{\frac{1}{m}}\right\| = 0.$$

De même mani ère on peut construire une suite (s_n) tel que $s_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. et

$$s_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,\ \lim_{n\to+\infty}\left\|a^{t-s_n} - a^t\right\| = 0 \text{ pour tout } t > 0.$$

■

Corollaire 2.2 *Soit A une alg èbre de Banach commutative séparable, il existe un idéal I, $I \neq \{0\}$, dans A possédant une unité approchée bornée si et seulement si A possédant un semi-groupe borné $(a^t)_{t>0}$.*

Démonstration. Soit I un idéal dans A, $I \neq \{0\}$, possédant une unité approchée bornée, alors I est séparable et d'apr ès le théor ème 2.1 il existe un semi-groupe analytique $(a^t)_{\mathrm{Re}\,t>0}$ dans I tel que

$$\sup_{t>0}\left\|a^t\right\| < +\infty \text{ et } \left[a^t I\right]^- = I \text{ pour tout } t > 0\ .$$

Supposons maintenant que A possédant un semigroupe borné $(a^t)_{t>0}$, on pose

$$M = \sup_{t>0}\left\|a^t\right\|, I = \left[\underset{t>0}{\cup} a^t A\right]^-.$$

Soit (t_n) une suite vérifier le théor ème 2.2. Alors

$$\lim_{n \to +\infty} xa^{t_n} = x \text{ pour tout } x \in \bigcup_{t>0} a^t A.$$

Et puisque

$$\left\|a^{t_n}\right\| \leq M \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \lim_{n \to +\infty} xa^{t_n} = x \quad \text{pour tout } x \in I.$$

Ainsi I possédant une unité approchée bornée. ■

Proposition 2.1 *Soit A une alg èbre de Banach commutative possédant une unité approchée bornée séquentielle (e_n) formée d'idempotents. Alors il existe dans A une unité approchée bornée séquentielle (f_n) formée d'idempotents, et telle que*

$$f_n.f_n = f_m \text{ pour } m, n \in \mathbb{N}^*, n \geq m.$$

Démonstration. Soit n fixé, $n \in \mathbb{N}^*$, on sait [11] que si f, g sont deux idempotents distincts d'une alg èbre de Banach commutative alors

$$\left\|f - g\right\| \geq 1$$

On a

$$\lim_{m \longrightarrow +\infty} e_m e_n = e_n$$

et pour m assez grand on a

$$\|e_m e_n - e_n\| < 1$$

d'où comme $e_m - e_n$ est un idempotent $e_m.e_n = e_n$. On peut construire par récurrence une suite $(p_m)_m$ d'entiers strictement croissante telle que

$$e_m.e_{p_n} = e_{p_n} \text{ pour tout } m \geq p_{n+1}.$$

On pose $f_n = e_{p_n}$ alors (f_n) est une suite extraire de la suite(e_n), et $f_n = f_m f_n$ si $m \geq n + 1$. D'où le résultat ■

2.2 Explicitation des idempotents associés aux semi-groupes ne vérifiant pas certaines inégalités prés de l'origine

Lemme 2.4 *Soit K un sous corps de $\mathbb{R}$ et soit $\theta : K^+ \longrightarrow \mathbb{C}$($K^+$ l'ensemble des éléments strictement positifs de K) une application non nulle telle que $\theta(s+t) = \theta(s)\theta(t)$ pour $s, t \in \Bbbk^+$.*

i) *Si* $\limsup\limits_{t\longrightarrow 0^+} |\theta(t)| = +\infty$, *alors* $\limsup\limits_{t\longrightarrow 0^+} |\theta(t) - \theta(t(\alpha+1))| = +\infty$ *pour* $\alpha \in K^+$.

ii) *Si* $\limsup\limits_{t\longrightarrow 0^+} |\theta(t)| < +\infty$, *et si* $\limsup\limits_{t\longrightarrow 0^+} |1-\theta(t)| > 0$, *alors* $\limsup\limits_{t\longrightarrow 0^+} |\theta(t) - \theta(t(\alpha+1))| = 2$ *pour* $\alpha \in K^+$.

iii) *Si* $\lim\limits_{t\longrightarrow 0^+} \theta(t) = 1$, *alors il existe* $c \in \mathbb{C}$ *tel que* $\theta(t) = \exp tc$ *pour* $t \in K^+$.

Démonstration. Voir [12]. ■

Remarque 2.4 *D'apr ès le lemme précédent on déduit que si* $\lim\limits_{t\longrightarrow 0^+} |\theta(t)| = 1$, *alors il existe* $a \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$|\theta(t)| = \exp ta \quad pour\ t \in K^+.$$

Théorème 2.3 *Soit* K *un sous corps de* $\mathbb{R}$, *soit* $(a^t)_{t\in k^+}$ *un semigroupe non quasinilpotent dans une alg èbre de Banach, soit* A *la sous alg èbre de fermée engendrée par* $(a^t)_{t\in k^+}$ *et soit* $\gamma > 0$. *Si*

$$\limsup_{t\longrightarrow 0^+} \left\| a^t - a^{t(\gamma+1)} \right\| < \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}$$

alors il existe un idempotent J *de* A *et* $u \in JA$ *vérifiant les propriétés suivantes*

i) $\phi(J) = 1$ *pour* $\phi \in M(A)$.

ii) $(a^t - Ja^t)_{t\in K^+}$ *est un semigroupe quasinilpotent.*

iii) $Ja^t = \exp tu$ *pour* $t \in K^+$.

Démonstration. Voir [12]. ■

Lemme 2.5 *Soit* $n \geq 1$ *un entier, et soit* U *le disque ouvert de centre* 0 *et de rayon* $\frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$. *Il existe une application* h *analytique sur* U *et continue sur* $\overline{U}$ *tel que* $h(0) = 0$ *et tel que* $h(z) - h(z)^{1+n} = z$ *pour* $z \in U$. *De plus* $h^{(k)}(0) \geq 0$ *pour* $k \geq 1$, *et*

$$h\left(\frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}\right) = \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}.$$

Démonstration. Posons $f(z) = z - z^{n+1}$ pour $z \in \mathbb{C}$, soit V le disque ouvert de centre 0 et de rayon $\frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$, et soit $\Gamma = \partial V$ le cercle de centre 0 et de rayon $\frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$. Soient $z_1 \in V, z_2 \in V$. On a

$$f(z_1) - f(z_2) = (z_1 - z_2)\left(1 - \sum_{0\leq k\leq n} z_1^k z_2^{n-k}\right)$$

Comme
$$\left|\sum_{0\leq k\leq n} z_1^k z_2^{n-k}\right| < 1$$
f est injective sur V. Soit $\lambda \in U$. Posons $\phi(z) = z - \lambda,\ \psi(z) = z - z^{n+1} - \lambda$. Pour $z \in \Gamma$,on a

$$\begin{aligned}\left|\phi(z)\right| &\geq |z| - |\lambda| > \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}} - \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}} = |z|^{n+1} = \left|\phi(z) - \psi(z)\right|.\end{aligned}$$

Il résulte du théor ème de Rouché que l'équation $\psi(z) = 0$ poss ède un esolution dans V, et $U \subset f(V)$. L'application f est une application conforme de V sur l'ouvert $f(V)$. Soit $h : f(V) \longrightarrow V$ l'application réciproque, et soit

$$h(z) = \sum_{k\geq 0} \alpha_k z^k$$

le développement de Taylor de h en 0.On a

$$h(z) - h(z)^{1+n} = z \text{ pour } z \in f(V)$$

et
$$\alpha_0 = h(0) = 0$$
Soit R le rayon de convergence de la série $\sum_{k\geq 1} \alpha_k z^k$.Comme $U \subset f(V)$, on a

$$R \geq \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$$

D'autre part on a
$$h' - (n+1) h^n h' = 1$$
donc
$$\alpha_1 = h'(0) = 1$$
Soit $k \geq 2$. Il existe un polynôme Q_k de k variables à coefficients positifs tel que

$$h^{(k)} = (n+1) h^n h^{(k)} + Q_k\left(h, h', ..., h^{(k-1)}\right)$$

On voit donc par une récurrence que

$$h^{(k)}(0) \geq 0 \text{ pour } k \geq 2$$

Par conséquent $\alpha_k \geq 0$ pour $k \geq 1$. On a évidemment

$$h(t) = \phi(t) \text{ pour } 0 \leq t \leq \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$$

ce qui preuve que $R = \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$ puisque la dérivée de ϕ_n n'est pas bornée sur $\left[0, \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}\right[$.Comme $\alpha_k \geq 0$ pour $k \geq 1$, on en déduit que la série

$$\sum_{k\geq 1} \alpha_k \left(\frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}\right)^k$$

est convergente et a pour somme $\frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$. ■

Lemme 2.6 *Soit A une alg èbre de Banach, soit $n \geq 1$ un entier soit h la fonction analytique construite au lemme 2.5 et soit $u \in A$. Si $\|u\| \leq \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$ alors la série $\sum\limits_{k\geq 1} \frac{h^{(k)}(0)}{k!} u^k$ converge dans A, et si on pose*

$$h(u) = \sum_{k\geq 1} \frac{h^{(k)}(0)}{k!} u^k$$

on a

$$h(u) - h(u)^{n+1} = u$$

de plus

$$\|h(u)\| \leq h(\|u\|) \leq \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$$

Démonstration. D'apr ès les propriétés standard du calcul fonctionnel holomorphe, on a

$$h(ru) - h(ru)^n = ru \text{ pour } r \in [0,1[$$

et par continuité $h(u) - h(u)^{n+1} = u$. D'autre part

$$\|h(u)\| \leq \sum_{k\geq 1} \frac{h^{(k)}(0)}{k!} \|u\|^k = h(\|u\|) \leq \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}.$$

■

Lemme 2.7 *Soit A une alg èbre de Banach, et soit $u \in A$. Si u est quasi-nilpotent alors $x = h(u)$ est l'unique élément quasi-nilpotent de A vérifiant*

$$x - x^{n+1} = u.$$

Démonstration. Soit $A^{\#}$ l'alg èbre obtenue en ajoutant une unité I à A. Posons $x = h(u)$. Supposons qu'il existe un élément quasi-nilpotent $y \in A$ vérifie $y - y^{n+1} = u$, alors $yu = uy$. On a

$$(x-y)\left(I - \sum_{0 \le k \le n} x^k y^{n-k}\right) = 0$$

Puisque x et y sont quasi-nilpotents, $I - \sum\limits_{0 \le k \le n} x^k y^{n-k}$ est inversible dans $A^{\#}$ et $x = y$.

■

Théorème 2.4 *Soit A une alg èbre de Banach, soit $n \ge 1$ un entier et soit $x \in A$ tel que $\|x\| \ge \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$. Si x est quasi-nilpotent alors*

$$\left\|x - x^{n+1}\right\| > \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}.$$

Démonstration. Supposons que

$$\left\|x - x^{n+1}\right\| \le \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$$

et soit h la fonction analytique construite au lemme 2.5. D'apr ès le lemme 2.7 on a

$$x = h\left(x - x^{n+1}\right)$$

Comme la fonction h est transcendante et comme

$$\lim_{k \longrightarrow +\infty} \left\|\left(x - x^{n+1}\right)^k\right\|^{\frac{1}{k}} = 0$$

on a

$$\|x\| < \sum_{k \ge 1} \frac{h^{(k)}(0)}{k!} \|u\|^k \le h\left(\frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}\right) = \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}.$$

■

Corollaire 2.3 *Soit K un sous corps de $\mathbb{R}$, soit $(a^t)_{t \in k^+}$ un semi-groupe quasi-nilpotent dans une alg èbre de Banach, et soit $n \ge 1$ un entier. Si*

$$\limsup_{t \longrightarrow 0^+} \left\|a^t - a^{t(\gamma+1)}\right\| < \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}.$$

alors $a^t = 0$ pour $t \in K^+$.

Démonstration. Soit $t \in K^+$. Si $a^t \neq 0$ on a la fois

$$\limsup_{p \longrightarrow +\infty} \left\| a^{\frac{t}{p}} \right\| \geq \limsup_{p \longrightarrow +\infty} \left\| a^t \right\|^{\frac{1}{p}}$$

et

$$\limsup_{p \longrightarrow +\infty} \left\| a^{\frac{t}{p}} - a^{\frac{t(n+1)}{p}} \right\| < \frac{n}{(1+n)^{1+\frac{1}{n}}}$$

ce qui contredirait le théor ème 2.4. ∎

Théorème 2.5 *Soit K un sous corps de R, soit $(a^t)_{t \in k^+}$ un semi-groupe dans une alg èbre de Banach, soit A la sous alg èbre fermée engendrée par $(a^t)_{t \in k^+}$ et soit $n \geq 1$ un entier. Si*

$$\limsup_{t \longrightarrow 0^+} \left\| a^t - a^{t(n+1)} \right\| < \frac{n}{(1+n)^{1+\frac{1}{n}}}.$$

alors ou bien $a^t = 0$ pour $t \in K^+$, ou bien A est unitaire, et il existe un élément u de A tel que $a^t = \exp tu$ pour $t \in K^+$.

Démonstration. Supposons que $(a^t)_{t \in k^+}$ est quasi-nilpotent. Il résulte alors du corollaire 2.3 que $a^t = 0$ pour $t \in K^+$.Dans le cas contraire on sait d'apr ès le théor ème 2.3 qu'il existe un idempotent J de A, avec $\phi(J) = 1$ pour $\phi \in \hat{A}$ et un élément u de JA tels que

$$Ja^t = \exp tu \text{ pour } t \in K^+.$$

Soit $B = A/JA$ et soit P la surjection canonique de A sur B. Comme P est contractante, et comme $\phi(J) = 1$ pour $\phi \in \hat{A}$, B est radicale et il résulte du corollaire 2.3 que $P(a^t) = 0$

$$P\left(a^t\right) = 0 \text{ pour } t \in K^+.$$

Donc

$$a^t = Ja^t = \exp tu \;\text{ pour } t \in K^+$$

et A est unitaire d'unité J. ∎

Exemple 5 *Soit $A(D)$ l'alg èbre des fonction continues sur le disque unité fermé dont la restriction au disque unité ouvert D est holomorphe, munie de la norme*

$$\|f\|_\infty = \max_{|z| \leq 1} |f(z)| = \max_{|z|=1} |f(z)|$$

qui en fait une alg èbre de Banach uniforme. Pour $z \in \mathbb{C}$, z non réel ≤ 0, $t > 0$ on pose

$$z^t = |z| \exp(it \arg(z))$$

$\arg(z)$ *désignant la détermination de l'argument de z qui appartient à* $]-\pi,\pi[$ *, et on pose* $z^t = 0$ *pour* $t = 0$*. On pose également*

$$a^t(z) = \left(\frac{1-z}{2}\right)^t \ \ \textit{pour} \ |z| \leq 1, \ t > 0.$$

$(a^t)_{t>0}$ *est un semigroupe continu dans* $A(D)$ *puisque pour tout couple* s,t *de réels strictement positifs on a*

$$a^{t+s} = \left(\frac{1-z}{2}\right)^{t+s} = \left(\frac{1-z}{2}\right)^t \left(\frac{1-z}{2}\right)^s = a^t a^s$$

et de plus

$$\begin{aligned}\left\|\left(\frac{1-z}{2}\right)^{t+h} - \left(\frac{1-z}{2}\right)^t\right\|_\infty &= \left\|\left(\frac{1-z}{2}\right)^t\left(\left(\frac{1-z}{2}\right)^h - I\right)\right\|_\infty \\ &\leq \left\|\left(\frac{1-z}{2}\right)^t\right\|_\infty \left\|\left(\frac{1-z}{2}\right)^h - I\right\|_\infty\end{aligned}$$

passant à la limite quand $h \longrightarrow 0$ *on obtient*

$$\lim_{h\longrightarrow 0}\left\|\left(\frac{1-z}{2}\right)^{t+h} - \left(\frac{1-z}{2}\right)^t\right\|_\infty = 0 \ \ \textit{pour tout } t > 0.$$

Soit $F = \left\{f \in A(D) \,\middle|\, f(1) = 0\right\}$*, et posons*

$$\phi(z) = \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \ \textit{pour} \ |z| \leq 1, \ z \neq 1.$$

Soit $\mathfrak{R}$ *l'alg èbre quotient* $F \big/ \phi\mathfrak{F}$ *et soit* $P : F \longrightarrow \mathfrak{R}$ *la surjection canonique. Alors* $\mathfrak{R}$ *est radicale, la sous alg èbre fermée engendrée par* $P(a^t)_{t>0}$ *coïncide avec* $\mathfrak{R}$*, le semigroupe* $P(a^t)_{t>0}$ *est continu,*

$$\left\|P\left(a^t\right)\right\| \leq 1 \ \textit{pour } t > 0$$

et on a

$$\lim_{t\longrightarrow 0^+}\left\|P\left(a^t\right) - P\left(a^{t(n+1)}\right)\right\| = \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}} \ \textit{pour tout entier } n \geq 1.$$

En effet on déduit du fait que les polynômes sont denses dans $A(D)$ *que la sous alg èbre de* $A(D)$ *engendrée par* a^1 *est dense dans* F*. Donc la sous alg èbre fermé de* $\mathfrak{R}$ *engendrée par le semi-groupe* $(P(a^t))_{t>0}$ *coïncide avec* $\mathfrak{R}$*. L'application* $t \longrightarrow P(a^t)$ *est une application continue de* $]0,+\infty[$ *dans* $\mathfrak{R}$*, et*

$$\left\|P\left(a^t\right)\right\| \leq 1 \ \textit{pour } t > 0.$$

Comme F est le seul idéal maximal de $A(D)$ contenant ϕF, $\mathfrak{R}$ est radicale. On a

$$\left|\arg\left(a^t(z)\right)\right| < \frac{t\pi}{2} \text{ pour } t > 0,\ |z| < 1,\ \neq 1$$

donc $a^t(z) - \left|a^t(z)\right|$ *converge uniformément vers* 0 *sur* $\overline{D}$ *quand* $t \longrightarrow 0^+$*.On en déduit que*

$$\begin{aligned}\limsup_{t\longrightarrow 0^+}\left\|P\left(a^t\right) - P\left(a^{t(n+1)}\right)\right\| &\leq \limsup_{t\longrightarrow 0^+}\left\|a^t - a^{t(n+1)}\right\|_\infty \\ &\leq \max_{0\leq x\leq 1}\left(x - x^{n+1}\right) = \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}.\end{aligned}$$

Comme le semi-groupe $(a^t)_{t>0}$ *est continu, on a* $\lim\limits_{t\longrightarrow 0^+}\left\|P\left(a^t\right)\right\| = 1$*, et on déduit alors de théor ème 2.4 que*

$$\lim_{t\longrightarrow 0^+}\left\|P\left(a^t\right) - P\left(a^{t(n+1)}\right)\right\| = \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}.$$

Théorème 2.6 *Soit A une alg èbre de Banach, soit* $n \geq 1$ *un entier et soit* $x \in A$ *tel que*

$$\|x\| \geq \frac{n}{(n+1)^{\frac{1}{n}}} \text{ et } \left\|x - x^{n+1}\right\| < \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$$

Soit U le disque ouvert de centre 0 *est de rayon* $\frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$*, et soit h la fonction analytique sur U construite au lemme 2.5. Alors*

$$\left|\phi(x)\right| \neq \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}} \text{ pour } \phi \in \hat{A}$$

et l'élément $I - (n+1)h^n\left(x - x^{n+1}\right)$ *est inversible dans l'alg èbre* $A^\#$ *obtenue en ajoutant une unité I à A, et*

$$\begin{aligned}J &= \left(I - (n+1)h^n\left(x - x^{n+1}\right)\right)^{-1} \\ &\times\left(\sum_{2\leq k\leq n+1} C_{n+1}^k\left(x - h\left(x - x^{n+1}\right)\right)^{k-1} h\left(x - x^{n+1}\right)^{n+1-k}\right)\end{aligned}$$

est un idempotent non nul de A vérifiant

$$x - h\left(x - x^{n+1}\right) = J\left(x - h\left(x - x^{n+1}\right)\right)$$

De plus si $\phi \in \hat{A}$ *on a*

$$\phi(J) = 1 \text{ si } \left|\phi(x)\right| > \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$$

et

$$\phi(x) = 0 \; si \; \left|\phi(x)\right| < \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}.$$

Démonstration. Soit $u \in A$ tel que $\|u\| \leq \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$. Comme

$$\|h(u)\| \leq h(\|u\|) < \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$$

$I - (n+1)h^n(u)$ est inversible dans $A^{\#}$. Soit $y \in A$. On a

$$\begin{aligned} y + h(u) - (y + h(u))^{n+1} - u &= y\left(I - (n+1)h^n(u)\right) \\ &\quad - y^2\left(\sum_{2 \leq k \leq n+1} C_{n+1}^k y^{k-2} h(u)^{n+1-k}\right) \end{aligned}$$

Posons maintenant

$$\begin{aligned} u &= x - x^{n+1}, \; y = x - h(u), \\ b &= \left(I - (n+1)h(u)^n\right)^{-1}\left(\sum_{2 \leq k \leq n+1} C_{n+1}^k y^{k-2} h(u)^{n+1-k}\right) \end{aligned}$$

Comme

$$(y + h(u)) - (y + h(u))^{n+1} - u = 0$$

on a $y = y^2 b$, donc $y^2 b^2 = yb$, et $J = yb$ est un idempotent de A.Comme $\|h(u)\| \leq \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$, on a $y \neq 0$ et $J \neq 0$ puisque $y = Jy$.

Soit maintenant $\phi \in \hat{A}$. Comme

$$\left|\phi(x)\right| - \left|\phi(x)\right|^{n+1} \leq \left|\phi\left(x - x^{n+1}\right)\right| < \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}},$$

on a

$$\left|\phi(x)\right| \neq \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}.$$

On a vu dans la démonstration du lemme 2.5 que la fonction $f(z) = z - z^{n+1}$ est injective sur le disque de centre 0 est de rayon $\frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$.Comme

$$\phi(x) - \phi(x)^{n+1} = \phi(h(u)) - \phi(h(u))^{n+1}$$

et comme

$$\phi(h(u)) \leq h(\|u\|) < \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$$

on voit que si $\phi(x) < \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$ alors

$$\phi(y) = \phi(x) - \phi(h(u)) = 0$$

donc $\phi(J) = 0$.D'autre part si $\phi(x) > \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$, alors

$$\phi(x) \neq \phi(h(u))$$

donc $\phi(y) \neq 0$ et $\phi(J) = 1$ puisque $y = Jy$. ■

Exemple 6 *Dans le cas $n = 1$. On trouve d'apr ès le lemme 2.5*

$$h(z) = \frac{1 - (1-4z)^{\frac{1}{2}}}{2} \text{ pour } |z| \leq \frac{1}{4}$$

Et d'apr ès le théor ème 2.6 on a

$$\begin{aligned} J &= \left(I - 2h\left(x - x^2\right)\right)^{-1}\left(x - h\left(x - x^2\right)\right) \\ &= \left(x - \frac{I}{2} + \frac{1}{2}\left(I - 4x + 4x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\left(I - 4x + 4x^2\right) \\ &= \frac{I}{2} + \left(x - \frac{I}{2}\right)\left(\left(I - 4x + 4x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right). \end{aligned}$$

Remarque 2.5 *On déduit du théor ème 2.6 que si l'alg èbre de Banach A ne poss ède aucun idempotent non nul, alors*

$$\left\|x - x^{n+1}\right\| \geq \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}} \text{ pour tout } x \in A \text{ tel que } \|x\| \geq \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}.$$

Corollaire 2.4 *Soit K un sous corps de $\mathbb{R}$, et soit $(a^t)_{t\in K^+}$ un semi-groupe dans une alg èbre de Banach A. On suppose que A ne poss ède aucun idempotent non nul.*

i) *Si* $\limsup\limits_{t\longrightarrow 0^+}\left\|a^t - a^{t(n+1)}\right\| < \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$, *alors $a^t = 0$ pour $t \in K^+$.*

ii) *Si* $\liminf\limits_{t\longrightarrow 0^+}\left\|a^t\right\| > 0$, *alors* $\liminf\limits_{t\longrightarrow 0^+}\left\|a^t - a^{t(n+1)}\right\| \geq \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$.

Démonstration. (i) provient du fait que $\liminf\limits_{p\longrightarrow +\infty}\left\|a^{\frac{t}{p}}\right\| \geq 1$ si $a^t \neq 0$.

D'autre part posons $m = \liminf\limits_{t\longrightarrow 0^+}\left\|a^t\right\|$. On a

$$m^2 = \liminf_{t\longrightarrow 0^+}\left\|a^t\right\|^2 \geq \liminf_{t\longrightarrow 0^+}\left\|a^{2t}\right\| = m.$$

Donc si $m > 0$, alors $m \geq 1$.

(ii) découle immédiatement du théor ème 2.6. ■

Remarque 2.6 *La sous alg èbre fermée engendrée par le semi-groupe $(a^t)_{t\in K^+}$ poss ède un idempotent non nul si*

$$\liminf_{t\longrightarrow 0^+}\left\|a^t\right\| > 0.$$

Définition 2.4 *Soit K un sous corps de $\mathbb{R}$, et soit $(a^t)_{t\in K^+}$ un semi-groupe dans une alg èbre de Banach A. On dira que $(a^t)_{t\in K^+}$ est localement borné si*

$$\sup_{t\in[\alpha,\beta]\cap K} a^t < +\infty \ \textit{pour}\ 0 < \alpha \leq \beta < +\infty.$$

Si $\liminf\limits_{t\longrightarrow 0^+}\left\|a^t\right\| = 0$ et s'il existe $s \in K^+$ tel que $a^s \neq 0$, alors le semi-groupe $(a^t)_{t\in K^+}$ n'est pas localement borné puisque

$$\left\|a^{s-t}\right\|\left\|a^t\right\| \geq \|a^s\| \ \textit{pour}\ 0 < t < s.$$

Définition 2.5 *On dira qu'une suite d'idempotents $\left(J_p\right)_{p\geq 1}$ d'une algèbre de Banach est croissante si*

$$J_{p+1}J_p = J_p \ \textit{pour}\ p \geq 1$$

ce qui implique que

$$J_qJ_p = J_p \ \textit{pour}\ q \geq p \geq 1.$$

Théorème 2.7 *Soit K un sous corps de R, et soit $(a^t)_{t\in K^+}$ un semi-groupe dans une alg èbre de Banach tel que*

$$\liminf_{t\longrightarrow +\infty}\left\|a^t - a^{t(n+1)}\right\| < \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$$

et soit A la sous alg èbre fermé engendrée par le semi-groupe $(a^t)_{t\in K^+}$. Si le semi-groupe $(a^t)_{t\in K^+}$ est localement borné et non nul, alors il existe une suite croissante $\left(J_p\right)_{p\geq 1}$ d'idempotents non nul de A telle que

$$\hat{A} = \bigcup_{p\geq 1}\left\{\phi\in\hat{A}\ \middle|\ \phi\left(J_p\right) = 1\right\}$$

et telle que $\bigcup\limits_{p\geq 1} J_pA$ est dense dans A.

Démonstration. Soit $\delta \in \left]\liminf\limits_{t\longrightarrow 0^+}\left\|a^t - a^{t(n+1)}\right\|, \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}\right[$ et soit $\left(t_p\right)_{p\geq 1}$ une suite décroissante d'éléments de K^+ qui converge vers 0 telle que

$$\left\|a^{t_p} - a^{t_p(n+1)}\right\| \leq \delta \text{ pour } p \geq 1.$$

Comme
$$\liminf_{t \longrightarrow 0^+} \left\| a^t \right\| \geq 1,$$
on peut supposer que
$$\left\| a^{t_p} \right\| > \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}} \text{ pour } p \geq 1.$$
Soit J_p l'idempotent associé à a^{t_p} par le théor ème 2.7. Soit $\phi \in \hat{A}$. Comme
$$\phi\left(a^t\right) \neq 0 \text{ pour } t \in K^+$$
on a
$$\limsup_{t \longrightarrow 0^+} \left| \phi\left(a^t\right) \right| < +\infty$$
et d'apr ès la Remarque 2.6 il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que
$$\left| \phi\left(a^t\right) \right| = \exp\left(t\alpha\right) \quad \text{pour } t \in K^+.$$
Donc
$$\left| \phi\left(a^{t_p}\right) \right| = \left| \phi\left(a^{t_{p+1}}\right) \right|^{\frac{t_p}{t_{p+1}}} \quad \text{pour } p \geq 1.$$
Si $\phi\left(J_{P+1}\right) = 0$ alors
$$\left| \phi\left(a^{t_{p+1}}\right) \right| < \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}.$$
Donc on a également $\left| \phi\left(a^{t_p}\right) \right| < \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$, ce qui montre que $\phi\left(J_P\right) = 0$.On a donc
$$J = J_{p+1} J_p \text{ pour } p \geq 1$$
et la suite $\left(J_P\right)_{p \geq 1}$ est croissante. Considérons à nouveau $\phi \in \hat{A}$. Comme $\lim\limits_{t \longrightarrow 0^+} \left| \phi\left(a^t\right) \right| = 1$, on a
$$\left| \phi\left(a^{t_p}\right) \right| > \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$$
pour p suffisamment grand, et par conséquent
$$\hat{A} = \bigcup_{p \geq 1} \left\{ \phi \in \hat{A} \ \left| \phi\left(J_P\right) = 1 \right. \right\}.$$
Soit M l'adhérence de l'idéal $\bigcup\limits_{p \geq 1} J_p A$, et soit $P : A \longrightarrow A/M$ la surjection canonique. L'alg èbre quotient A/M est radicale, et il résulte du corollaire 2.4 que
$$\liminf_{t \longrightarrow 0^+} \left\| P\left(a^t\right) \right\| = 0.$$
Comme $P\left(a^t\right)$ est localement borné, on voit que $P\left(a^t\right) = 0$ pour $t \in K^+$. Donc $M = A$. ■

Corollaire 2.5 *soit $(a^t)_{t>0}$ un semi-groupe non nul dans une alg èbre de Banach, soit A la sous alg èbre fermée engendrée par $(a^t)_{t>0}$, et soit $n \geq 1$ un entier on suppose que $(a^t)_{t>0}$ est continu sur $]0, +\infty[$ et que*

$$\liminf_{t \longrightarrow 0^+} \left\| a^t - a^{t(n+1)} \right\| < \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}.$$

Alors ou bien A est unitaire, et dans ce cas il existe $u \in A$ tel que

$$a^t = \exp(tu) \ \ pour \ t > 0$$

ou bien il existe une suite $\left(j_p\right)_{p\geq 1}$ d'idempotents non nuls de A vérifiant les conditions suivantes

i) *$j_p j_q = 0$ pour $p \neq q$.*

ii) *$\hat{A} = \underset{p\geq 1}{\cup} \left\{ \phi \in \hat{A} \ \middle| \phi(j_P) = 1 \right\}$, et Span $\left\{ j_p A \right\}_{p\geq 1}$ est dense dans A.*

iii) *Pour $p \geq 1$ il existe $u_p \in j_p A$ tel que $j_p a^t = \exp\left(t u_p\right)$ pour $t > 0$, où*

$$\exp v = j_p + \sum_{k\geq 1} \frac{t^k v^k}{k!} \ pour \ v \in j_p A.$$

Corollaire 2.6 *Soit $\left(J_p\right)_{p\geq 1}$ la suite croissante d'idempotents donnée par le théor ème 2.7. S'il existe $p \geq 1$ tel que $J_q = J_p$ pour $q \geq p$, alors A est unitaire d'unité $J = J_p$.Il résulte du théor ème 2.6 que $J \in a^{t_p} A^{\#}$ où $A^{\#}$ désigne l'alg èbre obtenue en adjoignant une unité à A, et on a donc*

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} \left\| J - J a^t \right\| = 0.$$

Il résulte alors du théor ème 2.9.3 qu'il existe $u \in A$ tel que

$$a^t = \exp(tu) \ \ pour \ t > 0.$$

Supposons maintenant que pour tout $p \geq 1$ il existe $q > p$ tel qu $eJ_q \neq J_p$. Quitte à Remarque placer la suite $\left(J_p\right)_{p\geq 1}$ par une sous suite onpeut supposer que

$$J_p \neq J_{p+1} \ pour \ p \geq 1.$$

Posons

$$j_1 = J_1 \ et \ j_p = J_p - J_{p-1} \ pour \ p \geq 2.$$

Soit $p \geq 2$. On a

$$j_p J_{p-1} = J_p J_{p-1} - J_{p-1} = 0,$$

donc

$$j_p J_q = j_p J_{p-1} J_q = 0$$

pour $1 \leq q \leq p-1$. *Ceci montre que*

$$J_p J_q = 0 \text{ pour } q \neq p.$$

D'autre part

$$Span\left\{j_p A\right\}_{p\geq 1} = \underset{p\geq 1}{\cup} J_p A,$$

donc $Span\left\{j_p A\right\}_{p\geq 1}$ *est dense dans* A, *ce qui implique que*

$$\hat{A} = \underset{p\geq 1}{\cup}\left\{\phi \in \hat{A} \; \middle| \phi\left(j_P\right) = 1\right\}.$$

Soit $p \geq 1$. *Comme* $J_p \in a^{t_p} A$, *et comme* $j_p = J_p j_p$, *on a*

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} \left\| j_p - j_p a^t \right\| = 0.$$

On déduit alors à nouveau du théor ème 1.18 *qu'il existe* $u_p \in j_p a^t$ *tel que*

$$j_p a^t = \exp\left(t u_p\right) \text{ pour } t > 0.$$

Lemme 2.8 *Soient* p *et* q *deux entiers positifs, et soit* $R_{p,q} = \left(\frac{p}{p+q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{p}{p+q}$. *Il existe une fonction analytique* $g : D\left(0, R_{p,q}\right) \longrightarrow \mathbb{C}$ *telle que* $g(0) = 1$ *et telle que* $g(z)^p - g(z)^{p+q} = z$ *pour* $|z| < R_{p,q}$. *De plus* $\left|g(z)\right| > \left(\frac{p}{p+q}\right)^{\frac{p}{q}}$ *pour* $|z| < R_{p,q}$.

Démonstration. Voir Distance entre puissance d'une unité approchée bornée [4]. ∎

Lemme 2.9 *Soit* x *un élément d'une alg èbre de Banach, soit* A *la sous alg èbre fermée engendrée par* x, *soit* $A^{\#}$ *l'alg èbre obtenue en adjoignant une unité* I *à* A, *soient* p *et* q *deux entiers positifs et soit* g *la fonction analytique associée à* p *et* q *au lemme* 2.8. *Si*

$$\rho\left(x^p - x^{p+q}\right) < \left(\frac{p}{p+q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{p}{p+q},$$

alors

$$pg\left(x^p - x^{p+q}\right)^{p-q} - (p+q)\, g\left(x^p - x^{p+q}\right)^{p+q-1},$$

est inversible dans $A^{\#}$, et

$$\begin{aligned} J_{p,q}(x) = I - & \left[pg\left(x^p - x^{p+q}\right)^{p-q} - (p+q)\,g\left(x^p - x^{p+q}\right)^{p+q-1}\right]^{-1} \\ \times & \left[\sum_{2\leq k\leq p+q} C_{p+q}^k \left(x - g\left(x^p - x^{p+q}\right)\right)^{k-1} g\left(x^p - x^{p+q}\right)^{p+q-k} \right. \\ & \left. - \sum_{2\leq k\leq p+q} C_p^k \left(x - g\left(x^p - x^{p+q}\right)\right)^{k-1} g\left(x^p - x^{p+q}\right)^{p-k} \right] \end{aligned}$$

est un idempotent de A. De plus

$$J_{p,q}(x)\,x = J_{p,q}(x)\,g\left(x^p - x^{p+q}\right),$$

et

$$\begin{aligned} \left\{\phi \in M(A) \,\middle|\, \phi\left(J_{p,q}(x)\right) = 1\right\} &= \left\{\phi \in M(A) \,\middle|\, \phi(x) \in \Omega_0\right\} \\ &\subset \left\{\phi \in M(A) \,\middle|\, \phi(x) > \left(\frac{p}{p+q}\right)^{\frac{p}{q}}\right\}, \end{aligned}$$

où Ω_0 désigne la composante connexe de 1 *dans l'ouvert*

$$\Omega = \left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \left|z^p - z^{p+q}\right| < \left(\frac{p}{p+q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{p}{p+q}\right\}.$$

Démonstration. Soit ϕ_0 le caract ère de $A^{\#}$ tel que $\ker\left(\phi_0\right) = A$. Posons

$$C_m^k = \frac{m!}{k!\,(m-k)!}$$

pour $m \geq 0$, $0 \leq k \leq m$, $\delta = \left\|x^p - x^{p+q}\right\|$, $u = x^p - x^{p+q}$ et $y = x - g(u)$. Comme

$$g^p(u) - g^{p+q}(u) = u,$$

on a

$$\begin{aligned} 0 &= x^p - x^{p+q} - u \\ &= (y + g(u))^p - (y + g(u))^{p+q} - u \\ &= y\left[pg(u)^{p-1} - (p+q)\,g(u)^{p+q-1}\right] \\ &\quad - y^2\left[\sum_{2\leq k\leq p+q} C_{p+q}^k y^{k-2} g(u)^{p+q-k} - \sum_{2\leq k\leq p} C_p^k y^{k-2} g(u)^{p-k}\right]. \end{aligned}$$

Posons de nouveau

$$f(z) = z^p - z^{p+q} \text{ pour } z \in \mathbb{C}.$$

On a $f'(g(z))\,g'(z) = 1$ pour $|z| < \left(\frac{p}{p+q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{p}{p+q}$ et par conséquent la fonction

$$h : z \longrightarrow \frac{1}{f'(g(z))}$$

est analytique sur le disque ouvert

$$D\left(0, \left(\frac{p}{p+q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{p}{p+q}\right).$$

Comme

$$f'(g(z)) = pg(z)^{p-1} - (p+q)\,g(z)^{p+q-1}$$

il résulte d'une propriété standard du calcul fonctionnel holomorphe que

$$pg(z)^{p-1} - (p+q)\,g(z)^{p+q-1}$$

est inversible dans $A^{\#}$ et que

$$h(u) = pg(u)^{p-1} - (p+q)\,g(u)^{p+q-1}.$$

Posons

$$v = h(u)\left[\sum_{2 \le k \le p+q} C_{p+q}^k y^{k-2} g(u)^{p+q-k} - \sum_{2 \le k \le p} C_p^k y^{k-2} g(u)^{p-k}\right],$$

$$J(x) = I - yv.$$

Comme $y = y^2 v$, on a $(yv)^2 = y^2 v^2 = yv$, donc yv et $J(x)$ sont des idem- potents de $A^{\#}$ et $J(x)\,y = 0$, de sorte que

$$J(x)\,x = J(x)\,g(u).$$

Comme $g(0) = 1$, $h(0) = \frac{-1}{q}$, et $\phi_0(g(u)) = 1$, donc $\phi_0(y) = -1$. Par conséquent

$$\begin{aligned} &\phi_0\left(\sum_{2 \le k \le p+q} C_{p+q}^k y^{k-2} g(u)^{p+q-k} - \sum_{2 \le k \le p} C_p^k y^{k-2} g(u)^{p-k}\right) \\ = &\sum_{2 \le k \le p+q} C_{p+q}^k (-1)^k - \sum_{2 \le k \le p} C_p^k (-1)^k = -1 + p + q + 1 - p = q. \end{aligned}$$

Donc $\phi_0(v) = -1$ et $\phi_0(yv) = 1$. Par conséquent $\phi_0(J(x)) = 0$, et $J(x) \in A$.

Soit maintenant

$$\Omega = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \left|z^p - z^{p+q}\right| < \left(\frac{p}{p+q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{p}{p+q} \right\},$$

et soit Ω_0 la composante connexe de 1 dans Ω. On a $g\left(f\left(z\right)\right) = z$ pour $z \in \Omega_0$. D'autre part l'image par g du disque ouvert

$$D\left(0, \left(\frac{p}{p+q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{p}{p+q}\right)$$

est un ouvert connexe contenu dans Ω qui contient 1, donc $g\left(z\right) \in \Omega_0$ pour

$$|z| < \left(\frac{p}{p+q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{p}{p+q},$$

et on voit que

$$\Omega_0 = g\left(D\left(0, \left(\frac{p}{p+q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{p}{p+q}\right)\right) = \left\{z \in \Omega \,\middle|\, g\left(f\left(z\right)\right) = z\right\}.$$

Pour

$$|z| < \left(\frac{p}{p+q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{p}{p+q},$$

on a

$$\left|f\left(g\left(z\right)\right)\right| = \left|\left|g\left(z\right)\right|^p - \left|g\left(z\right)\right|^{p+q}\right| \leq \left|g\left(z\right)^p - g\left(z\right)^{p+q}\right| < \left(\frac{p}{p+q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{p}{p+q}.$$

Comme l'ensemble

$$\left\{\left|f\left(g\left(z\right)\right)\right|\right\}_{|z|<\left(\frac{p}{p+q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{q}{p+q}}$$

est connexe et contient 0, l'étude du graphe de f sur l'intervalle $]0, +\infty[$ montre que

$$\left|g\left(z\right)\right| > \left(\frac{p}{p+q}\right)^{\frac{1}{q}} \text{ pour } |z| < \left(\frac{p}{p+q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{p}{p+q}.$$

En particulier

$$|z| > \left(\frac{p}{p+q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

pour $z \in \Omega_0$. Soit $\phi \in \hat{A}$. Comme $J(x)\, x = J(x)\, g(u)$, on voit que $\phi(x) = \phi(g(u))$ si $\phi(J(x)) = 1$.Comme

$$I - J(x) = (x - g(u))\, v,$$

on voit réciproquement en prolongeant ϕ à $A^{\#}$ que $\phi(J(x)) = 1$ si $\phi(x) = \phi(g(u))$. Mais

$$\phi(g(u)) = \phi(g(f(x))) = g\big(\phi(f(x))\big)$$

et par conséquent $\phi(J(x)) = 1$ si et seulement si $\phi(x) \in \Omega_0$. ∎

CHAPITRE 3

LES UNITÉS APPROCHÉES BORNÉES DANS UNE ALGÈBRE DE BANACH

3.1 Suites régularisantes

Définition 3.1 (Suites régularisantes) *[13]On appelle suite régularisante (ou approximation de l'identité) une famille $(\rho_n)_{n\geq 1}$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes*

1. $\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ *et supp* $\rho_n \subset [-1/n, 1/n]$, $\forall n \geq 1$,
2. $0 \leq \alpha_n \leq 1$,
3. $\int_{\mathbb{R}} \alpha_n(x)dx = 1$, $\forall n \geq 1$

Dorénavant on utilisera systématiquement la notation (ρ_n) pour désigner une suite régularisante

Remarque 3.1 *Remarquons qu'il existe des suites régularisantes.* ***En effet****, il suffit de fixer une fonction $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}$ avec Supp $\rho \subset [-1/n, 1/n]$, $\rho \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ et $\int_{\mathbb{R}} \rho(x)dx > 0$, par exemple : La fonction*

$$\rho(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right) & si \ |x| < 1 \\ 0 & si \ |x| \geq 1 \end{cases}$$

On considère ensuite

$$\rho_n(x) = cn\rho(nx) = \begin{cases} cn \ \exp\left(\frac{1}{n^2x^2-1}\right) & si \ |x| < \frac{1}{n} \\ 0 & si \ |x| \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

avec

$$c = 1/\exp\left(\frac{-1}{1-x^2}\right)dx$$

Pour $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$,on pose

$$f_n(x) = \rho_n * f(x)$$

telque

$$f_n(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\rho_n(y)dy = \int_{\mathbb{R}} f(y)\rho_n(x-y)dy, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

La fonction f_n s'appelle régularisée de f. Dans l'espace $L_1(\mathbb{R})$ les suites régularisante qui joue le même rôle que l'unité approchée bornée

Exemple 7 *[1]On considère*

$$L^1(\mathbb{R}) = \{f : I\mathbb{R} \to \mathbb{C}, \ mesurable, \ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx < 1\}$$

muni de la convolution possède une unité approchée bornée.

$$e_n(x) = \begin{cases} n \text{ si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, n \geq 1 \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

$\|e_n\| = 1$ *et* $f * e_n(x) = \int_{+\infty}^{-\infty} f(x-t)e_n(t)dt = n\int_0^{\frac{1}{n}} f(x-t)dt; f(x) = f(x).n\int_0^{\frac{1}{n}} dt$

alors

$$(f * e_n)(x) - f(x) = n\int_0^{\frac{1}{n}} [f(x-t) - f(x)]dt$$

Si f *est continue à support compact* $\subset [-\alpha, \alpha]$ *, donc elle est uniformément continue*

$$\begin{aligned} \|(f * e_n) - f\|_1 &= \int_{-\alpha-1}^{\alpha+1} |(f * e_n)(x) - f(x)|dt \\ &\leq \int_{-\alpha-1}^{\alpha+1} n\frac{1}{n}\sup|f(x-t) - f(x)|dt \\ &\leq 2(\alpha+1)\sup|f(x-t) - f(x)|,\ 0 \leq t \leq \frac{1}{n},\ |x| \leq \alpha + 1 \end{aligned}$$

Comme f est uniformément continue ; le

$$\sup|f(x-t) - f(x)| \to 0 \text{ quand } n \to +\infty,\ 0 \leq t \leq \frac{1}{n},\ |x| \leq \alpha + 1$$

$\|(f * e_n) - f\|_1 \to 0$ *si* f *est continue à support compact . Si* g *est quelconque dans* L^1 *et* f *continue à support compact,*

$$\begin{aligned} \overline{\lim_{n\to\infty}}\|g * e_n - g\|_1 &= \overline{\lim_{n\to\infty}}\|g * e_n - f * e_n\|_1 \\ +\overline{\lim_{n\to\infty}}\|f * e_n - f\|_1 + \|f - g\|_1 &\leq 2\|g - f\| \ \forall f \end{aligned}$$

continue à support compact par densité on a $\overline{\lim}_{n\to\infty}\|g * e_n - g\|_1 = 0$
Ceci prouve exactement que $\lim_{n\to+\infty} g * e_n = g$ *dans* $L^1(\mathbb{R})$.
Par conséquence $(e_n)_{n\leq 1}$ *est une unité approchée bornée séquentielle de* $L^1(\mathbb{R})$.*(bornée par* 1*).*

3.2 Unité approchée bornée

Dans ce chapitre on va donner quelques définitions et propriétés avec des exemples.

Définition 3.2 (Unité approchée bornée.) *[1]Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach commutative. On dit que $\mathcal{A}$ possède une unité approchée bornée séquentielle (u,a,b,s) s'il existe une suite $(e_n)_n$ de $\mathcal{A}$ bornée telle que :*

$$x = \lim_{n\to+\infty} e_n x \quad \textit{pour tout } x \in \mathcal{A}.$$

En d'autres termes, on dit qu'une suite $(e_n)_n$ d'éléments d'une algèbre de Banach $\mathcal{A}$ est une unité approchée bornée séquentielle de $\mathcal{A}$ si

$$\begin{array}{rcl} \|e_n\| & < & +\infty \ \textit{pour tout } n \in \mathbb{N} \\ \textit{et } \lim\limits_{n\to+\infty} \|e_n x - x\| & = & 0 \ \textit{ pour tout } x \in \mathcal{A} \end{array}$$

Définition 3.3 *Soit A une algèbre de Banach commutative. On dit que A possède une unité approchée bornée s'il existe $M > 0$ tel que pour tout $a_1, a_2, ..., a_k \in A$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in A$ avec*

$$\|x\| \leq M : \|xa_i - a_i\| < \varepsilon \ \textit{pour tout } i\ .$$

Remarque 3.2 *Il suffit pour avoir une unité approchée bornée que la condition ci-dessus soit vérifiée pour $k = 1$.*

Unité approchée bornée séquentielle.

Définition 3.4 *Soit A une algèbre de Banach commutative. On dit que A possède une unité approchée borné e séquentielle (u.a.b.s) s'il existe une suite (e_n) de A bornée telle que*

$$x = \lim_{n \longrightarrow +\infty} xe_n \ \textit{pour tout } x \in A$$

Remarque 3.3 *[1]Si $(e_n)_n$ est un unité approchée bornée séquentielle de $\mathcal{A}$ on $\lim_{n\to+\infty} \|e_n\| \geq 1$: En effet, $\|x\| = \lim_{n\to+\infty} \|e_n x\| \leq \lim_{n\to+\infty} \|e_n\|\|x\|$ pour tout $x \in \mathcal{A}$, ainsi :*

$$1 \leq \lim_{n\to+\infty} \|e_n\|.$$

Proposition 3.1 *[1]Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach commutative. Alors $\mathcal{A}$ possède une unité approchée bornée par M si et seulement si, pour chaque ensemble finie $\{a_1, a_2, , , , , a_k\}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ et pour tout $\epsilon > 0$, il existe $e \in \mathcal{A}$ avec*

$$\|e\| \leq M \textit{ et } \|ea_i - a_i\| < \varepsilon \ \textit{pour tout } i = 1, ..., k.$$

Démonstration. $\Longrightarrow$

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach commutative possède une unité approchée $(e_n)_{n\leq 1}$ bornée par M :
Considérons un ensemble finie $\{a_1, a_2, , , , , a_k\}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ on à :

$$\lim_{n\to+\infty} \|e_n a_i - a_i\| = 0 \text{ pour tout } i = 1, ..., k.$$

Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$:

$$\|e_n a_i - a_i\| < \varepsilon \ \text{ pour tout } i = 1, ..., k.$$

avec $e_{n_0} \in \mathcal{A}$ et $\|e_{n_0}\| \leq M$. Nous avons

$$\|e_{n_0} a_i - a_i\| < \varepsilon \ \text{ pour tout } i = 1, ..., k.$$

Donc

$$e_{n_0} = e$$

$\Longleftarrow$

Réciproquement,supposons que $\mathcal{A}$ est une algèbre de Banach commutative à la propriété qu'il existe une constante M telle que pour chaque ensemble finie $\{a_1, a_2, , , , , a_k\}$ d'éléments dans $\mathcal{A}$ et chaque $\varepsilon > 0$ il existe un élément $e \in \mathcal{A}$ avec $\|e\| \leq M$ telle que

$$\|ea_i - a_i\| < \varepsilon \ \text{ pour tout } i = 1, ..., k.$$

On note par Λ l'ensemble de tout les paires $\lambda = (F, n)$ avec F un ensemble finie contenu dans $\mathcal{A}$, et $n \geq 1$. l'ensemble est un ensemble partiellement ordonnée par cette relation :

$$(F_{n_1}, n_1) \sim (F_{n_2}, n_2) \ \text{ ssi } F_{n_1} \subset F_{n_2} \ \text{ et } n_1 \leq n_2.$$

Alors pour tout $\lambda = (F, n)$ dans il existe un élément $e_\lambda \in \mathcal{A}$ avec $\|e_\lambda\| \leq M$ tel que

$$\|e_\lambda x - x\| < \frac{1}{n} \ \text{ pour tout } x \in F_n.$$

Ainsi, pour tous $x \in \mathcal{A}$ et $\varepsilon > 0$ il existe $\lambda_0 = (F, n_0) \in \Lambda$ telle que

$$\|e_\lambda x - x\| < \varepsilon \ \text{ pour tout } \lambda \geq \lambda_0;$$

c'est-à-dire, la suite $(e_\lambda)_{k\geq 1}$ bornée par M tel que :

$$x = \lim_{n\to+\infty} e_\lambda x \ \text{ pour tout } x \in \mathcal{A}.$$

Par conséquent $(e_\lambda)_{\lambda\geq 1}$ est une unité approchée bornée séquentielle de $\mathcal{A}$ bornée par M.

■

Proposition 3.2 *[1]Soit $\mathcal{A}$ une algèbre normée séparable,ou s'il existe $a \in \mathcal{A} : [a\mathcal{A}]^- = A([a\mathcal{A}]^-$ la durance de L'algèbre engendrée par a. Alors $\mathcal{A}$ possède une unité approchée bornée séquentielle.*

Démonstration. i) Si $\mathcal{A}$ est une algèbre normée séparable, soit (a_m) une suite dense dans $\mathcal{A}$; pour tout $n \geq 1$ il existe (e_n) tel que :

$$||e_n a_m - a_m|| < \frac{1}{n} \text{ pour tout } n \geq m \text{ avec } ||e_n|| \leq M$$

Alors pour m fixé ;

$$||e_n a_m - a_m|| < \frac{1}{n} \text{ pour tout } n \geq m,$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} ||e_n a_m - a_m|| = 0$$

Soit $y \in \mathcal{A}$ est $\epsilon > 0$, il existe $m \in \mathbb{N}$:

$$||y - a_m|| < \frac{\epsilon}{2(1+M)}$$

et il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$:

$$||e_n a_m - a_m|| < \frac{\epsilon}{2},$$

pour $n > n_1$ on a

$$\begin{aligned} ||e_n y - y|| &= ||e_n y - e_n a_m + e_n a_m - y - a_m + a_m|| \\ &\leq ||e_n|| ||y - a_m|| + ||e_n a_m - a_m|| + ||a_m - y|| \\ &\leq ||y - a_m||(||e_n|| + 1) + ||e_n a_m - a_m|| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} ||e_n y - y|| = 0 \text{ pour tout } y \in \mathcal{A}.$$

ii) Supposons qu'il existe $a \in \mathcal{A} : [a\mathcal{A}] = \mathcal{A} : a \in \mathcal{A} = [a\mathcal{A}]$ implique il existe $\{e_n\}_n$;

$$e_n \in \mathcal{A} : \lim_{n\to+\infty} ||ae_n - a|| = 0,$$

Alors

$$\lim_{n\to+\infty} ||ae_n x - ax|| = 0 \text{ pour tout } x \in \mathcal{A}.$$

Soit $y \in \mathcal{A}, \exists x \in \mathcal{A}$:

$$||y - ax|| < \frac{\epsilon}{(1+M)}$$

Donc

$$\begin{aligned} \|e_n y - y\| &= \|e_n y - e_n ax + e_n ax - y - ax + ax\| \\ &\leq \|e_n y - e_n ax\| + \|e_n ax - ax\| + \|ax - y\| \end{aligned}$$

Alors

$$\lim_{n\to+\infty} \sup \|e_n y - y\| \leq \lim_{n\to+\infty} \sup \|e_n y - e_n ax| \lim_{n\to+\infty} \sup \|e_n ax - ax\|$$
$$+ \lim_{n\to+\infty} \sup \|ax - y\| < \frac{(1+M)}{1+M}\varepsilon + 0 = \varepsilon$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sup \|e_n y - y\| = 0 \Rightarrow \|e_n y - y\| = 0 \to 0 \ \text{l'orsque } n \to +\infty$$

Alors $(e_n)_{n\geq 1}$ est une unité approchée bornée séquentielle de $\mathcal{A}$. ■

Lemme 3.1 (d'Urysohn métrique) *[14]Si F_0 et F_1 sont deux fermés disjoints dans un espace métrique (X, d), il existe une fonction continue f sur X, à valeurs dans $[0, 1]$, telle que $f = 0$ sur F_0 et $f = 1$ sur F_1.*

Démonstration. Si F_0 et F_1 sont non vides, on posera

$$\forall x \in X,\ f(x) = \frac{d(x, F_0)}{d(x, F_0) + d(x, F_1)}.$$

Il faut vérifier que le dénominateur ne s'annule pas :
si

$$d(x, F_0) = 0,$$

alors $x \in F_0$ puisque F_0 est fermé, donc $x \in F_1$ puisque les deux ensembles sont disjoints, et alors $d(x, F_1) > 0$. La fonction f est donc continue, et vérifie les conditions voulues.
Si F_0 est vide, on peut poser $f = 1$ partout et si F_1 est vide $f = 0$ partout.
■

Remarque 3.4 *Si X est un espace localement compact alors, pour tout compact T de X, il existe une application continue de X dans $[0, 1]$, à support compact, et qui vaut 1 sur T*

Remarque 3.5 *Si l'algèbre $\mathcal{A}$ est unitaire alors $\mathcal{A}$ possède une unité approchée bornée avec $M = 1$.*

3.3 Application : L'algèbre BV_0

Définition 3.5 (L'algèbre BV_0) *Soit*

$$BV_0 = \{X = (x_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*},\ \sum_{n\geqslant 1} |x_{x+1} - x_n| < +\infty \ \ et \quad \lim_{n\to+\infty} x_n = 0\}.$$

Muni des opérations usuelles, somme et produit cordonnée par cordonnée et de la norme

$$\| X \| = \sum_{n=1}^{+\infty} |x_{n+1} - x_n| + \sup_{n\geqslant 1} |x|$$

BV_0 est une algèbre de Banach commutative

Soit $(h_n)_{n\geqslant 1}$ la suite d'élément de BV_0 définie par :

$$h_n = (\underbrace{1, \ldots, 1,}_{n-fois} 0, 0, \ldots)$$

Alors $(h_n)_{n\geqslant 1}$ est une unité approchée bornée séquentielle formée d'idempotent.
En effet *si $X = (x_p)_{p\geqslant 1} \in BV_0$ on a :*

$$Xh_n = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots) \ \ et \ \ X - Xh_n = (0, 0, \ldots x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots).$$

D'où

$$\| X - Xh_n \| = \sum_{p=n+1}^{+\infty} |x_{p+1} - x_p| + \sup_{p\geqslant n+1} |x_p| + |x_{n+1}|$$

on a $X = (x_p)_{p\geqslant 1} \in BV_0$ donc $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \| X - Xh_n \| = 0.$$

D'autre part pour tout entier non nul n on a $h_n^2 = h_n$ et $\| h_n = 2 \|$.
Ce qui démontre que la suite $(h_n)_{n\geqslant 1}$ est une unité approchée bornée séquentielle formée d'idempotent dans BV_0.

Proposition 3.3 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach commutative possédant une unité approchée bornée séquentielle $(e_n)_{n\geqslant 1}$, Alors :*

1. *Si $(e_n)_{n\geqslant 1}$ est constante à partir d'un certain rang, $\mathcal{A}$ est une algèbre unitaire,*
2. *Si $(e_n)_{n\geqslant 1}$ est formée d'idempotent et si $\mathcal{A}$ est unitaire d'unité e on a $e_n = e$ pour n assez grand.*

Démonstration. Supposons la suite $(e_n)_{n\geqslant 1}$ est constante à partir du rang n_0, Alors :

$$x = \lim_{n\to\infty} e_n x = e_{n_0} x$$

pour tout $x \in \mathcal{A}$,alors $\mathcal{A}$ est unitaire d'unité e_{n_0}.
Supposons maintenant $\mathcal{A}$ unitaire d'unité e et $(e_n)_{n\geqslant 1}$ formée d'idempotent on a

$$e = \lim_{n\to\infty} ee_n = e_n$$

Donc $\| e - e_n \| < 1$ à partir d'un certain rang m_0. On a d'après la Proposition 3.3 alors e_n est inversible pour tout entier $n \geqslant m_0$ et puisque e_n est idempotent on a $\chi(e_n) = \chi(e) = 1$ pour tout caractère χ de $\mathcal{A}$ et pour tout entier $n \geqslant m_0$.
Donc $e - e_n \in Rad\mathcal{A}$. Or

$$(e - e_n)^2 = e - 2e_n + e_n = e - e_n$$

Par conséquent $e - e_n = 0$ puisque 0 est le seul idempotent de $Rad\mathcal{A}$ et ceci pour tout entier $n \geqslant m_0$. Ceci qui démontre la Proposition. ∎

Proposition 3.4 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach commutative possédant une unité approché bornée séquentielle (e_n) formée d'idempotents. Alors il existe dans $\mathcal{A}$ une unité approché bornée séquentielle (f_n) formée d'idempotents, et telle que $f_n.f_m = f_m$ pour m, $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant m$.*

Démonstration. Soit n fixé, $n \in \mathbb{N}^*$. On sait [15] que si f et g sont deux idempotents distincts d'une algèbre d Banach commutative alors $\|f - g\| \geqslant 1$: On a $\lim_{m\to\infty} e_m e_n = e_n$, et pour m assez grand on a :

$$\|e_m e_n - e_n\| < 1$$

d'où, comme $e_m - e_n$ est un idempotent, $e_m e_n = e_n$. On peut construire par récurrence une suite $(p_m)_m$ m d'entiers strictement croissante telle que

$$e_m e_{p_n} = e_{p_n}$$

pour tout $m \geqslant p_{n+1}$, On pose :

$$f_n = e_{p_n}$$

alors (f_n) est une suite extraite de la suite (e_n), et :

$$f_n = f_m f_n \ \ si \ \ m \geqslant n + 1$$

D'où le résultat.
∎

Corollaire 3.1 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach commutative non unitaire. Les deux conditions suivants sont équivalentes :*

i) *il existe un homomorphisme injectif continu φ de BV_0 dans $\mathcal{A}$ tel que $[\mathcal{A}\varphi(BV_0)]^- = \mathcal{A}$*

ii) *$\mathcal{A}$ possède une unité approchée bornée séquentielle $(e_n)_{n\geqslant 1}$ formée idempotentes.*

Démonstration. ii) $\Rightarrow$ i) En vertu des deux Propositions précédentes on peut choisir dans $\mathcal{A}$ une unité approchée bornée séquentielle $(en)_{n\geqslant 1}$ telle que $e_n e_m = e_m$ pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, et $n \geqslant m \geqslant 1$
avec $e_n \neq e_m$ si $n \neq m$.
Définissons alors la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ comme suit $f_1 = e_2$ et $f_n = e_{n+1} - e_n$
si $n \geqslant 2$, on a :

$$\begin{aligned} f_n.f_m &= (e_{n+1} - e_n)(e - m + 1 - e_m) \quad si \;\; m \geqslant n > 1 \\ &= e_{n+1}e_{m+1} - e_n e_{m+1} - e_m e_{n+1} + e_n e_m \end{aligned}$$

si $m = n$, on a :

$$f_n.f_m \;=\; e_{n+1}e_n = f_n$$

alors :

$$f_n^2 = f_n, \quad f_1^2 = f_1.$$

Si $m > n > 1$, on a :

$$f_n.f_m = e_n - e_{n-1} - e_n + e_{n-1} = 0.$$

De plus

$$f_n.f_1 = (e_{n+1} - e_n)e_2 = e_2 e_{n+1} - e_2 e_n = e_2 e_2 = 0 \text{ si } \; n > 1.$$

Soit

$$\varphi : BV_0 \to \mathcal{A}, X = (x_n)_n \to \varphi(X) = \sum_{n\geqslant 1} x_n f_n$$

Montrons que φ est bien définie. Pour cela considérons la somme partielle $S_p = \sum_{n=1}^{p} x_n f_n$, on a :

$$\begin{aligned} S_{p+q} - S_p = \sum_{n=1}^{p+q} x_n f_n - \sum_{n=1}^{p} x_n f_n &= \sum_{n=p+1}^{p+q} x_n f_n \\ &= x_{p+1}(e_{p+2} - e_{p+1}) + \ldots + x_{p+q}(e_{p+q+1} - e_{p+q}) \\ &= -x_{p+1}e_{p+1} + e_{p+2}(x_{p+1} - x_{p+2}) + \ldots + e_{p+q}(x_{p+q-1} - x_{p+q}) + x_{p+q}e_{p+q+1} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} ||S_{p+q} - S_p|| &= ||\sum_{n=1}^{p+q} x_n f_n - \sum_{n=1}^{p} x_n f_n|| \\ &\leqslant |x_{p+1}| \,.||e_{p+1}|| + ||e_{p+2}|| \\ .|x_{p+1} - x_{p+2}| + \ldots &+ ||e_p + q||.|x_{p+q-1} - xp + q| + |x_{p+q}|.||e_{p+q+1}|| \end{aligned}$$

D'où

$$||S_{p+q} - S_p|| \leqslant \sup_{n\geqslant 1} ||e_n||(|x_{p+1}| + \sum_{n=p+1}^{p+q+1} |x_{n+1} - x_n| + |x_{p+q}|)$$

On voit alors que :

$$\lim_{p,q\to\infty} ||S_{p+q} - S_p|| = 0.$$

■

CHAPITRE 4

INÉGALITÉ D'UNE UNITÉ APPROCHÉE BORNÉE DANS UNE ALGÈBRE DE BANACH COMMUTATIVE

4.1 Introduction

Une suite $(e_n)_n$ d'éléments d'une algèbre de Banach A est dite unité approchée bornée séquentielle ($u.a.b.s$) s'il existe une constante M telle que

$$\|e_n\| < M \text{ pour } n \in \mathbb{N} \text{ et } \forall x \in A \ \lim_{n\to\infty} e_n x = \lim_{n\to\infty} x e_n = x.$$

On dit que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ ou $u_n \in A$ est normalement convergente si et seulement si la série (réelle) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|$ est convergente.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in A$ tel que $\|x\| < 1$, on a $(e+x)^\alpha = e + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} x^n$.

Dans une algèbre de Banach un élément idempotent est un élément x tel que $x^2 = x$. Il est dit non trivial si x est non nul et s'il est différent de e (e désigne l'élément neutre de l'algèbre A).

Dans ce chapitre,nous commençons à construire un idempotents

$$P(x) \in A,$$

où

$$P(x) = \frac{e}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left[x - \frac{e}{\sqrt{3}}\right]\left[e + \frac{\sqrt{3}x}{2}\right]^{1/2}\left[e + \frac{3\sqrt{3}}{2}x^3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x\right]^{-1/2} \text{ (lemme 4.1)}$$

et on montre si A une algèbre de Banach commutative possédant une unité approché borné squentielle $(e_n)_n$ telle que

$$\|e_n\| < 1 \text{ et } \liminf_{n\to+\infty} \left\|e_n^3 - e_n\right\| < \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Alors A est une unité approché borné squentielle formés d'idempotents pour A (théorème 4.1 et le lemme 4.2). Si A ne possède aucun idempotent non nul, alors $\liminf_{n\to+\infty} \left\|e_n^3 - e_n\right\| \geq \frac{2}{3\sqrt{3}}$. (Corollaire 4.1)

La section 3 de ce chapitre est consacré essentiellement à l'étude des semi -groupes continu et borné à lorigine dans une algèbre de Banach commutative. En particulier on vérifie les résultats suivants, on pose :

$$\begin{aligned} A &= [Sp\,(T(t))_{t>0}]^- \text{ et } I = \left\{x \in A \ / \ x = \lim_{t\to 0^+} (T(t))\,x\right\}, \\ p(x) &= \sup_{t>0} \left\|(T(t))\,e^{-\xi t} x\right\| \text{ pour tout } x \in I, \ \xi = Log(1 + \rho((T(t))). \end{aligned}$$

Où $\rho(T(t))$ le rayon spectral au semi-groupe $(T(t))_{t>0}$,

$$q(x) = \sup_{y\neq 0, y\in I} \{p(xy) \ / \ p(y)\} \ \text{pour} \ \ x \in A$$

et

$$H = \{x \in A \ / \ q(x) = 0\},$$

l'algèbre $A_0 = A/H$, et $\dot{q}(\dot{x}) = \inf_{y\in H} q(x+y)$ ou' $x \in \dot{x}$, $\dot{q}$ est une norme. On note $\tilde{A}_0$ la completion de $(A_0, \dot{q})$, et $i : \ A_0 \to \tilde{A}_0$ l'ingection canonique.

L'application $\theta : A \xrightarrow{\pi} A_0 \xrightarrow{i} \tilde{A}_0$ est continue.

Comme

$$q((T(t))) \leq \left|e^{\xi t}\right|, \ \text{pour} \ \ t \in \mathbb{R}^{+*} \ ,$$

on voit que $\theta((T(t))$ est bornée à l'origine.

Comme

$$\tilde{A}_0 = \overline{\theta(A)}, \quad \tilde{A}_0 = \left[Sp\left(\theta(T(t))_{t>0}\right]^{-} \ \text{et} \ \ \dot{q}\left(\theta(T(t)x - x\right) \underset{t\to 0^+}{\to} 0.$$

Alors $(\theta(T(t_n))_{t_n>0}$est une unité approché borné squentielle pours $\tilde{A}_0$ avec toute suite (t_n) qui converge vers 0.

On donne aussi comme exemple d'algebre de Banach commutative, un semi-groupe $(T(t))_{t>0}$ continu et borné à lorigine, ou'

$$\limsup_{t\to 0^+} \|T(3t) - T(t)\| < \frac{2}{3\sqrt{3}} \ \text{si et seulement si } A \text{ est unitaire,}$$

et dans ce cas l'unité e de A vérifie :

$$e = \lim_{t\to 0^+} T(t) \ \text{et} \limsup_{t\to 0^+} \|T(3t) - T(t)\| = 0.$$

4.2 Inégalité $\frac{3\sqrt{3}}{2}\left\|x^3 - x\right\| < 1$

Lemme 4.1 *Soit A une algebre de Banach commutative, et soit $x \in A$ tel que*

$$\left\|\frac{\sqrt{3}}{2}x\right\| < 1 \ \ \textit{et} \ \ \left\|\frac{3\sqrt{3}}{2}x^3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x\right\| < 1$$

on pose :

$$P(x) = \frac{e}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left[x - \frac{e}{\sqrt{3}}\right]\left[e + \frac{\sqrt{3}x}{2}\right]^{1/2}\left[e + \frac{3\sqrt{3}}{2}x^3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x\right]^{-1/2}$$

Alors on a : $P(x)$ est un idempotents dans A ,c'est -a- dire

$$P(x) \in A, \quad P^2(x) = P(x)$$

et

$$\|P(x)\| \leq \frac{1}{2} + \sqrt{3}\left[\|x\| + \frac{1}{\sqrt{3}}\right] 1/\left(1 - \left\|\frac{3\sqrt{3}}{2}x^3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x\right\|\right)^{1/2}$$

Démonstration. Puisque $x \in A$ avec

$$\|x\| \leq \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \text{et} \quad \left\|x^3 - x\right\| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}},$$

on a

$$\left(e + \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^{1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1/2(1/2-1)...(1/2-n+1)}{n!}(\frac{\sqrt{3}}{2}x)^n.$$

Si

$$u_n(x) = \frac{1/2(1/2-1)...(1/2-n+1)}{n!}(\frac{\sqrt{3}}{2}x)^n,$$

alors

$$u_{n+1}(x) = \frac{1/2(1/2-1)...(1/2-n\ )}{(n+1)!}(\frac{\sqrt{3}}{2}x)^{n+1},$$

nous avons

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(1/2-n\ )}{(n+1)}\right|\left\|\frac{\sqrt{3}}{2}x\right\| \leq \left\|\frac{\sqrt{3}}{2}x\right\| < 1$$

alors d'apré le critère de D'Alembert , la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1/2(1/2-1)...(1/2-n+1)}{n!}(\frac{\sqrt{3}}{2}x)^n$$

est absolument convergente car la contrainte $\left\|\frac{\sqrt{3}}{2}x\right\| < 1$; donc $\left(e + \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^{1/2}$ est bien définie.

La même chose pour la série

$$\left(e + \frac{3\sqrt{3}}{2}x^3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x\right)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x)$$

tel que

$$v_n(x) = \frac{-1/2(-1/2-1)...(-1/2-n+1)}{n!}(\frac{3\sqrt{3}}{2}x^3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x)^n$$

est absolument convergente car

$$\left\|\frac{3\sqrt{3}}{2}x^3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x\right\| < 1 \text{ et } \left(e + \frac{3\sqrt{3}}{2}x^3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x\right)^{-1/2}$$

est bien définie.

Si A est unitaire , on a

$$P(x) \in A.$$

Sinon on a

$$\hat{A}^\sharp = \hat{A} \cup \chi_0 \text{ avec } ker\chi_0 = A.$$

Comme

$$\chi_0(P(x)) = \chi_0\left(\frac{e}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left[x - \frac{e}{\sqrt{3}}\right]\left[e + \frac{\sqrt{3}x}{2}\right]^{1/2}\left[e + \frac{3\sqrt{3}}{2}x^3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x\right]^{-1/2}\right)$$
$$= \chi_0\left(\frac{e}{2}\right) + \chi_0\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\left[x - \frac{e}{\sqrt{3}}\right]\left[e + \frac{\sqrt{3}x}{2}\right]^{1/2}\left[e + \frac{3\sqrt{3}}{2}x^3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x\right]^{-1/2}\right)$$

et comme

$$e + \frac{3\sqrt{3}}{2}x^3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x = 3\left[x - \frac{e}{\sqrt{3}}\right]^2\left[e + \frac{\sqrt{3}x}{2}\right],$$

alors

$$\chi_0(P(x)) = 0$$

c'est -a-dire

$$P(x) \in A.$$

Donc $P(x)$ est bien définie dans $A^\sharp$.

$$P^2(x) = \frac{e}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left[x - \frac{e}{\sqrt{3}}\right]\left[e + \frac{\sqrt{3}x}{2}\right]^{1/2}\left[e + \frac{3\sqrt{3}}{2}x^3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x\right]^{-1/2}$$
$$+\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\left[x - \frac{e}{\sqrt{3}}\right]\left[e + \frac{\sqrt{3}x}{2}\right]^{1/2}\left[e + \frac{3\sqrt{3}}{2}x^3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x\right]^{-1/2}\right]^2$$

avec

$$\left[\left(e + \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^{1/2}\right]^2 = e + \frac{\sqrt{3}}{2}x, \left(e + \frac{3\sqrt{3}}{2}x^3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x\right)^{-1/2}$$
$$= \left[\left(e + \frac{3\sqrt{3}}{2}x^3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x\right)^{1/2}\right]^{-1},$$

et comme

$$e + \frac{3\sqrt{3}}{2}x^3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x = 3\left[x - \frac{e}{\sqrt{3}}\right]^2\left[e + \frac{\sqrt{3}x}{2}\right],$$

alors

$$\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\left[x - \frac{e}{\sqrt{3}}\right]\left[e + \frac{\sqrt{3}x}{2}\right]^{1/2}\left[e + \frac{3\sqrt{3}}{2}x^3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x\right]^{-1/2}\right]^2$$
$$= \frac{3}{4}\left[x - \frac{e}{\sqrt{3}}\right]^2\left[e + \frac{\sqrt{3}x}{2}\right]\left[e + \frac{3\sqrt{3}}{2}x^3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x\right]^{-1} = \frac{e}{4}$$

donc

$$P^2(x) = P(x)$$

et

$$\left\|\left(e + \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^{1/2}\right\| \leq 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1/2(1/2-1)...(1/2-n+1)}{n!}(-1)^{n-1}\left\|\frac{\sqrt{3}}{2}x\right\|^n \tag{4.1}$$
$$= 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1/2(1/2-1)...(1/2-n+1)}{n!}\left(-\left\|\frac{\sqrt{3}}{2}x\right\|\right)^n$$
$$= 1 - \left[\left(1 - \left\|\frac{\sqrt{3}}{2}x\right\|\right)^{1/2} - 1\right]$$
$$= 2 - \left(1 - \left\|\frac{\sqrt{3}}{2}x\right\|\right)^{1/2} \leq 2$$

donc

$$\left\|\left(e + \frac{3\sqrt{3}}{2}x^3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x\right)^{-1/2}\right\| \tag{4.2}$$
$$\leq 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1/2(-1/2-1)...(-1/2-n+1)}{n!}\left[-\left\|(\frac{3\sqrt{3}}{2}x^3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x)\right\|\right]^n$$
$$= \left[1 - \left\|(\frac{3\sqrt{3}}{2}x^3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x)\right\|\right]^{-1/2} = 1/\left(1 - \left\|\frac{3\sqrt{3}}{2}x^3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x\right\|\right)^{1/2}$$

et alors

$$\begin{aligned}
\|P(x)\| &= \left\| \frac{e}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left[x - \frac{e}{\sqrt{3}}\right]\left[e + \frac{\sqrt{3}x}{2}\right]^{1/2}\left[e + \frac{3\sqrt{3}}{2}x^3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x\right]^{-1/2} \right\| \\
&\leq \frac{1}{2} + \left\| \frac{\sqrt{3}}{2}\left[x - \frac{e}{\sqrt{3}}\right]\left[e + \frac{\sqrt{3}x}{2}\right]^{1/2}\left[e + \frac{3\sqrt{3}}{2}x^3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x\right]^{-1/2} \right\| \\
&\leq \frac{1}{2} + \sqrt{3}\left(\|x\| + 1/\sqrt{3}\right)\left\|\left(e + \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^{1/2}\right\|\left\|\left(e + \frac{3\sqrt{3}}{2}x^3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x\right)^{-1/2}\right\|,
\end{aligned}$$

d'aprés (4.1) et (4.2) on a

$$\|P(x)\| \leq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\|x\| + 1/\sqrt{3}\right) \times \frac{2}{\left(1 - \left\|\frac{3\sqrt{3}}{2}x^3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x\right\|\right)^{1/2}}$$

■

Théorème 4.1 *Soit A une algèbre de Banach commutative possédant une unité approchée bornée séquentielle $(e_n)_n$ telle que*

$$\left\|\frac{\sqrt{3}}{2}e_n\right\| < 1 \text{ et } \left\|e_n^3 - e_n\right\| < \lambda \text{ pour tout } n, \text{ et } 0 < \lambda < \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Alors ; $(P(e_n))$ est une unité approchée bornée séquentielle de A.

Démonstration.

$$P(e_n) = \frac{e}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left[e_n - \frac{e}{\sqrt{3}}\right]\left[e + \frac{\sqrt{3}}{2}e_n\right]^{1/2}\left[e + \frac{3\sqrt{3}}{2}e_n^3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}e_n\right]^{-1/2}.$$

D'aprés le lemme 4.1,

$$\left\|P(e_n)\right\| \leq \frac{1}{2} + \sqrt{3}\left(\left\|e_n\right\| + 1/\sqrt{3}\right) \times \frac{1}{\left(1 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\lambda\right)^{1/2}} = M.$$

D'ou la suite $(P(e_n))_n$ est bornee.

On pose

$$\begin{aligned}
r_n &= e_n - \frac{e}{\sqrt{3}}, \\
t_n &= \left[e + \frac{\sqrt{3}}{2}e_n\right]^{1/2},
\end{aligned}$$

et

$$s_n = [e + v_n]^{-1/2}$$

avec

$$v_n = \frac{3\sqrt{3}}{2}e_n^3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}e_n.$$

Soit

$$y \in A; \left\|v_n^p\right\| \leq \mu^{\,p} < 1, \ \ \mu = \frac{3\sqrt{3}}{2}\lambda, \text{ d'ou' } \ yv_n \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} y0 = 0.$$

$$\begin{aligned}
\left\|s_n y - y\right\| &= \left\|[e + v_n]^{-1/2}\, y - y\right\| \\
&= \left\|\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{-1/2(-1/2-1)...(-1/2-p+1)}{p!} v_n^p y - y\right\| \\
&= \left\|\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{-1/2(-1/2-1)...(-1/2-p+1)}{p!} v_n^p y\right\| \\
&\leq \sum_{p=1}^{+\infty} \left\|\frac{-1/2(-1/2-1)...(-1/2-p+1)}{p!} v_n^p y\right\| \\
&\leq \left\|yv_n\right\| \sum_{p=1}^{+\infty} \left|\frac{-1/2(-1/2-1)...(-1/2-p+1)}{p!}\right| \left\|v_n^{p-1}\right\| \\
&\leq \frac{\left\|yv_n\right\|}{\mu} \sum_{p=1}^{+\infty} \left|-1/2(-1/2-1)...(-1/2-p+1)\right| \frac{\mu^p}{p!}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty} \left\|s_n y - y\right\| = 0. \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}
\left\|t_n y - \left[1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right]^{1/2} y\right\| &= \left\|\left[e + \frac{\sqrt{3}}{2}e_n\right]^{1/2} y - \left[1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right]^{1/2} y\right\| \\
&\leq \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1/2(1/2-1)...(1/2-p+1)}{p!} (\frac{\sqrt{3}}{2})^p \left\|e_n^p y - y\right\|.
\end{aligned}$$

On a

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\left|1/2(1/2-1)...(1/2-p+1)\right|}{p!} < +\infty, \left\|\frac{\sqrt{3}}{2}e_n\right\|^p < 1$$

et comme

$$\lim_{n\to+\infty}\left\|e_n^p y - y\right\| = 0 \text{ pour tout } p,$$

on obtient

$$\lim_{n\to\infty}\left\|t_n y - \left[1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right]^{1/2} y\right\| = 0 \tag{4.4}$$

$$r_n y - \left[1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right] y = \left(e_n - \frac{e}{\sqrt{3}}\right) y - \left[1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right] y = [e_n y - y]\,.$$

On a

$$\lim_{n\to+\infty}[e_n y - y] = 0,$$

alors

$$\lim_{n\to\infty}\left\|r_n y - \left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) y\right\| = 0 \tag{4.5}$$

$r_n,\ t_n$ et s_n sont bornées, et on a

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{3}}{2}\left[1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right]\left[1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right]^{1/2} &= \frac{1}{2}\left[\sqrt{3}-1\right]\left[\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right]^{1/2}\\
&= \frac{1}{2}\left[\sqrt{3}-1\right]\left[\frac{4+2\sqrt{3}}{4}\right]^{1/2}\\
&= \frac{1}{2}\left[\sqrt{3}-1\right]\left[\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right]\\
&= \frac{1}{2}\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}{2} = \frac{1}{2}\times\frac{2}{2} = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\left\|P(e_n)y - y\right\|\\
&= \left\|\frac{e}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}\left[e_n - \frac{e}{\sqrt{3}}\right]\left[e+\frac{\sqrt{3}}{2}e_n\right]^{1/2}\left[e+\frac{3\sqrt{3}}{2}e_n^3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}e_n\right]^{-1/2} y - y\right\|\\
&= \left\|\frac{\sqrt{3}}{2}r_n\, t_n s_n y - \frac{y}{2}\right\| = \frac{\sqrt{3}}{2}\left\|r_n\, t_n s_n y - \frac{y}{\sqrt{3}}\right\|\\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\left\|r_n\, t_n s_n y - \left[1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right]\left[1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right]^{1/2} y\right\|,
\end{aligned}$$

donc

$$\left\|P(e_n)y - y\right\| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\left\|r_n\, t_n s_n y - r_n\, t_n\, y + r_n\, t_n\, y - \left[1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right]\left[1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right]^{1/2} y\right\|$$

$$\leq \frac{\sqrt{3}}{2}\left\|r_n\, t_n s_n y - r_n\, t_n\, y\right\| + \frac{\sqrt{3}}{2}\left\|r_n\, t_n\, y - \left[1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right]\left[1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right]^{1/2} y\right\|$$

$$\leq \frac{\sqrt{3}}{2}\left\|r_n\right\|\ \left\|t_n\right\|\left\|s_n y - \ y\right\|$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{2}\left\|r_n\, t_n\, y - \left[1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right]^{1/2} r_n y + \left[1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right]^{1/2} r_n y - \left[1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right]\left[1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right]^{1/2} y\right\|$$

$$\leq \frac{\sqrt{3}}{2}\left\|r_n\right\|\ \left\|t_n\right\|\left\|s_n y - \ y\right\| + \frac{\sqrt{3}}{2}\left\|r_n\, t_n\, y - \left[1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right]^{1/2} r_n y\right\| +$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\left\|\left[1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right]^{1/2} r_n y - \left[1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right]\left[1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right]^{1/2} y\right\|$$

$$\leq \frac{\sqrt{3}}{2}\left\|r_n\right\|\ \left\|t_n\right\|\left\|s_n y - \ y\right\| + \frac{\sqrt{3}}{2}\ \left\|r_n\right\|\left\|t_n\, y - \left[1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right]^{1/2} y\right\|$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{2}\left[1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right]^{1/2}\left\|r_n y - \left[1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right] y\right\|$$

(4.3), (4.4) et (4.5) montrent que

$$\lim_{n\to\infty}\left\|P(e_n)y - y\right\| = 0.$$

Donc $(P(e_n))$ est une unité approché borné squentielle de A. ■

Remarque 4.1 *Soit A une algèbre de Banach commutative possédant une unité approché borné squentielle $(e_n)_n$ telle que*

$$\left\|e_n\right\| < 1 \textit{ et } \liminf_{n\to+\infty}\left\|e_n^3 - e_n\right\| < \frac{2}{3\sqrt{3}}\ .$$

Alors A est une unité approché borné squentielle formés d'idempotents.

Démonstration. on peut extraire une sous-suite de la suite (e_n) tel que $\left\|e_n^3 - e_n\right\| < \lambda$ pour tout n, avec $0 < \lambda < \frac{2}{3\sqrt{3}}$. Alors d'aprés le théorème 4.1 on a : $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|P(e_n)y - y\right\| = 0$ pour tout $y \in A$,et $(P(e_n))_n$ est une unité approché borné squentielle formés d'idempotents de A, voire [4]. ■

Corollaire 4.1 *Soit A une algèbre de Banach commutative possédant une unité approché borné squentielle $(e_n)_n$ telle que*

$$\|e_n\| < 1.$$

Si A ne possède aucun idempotent non nul, alors $\liminf_{n\to+\infty} \left\|e_n^3 - e_n\right\| \geq \frac{2}{3\sqrt{3}}$.

Démonstration. Si non, $\liminf_{n\to+\infty} \left\|e_n^3 - e_n\right\| < \frac{2}{3\sqrt{3}}$ on peut former

$$P(e_n) = \frac{e}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\left[e_n - \frac{e}{\sqrt{3}}\right]\left[e + \frac{\sqrt{3}}{2}e_n\right]^{1/2}\left[e + \frac{3\sqrt{3}}{2}e_n^3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}e_n\right]^{-1/2} \text{ de } A \text{ et } P^2(e_n) = P(e_n).$$

■

4.3 Semi-groupe dans une algèbre de Banach commutative

Lemme 4.2 *Soit $(T(t))_{t>0}$un semi-groupe continu et borné à lorigine dans une algèbre de Banach commutative, et soit A la sous-algèbre ferméer engendée par $(T(t))_{t>0}$ c'est-à-dire $A = \left[Sp\,(T(t))_{t>0}\right]^-$. Alors $x = \lim_{t\to 0^+} T(t)x$ pour tout $x \in A$, et $(T(t_n))_{t_n>0}$est une unité approché borné squentielle de A pour toute suite (t_n) de réels posotifs qui converge vers 0.*

Démonstration. puisque l'application $t \to T(t)$ est continue , on a $T(t+s) \to T(s)$ pour tout $s \in \mathbb{R}^{+*}$.

D'ou' $T(t)\sum_{i=1}^{n} \beta_i T(s_i) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i T(t)T(s_i) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} \sum_{i=1}^{n} \beta_i T(s_i)$ pour $\{s_i\ , 1 \leq i \leq n\} \subset \mathbb{R}^{+*}$ *et* $\beta_i \in \mathbb{C}\ , 1 \leq i \leq n$.

comme $(T(t))_{t>0}$un semi-groupe continu et borné à lorigine, alors $\sup_{t\in]0,1[} \|T(t)\| < +\infty$, donc pour tout $x \in A$, $x = \lim_{t\to 0^+} T(t)x$. D'ou' le résultat.

pour la suite , on suppose que le semi-groupe $(T(t))_{t>0}$ est seulement continu. on désigne par $\rho(T(t))$ le rayon spectral de$(T(t))_{t>0}$.

$\lim_{t\to+\infty} \|T(t)\|^{1/t} = \rho(T(t))$. Donc $\frac{(T(t))}{1+\rho(a)} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Soit

$$I = \left\{x \in A \ \ / \ \ x = \lim_{t\to 0^+} (T(t))\, x \right\}.$$

Alors I est un idéal de A.

On pose

$$p(x) = \sup_{t>0} \left\|(T(t))\, e^{-\xi t} x\right\| \text{ pour tout } x \in I, \;\; \xi = Log(1 + \rho((T(t)))).$$

Donc p est une norme sur I.

On a, pour $x \in I$ et $y \in A$:

$$p(x) = \sup_{t>0} \left\|T(t) e^{-\xi t} x\right\| \geq \lim_{t \to 0^+} \left\|(T(t))\, e^{-\xi t} x\right\| = \|x\|,$$

et

$$p(xy) \leq p(x) \left\|y\right\|,$$

pour $s \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} p((T(s))\, x) &= \sup_{t>0} \left\|(T(t))\, e^{-\xi t} T(s) x\right\| = \sup_{t>0} \left\|e^{-\xi(t+s)}\, (T(t+s))\, x\right\| . \left|e^{\xi s}\right| \\ &\leq \left|e^{\xi s}\right| \sup_{s+t>0} \left\|e^{-\xi(t+s)}\, (T(t+s))\, x\right\| = \left|e^{\xi s}\right| p(x), \end{aligned}$$

pour $x \in A$, on pose

$$q(x) = \sup_{y \neq 0, y \in I} \{p(xy) \,/\, p(y)\}$$

et

$$q(x) = \sup_{y \neq 0, y \in I} \{p(y)\, \|x\| \,/\, p(y)\} \leq \|x\|,$$

$$q((T(s))) = \sup_{y \neq 0, y \in I} \{p((T(s))\, y) \,/\, p(y)\} \leq \left|e^{\xi s}\right|, \, s \in \mathbb{R}^{+*}$$

q est une semi-norme sur A. Pour tout $x, y \in A$, on pose

$$H = \{x \in A \,/\, q(x) = 0\}.$$

Alors H est un idéal de A. On pose l'algèbre $A_0 = A/H$, et on note π la surjection canonique de A sur A_0. Pour tout $\dot{x} \in A_0$, on pose

$$\dot{q}(\dot{x}) = \inf_{y \in H} q(x+y) \text{ ou' } x \in \dot{x}.$$

Alors $\dot{q}$ est une norme sur l'algèbre $A_0 = A/H$ et que $q(x) = \dot{q}(\dot{x})$ pour tout $x \in A$.

Donc $(A_0, \dot{q})$ est une l'algèbre normée commutative.

On note $\tilde{A}_0$ la completion de $(A_0, \dot{q})$, et $i : A_0 \to \tilde{A}_0$ l'ingection canonique.

L'application $\theta : A \xrightarrow{\pi} A_0 \xrightarrow{i} \tilde{A}_0$ est continue.

comme

$$q((T(t))) \leq \left|e^{\xi t}\right| \text{ , pour } t \in \mathbb{R}^{+*} \text{ ,}$$

on voit que $\theta((T(t))$ est bornée à l'origine. Comme

$$\tilde{A}_0 = \overline{\theta(A)}, \quad \tilde{A}_0 = [Sp\,(\theta(T(t))_{t>0}]^- \text{ et } \dot{q}\,(\theta(T(t)x - x) \underset{t \to 0^+}{\to} 0.$$

Donc $(\theta(T(t_n))_{t_n>0}$ est une unité approché borné squentielle pours $\tilde{A}_0$ avec toute suite (t_n) qui converge vers 0. ■

Exemple 8 *Soit$(T(t))_{t>0}$ un semi-groupe continu et borné à lorigine dans une algèbre de Banach commutative, et soit A la sous-algèbre ferméer engendée par $(T(t))_{t>0}$ c'est-à-dire $A = [Sp(T(t))_{t>0}]^-$. Alors on a :*

$$\limsup_{t \to 0^+} \|T(3t) - T(t)\| < \frac{2}{3\sqrt{3}} \textit{ si et seulement si } A \textit{ est unitaire,}$$

et dans ce cas l'unité e de A vérifie :

$$e = \lim_{t \to 0^+} T(t) \quad \textit{et} \limsup_{t \to 0^+} \|T(3t) - T(t)\| = 0.$$

Démonstration. Supposons que le semi-groupe $(T(t))_{t>0}$ est continu et borné à lorigine. Si

$$\|T(3t) - T(t)\| < \frac{2}{3\sqrt{3}} \text{ pour tout } t \in]0, t_0[\text{ ,}$$

on définit l'application

$$h :]0, t_0[\underset{t \mapsto h(t) = P(T(t))}{\to} A$$

par

$$P(T(t)) = \frac{e}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left[T(t) - \frac{e}{\sqrt{3}}\right]\left[e + \frac{\sqrt{3}}{2}T(t)\right]^{1/2}\left[e + \frac{3\sqrt{3}}{2}T(3t) - \frac{3\sqrt{3}}{2}T(t)\right]^{-1/2}.$$

comme l'application $t \to T(t)$ est continue , alors h est continue.

D'aprés le lemme 4.1 :

$$P(T(t)) \in A, \quad P^2(T(t)) = P(T(t))$$

Si $P(T(t)) \neq P(T(t'))$, comme $P(T(t))$ et $P(T(t'))$ sont deux idempotents de l'algèbre comutative A, il résulte de la théorie de Gelfand que l'on a $\|P(T(t)) - P(T(t'))\| \geq 1$ voir [10] donc dans un voisinage de t on a $P(T(t)) = P(T(t'))$. Alors la fonction h

est localement constante et comme elle est continue, elle est constante. Donc il est un élément $g \in A$ tel que

$$g = P(T(t)) \text{ pour tout } \ t \in \,]0, t_0[$$

le théorème 4.1 et le lemme 4.1. $P(T(t_n))$ est une unité approché borné squentielle formés d'idempotents de A, pour toute suite (t_n) de réels positifs telle que $t_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

Soit f un élément quelconque de A , alors on a $P(T(t))\, f = g.f$ pour $t \in \,]0, t_0[$. Donc

$$fg. = g.f \text{ pour tout } f \in A$$

D'ou' A est unitaire.

Supposons que le semi-groupe $(T(t))_{t>0}$ n'est pas borné à l'origine.

Considérons l'algèbre de Banach $(\tilde{A}_0, \dot{q})$ définie au (lemme 4.2),

$$\limsup_{t\to 0^+} \dot{q}\,(\theta(T(3t) - \theta T(t)) = \limsup_{t\to 0^+} q\,((T(3t) - T(t)) \leq \limsup_{t\to 0^+} \|T(3t) - T(t)\|\,.$$

Si

$$\limsup_{t\to 0^+} \|T(3t) - T(t)\| < \frac{2}{3\sqrt{3}},$$

alors

$$\limsup_{t\to 0^+} \dot{q}\,(\theta(T(3t) - \theta T(t)) < \frac{2}{3\sqrt{3}},$$

et comme $\tilde{A}_0 = [Sp\,(\theta(T(t))_{t>0}]^-$, $\tilde{A}_0$ est unitaire, et $\theta(T(t) \underset{t\to 0^+}{\to} e$ où est l'unité de $\tilde{A}_0$. ■

4.4 Conclusion et perspectives

Dans ce travail, nous avons considéré une algèbre A, un élément x de A tel que

$$\|x\| < \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ et } \left\|x^3 - x\right\| < \frac{2}{\sqrt{3}},$$

et on montre qu'elle admet un idempotent $p(x)$ non nul, et en applique le résultat aux semi-group.

Nous nous intéressons à l'étude de certaines inégalités dans une algèbre de Banach commutative possédant une unité approchée borné séquentielle qui ne possède aucun idempotent non nul. Nous avons prouvé dans le quatrième chapitre de cette thèse et d'après l'article scientifique référé sous [2], tel que si A est une algèbre commutative de Banach contenant unité approché borné séquentielle $(e_n)_n$ telle que :

$$\|e_n\| < 1 \text{ et } \liminf \left\|e_n^3 - e_n\right\| < \frac{2}{\sqrt{3}},$$

Donc A possède une unité approchée borné séquentielle ne possède aucun idempotent non nul. Les différentes propriétés liées à ce type d'inégalités ont été étudiées comme application. Nous donnons l'exemple suivant, une sous algèbre fermée qui est construite par un semigroupe continu $(T(t))_{t>0}$ et bornée au point d'origine comme le montre la section 3 de ce chapitre. En plus des premiers et deuxièmes chapitres que l'introduction, le troisième chapitre se concentre sur l'étude des Algèbres de Banach, commutatives qui a une unité approché borné, soutenue par quelques exemples illustratifs.

Après la réalisation de ce travail, comme perspective de recherche, il serait intéressant de réaliser les objectifs suivants :

1. Amélioration de résultats d'Esterle-Mokhtari : Soit K un sous-corps de $\mathbb{R}$, soit $n \geq 1$ un entier, et soit $(T(t))_{t\in K_+^*}$ un semigroupe non identiquement nul dans une algèbre de Banach, K_+^* désignant l'ensemble des éléments strictement positifs de K. Esterle et Mokhtari ont montré dans [12] que si

$$\limsup_{t\to 0^+} \|T(t) - T((n+1)t)\| < \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$$

alors la sous-algèbre fermée A engendrée par le semigroupe possède une unité J telle que

$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t) - J\| = 0,$$

de sorte qu'il existe $u \in A$ tel que $T(t) = e^{tu}$ pour $t \in K_+^*$ (on notera que ce résultat ne nécessite aucune propriété de continuité pour le semigroupe considéré).

On essayer de démontrer que ce résultat reste valable en remplaçant la condition
$$\limsup_{t \to 0^+} \|T(t) - T(n+1)t\| < \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$$
par la condition plus faible, il existe $\varepsilon > 0$ tel que
$$\|T(t) - T(n+1)t\| < \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$$
pour tout $t \in K \cap]0, \varepsilon]$, autrement dit, en affaiblissant les conditions de continuité pour le semigroupe près de l'origine.

2. Explicitation des idempotents associés aux semigroupes fortement continus ne vérifiant pas le condition $\|T(t) - T(s)\| \geq \frac{2}{\sqrt{3}}$ près de l'origine.

3. Considérer d'autres problèmes concerné le comportement à l'origine de la distance entre éléments d'un semi groupe et inégalités dans un Algebre de Banach.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Brézis. *Analyse fonctionnelle*. Dunod. Paris, 1999.

[2] C. Lahcen and M. Abdelkader. A sequential bounded aproximate unit formed of idempotent in banach algebra. *Journal of SYLWAN*, 163(9), 2020.

[3] A. Kolmogorov and S. Fomine. *Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle*. Moscou, 1973.

[4] A. Mokhtari. Distance entre éléments d'un semigroupe continu dans une algèbre de banach. *J. Operator Theory*, 20(2) :375–380, 1998.

[5] Jacques-Arthur Weil Jean-Pierre Marco, Philippe Thieullen. *Mathématiques L2 Cours complet avec 700 tests et exercices corrigés*. Pearson Education, 2007.

[6] J. Dieudonne. *Calcul infinitésimal*. Hermann. Paris, 1997.

[7] E. Hille and R.S. Phillips. *Functional analysis and semigroups*, volume XXXI. American Mathematical Society, 1957.

[8] P. D. Lax. *Fonctional analysis*. John Wiley & Sons, new york edition, 2002.

[9] J. Esterle. Real semigroups in commutative banach algebras. *Probability and Banach Spaces*, pages 16–35, 2006.

[10] I. Miyadera, S. Oharu, and N. Okazawa. Generation theorems of semi-groups of linear operators. *Rims. Kyoto univ 8*, 73 :509–555, 1972.

[11] J. Zemanek. Idempotents in banach algebras. *London. Math. Soc*, 11 :1777–183, 1978.

[12] J. Esterle and A. Mokhtari. Distance entre éléments d'un semigroupe dans une algèbre de banach. *Journal of Fonctional analysis*, 195 :167–189, 2002.

[13] G. Lacombe and P.Massat. *Analyse fonctionnelle exercices corrigés*. Dunod Paris, 1999.

[14] H. G. Dales, P. Aiena, J. Eschmeir, K. Laursen, and G. A. Willis. *Introduction to Banach algebras operators and harmonic analysis*. Cambridge, university Press, 2003.

[15] J. C. Candeal and J. E. Gale. On the existence of analytic semigroups bounded on the half-disc in same banach algebras. *Journal of London Math Soc*, 21 :573–576, 1989.

[16] L. Chenini and A. Mokhtari. A sequential bounded approximate unit formed of idempotent in banach algebra. *Sylwan*, 163(9) :350–360, 2020.

[17] A. Pazy. *Semigroups of linear operators and applications to partial diffe-rential equations*. Springer-Verlage, New York, 1983.

[18] B. Maurey. *Analyse fonctionnelle et théorie spectrale*. J. Operator Theory, 2001-2020.

[19] C. E. Richart. *General theory of Banach algebras*. Van Nostrand, Princ-eton. NJ, 1960.

[20] Daniel LI and Hervé Queffelec. *Introduction à l'étude des espaces de Banach Analyse et probabilités*. Société Mathématique de France, 2004.

[21] F. Hirsch and G.Lacombe. *Eléments d'analyse fonctionnelle*. Paris, 1997.

[22] Shilov G. *Analyse mathematique. Fonctions d'une variable*, volume tome 1, 1e et 2e partie. Mir. Moscou, 2ed edition, 1978.

[23] H. Cartan. *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*. Hermann. Paris, 1978.

[24] H. G. Dales, P. Aiena, J. Eschmeir, K. Laursen, and G. A. Willis. *C_0-semigroupe and applications*. New York, 2003.

[25] J. Bachar, L. Beach, and W. Bade. *Radical Banach algebras and autom-atic continuity*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1983.

[26] J. Bass. *Cours de mathématiques*, volume tome 3. Masson. Paris, 1971.

[27] J. Esterle. Distance near the origin between elements of strongly contiuous semigroup. *Ark. Math*, 43 :365–382, 2005.

[28] K. J. Engel and R. Nagel. *One parameter semigroups for linear evolution equations*. Springer-Verlag, New York, 2000.

[29] Laurent Schwartz. *Analyse : Topologie générale et analyse fonctionnelle*. Editions Hermann, 2008.

[30] M. BERKANI, J. ESTERLE, and A. MOKHTARI. Distance entre puissances d'une unité approchée bornée. *Journal of the London Mathematical Society*, 67, 2003.

[31] N. Bourbaki. *Espaces vectoriels topologiques : Chapitres 1 à 5*. Springer Berlin Heidelberg, réimpression inchangée de l'édition de 1981 edition, 2007.

[32] R. Dautray and J. L. Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique*, volume 8. Masson. Paris, new york edition, 1988.

[33] R. Dautray and J. L. Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique*, volume 4. Masson. Paris, new york edition, 1985.

[34] R. Godement. *Cours de mathématiques*, volume tome 3. Masson. Paris, new york edition, 1971.

[35] S. Lipschutz. *Topologie*. McGraw-Hill, paris edition, 1981.

[36] V. Muller. *Spectral theory of linear operators and spectral systems in Banach algebras*. Birkhäuser Verlag, germany edition, 2007.

[37] W. Arendt, A. Grabosch, and G. Greiner. *One parameter semigroups of positive operators*. Springer-Verlag Berlin, heidelberg edition, 1986.

[38] W. Rudin. *Functional analysis*. McGraw-Hill Book Company, new york edition, 1973.

[39] Z. Bendaoud. *Title Title Title*. PhD thesis, Bordeau I & Université Essenia Oron, 2008.

[40] Z. Songmu. *Nonlinear evolution equation*. Chapman & Hall/CRC, florida edition, 2004.

[41] M.Berkani. Inegalites dans les algebre de banach. *Bull. Soc. Math. Belg*, 42, l.ser.B, 1990.

[42] W. Rudin. *Analyse reelle et complexe*. Masson, paris edition, 1987.

[43] W. Rudin. *Analyse fonctionnelle*. Ediscience, traduit par a. abouhazim, ediscience edition, 1995.

[44] E. Ramis and C. Deschamps. *cours mathématiques spéciales de topologie et éléments d'analyse*. Paris Milan Barcelone Bonn, 3 émme édition mason edition, 1991.

[45] J.P.Boudin and O. Deseguins. *Algèbres de Banach, Algèbres de groupes*. N.Th.Varopoulos, 3 émme édition mason edition, 1997.

[46] Jean Saint Raymond. *Cour d'analyse spectral*. Sorbonne Université, 1984.

[47] Emmanuel Fricain. *Analyse fonctionelle et théorie des opérateurs, cours et exercices*. Université de Lille, 1989.