



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE MOHAMMED KHIDER DE BISKRA  
FACULTE DES SCIENCES ET SCIENCE DE L'INGENIEUR  
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

# MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de

## MAGISTERE

**Spécialité** : Construction mécanique

Présenté et soutenu publiquement

Par

**Rebiai Cherif**

---

### MODELISATION ET OPTIMISATION D'UN ROBOT MEDICAL A SIX DEGRES DE LIBERTE

---

**Soutenu le    Devant la commission d'examen composée de jury :**

Bensaada Said	Maître de conférences université de Biskra	Président
Assas Mekki	Maître de conférences université de Batna	Rapporteur
Amrane Med Nadhir	Maître de conférences université de Biskra	Examineur
Brioua Mourad	Maître de conférences université de Batna	Examineur
Ameddah Djamel	Maître de conférences université de Batna	Examineur

بسم الجليل تعالى نبتدي عملا  
غضبي الهوينا بعزم ليس يضعه  
مجرى الحياة جميل في تأملنا  
يا ابن الجزائر بار الخلق ممتطيا  
الجد يرفع للآتي دعائمه  
قد عظم الله شأن العلم تكريمة  
إن الذين تفانوا في مخابره  
قد حرروا الخلق من جهل ومن وهن

للحق فيه سبيل للنهي علم  
لو طال مسعانا فالمؤنس القلم  
لولا التأمل ما سادت هنا أمم  
روح العلوم فإن السبق يرتسم  
والمفلسون حيارى زادهم ألم  
للعاملين ومن عاشوا لهم قيم  
أحياء دوما فما ماتوا وهم قمم  
واستعمروا الكون مازلت لهم قدم

ل. شطبي

## **Dédicace.**

A ma chère mère, à mes filles, à ma famille, .....

## REMERCIEMENTS

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été effectués au Laboratoire de recherche et productique LRP de Batna, Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de mémoire Monsieur **Assas Mekki**, maître de conférences à l'Université de Batna et Directeur du Laboratoire LRP d'avoir accepté de diriger ce mémoire et de m'avoir soutenu tout au long de ce travail.

Je tiens à remercier monsieur **Ben Saada Said**, Maître de Conférences à l'Université de Biskra, pour avoir accepté d'être président de Jury de ce mémoire. Qu'il trouve ici l'expression de mon respect et ma profonde reconnaissance.

Je tiens à exprimer mes remerciements à monsieur **Brioua Mourad**, maître de conférences à l'Université de Batna, et sous directeur chargé de la poste graduation à l'Université de Batna, pour avoir accepté d'être membre de jury de ce mémoire

Je ne peux oublier d'adresser aussi mes profonds remerciements à monsieur **Amrane Mohammed Nadhir** Maîtres de Conférences à l'Université de Biskra qui a accepté d'examiner ce travail, ainsi que sa lecture pertinente du manuscrit.

Je tiens à remercier monsieur **Ameddah Djamel-eddine**, Maître de Conférences en robotique à l'Université de Batna, pour avoir accepté d'être membre de Jury de ce mémoire.

Mes remerciement vont également à mes parents et toute ma famille pour leur soutien durant cette formation, ainsi que tous mes amis.

Mes remerciements vont également à tous les enseignants qui ont contribué à ma formation en particulier les enseignants du Département de Génie Mécanique de L'université de Biskra et les enseignants du Département de Mécanique de L'université de Batna.

Je n'oublie de remercier tout ce qui ont m'aider de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire en particulier mes amis :

**Rebai.Saci, Haoues. Noureddine** ... , et tous les amis.

## Tables des matières

Liste des figures.....	8
Abréviations et symboles.....	9
Introduction générale.....	12
Problématique.....	14
<b>Chapitre I. Etat de l'art</b>	
I.1.Introduction.....	17
I.2.Emergence de la télé-échographie.....	17
I.3.Synthèse bibliographique.....	18
I.4.Etat de l'art.....	19
I.4.1.Introduction.....	19
I.4.1.1.Le concept de la télé-échographie.....	20
I.4.1.2.Projet de robot d'échographie.....	20
I.5.Problème traité dans le mémoire.....	21
I.6.Performance et optimisation.....	22
I.6.1.Dextérité.....	22
I.6.2.Indice d'isotropie.....	22
I.6.3.Indice de manipulabilité.....	23
I.6.3.1.Définition.....	23
I.6.3.2.Manipulabilité des robots.....	24
I.6.3.3.Théorème.....	24
I.7.Conclusion.....	25
<b>Chapitre II. Méthodes de modélisation des robots manipulateurs à chaînes continues ouvertes.</b>	
II. Généralités.....	27
II.1.Introduction.....	27
II.2.Morphologie.....	27
II.3.Espace articulaire .....	28
II.4.Espace opérationnel.....	29
II.5.Modélisation mathématique du robot manipulateur à c.c.o.....	29
II.5.1.Introduction.....	29

II.5.2. Notation et règles générales (méthode des matrices $4 \times 4$ ).....	29
II.6. Modèle associés aux robots manipulateurs sériels.....	30
II.6.1. Modèle géométrique.....	31
II.6.1.1. Modèle géométrique directe.....	31
II.7. Méthodes de descriptions (paramètre d'Euler ZYX).....	32
II.8. Modèle géométrique inverse.....	33
II.8.1. Méthodes de calcul du MGI.....	34
II.8.2. Nombre de solutions du MGI.....	34
II.8.3. Méthode de Paul.....	36
II.8.4. Méthode de Pieper.....	37
II.8.5. MGI pour les cinématiques particulières.....	39
II.8.6. Méthodes numériques.....	40
II.9. Modèle cinématique.....	40
II.9.1. Calcul de la matrice Jacobienne.....	40
II.10. Théorème de composition des vitesses.....	42
II.11. Modèle dynamique.....	44
II.12. Conclusion.....	45

### **Chapitre III. Modélisation du robot.**

III. Introduction.....	47
III.1. Description du robot.....	47
III.1.1. Structure du robot.....	47
III.1.2. Structure cinématique du robot.....	47
III.2. Spécification du mouvement de la sonde.....	48
III.3. Spécification générale du système.....	50
III.4. Espace articulaire, espace opérationnel, et modèle de transformation.....	51
III.5. M.G.D.....	51
III.6. M.G.I.....	54
III.7. Modèle cinématique.....	56
III.7.1. Modèle cinématique directe (M.C.D.).....	56
III.7.2. Calcul de la matrice Jacobienne.....	57
III.8. M.C.I.....	60

III.8.1.Espace de travail.....	61
III.9.Etude des singularités.....	62
III.9.1.Redondance.....	61
III.9.2.Configurations singulières.....	62
III.10.Singularités du robot.....	63
III.11.Stratégie de résolution au voisinage des singularités et butées.....	65
III.12.Conclusion.....	65
<b>Chapitre IV. Optimisation du paramètre géométrique du robot.</b>	
IV. Optimisation.....	67
IV.1.Manipulabilité.....	67
IV.1.2.Mesure de manipulabilité.....	67
IV.1.3.Application de la manipulabilité des robots.....	69
IV.2.Manipulabilité du robot .....	70
IV.3.Optimisation.....	71
IV.3.1.Formulation d'un problème d'optimisation.....	71
IV.3.2. Formulation mathématique du problème d'optimisation.....	72
IV.4.Différence entre la programmation linéaire et non linéaire.....	72
IV.5.Les minimums locaux et globaux.....	73
IV.6.Convergence des méthodes d'optimisation.....	73
IV.7.Méthodes d'optimisation non linéaires.....	74
IV.7.1.Optimisation sans contraintes.....	74
IV.7.2.Optimisation avec contraintes.....	74
IV.7.2.1.La programmation séquentielle quadratique SQP.....	74
IV.8.Optimisation du paramètre géométrique.....	75
IV.9. 1°Résultats.....	76
IV.10.2°Résultats.....	78
IV.11.Interpretation.....	81
IV.12.Conclusion.....	81
VI. Conclusion générale.....	82
<b>VI. Références bibliographiques.....</b>	<b>83</b>
Annexe 1.....	85
Annexe 2.....	89

## Liste des figures

<b>Figure.I.1:</b> Ellipsoïde de manipulabilité en 3D.....	25
<b>Figure.II.1.</b> Structures utilisées dans la conception des robots.....	28
<b>Figure.II.2.</b> repérage utilisé en robotique.....	31
<b>Figure II.3.</b> Angles d'Euler ZYX.....	32
<b>Figure II.4.</b> Robot à six degrés de liberté munie d'un poignet de type rotule .....	38
<b>Figure II.5.</b> Repères $\{R_A\}$ , $\{R_B\}$ et $\{R_0\}$ ( $\{R_0\}$ ).....	42
<b>Figure III.I.</b> Structure cinématique du robot.....	48
<b>Figure III.I.I</b> Le robot prototype.....	48
<b>Figure III.2.</b> La zone de mouvement de la sonde. Intersection du plan des ultrasons avec l'organe examiné et l'image ultrasonore obtenue.....	49
<b>Figure III.3.</b> L'Architecture du système Otelo.....	50
<b>Figure III.5.</b> Espace des orientations accessibles du robot.....	62
<b>FigureIII.5.I.</b> Robot Otelo à 6 d.d.l.....	62
<b>FigureIII.6.</b> configuration singulières du robot.....	64
<b>Figure IV.1</b> Robot manipulateur plan à deux liaisons rotoïdes.....	69
<b>Figure IV.2.</b> Ellipses et mesure de manipulabilité d'un bras plan .....	70
<b>Figure. IV.3</b> Allure de la courbe de manipulabilité.....	71
<b>Figure IV.4</b> Le minimum local et le minimum global.....	73
<b>Figure IV.5.1°</b> Résultat d'optimisation sur logiciel Maple.....	77
<b>Figure.IV.6</b> Mesure de manipulabilité du robot 1° cas.....	77
<b>Figure. IV.7</b> 2°Résultat d'optimisation sur logiciel Maple.....	78
<b>Figure IV.8</b> Mesure de manipulabilité du robot 2° cas .....	79
<b>Figure. IV.9</b> Variation du la manipulabilité en fonction de l'angle $\theta_2$ pour différentes valeurs de l'angle $\alpha$ .....	80



## Abréviations et symboles

### Symboles

### Désignation

SQP	Programmation séquentielle quadratique.
R	Ensemble des nombres réels.
J	Jacobienne.
OT	Organe terminal.
L	Lagrangien.
$W_B$	Manipulabilité cinématique.
q	Variables articulaires.
$\Gamma$	Vecteur couple.
K	Indice d'isotropie
$\sigma$	Valeurs singulières.
$\dot{X}$	Vitesses opérationnelles.
$\dot{q}$	Vitesses articulaires.
$U_0$	Matrice correspondant à la situation de l'OT
MGI	Modèle géométrique inverse.
MCI	Modèle cinématique inverse.
NDL	Nombre de degrés de liberté
Tr	Translation
Rot	Rotation
$V_n$	Vitesse de translation de l'effecteur
$W_n$	Vitesse de rotation de l'effecteur.
${}^0T_n$	Matrice de transformation entre le repère 0 et n.
${}^0R_n$	Matrice orientation entre deux repères 0 et n.
${}^0P_n$	Matrice position entre deux repères 0 et n.
$\alpha$	Angle d'inclinaison caractéristique du robot.
S, n, a	Cosinus directeurs de la matrice orientation.
P	coordonnées du point de l'extrémité de la sonde.

## Abréviations et symboles

### Symboles

### Désignation

$C_1$	Cos $\theta_1$
$C_2$	Cos $\theta_2$
$C_3$	Cos $\theta_3$
$S_1$	Sin $\theta_1$
$S_2$	Sin $\theta_2$
$S_3$	Sin $\theta_3$
$C\alpha$	Cos $\alpha$
$S\alpha$	Sin $\alpha$
$P_1$	Liaison prismatique 1
$P_2$	Liaison prismatique 2
$P_3$	Liaison prismatique 3
$d_1$	Translation 1
$d_2$	Translation 2
$d_3$	Translation 3
$tg\alpha$	Tangente de alpha
<i>BFGS</i>	Broyden,Fletcher,Goldfarb,Shano
LVR	Laboratoire vision et robotique.

# **INTRODUCTION GENERALE**

## Introduction générale

L'exécution par des acteurs autres que lui-même de tâches ou d'activités qu'il considère comme aliénantes, fatigantes, dangereuses ou simplement ennuyeuses figurent parmi les aspirations les plus profondes de l'être humain.

Pour accomplir des tâches dans un site éloigné il nous faut un système parfait qui doit avoir les mêmes possibilités de perception qu'un opérateur humain. Cela pour d'un côté identifier la tâche à accomplir et d'un autre côté en définir les modalités d'exécution. Par ailleurs, ce même système doit avoir une grande flexibilité afin d'effectuer des manipulations physiques similaires à celles de l'être humain. Ceci implique une interaction par actions ponctuelles ou continues entre l'opérateur et l'environnement éloigné.

Parmi ces environnements, on peut relever à titre non exhaustif, les sites médicaux éloignés et quelques autres sites naturels, le domaine spatial, les sites difficiles d'accès etc. Pour palier au problème que posent les interactions avec ces milieux, l'homme a eu recours à plusieurs outils, plus ou moins sophistiqués, dont la robotique. Les robots complètent alors les facultés humaines et permettent ainsi de profiter des capacités de la machine pour réaliser des travaux répétitifs, difficiles au niveau physique ou qui nécessitent une précision accrue, tout en donnant la possibilité à l'expert humain de superviser la tâche à travers ses sens et de réagir au moment voulu. Mais parfois, les robots, tels que conçus de nos jours, ne suffisent pas, il faut faire appel à des systèmes qui permettent à un opérateur de réaliser une tâche à distance, en l'éloignant de l'environnement de travail et des machines qu'il contrôle. Dans ce contexte, la télé-opération semble être la solution robotique de « compromis », en effet, on passe d'un robot dont le mode de contrôle est « réglable » et autonome à un mode de suivi complet du « syntaxeur » contrôlé par un opérateur.

Si l'opérateur humain est physiquement présent dans le site et effectue des manipulations d'une façon directe, il recevrait une variété d'informations qui sont le résultat de sa manipulation, telle que le retour visuel, audio, tactile et force. En outre il pourrait changer son angle de vision pour obtenir une meilleure visualisation. Mais quand il est situé loin de l'espace de la tâche et essaye d'effectuer une certaine manipulation physique, il a besoin de recevoir les actions de ses commandes même

de façon indirecte. Ainsi le site opérationnel est instrumenté et les informations issues des capteurs sont envoyées à l'environnement opérateur et puis reproduites dans l'interface homme-machine pour fournir le feedback.

Dans ce contexte notre thème consiste à la modélisation et à l'optimisation d'un robot à six degrés de liberté dédié à la télé-échographie ultrasonore.

Dans le cadre de la collaboration entre le département de génie mécanique de Biskra et le département de mécanique de Batna, les travaux que nous présentons s'inscrivent dans le cadre des recherches développées dans le domaine de la robotique.

Dans le premier chapitre de ce mémoire nous cernons de plus près, dans un premier temps, la problématique générale dans laquelle s'inscrit notre étude, et les différents axes selon lesquels elle va être menée. Dans un deuxième temps, la diversité des approches abordées dans ce genres de travaux publiés concernant les problèmes de modélisation et d'optimisation de ce robot.

Le deuxième chapitre concerne des généralités sur les robots manipulateurs du point de vue constituants mécaniques, caractéristiques, et modélisations.

Le troisième chapitre est entièrement consacré au développement des différents modèles géométriques, cinématiques, directes et inverses, ainsi que la caractérisation des singularités du robot.

Dans le quatrième chapitre nous nous sommes intéressés particulièrement à l'optimisation du paramètre géométrique ou angle d'inclinaison caractéristique du robot, pour améliorer sa performance cinématique à proximité des configurations singulières et donc de suivre au mieux le geste de l'expert médical avec la sonde fictive

## Problématique.

### Introduction

Du fait du développement des moyens de communication et du besoin de diagnostique et d'assistance médicale en zone isolée, la télé-opération ou encore la télé-robotique joue un rôle d'importance croissante. Dans ce cadre de la télé-robotique médicale, le présent travail concerne la télé-échographie [1] et [2].

La qualité d'une échographie ultrasonore dépend de la compétence et de la précision du geste du spécialiste qui manipule la sonde. Dans le cadre de la médecine de proximité, pour des interventions d'urgence ou sur des sites difficiles d'accès, le manque de spécialistes en échographie rend délicat la pratique de cette technique non-invasive et d'importance croissante en milieu médical. La télé-échographie apporte une solution à ce type de situations. L'objectif de ce mémoire est de développer un système robotisé qui permette à un médecin spécialiste de réaliser une échographie (et d'établir un diagnostic fiable) sur un patient distant. Ce dernier pouvant être localisé à quelques mètres voire à des centaines de kilomètres du spécialiste, dans un autre pays ou bien dans l'espace. L'enjeu de ce projet est de prolonger la main du médecin grâce à un robot et de créer un système rendant le meilleur niveau possible de téléprésence afin de permettre au praticien de réaliser son acte dans les meilleures conditions tout en ayant un système aussi compact que possible et facile d'utilisation. Ce système reproduit les mouvements de la main de l'expert au cours de l'examen d'ultrason, tout en transmettant des images en temps réel à l'emplacement de l'expert [3].

Pour en aboutir, le concepteur est en face à deux problèmes essentiels :

#### 1) Problèmes de singularités.

Les manipulateurs de type sériels peuvent rencontrer des configurations dites singulières. Au voisinage de ces configurations, une augmentation des efforts dans les articulations du manipulateur ou une perte de rigidité peut avoir lieu alors que ses articulations motorisées sont bloquées. Son organe effecteur peut encore gagner ou perdre un ou plusieurs degré(s) de liberté. Une condition nécessaire à la robustesse d'un manipulateur est évidemment d'éviter les configurations singulières. Les singularités d'un manipulateur sériel correspondent aux configurations annulant

le déterminant de sa matrice Jacobienne cinématique. En ce qui concerne les configurations singulières des manipulateurs non redondants font intervenir la notion d'aspects. Les aspects sont les plus grands domaines connexes ouverts de l'espace articulaire du robot.

Dans notre étude, la synthèse de mouvements de notre robot manipulateur nécessite d'en modéliser le comportement. Dans la littérature robotique, deux principales classes de travaux sont à distinguer, selon la modélisation adoptée est de nature cinématique ou dynamique. Ici nous nous intéressons à la modélisation cinématique du robot.

### **Modélisation cinématique.**

Le modèle cinématique permet d'exprimer les vitesses opérationnelles en fonction des vitesses articulaires. Le robot d'échographie étudié présente des singularités qu'il faut traiter soigneusement, et par la suite trouver un moyen de minimiser leurs effets.

### **2) Problème d'optimisation.**

Le but de cette étude est de déterminer une valeur optimale du paramètre géométrique (angle d'inclinaison), pour améliorer la performance cinématique du robot, à proximité des configurations singulières et donc de suivre mieux le geste de l'expert médical avec la sonde dans une position normale à la peau. Ceci doit se faire en tenant compte de la morphologie (structure) du robot manipulateur, et de la tâche qui lui est assignée. Dans ce problème, l'étude des performances cinématiques du robot constitue une phase indispensable dans cette recherche.

# **CHAPITRE I :**

## **ETAT DE L'ART**



---

## I.1. Introduction.

Pour accomplir des tâches dans un site éloigné il nous faut un système parfait qui doit avoir les mêmes possibilités de perception qu'un opérateur humain. Cela pour d'un côté identifier la tâche à accomplir et d'un autre côté en définir les modalités d'exécution. Par ailleurs, ce même système doit avoir une grande flexibilité afin d'effectuer des manipulations physiques similaires à celles de l'être humain.

L'histoire de la télé-opération moderne a commencé à la fin des années 40 quand le premier manipulateur maître-esclave a été développé dans le Laboratoire National d'Argonne pour manipuler des produits chimiques et nucléaires [12]. Par la suite, le développement de la télé-opération a été rapide. L'adaptation des technologies vidéo et l'adjonction de l'information "retour d'effort" à la télé-opération ont conduit à la réalisation des premiers systèmes de téléprésence. L'informatique a introduit les boucles d'asservissement avancées dans la partie éloignée du système et a finalement introduit l'aspect réalité virtuelle dans la télé-opération. La compréhension suppose la disponibilité permanente d'un opérateur humain chargé de superviser le système.

## I.2. Emergence de la télé-échographie

Du point de vue évolution technologique, il y a lieu de rappeler qu'un premier prototype de robot porte-sonde échographique a été conçu et entièrement réalisé sur le site de l'IUT de Bourges (Gourdon, 1999France) [26]. Ce prototype a été testé en 1998 entre Bourges et le Népal lors de l'expédition « Shisha 98 », ce qui a permis de valider le concept de télé-échographie robotisée (Gourdon, CNR'IUT 2000). Cette validation a permis également l'émergence au laboratoire, d'une thématique « télé-échographie » au travers de deux projets complémentaires (TER et Teresa) supportés par le MENRT entre 1999 et 2001 (Gonzales, 2001) et l'Agence Spatiale Européenne en 2000 (Courreges, 2001). Dans ce cadre, deux robots prototypes ont été conçus et réalisés. La force du concept de télé-échographie robotisée, les divers résultats obtenus et les enjeux prometteurs de ce projet ont contribué à l'acceptation par la Commission Européenne, en 2001, du financement « d'Otelo » (mObile Tele-Echography using an ultra-Light rObot ) dont le LVR(Laboratoire vision et robotique en France) . Les objectifs sont de développer le

prototype pré-industriel d'un système robotisé dédié et portable permettant la réalisation d'un acte d'échographie sur des patients éloignés des centres d'expertise en échographie. Le site « expert » et le site « patient » seront reliés par des moyens de communication terrestre ou satellite.

### **I.3. Synthèse bibliographique.**

L'étude et la conception des robots d'échographie ont été sérieusement entamées au début des années 2000. Plusieurs auteurs se sont intéressés à la modélisation et à la réalisation de ces systèmes robotiques. On trouve une littérature dense et de qualité sur ce domaine de recherche cependant, tout est loin d'être clair sur les méthodes de résolution adoptées et nous allons à travers cette étude bibliographique essayer de dégager quelques éléments de réflexion et de définir des repères pour notre travail.

L'un des premiers auteurs qui s'est intéressé à ce domaine est [D. De Cunha et P. Gravez] en 1998 à Hong-Kong. Il proposa la réalisation de deux systèmes de télé-échographie pour la télémanipulation locale ou à distance.

[E. Degoulange, et al] ont proposé l'étude d'un robot d'une sécurité inhérente pour l'application médicale en 1999 à Canada.

En même année 99 [A. Gourdon, P. Poignet, G. Poisson, et Al] proposaient un article qui traite l'étude d'un système robotique maître-esclave pour le balayage d'ultrason sous le titre "Master-slave robotic system for ultrasound scanning,".

[Salcudean.S.E, Zhu WH, et al] en 1999 s'intéressaient à la modélisation d'un système robotique médical, avec balayage ultrason intitulé « A robot system for medical ultrasound » ISSR en USA.

[G. Kontaxakis et al] proposaient en l'an 2000 en Amérique, un poste de travail portatif intégré de télémédecine comportant l'acquisition, le traitement et la transmission des lignes des images 3D de volume ultrason. (Information Technology Applications in Biomedicine,).

En 2000 aussi [A Gourdon] a soutenu sa thèse de doctorat au laboratoire vision et robotique en France, intitulée « Etude et réalisation d'un robot médical a trois degrés de liberté et axes concourants : Application à la télé-échographie » qui traite du premier

projet de télé-échographie réalisé au Laboratoire Vision et Robotique sur ses principaux aspects ; le besoin, le premier robot porte sonde ultrasonore réalisé, et sa commande.

En 2003 [N. Smith-Guérin<sup>1</sup>, L. Al Bassit, G. Poisson, C. Delgorge, Ph. Arbeille, P. Vieyres] ont exposé un robot qui reproduit, en temps réel, le mouvement d'une sonde fictive tenue par l'expert. Des images d'ultrason sont envoyées de l'emplacement du patient à l'expert situé dans un hôpital par deux lignes de communication. Cet article présente l'architecture choisie pour le système entier et les pièces mécaniques constitutives de ce mécanisme, et la qualité visuelle des différentes techniques et le rapports de compression obtenu.

En 2003 [Lama Al Bassit et Gérard Poisson, Pierre Vieyres, Youssoufi Touré ] ont optimisé le robot d'échographie Otelo ,en évaluant sa performance cinématique, par la méthode de conditionnement de la matrice Jacobienne,cet indice posé comme le rapport entre la plus grande valeur singulière et la plus petite.

En septembre 2003 [M.Karouia,J.M.Hervé] dans un congrés francais a Nice,ont exposé une autre approche sur les mécanismes sphériques qui permettent l'orientation à 3 ddl de l'effecteur du robot autour d'un axe fixe « Enumération de mécanisme parallèle sphériques isostatiques ». Dans cet article, les mécanismes parallèles sphériques isostatiques sont énumérés grâce à une méthode de synthèse basée sur la théorie du groupe de Lie des déplacements.

En cette année même 2006 [G.A.Triantafillidis, N.thomas, C.Canero, P.Vieyres] un autre article proposé au journal << Elsevier >> qui traite l'implémentation d'une nouvelle interface de comande à distance pour le robot Otelo, intitulé « A user interface for mobile robotized télé-échography ».

C'est dans cet axe que s'inscrit notre étude « Modélisation et optimisation d'un robot médical à six degrés de liberté ». On propose une modélisation du mécanisme ainsi qu'une optimisation du paramètre géométrique par une nouvelle application de technique d'optimisation basée sur le concept de manipulabilité.

## **I.4. Etat de l'art.**

### **I.4.1.Introduction**

#### **I.4.1.1. Le concept de la télé-échographie.**

Le geste échographique est très précis et ne peut être guidé simplement par la voix ou par vidéo. Le seul moyen de réaliser une échographie dans un site où il n'y a pas d'expert en échographie est de transmettre le mouvement d'un expert via des liaisons rapides nécessaires à une interactivité temps réel entre les 2 sites.

La mise au point d'un prototype de bras robotisé solidaire d'une sonde échographique et capable d'imprimer à cette sonde placée sur le patient du site isolé les mouvements de la main qu'un expert imprime à une sonde fictive placée au centre expert.

L'expert peut télé-guider depuis l'hôpital une échographie sur le site où se trouve le patient. La transmission du mouvement au robot et le retour des images d'échographie se fait pratiquement en temps réel (délai < 1s) ce qui permet une interactivité complète entre les 2 sites. Le bras robotisé est positionné sur le corps du patient par une personne qui n'a pas de formation en échographie (manipulateur, infirmière, médecin généraliste) mais qui possède des connaissances anatomiques élémentaires. En effet le placement du bras robotisé s'effectue par rapport à des repères anatomiques simples (lignes mamelonnaire, xiphoïde, axillaire..) selon les indications et sous le contrôle vidéo de l'expert

#### **I.4.1.2 Projets de robots d'échographie**

Plusieurs laboratoires dans le monde mènent des projets de télé-échographie, parmi lesquels on peut citer :

**MIDSTEP** (multimedia interactive Demonstrator téléprésence)(De Cunha, 1998) est un projet européen dont le but est de montrer la faisabilité de la chirurgie à distance par la réalisation de deux systèmes de télé-échographie pour la télé-manipulation locale ou à distance ;

**TeleInVivo** (G.Kontaxakis, 2000) est un projet européen d'échographie 3D. L'expert qui se trouve près du patient, réalise son examen d'échographie par des dispositifs

portables. Les images ultrasonores sont envoyées, via satellite, à une base de données où la représentation 3D s'établit ;

**TER** (Gonzales, 2001) est un système où un robot esclave, à 6 d.d.l., porteur de la sonde ultrasonore, est motorisé par des muscles artificiels pneumatiques :

« actionneurs McKibben » et piloté à distance ;

**Teresa** (Courreges, 2001) est un robot de télé-échographie à 4 d.d.l. (3 d.d.l. en rotation et 1 en translation suivant l'axe de la sonde). Trois autres projets de télé-échographie ont pour principe des systèmes maîtres-esclaves utilisant des robots industriels. L'un est dédié à l'échographie artérielle (Salcudean, 1999), les deux autres sont utilisés entre deux sites proches où les communications se font par lien terrestre (Masuda, 2001), (Mitsubishi, 2001).

**OTELO** ( mObile TElé-Echographie with an ultra-Light rObot) manipulateur de sonde échographique pour le diagnostic à distance.[Vilchis 2002,Delgorge 2005] . C'est un système robotisé portable, pour la télé-échographie. Il permet à un médecin expert, spécialiste en échographie, de proposer un pré-diagnostic à distance.

## **I.5 Problèmes traités dans le mémoire**

A travers ces projets de robotique d'échographie et les différentes revues bibliographiques, on a relevé plusieurs problèmes relatifs à la modélisation et l'optimisation du robot Otelos. Dans ce contexte et parmi ces problèmes on peut citer le problème d'évaluation de la performance cinématique du robot.

Une solution a été proposée concernant ce robot, par Lama el Bassit [7], cette méthode est basée sur le critère de conditionnement ou l'indice d'isotropie.

Nous exposons dans un premier temps cette approche, ensuite nous proposons une nouvelle approche qui traite le problème de performance cinématique, ou autrement dit optimisation. Cette approche est basée sur le critère de manipulabilité cinématique, une fonction liée au Jacobien du modèle cinématique du robot qu'on doit déterminer par une modélisation et par la suite utiliser une méthode d'optimisation (programmation séquentielle quadratique) pour la maximiser.

## I.6 Performance et Optimisation

### I.6.1. Dextérité

Contrairement aux outils destinés à des analyses d'accessibilité et de parcourabilité, il existe des outils permettant d'évaluer des performances cinématiques en un point particulier de l'espace de travail ou pour une configuration articulaire donnée.

Ces analyses locales peuvent être complémentaires des précédentes. La dextérité, par exemple, peut être définie intuitivement comme mesurant l'aptitude de l'organe terminal du robot à effectuer "facilement" des petits déplacements arbitraires autour d'un point de l'espace de travail. La dextérité est étroitement liée au rapport entre les vitesses opérationnelles et les vitesses articulaires. Elle est généralement évaluée à l'aide de la notion de l'indice d'isotropie ou de la manipulabilité.

### I.6.2 Indice d'isotropie

L'indice d'isotropie  $k$  est le conditionnement de la matrice Jacobienne  $J$ . En robotique, cet indice permet d'évaluer la précision avec laquelle les vitesses opérationnelles de consigne pourront être suivies à partir des vitesses articulaires calculées par l'inverse de  $J$ . Physiquement, lorsque le manipulateur se trouve dans une configuration isotrope (lorsque  $k=1$ ), l'organe terminal se déplace avec la même faculté dans toutes les directions. En conception robuste de mécanismes, cette dernière propriété est très convoitée.

Pour le robot d'échographie OTELO l'étude de sa performance cinématique a été entamé pour la première fois par L. El Bassit [7] en 2003, qui a utilisé l'indice d'isotropie comme un critère de performance pour l'optimisation du paramètre d'inclinaison du robot. Ce critère de conditionnement est défini comme la mesure de l'inversibilité de la matrice Jacobienne homogénéisée, notée  $J_r$ , on le pose comme le rapport entre la plus grande valeur singulière et la plus petite :

$$K(J_r) = \sigma_{\max} / \sigma_{\min} \quad (\text{a})$$

$K(J_r) = 1$  Pour des configurations isotropes.

$K(J_r) \rightarrow \infty$  Pour des configurations singulières.

L'indice de performance tel que défini dépend de la posture du robot et de l'angle  $\alpha$  à optimiser. Pour avoir un indice global, il a utilisé une intégrale  $K(q)$  sur un domaine englobant l'ensemble des configurations accessibles, à l'exception Des voisinages trop proches des points de singularités. Il s'agit alors de minimiser une fonction :

$$f(\alpha) = \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \left( \int_0^{2\pi} K(\alpha, \theta_1, \theta_2) d\theta_1 \right) d\theta_2 + \int_{\pi+\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \left( \int_0^{2\pi} K(\alpha, \theta_1, \theta_2) d\theta_1 \right) d\theta_2 \quad (\text{b})$$

Contournant ainsi les configurations :  $\theta_2 = K\pi$  avec  $k=0, 1, 2, 3, \dots$

Il a considéré deux cas typiques pour ce contournement de configurations ;

-L'un est purement numérique en prenons ( $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ):  $\varepsilon = 0.01^\circ$  le résultat trouvé est un angle d'inclinaison de  $45^\circ$ .

-L'autre avec la considération par rapport à la nature de l'image d'échographie: une rotation d'un degré dans le plans d'échographie peut être effectué sans perte des informations essentielles de l'image, le résultat obtenu une valeur de construction mécanique optimale de  $42.7^\circ$ .

Notons que cette méthode de conditionnement présente une difficulté pour le calcul précis de l'angle à optimiser et la détermination de la fonction à optimiser.

### I.6.3. Indice de manipulabilité

#### I.6.3.1. Définition

C'est une mesure, évaluée par l'expression :

$$W_B = |(J_B(q_B))| \quad (\text{c})$$

Elle caractérise l'habilité du manipulateur de changer la position et l'orientation de son organe terminal. Elle est nulle pour une posture singulière .D'ou l'idée de Yoshikawa [11] de dire que la meilleure posture est globalement celle qui est la plus éloignée des postures singulières .Donc il est appréciable de la maximiser pour un emplacement donné du robot dans le site de travail

### I.6.3.2. Manipulabilité des robots.

Plusieurs facteurs doivent être pris en compte lors du choix du mécanisme et de la taille du robot manipulateur durant la phase de conception, ou lors de la détermination de la posture du manipulateur dans l'espace de travail pour effectuer une tâche opérationnelle. Un facteur important parmi ceux ci est la facilité de changement arbitraire de la position et de l'orientation de l'organe terminal. Yoshikawa [11], [22], [23] a développé une approche pour l'évaluation quantitative de la capacité du manipulateur des points de vues cinématique et dynamique. L'auteur a introduit le concept de l'ellipsoïde de manipulabilité à partir duquel il a défini quelques mesures pour caractériser la capacité de manipulation. Nous exposons dans ce qui suit le principe de l'approche.

### I.6.3.3. Théorème :

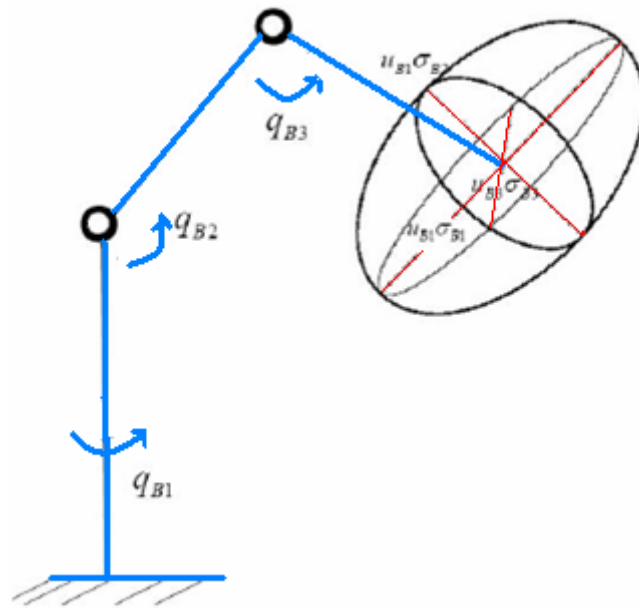
Considérons l'ensemble des vitesses opérationnelles réalisables  $\dot{X}_B$  par les vitesses articulaires  $\dot{q}$  telle que la norme Euclidienne  $\left\| \dot{q}_B \right\| \leq 1$ , avec :

$$\left\| \dot{q}_B \right\| = (\dot{q}_{B1}^2 + \dot{q}_{B2}^2 + \dots + \dot{q}_{Bn}^2)^{1/2}. \quad (d)$$

Cet ensemble est un ellipsoïde dans l'espace Euclidien [28].

La forme de l'ellipsoïde donne des indications sur la capacité de l'organe terminal à se déplacer dans les différentes directions de l'espace opérationnel. Dans la direction de l'axe majeur de l'ellipsoïde, l'organe terminal peut se déplacer à une grande vitesse. D'un autre côté, dans la direction de l'axe mineur de l'ellipsoïde de manipulabilité, l'organe terminal peut se déplacer à faible vitesse. Si l'ellipsoïde tend vers une sphère, l'organe terminal peut se déplacer dans toutes les directions uniformément. Puisque l'ellipsoïde représente la capacité de manipulation, il est appelé ellipsoïde de manipulabilité voir Figure I.1.





**Figure.I.1** : Ellipsoïde de manipulabilité en 3D [28].

Des mesures de manipulabilité tirées du concept de manipulabilité sont définies pour caractériser la capacité de manipulation des robots manipulateurs, et elles seront données au chapitre IV du mémoire.

## I.7.Conclusion.

Dans ce premier chapitre nous avons pu donner la diversité des approches abordées dans ce genres de travaux publiés concernant les problèmes de modélisation et d'optimisation de ce robot, ainsi que le principe de calcul de la mesure de manipulabilité cinématique et sa définition exacte. On a aussi parlé sur l'indice d'isotropie, qui est un facteur important pour l'optimisation des robots, mais qui présente des ambiguïtés dans la précision de calcul.

---

**CHAPITRE II :**  
**METHODES DE MODELISATION DES**  
**ROBOTS MANIPULATEURS A CHAINES**  
**CONTINUES OVERTES**

---

## **II .Généralités sur les robots manipulateurs**

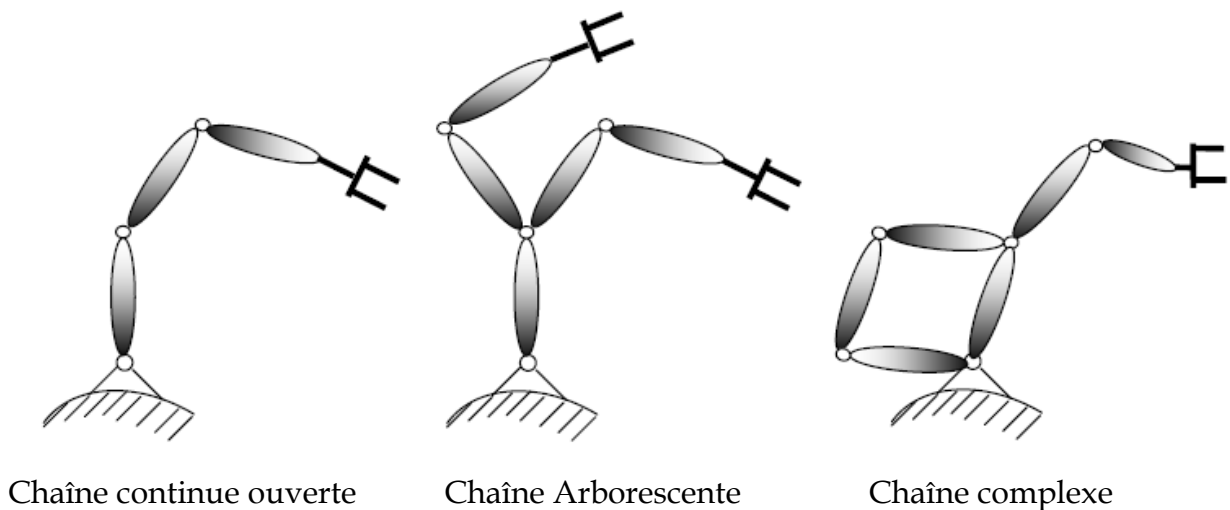
### **II.1. Introduction**

D'après l'association française de normalisation (AFNOR),un robot est un « manipulateur commandé en position, reprogrammable, polyvalent à plusieurs degrés de liberté, capable de manipuler des matériaux, des pièces, des outils et des dispositifs spécialisés au cours de mouvements variables et programmé pour l'exécution d'une variété de tâches. Il a souvent l'apparence d'un ou plusieurs bras se terminant par un poignet. Son unité de commande utilise notamment, un dispositif de mémoire et éventuellement de perception et d'adaptation à l'environnement et circonstances. Ces machines polyvalentes sont généralement étudiées pour effectuer la même fonction de la façon cyclique et peuvent être adaptées à d'autres fonctions sans modification permanente du matériel. ».

De cette définition, encore d'actualité sur l'essentiel, il ressort q'un rebot est un mécanisme ayant une structure plus ou moins plus proche du bras humain, il permet de remplacer ou de prolonger son action. Sa motorisation est assurée par des actionnaires électriques, pneumatiques ou hydrauliques qui transmettent leurs mouvements aux articulations, par des systèmes appropriés. La perception, qui permet de gérer les relations entre les robots et son environnement, est assurée par des organes de perception dits capteurs préceptifs lorsqu'ils mesurent l'état interne du robot et extéroceptifs lorsqu'ils recueillent des informations sur l'environnement. La commande synthétise les consignes d'asservissement pilotant les actionnaires à partir de la fonction de perception et des ordres de l'utilisateur.

### **II.2. Morphologie**

La structure mécanique d'un robot manipulateur est composée de plusieurs corps connectés les uns aux autres par des liaisons appelées articulations ou joints, à un seul d.d.l de translation ou de rotation. Cette structure mécanique peut constituer une chaîne cinématique continue ouverte simple, une chaîne arborescente ou une chaîne complexe voir figure. **II.1.**



**Figure.II.1.** Structures utilisées dans la conception des robots

Les robots manipulateurs à chaîne continue ouverte et à chaîne arborescente sont les plus nombreux. Ces robots manipulateurs sont simples sur le plan conception car sans risques d'hyperstatismes, largement exploitées. Ces structures ont donné naissance à plusieurs générations de robots pratiquement chez tous les constructeurs.

Les robots manipulateurs conçus sur la base d'une structure mécanique du type chaîne complexe ont pour avantage essentiel d'augmenter la rigidité et par conséquent la précision en mode programmé. Ces chaînes permettent en outre un meilleur équilibrage statique. Leur exploitation industrielle, bien que nécessaire dans certains cas, revient trop chère et seule une compatibilité parfaite des liaisons peut éviter des degrés d'hyperstatismes interne.

Dans notre travail, nous nous sommes intéressés au cas d'un robot à chaîne continue ouverte.

### II.3.Espace articulaire (espace de commande)

L'espace articulaire ou de configuration est l'espace qui permet de donner l'état de la configuration d'un bras manipulateur à un instant donné. Sa dimension  $n$  est égale au nombre de variables articulaires indépendantes et correspond au nombre de degrés de liberté de la structure mécanique (nombre des articulations pour une structure à chaîne continue ouverte).

## II.4.Espace opérationnel (espace des tâches).

L'espace opérationnel est celui dans lequel est représentée la situation de l'organe terminal relativement à un référentiel  $\{R_0\}$ . La dimension de cet espace est égale au nombre minimal des coordonnées opérationnelles qui permettent de définir la position et l'orientation de l'organe terminal (au maximum 3 dans le plan et 6 dans l'espace) suffisante pour l'exécution d'une tâche.

## II.5.Modélisation mathématique du robot manipulateur à c.c.o

### II.5.1.Introduction

La conception, la simulation ainsi que l'exploitation et la commande des robots manipulateurs font appel à un ensemble de modèles. Les plus couramment rencontrés sont les modèles géométriques, cinématiques et dynamiques ; ils permettent de rendre compte du comportement physique du système.

L'obtention de ces différents modèles n'est pas aisée, la difficulté varie selon la complexité de la cinématique de la chaîne articulée. Les méthodes de description systématique permettent de faciliter la mise en oeuvre automatique de ces modèles. Plusieurs méthodes et notations ont été proposées : la notation de Denavit-Hartenberg, la notation de Paul, la notation de Khalil-Kleifinger, La méthode des matrices  $(4 \times 4)$  et  $(3 \times 3)$ . Dans notre cas nous avons choisi de travailler avec la méthode des matrices  $(4 \times 4)$ .

### II.5.2.Notations et règles générales. (La méthode des matrices $(4 \times 4)$ )

Cette méthode repose sur l'utilisation sur ce qu'on appelle coordonnées homogènes, et consiste à introduire un facteur d'échelle sous forme d'une coordonnée supplémentaire. Au lieu de représenter dans un repère orthonormé un point par un vecteur colonne à 3 composantes (coordonnées du point), on préfère de décrire ce point par un vecteur à 4 composantes :

$$V = (x, y, z, w)^T \text{ et avec ; } x = a W ; y = b W ; z = c W$$

$W$  est facteur d'échelle.

Nous pouvons ainsi représenter les différentes transformations de point ou de vecteurs par des matrices  $(4 \times 4)$ .

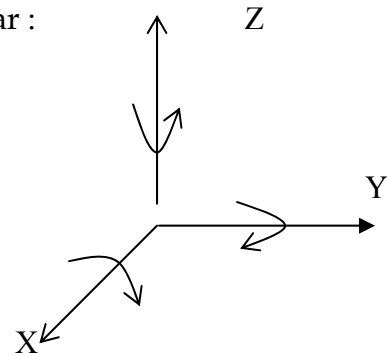
### Translation

La translation d'un point suivant un vecteur  $(a, b, c)^T$  s'écrit :

$$Tr = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La rotation d'un angle  $\theta$  autour de l'axe X est décrite par :

$$Rot(x, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



La rotation d'un angle  $\theta$  autour de l'axe Y est décrite par :

$$Rot(y, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La rotation d'un angle  $\theta$  autour de l'axe Z est décrite par :

$$Rot(Z, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## II.6. Modèles associés aux robots manipulateurs sériels.

Ils permettent de rendre compte du comportement géométrique, cinématique et dynamique d'un robot manipulateur. Ils sont utilisables individuellement ou de

manière combinée pour répondre à des besoins de la conception, de simulation, de la commande ou de l'exploitation. Ce sont :

- Le modèle géométrique direct et inverse.
- Le modèle cinématique direct et inverse.
- Le modèle dynamique direct et inverse.

## II.6.1. Modèle géométrique

### II.6.1.1. Modèle géométrique direct.

Le modèle géométrique direct (MGD) est l'ensemble des relations permettant d'exprimer la situation  $X$  de l'organe terminal en fonction des coordonnées articulaires  $q$  du robot manipulateur.

$$X = f(q) \quad (1)$$

$$\text{Avec } q = [q_1, q_2, q_3, \dots, q_n]^T$$

$$X = [p_x, p_y, p_z, \alpha, \beta, \gamma]^T$$

Les trois premières composantes de  $X$  fixent la position du point  $O_E$  (origine du repère  $\{R_E\}$ ) de l'effecteur par rapport au repère atelier  $\{R_p\}$  où à la limite par rapport au repère base  $\{R_0\}$ , tandis que les dernières donnent l'orientation de l'effecteur (les trois paramètres d'Euler par exemple) figure II.2. Une tâche de positionnement consisterait à faire coïncider le repère outil avec celui de la pièce  $\{R_p\}$ .

Le calcul du MGD reviendrait simplement à définir les composantes de la matrice  $H_{F,E}$ , donnée par :

$$H_{F,E} = H_{F,0} H_{0,1} H_{1,2} \dots H_{n-1,n} H_{n,E} = \begin{pmatrix} s_x & n_x & a_x & p_x \\ s_y & n_y & a_y & p_y \\ s_z & n_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Dans notre travail, on considérera que le repère atelier est confondu avec celui de la base.

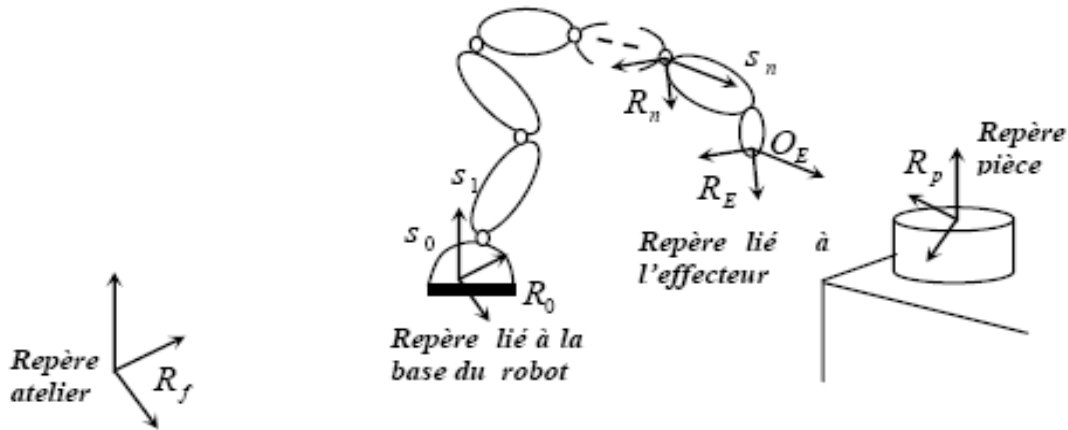


Figure.II.2. Repérage utilisé en robotique.

Ce modèle admet toujours une solution. Il sert surtout à la conception et en particulier à la délimitation du volume de travail.

## II.7.Méthode de description des orientations (Paramètre d'Euler ZYX)

La convention d'Euler adoptée pour le calcul des orientations de l'effecteur est celle donnée par la **figure II.3**. Les angles  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , désignent respectivement les angles de rotation autour  $Z_0, Y_1, X_2$ . Les matrices d'orientation s'écrivent :

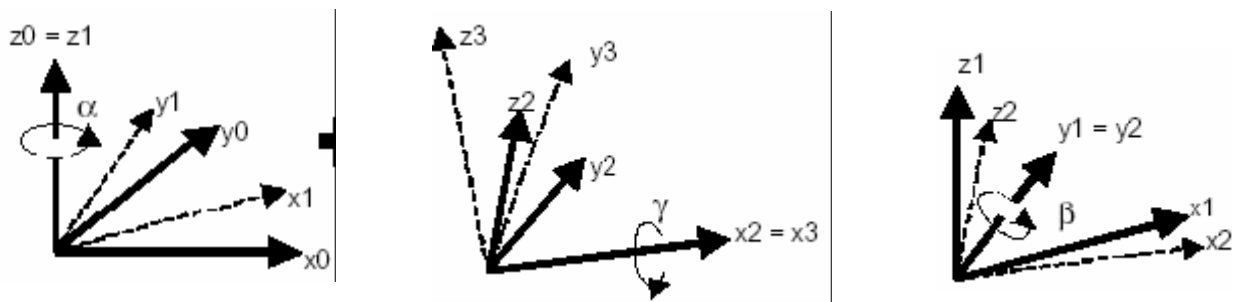


Figure II.3. Angles d'Euler ZYX



$$Rot(z, \alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; Rot(y_1, \beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}; Rot(x_2, \gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}$$

La matrice de rotation globale s'écrit comme suit :

$$T_{O,E} = Rot(z, \alpha)Rot(y_1, \beta)Rot(x_2, \gamma)$$

$$T_{O,E} = \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & -s\alpha c\gamma + c\alpha s\beta s\gamma & s\alpha s\gamma + c\alpha s\beta s\gamma \\ s\alpha c\beta & c\alpha c\gamma + s\alpha s\beta s\gamma & -c\alpha s\gamma + s\alpha s\beta c\gamma \\ -s\alpha\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix}$$

D'après les équations on trouve :

$$\begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x \\ s_y & n_y & a_y \\ s_z & n_z & a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & -s\alpha c\gamma + c\alpha s\beta s\gamma & s\alpha s\gamma + c\alpha s\beta s\gamma \\ s\alpha c\beta & c\alpha c\gamma + s\alpha s\beta s\gamma & -c\alpha s\gamma + s\alpha s\beta c\gamma \\ -s\alpha\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix}.$$

On fait l'identification entre les éléments de ces deux matrices terme à terme et on résout un système d'équations non linéaires en  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ . On trouve :

Si :  $s_x = s_y = 0$  implique que  $\cos(\beta) = 0$ . Alors les angles d'Euler (ZYX) prennent les valeurs suivantes :

$$\beta = 90$$

$$\alpha = 0$$

$$\gamma = \text{atan2}(n_x, n_y)$$

Sinon :

$$\beta = \text{atan2}(\sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2})$$

$$\alpha = \text{atan2}(r_{21}, r_{11})$$

$$\gamma = \text{atan2}(r_{32}, r_{33})$$

## II.8. Modèle géométrique inverse.

Le modèle géométrique inverse (MGI) est l'ensemble des relations inverses à celles du MGD. Ce modèle permet d'exprimer les variables articulaires  $q$  du robot manipulateur en fonction des coordonnées opérationnelles  $X$  exigées pour l'exécution d'une tâche donnée. [9]

$$q = f^{-1}(X)$$

Il s'agit maintenant de résoudre le système par rapport aux  $q_i$ , c'est à dire résoudre un système de  $m$  équations à  $n$  inconnues. La difficulté de cette résolution réside dans le fait que la fonction  $f$  est non linéaire.

### II.8.1. Méthodes de calcul du modèle géométrique inverse

Il n'existe pas une méthode analytique générale qui permet de résoudre le MGI. Cependant un certain nombre de méthodes, adaptées à des classes de cinématiques particulières sont souvent utilisées et permettent de traiter le problème [9]:

- **La méthode de Pieper** : Elle est adaptée aux bras manipulateurs à six degrés de liberté possédant trois articulations rotoïdes d'axes concourants ou trois articulations prismatiques. Elle est largement utilisée car la quasi-totalité des bras manipulateurs possèdent un poignet à 3 axes concourants.
- **La méthode de Paul** : Elle traite séparément chaque cas particulier et convient pour la plupart des bras manipulateurs industriels. C'est une méthode heuristique qui n'admet pas une procédure déterministe. C'est celle qu'on a utilisé dans notre travail.
- **La méthode de Raghavan et Roth**, qui donne la solution pour un robot 6R à partir d'un polynôme caractéristique de degré 16 (16 solutions), qu'on résout en utilisant une méthode baptisée élimination dialytique.
- **Les méthodes numériques** : La transformation des coordonnées peut être obtenue par des procédures numériques, par itérations successives (résolution d'un système d'équations non linéaires).

### II.8.2. Nombre des solutions du MGI. [9]

Le nombre de solutions possibles du modèle géométrique inverse, dépend de la situation désirée, du nombre de degrés et de la morphologie du bras manipulateur. Pratiquement trois cas se présentent:

a) Absence de solution lorsque la situation désirée est en dehors de l'espace de travail du bras manipulateur.

b) Solution en nombre fini lorsque toutes les solutions peuvent être calculées sans ambiguïté (8 solutions dans le cas des bras manipulateurs à six degrés de liberté possédant six liaisons rotoïdes dont trois sont à axes concourants). Les limites physiques des débattements sur les axes permettent d'exclure certaines solutions. En d'autres cas, l'imposition de contraintes

- La minimisation de la consommation de l'énergie, supplémentaires oriente le choix de l'utilisateur sur la solution à retenir. Ces contraintes portent en général sur :

- La minimisation du temps de déplacement dans le respect des limitations des vitesses et des accélérations.

- La minimisation des erreurs de positionnement statique.

- La minimisation d'un critère mixte avec pondération d'objectif.

c) Infinité de solutions lorsque :

- Le robot est redondant vis-à-vis de la tâche (Exemple : 5 contraintes sur  $X$  et robot à 6 degrés de libertés),

- Le robot se trouve en configuration singulière. Il y a alors une redondance locale qui se traduit par le fait que le bras manipulateur ne peut déplacer son organe terminal dans certaines directions ou tourner autour de certains axes.

Sur le plan pratique, le modèle géométrique inverse présente un intérêt indéniable aussi bien pour les bras manipulateurs programmés par apprentissage que pour ceux programmés par langage de haut niveau. Il permet de transcrire les besoins de positionnement et d'orientation de l'effecteur face à une tâche donnée dans le système des variables articulaires utilisés par la commande. Pour les bras manipulateurs utilisés

en mode apprentissage, le modèle géométrique inverse permet de préparer le travail de l'opérateur en dégagant par simulation les configurations optimales qui permettent d'atteindre les points d'arrêt nécessaires au besoin de la tâche. Il facilite ainsi le travail de l'opérateur qui est guidé dans sa tâche d'apprentissage. En effet on admet facilement qu'il n'est pas aisé d'amener un bras manipulateur à six degrés de libertés sur une position exigée de l'effecteur par des actions discrètes sur les différents moteurs agissant sur les liaisons. La préparation du travail par la résolution du (MGI) assure par ailleurs une optimisation des déplacements articulaires entre les points d'une tâche désirée.

### II.8.3.Méthode de Paul

Considérons un robot manipulateur dont la matrice de passage homogène [9] a pour expression:  ${}^0T_n = {}^0T_1 {}^1T_2 \dots {}^{n-1}T_n$

On note :  $U_0 = {}^0T_n \dots \dots \dots$  (3)

$$U_0 = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x & P_x \\ s_y & n_y & a_y & P_y \\ s_z & n_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice  $U_0$  est une donnée du problème : Elle correspond à la situation désirée du repère terminal.

Pour calculer les variables articulaires à partir de la relation (3), en fonction des éléments  $s, n, a$  et  $P$ , Paul a proposé une méthode qui consiste à pré-multiplier successivement les deux membres de l'équation (3) par les matrices  ${}^jT_{j-1}$  pour  $j$  variant de 1 à  $n-1$ , Opérations qui permettent d'isoler et d'identifier l'une après l'autre les variables articulaires que l'on recherche.

Pour un robot à six degrés de liberté par exemple, on procède comme suit :

- La multiplication à gauche par  ${}^1T_0$  donne :

$${}^1T_0 \cdot U_0 = {}^1T_2 \dots \dots \dots {}^{n-1}T_n \quad (4)$$

Le terme de droite est fonction des variables  $q_2, q_3, \dots, q_6$ . Il a déjà été calculé lors de l'établissement du modèle géométrique direct si l'on a pris la précaution de commencer les multiplications de matrices de passage dans le sens rétrograde. Le terme de gauche n'est fonction que des éléments de  $U_0$  et du terme  $q_1$ .

- La variable articulaire  $q_1$  est alors obtenue par des manipulation simple ou complexes entre les équations disponibles dans le but d'isoler  $q_1$  dans une seule expression qui exclue les variables  $q_2$  à  $q_6$ .

- Partant de l'expression (4), on pré-multiplie par  ${}^2T_1$  et on répète le même processus. La succession des équations permettant le calcul de tous les  $q_i$  est la suivante :

$$\begin{aligned}
 U_0 &= {}^0T_1 \cdot {}^1T_2 \cdot {}^2T_3 \cdot {}^3T_4 \cdot {}^4T_5 \cdot {}^5T_6 \\
 U_1 &= {}^1T_0 \cdot U_0 = {}^1T_2 \cdot {}^2T_3 \cdot {}^3T_4 \cdot {}^4T_5 \cdot {}^5T_6 \\
 U_2 &= {}^2T_1 \cdot U_1 = {}^2T_3 \cdot {}^3T_4 \cdot {}^4T_5 \cdot {}^5T_6 \\
 U_3 &= {}^3T_2 \cdot U_2 = {}^3T_4 \cdot {}^4T_5 \cdot {}^5T_6 \\
 U_4 &= {}^4T_3 \cdot U_3 = {}^4T_5 \cdot {}^5T_6 \\
 U_5 &= {}^5T_4 \cdot U_4 = {}^5T_6
 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\text{Avec } U_j = {}^jT_{j-1} \cdot U_{j-1}$$

### Remarque

Dans certains cas, il est possible de résoudre le problème en partant de  $q_n$ ; il suffit alors de multiplier à droite les deux membres de l'expression (3) par  ${}^{j-1}T_j$  pour  $j$  variant de  $n$  à 2.

### II.8.4. Méthode de Pieper.

La méthode de Pieper fournit les solutions pour les robots à 6 degrés de liberté possédant les particularités ci-après:

- Les robots possèdent une liaison sphérique (axes 4, 5 et 6 par exemple); le modèle fournit 8 solutions pour un robot à six degrés de liberté.
- Les robots possèdent trois liaisons prismatiques (axes 1, 2 et 3 par exemple); le modèle fournit deux solutions.

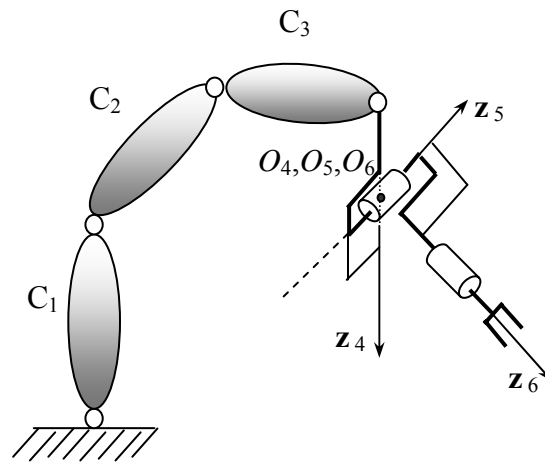
Nous donnons ici le cas des robots à six degrés de libertés comportant une liaison sphérique (trois rotations d'axes concourants) au niveau du poignet, cas de la quasi-totalité des robots commercialisés. [9]

Lorsque les trois dernières articulations sont rotoïdes d'axes concourants, le jeu des paramètres géométriques est le suivant :

$a_4$  et  $a_5$  sont des distances entre les axes  $x_3$  et  $x_4$  et  $x_5$

$\alpha$  : angle entre les axes  $Z$

$$\begin{cases} a_4 = d_5 = a_5 = 0 \\ \sigma_4 = \sigma_5 = \sigma_6 = 0 \\ S\alpha_4 \neq 0 \text{ et } S\alpha_5 = 0 \end{cases}$$



**Figure II.4.** Robot à six degrés de liberté munie d'un poignet de type rotule

La position du point d'intersection correspondant est fonction uniquement des variables articulaires  $q_1$ ,  $q_2$  et  $q_3$ . Ce type de structures assure donc le découplage position / orientation qui conduit à écrire deux ensembles d'équations.

#### A) Équations de position :

Puisque  ${}^0P_{O_6} = {}^0P_{O_4}$ , on peut écrire donc que la quatrième colonne du produit des transformations  ${}^0T_1 \cdot {}^1T_2 \cdot {}^2T_3 \cdot {}^3T_4$  est égale à la quatrième colonne de  $U_0$ .

$$\text{Soit : } \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{bmatrix} = {}^0T_1 \cdot {}^1T_2 \cdot {}^2T_3 \cdot {}^3T_4 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

On détermine les variables ( $q_1, q_2, q_3$ ) à partir de ce système d'équations.

### b) Équations d'orientation

$$\text{Puisque l'orientation de } U_0 \text{ est donnée par : } {}^0R_6 = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x \\ s_y & n_y & a_y \\ s_z & n_z & a_z \end{bmatrix}$$

$$\text{On a alors : } {}^0R_3 \cdot \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x \\ s_y & n_y & a_y \\ s_z & n_z & a_z \end{bmatrix} = {}^0R_6 \quad (7)$$

Les variables  $q_1, q_2$  et  $q_3$ , donc  ${}^0R_3$ , étant connues, le terme de gauche est connu, le terme de droite est fonction de  $\theta_4, \theta_5$  et  $\theta_6$ , variables qui sont solution de la relation (7).

## II.8.5. M.G.I. Pour les cinématiques particulières [9].

### a) Robot possédant plus de six degrés de liberté

Lorsqu'un robot possède plus de six degrés de liberté, le système à résoudre contient plus d'inconnues que de paramètres décrivant la tâche. Il manque  $(n-6)$  relations pour pouvoir le résoudre. Deux stratégies sont possibles :

- La première consiste à fixer  $(n-6)$  articulations, on se ramène alors au problème à six degrés de liberté. Le choix de ces articulations est dicté par les spécifications de la tâche et par la morphologie du robot. On peut en suite reconfigurer le robot autour des valeurs obtenues en vue de satisfaire des critères d'optimisation supplémentaires.

- La deuxième stratégie consiste à introduire  $(n-6)$  relations supplémentaires décrivant la redondance.

### b) Robots possédant moins de six degrés de liberté

Pour les robots comportant moins de six degrés de liberté, l'espace accessible du robot est de dimension inférieure à six. Il n'est pas possible de faire coïncider le repère  $\{R_E\}$  lié à l'outil avec le repère  $\{R_E\}^d$  qui décrit la tâche, définie par la transformation  ${}^f T_E^d$ , sauf lorsque les repères  $\{R_E\}$  et  $\{R_E\}^d$  sont conditionnés de façon bien particulière pour s'adapter au manque de degrés de liberté. On est alors amené à résoudre un système de six équations à  $n$  inconnues avec  $n < 6$ . On parlera dans ce cas de liaison repère sur repère.

### II.8.6 Méthodes numériques

Il existe plusieurs méthodes de calcul numérique pour la résolution d'un système d'équations non linéaires. Elles ne permettent pas d'obtenir le MGI sous forme d'expressions explicites littérales, mais réalisent tout de même la transformation de coordonnées. Ce sont des valeurs numériques qui sont traitées, par des calculs itératifs qui posent des problèmes de convergence et de temps de calcul. Cette méthode est utilisée lorsque le modèle géométrique ne peut être déterminé ni analytiquement ni géométriquement.

### II.9 Modèle cinématique [9]

Le modèle cinématique direct (MCD) exprime les vitesses de translation ( $V_E$ ) et de rotation ( $W_E$ ) de l'effecteur  $\dot{X}$  d'un robot manipulateur (les variations élémentaires  $dX$  des coordonnées opérationnelles) en fonction des vitesses articulaires  $\dot{q}$  (des variations élémentaires  $dq$  des coordonnées articulaires), il est noté :

$$\dot{X} = J(q) \cdot \dot{q} \quad (8)$$

$$\text{Avec : } \dot{X} = [V_E, W_E]^T, \quad \text{et} \quad \dot{q} = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]^T$$

$J(q)$  désigne la matrice Jacobienne de dimension ( $m \times n$ ) du robot manipulateur, égale à :

$$\frac{\partial X}{\partial q} \text{ et fonction des variables articulaires } q. \text{ Par analogie, le modèle différentiel direct}$$



$$\text{S'écrit: } dX = J(q) \cdot dq \quad (9)$$

### II.9.1 Calcul de la matrice Jacobienne.

Le calcul de la matrice Jacobienne peut être mené de plusieurs façons [29]:

#### a) Par dérivation du modèle géométrique direct

Une première méthode consiste à calculer les éléments du vecteur vitesse opérationnel  $\dot{X}$ , par dérivation par rapport au temps des éléments du vecteur des coordonnées opérationnelles  $X$ , obtenus par le modèle géométrique direct :

$$X = F(q)$$

$$\text{Avec } F(q) = [F_1(q) \quad F_2(q) \quad \dots \quad F_m(q)]$$

$$\Rightarrow \frac{dX}{dt} = \left[ \begin{array}{cccc} \frac{\partial F_1(q)}{\partial q_1} \cdot \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial F_1(q)}{\partial q_2} \cdot \frac{dq_2}{dt} + \dots + \frac{\partial F_1(q)}{\partial q_n} \cdot \frac{dq_n}{dt}; & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_m(q)}{\partial q_1} \cdot \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial F_m(q)}{\partial q_2} \cdot \frac{dq_2}{dt} + \dots + \frac{\partial F_m(q)}{\partial q_n} \cdot \frac{dq_n}{dt} \end{array} \right]$$

En mettant ce système sous forme matricielle et en l'identifiant à la relation (9) on obtient l'expression suivante :

$$\frac{dX}{dt} = \dot{X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(q)}{\partial q_1} & \frac{\partial F_1(q)}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial F_1(q)}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m(q)}{\partial q_1} & \frac{\partial F_m(q)}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial F_m(q)}{\partial q_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\Rightarrow \dot{X} = [J_n] \cdot [\dot{q}] \quad \text{Avec } J_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial q_j} \quad \left| \begin{array}{l} i = 1 \dots m \\ j = 1 \dots n \end{array} \right.$$

#### b) En utilisant les lois de composition des vitesses

Dans une seconde méthode le calcul du vecteur vitesse  $\dot{X}$  de l'organe terminal s'effectue en utilisant une formulation récurrente (minimisation du temps de calcul et génération automatique des équations nécessaires) basée sur le théorème de composition des vitesses ; par la suite on déduit le Jacobien de la relation matricielle suivante :

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_n \\ \mathbf{w}_n \end{bmatrix} = [J_n] \cdot [\dot{q}]$$

Où  $\mathbf{V}_n$ : Le vecteur vitesse de translation de l'organe terminal relativement au repère  $\{R_0\}$ .

$\mathbf{w}_n$ : Le vecteur vitesse de rotation instantanée de l'organe terminal relativement au repère  $\{R_0\}$ .

On exprime en général  $\mathbf{V}_n$  et  $\mathbf{w}_n$ , soit dans le repère  $\{R_n\}$ , ou dans le repère  $\{R_0\}$ . La matrice Jacobienne correspondante est notée  ${}^n [J_n]$  ou  ${}^0 [J_n]$  respectivement.

### II.10 Théorème de composition des vitesses

Etant donnés trois repères  $\{R_A\}$ ,  $\{R_B\}$  et  $\{R_0\}$  ( $\{R_0\}$  un repère fixe), et un point  $P$  dans l'espace. Figure II.5

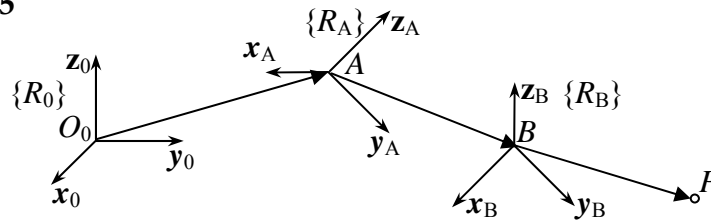


Figure II.5. Repères  $\{R_A\}$ ,  $\{R_B\}$  et  $\{R_0\}$  ( $\{R_0\}$

La position de  $P$  dans  $\{R_0\}$  :  $\overrightarrow{O_0P} = \overrightarrow{O_0A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}$

La vitesse absolue du point  $P$  :  $\mathbf{V}_p = \frac{d^0 \overrightarrow{O_0P}}{dt} = \frac{d^0 \overrightarrow{O_0A}}{dt} + \frac{d^0 \overrightarrow{AB}}{dt} + \frac{d^0 \overrightarrow{BP}}{dt}$

Soit  $\Omega_{R_A/R_0}$  : La vitesse de rotation instantanée du repère  $\{R_A\}$  relativement au repère  $\{R_0\}$ .

$\Omega_{R_B/R_A}$  : La vitesse de rotation instantanée du repère  $\{R_B\}$  relativement au repère  $\{R_0\}$ .

En appliquant la loi de composition des vitesses :

$$\mathbf{w}_A = \Omega_{R_A/R_0} \quad \frac{d^0 \overrightarrow{AB}}{dt} = \frac{d^A \overrightarrow{AB}}{dt} + \mathbf{w}_A \wedge \overrightarrow{AB}$$

$$\mathbf{w}_B = \Omega_{R_B/R_A} + \Omega_{R_A/R_0} \quad \frac{d^0 \overrightarrow{AB}}{dt} = \frac{d^B \overrightarrow{AB}}{dt} + \mathbf{w}_B \wedge \overrightarrow{AB}$$

Où :  $\mathbf{w}_A$  et  $\mathbf{w}_B$  sont les vitesses de rotation instantanée des repères  $\{R_A\}$  et  $\{R_B\}$  relativement au repère  $\{R_0\}$ .

On s'intéresse uniquement aux origines des repères :

Repère  $\{R_0\}$ :

$$\mathbf{w}_0 = \boldsymbol{\Omega}_{R_0/R_0} = \vec{0} \quad \mathbf{V}_0 = \frac{d^0 \overrightarrow{O_0 O_0}}{dt} = \vec{0}$$

Repère  $\{R_A\}$ :

$$\mathbf{w}_A = \boldsymbol{\Omega}_{R_A/R_0} \quad \mathbf{V}_A = \frac{d^0 \overrightarrow{O_0 A}}{dt}$$

Repère  $\{R_B\}$ :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{w}_B &= \boldsymbol{\Omega}_{R_A/R_0} + \boldsymbol{\Omega}_{R_B/R_A} = \mathbf{w}_A + \boldsymbol{\Omega}_{R_B/R_A} \\ \mathbf{V}_B &= \frac{d^0 \overrightarrow{O_0 A}}{dt} + \frac{d^A \overrightarrow{AB}}{dt} + \mathbf{w}_A \wedge \overrightarrow{AB} = \mathbf{V}_A + \frac{d^A \overrightarrow{AB}}{dt} + \mathbf{w}_A \wedge \overrightarrow{AB} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Soit:

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\Omega}_{R_B/R_A} &= \dot{\theta}_B \cdot \mathbf{z}_B \\ \overrightarrow{AB} &= {}^A \mathbf{P}_B \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{d^A \overrightarrow{AB}}{dt} = {}^A \dot{\mathbf{P}}_B \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{w}_B &= \mathbf{w}_A + \dot{\theta}_B \cdot \mathbf{z}_B \\ \mathbf{V}_B &= \mathbf{V}_A + {}^A \dot{\mathbf{P}}_B + \mathbf{w}_A \wedge {}^A \mathbf{P}_B \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} {}^B \mathbf{w}_B &= {}^B \tilde{\mathbf{R}}_A \cdot {}^A \mathbf{w}_A + \dot{\theta}_B \cdot \mathbf{z}_B \\ {}^B \mathbf{V}_B &= {}^B \tilde{\mathbf{R}}_A \left( {}^A \mathbf{V}_A + {}^A \dot{\mathbf{P}}_B + {}^A \mathbf{w}_A \wedge {}^A \mathbf{P}_B \right) \end{aligned} \right.$$

Le modèle cinématique inverse (MCI) d'un robot manipulateur est celui qui permet de déterminer les vitesses articulaires  $\dot{q}$  qui assurent au repère terminal une vitesse opérationnelle  $\dot{X}$  désirée. Il s'écrit :

$$\dot{q} = J^{-1}(q) \dot{X} \quad (12)$$

Le MCI présente un grand intérêt en phase d'exploitation surtout quand le robot manipulateur travaille en cours de déplacement avec des contraintes de vitesse, de l'effecteur relativement à la pièce. L'autre intérêt est qu'il se substitue au MGI et permet de calculer les incréments de déplacements articulaires à réaliser sur les différentes articulations, sur la base de la configuration présente, pour matérialiser un déplacement élémentaire dans l'espace opérationnel.

Le calcul de la matrice Jacobienne peut être mené de plusieurs façons :

-Une première méthode consiste à calculer les éléments de la matrice Jacobienne par différentiation du MGD par rapport aux coordonnées généralisées  $q$  ; ce qui donne :

$$J(i, j) = \frac{\partial F_i(q)}{\partial q_j} \quad i = 1 \dots 6; j = 1 \dots n. \quad (13)$$

-Dans une seconde méthode, le calcul des vitesses opérationnelles de l'effecteur  $\dot{X}$  s'effectue par une formulation récurrente, basée sur le théorème de composition des vitesses. Cette méthode a le double avantage d'éviter le calcul des dérivées et de réduire le temps de calcul. Elle permet par ailleurs une génération automatique des termes de la Jacobienne par la mise en oeuvre des formules de récurrence simples.

### II.11 Modèle dynamique [9].

On appelle modèle dynamique inverse ou tout simplement le modèle dynamique, le système d'équations qui permet d'établir les relations entre le vecteur des forces généralisées (forces et/ou couples) appliquées au niveau des articulations et les paramètres cinématiques (coordonnées, vitesses et accélérations généralisées) du robot manipulateur. On représente donc le modèle dynamique inverse par une relation de la forme :

$$\Gamma = F(q, \dot{q}, \ddot{q}, f_{ext}) \quad (14)$$

Où

$\Gamma$  : Vecteur des couples/forces des actionneurs, selon que l'articulation est rotoïde ou prismatique.

$f_{ext}$  : Efforts extérieurs (forces et couples), exercés généralement par l'organe terminal.

Le modèle dynamique direct est celui qui permet d'exprimer les accélérations généralisées en fonction des coordonnées, vitesses et forces généralisées. Il est alors représenté par la relation :

$$\ddot{q} = G(q, \dot{q}, \Gamma, f_{ext}) \quad (15)$$

Plusieurs formalismes sont utilisés pour établir le modèle dynamique. Les formalismes les plus souvent utilisés sont :

**a. Le formalisme de Newton-Euler** : Ce formalisme est très adapté pour construire le modèle dynamique inverse. Il présente un intérêt pratique indéniable aussi bien pendant la conception que lors de l'exploitation. En effet, ce formalisme porte sur le calcul des torseurs complets de liaisons et permet donc le dimensionnement de la structure et des actionneurs. Le caractère itératif de ce formalisme réduit énormément le temps de calcul relativement au formalisme de Lagrange et permet l'exploitation des résultats, par une commande évoluée (commande en couple), pour améliorer la précision dynamique.

**b. Formalisme de Lagrange** : Le formalisme de Lagrange est utilisé surtout pour construire le modèle dynamique direct, il ne présente que peu d'intérêts pratiques. On utilise généralement ce modèle pour la simulation des mécanismes polyarticulés libres. Pour notre étude on s'intéresse seulement à la modélisation géométrique et cinématique directes et inverses du robot.

## II.12 Conclusion :

Dans ce chapitre on a donné les principales définitions des différents organes constitutifs des robots manipulateurs, ainsi que la façon de développer leurs différents modèles mathématiques. On a exposé les méthodes de calcul du modèle géométrique inverse pour différents robots à  $n$  degré de liberté. On a exprimé la façon de calcul de la matrice Jacobienne du modèle cinématique, et un bref aperçu sur le modèle dynamique. Ce chapitre est d'intérêt particulier pour aborder la modélisation du robot sériel étudié, ce que nous allons exposer au troisième chapitre.

---

## **CHAPITRE III**

# **MODELISATION DU ROBOT**

---

### III. Introduction.

Quel que soit l'objectif qu'on se fixe, concevoir, optimiser, simuler ou commander un système mécanique, il est nécessaire, entre autres, de disposer de modèles du mécanisme. Plusieurs niveaux de modélisation sont possibles, qui dépendent des spécifications du cahier des charges de l'application envisagée : modèles géométriques, cinématiques ou dynamiques. Le sujet de ce mémoire porte sur la modélisation et l'optimisation d'un robot d'échographie à six degrés de liberté, formé d'un bras porte sonde et d'une base. Ce chapitre présente les modèles géométriques et cinématiques du système. Ces modèles sont nécessaires à la commande du robot et de son organe terminal, ainsi qu'à l'optimisation de son paramètre de construction géométrique.

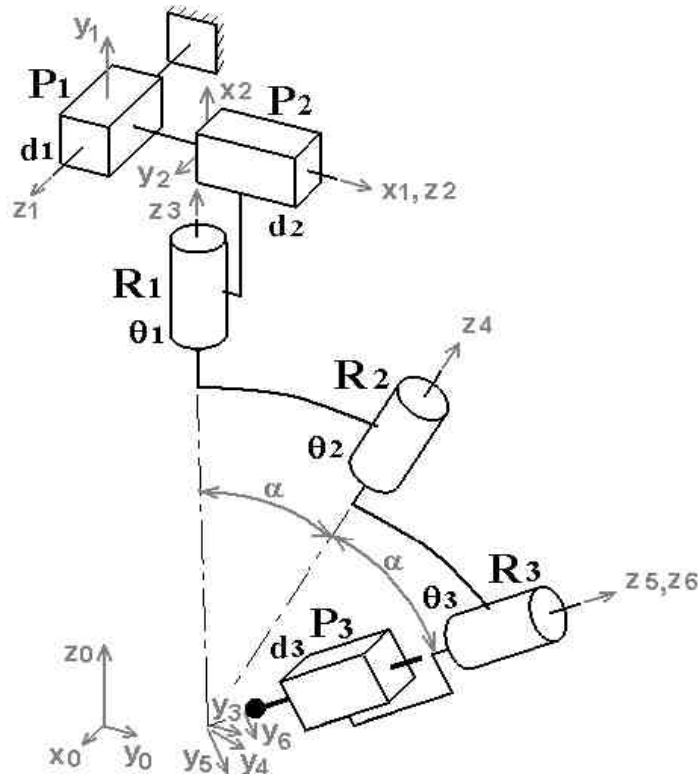
#### III.1.Description du robot

##### III.1.1.Structure du robot.

Il s'agit ici d'une structure cinématique du robot qui répond aux spécifications des mouvements de la sonde réelle portée par le médecin. Ces mouvements ont été étudiés dans le cadre d'examens échographiques ultrasonores courants : cardiaque, abdominal et rénal. Cette étude a permis de définir les contraintes cinématiques et a conduit au choix d'une structure pour le robot [7].

##### III.1.2.Structure cinématique du robot

La structure du robot, conçue pour obtenir le mouvement de la sonde désiré, est de type série à 6 degrés de liberté : trois rotations autour des axes concourants et trois translations, voir figure III.I. et figure III.I.I .Le robot est positionné sur la peau du patient et peut être maintenu par une personne non experte en échographie. Les deux premières liaisons prismatiques, P1 et P2, permettent le positionnement précis de la sonde dans la zone d'intérêt. Les liaisons pivot, R1 et R2 ont des axes concourants. Elles permettent le positionnement et l'orientation de l'axe de la sonde à l'intérieur d'un espace conique de demi-angle au sommet de  $2\alpha$  [7].



**Figure III.I.** Structure cinématique du robot [7] **Figure III.I.I** Le robot prototype [7]

La sonde est orientée en gardant le contact avec le même point de la peau, ce point est le point d'intersection des deux axes de révolution. La liaison pivot R3 permet la rotation de la sonde autour de son axe de symétrie. L'axe de R3 est confondu avec l'axe de symétrie de la sonde (ou axe propre). Les axes de R1, R2 et R3 sont concourants et il y a le même angle  $\alpha$  entre R1-R2 et entre R2-R3. Le rôle de la dernière liaison prismatique P3 est de modifier la force de contact entre la sonde et la peau en faisant coulisser la sonde suivant son axe de symétrie.

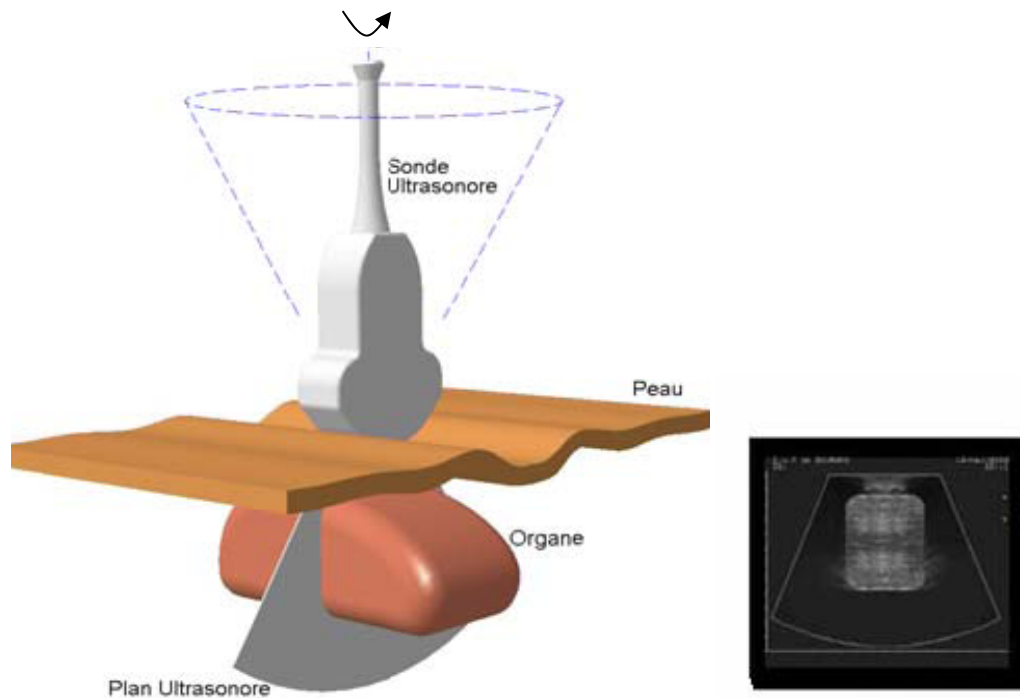
### III.2. Spécifications du mouvement de la sonde

Les mouvements de la sonde permettent de balayer l'organe examiné par le plan des ultrasons et de chercher la meilleure intersection, entre ce plan et l'organe, pour avoir les informations désirées dans l'image ultrasonore voir figure III.2. Les résultats et remarques issues de l'étude du mouvement de la sonde sont les suivants:

- Une fois la sonde positionnée sur la zone d'intérêt, le contact entre son extrémité et la peau, doit être maintenu en permanence.



- Le médecin maintient le même point de contact entre la sonde et la peau pendant l'examen de l'organe. Ce point de contact est choisi avec précision, son choix est lié à l'expertise de l'échographe.
- Pour trouver le meilleur angle d'incidence, l'axe de la sonde évolue à l'intérieur d'un cône et tourne autour de son axe propre. Le sommet du cône est le point de contact avec le patient, voir figure III.2.
- Pendant la plupart du temps, au cours de l'examen, l'inclinaison de l'axe de la sonde, par rapport à la direction normale à la peau, reste inférieure à  $25^\circ$ . Cependant, dans certains cas et pour l'examen de quelques organes particuliers, l'axe de la sonde s'incline jusqu'à  $60^\circ$  par rapport à la normale à la peau.



**Figure III.2.** La zone de mouvement de la sonde. Intersection du plan des ultrasons avec l'organe examiné et l'image ultrasonore obtenue [7].

### III.3. Spécifications générales du système.

Dans le système Otelo on distingue trois sous-systèmes: la **station maître** qui se situe dans un centre hospitalier où l'expert médical rend son diagnostic ; la **station esclave** qui se situe dans un site isolé, près du patient, et qui est positionnée et maintenue par un assistant non-expert en échographie ; le **réseau de communication** terrestre ou satellite. [4] et [5]. Voir figure. III.3

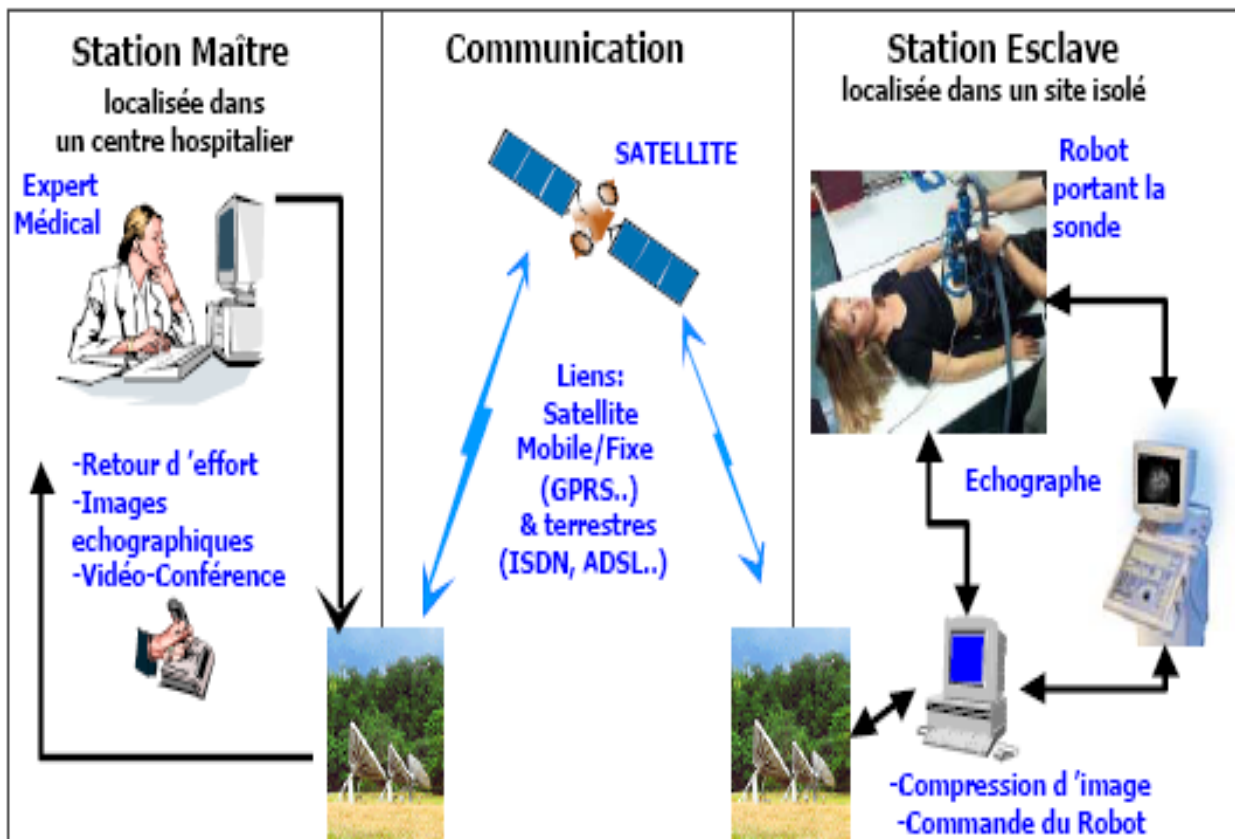


Figure III.3. L'Architecture du système Otelo [4].

### III.4. Espace articulaire, espace opérationnel et modèle de transformation entre les espaces

**Définition III.1** : on appelle espace de configurations articulaires d'un robot manipulateur (ou simplement configuration) l'état du robot représentant la situation de ses différents corps. Les variables ou coordonnées articulaires sont aussi appelées coordonnées généralisées. L'espace de ces variables noté  $NB$ , est appelé espace articulaire ou espace des configurations.

**Définition III.2** : l'espace opérationnel est celui dans lequel est représentée la situation de l'organe terminal. Les variables ou coordonnées au nombre minimum permettant de définir la situation de l'OT sont appelées les coordonnées opérationnelles. L'espace opérationnel de dimension  $m$  est noté  $MB$ .

### III.5. Modèle géométrique direct (MGD)

Le modèle géométrique direct (MGD) permet d'exprimer la situation de l'OT en fonction de la configuration (exprimer les coordonnées opérationnelles en fonction des coordonnées généralisées).

Pour la modélisation géométrique du robot manipulateur, nous appliquons la méthode des matrices ( $4 \times 4$ ).

On associe à chacun des corps  $i$  ( $i = 0, 1, \dots, 6$ ) du robot manipulateur un repère  $R_i = (O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$  de base Figure III.I. Ensuite, on détermine les matrices de passage des repères  $R_{i-1}$  aux repères  $R_i$  exprimées par les matrices homogènes  ${}^{i-1}T_i$ .

Pour ce robot série le modèle s'obtient par la matrice de passage :

$${}^0T_6 = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6 \quad (16)$$

$$\text{Telle que: } {}^0T_6 = \begin{bmatrix} {}^0R_6 & {}^0P_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

est la matrice de transformation entre le repère de la sonde et le repère de base.

Avec  ${}^0R_6$  matrice d'orientation de l'effecteur, et  ${}^0P_6$  sa matrice de position.

Donc on aboutit aux matrices :

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^0T_1 \text{ Matrice de translation pure suivant l'axe } x_0 \text{ du repère de Base}$$

du robot.

$${}^1T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^1T_2 \text{ Matrice de translation pure suivant l'axe } y_0 \text{ du repère de}$$

Base.

$${}^2T_3 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^2T_3 \text{ Matrice de rotation pure suivant l'axe } z \text{ du repère de}$$

Base.

$${}^3T_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & 0 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & 0 \\ \cos \alpha \sin \theta_2 & \cos \alpha \cos \theta_2 & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha \sin \theta_2 & \sin \alpha \cos \theta_2 & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

${}^3T_4 = \text{Rot}(x, \alpha) \cdot \text{Rot}(z, \theta_2)$  Matrice composée de deux rotations pures par rapport au repère de la base du robot.

$${}^4T_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 & 0 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 & 0 \\ \cos \alpha \sin \theta_3 & \cos \alpha \cos \theta_3 & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha \sin \theta_3 & \sin \alpha \cos \theta_3 & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

${}^4T_5 = \text{Rot}(x, \alpha) \cdot \text{Rot}(z, \theta_3)$  composée de deux rotations pures par rapport au repère de la base du robot.

$${}^5T_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

${}^5T_6$  Matrice de translation pure de la sonde par rapport au repère de base.

Le modèle géométrique direct est obtenu par la multiplication de ces six matrices de transformation et il est donné par :

$${}^0T_6 = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6$$

$${}^0T_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & 0 \\ cas_2 & cac_2 & -sa & 0 \\ sas_2 & sac_2 & ca & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & 0 \\ cas_3 & cac_3 & -sa & 0 \\ sas_3 & sac_3 & ca & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0T_6 = \begin{bmatrix} c_3(c_1c_2 - cas_1s_2) - cas_3(c_1s_2 + cac_2s_1) + s^2as_1s_3 & s^2ac_3s_1 - cac_3(c_1s_2 + cac_2s_1) - s_3(c_1c_2 - cas_1s_2) & sa(c_1s_2 + cas_1(c_2 + 1)) & d_1 + d_3sa(c_1s_2 + cas_1(c_2 + 1)) \\ c_3(c_2s_1 + cac_1s_2) - cas_3(s_1s_2 - cac_1c_2) - s^2ac_1s_3 & -s_3(c_2s_1 + cac_1s_2) - cac_3(s_1s_2 - cac_1c_2) - s^2\alpha^2c_1c_3 & sa(s_1s_2 - cac_1(c_2 + 1)) & d_2 + d_3sa(s_1s_2 - cac_1(c_2 + 1)) \\ sa(c_3s_2 + cas_3(1 + c_2)) & sa(cac_3(1 + c_2) - s_2s_3) & c^2\alpha - s^2ac_2 & d_3(c^2\alpha - s^2ac_2) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Donc le modèle géométrique du robot est donné par :

$$S_x = C_3(C_1C_2 - C\alpha S_1S_2) - C\alpha S_3(C_1S_2 + C\alpha C_2S_1) + S^2\alpha S_1S_3 \quad (18)$$

$$n_x = S^2\alpha S_1C_3 - C\alpha C_3(C_1S_2 + C\alpha C_2S_1) - S_3(C_1C_2 - C\alpha S_1S_2) \quad (19)$$

$$a_x = S\alpha(C_1S_2 + C\alpha C_2S_1) + C\alpha S\alpha S_1 = S\alpha(C_1S_2 + C\alpha S_1(C_2 + 1)) \quad (20)$$

$$P_x = d_1 + d_3a_x = d_1 + d_3S\alpha(C_1S_2 + C\alpha S_1(C_2 + 1)) \quad (21)$$

$$S_y = C_3(S_1C_2 + C\alpha C_1S_2) - C\alpha S_3(S_1S_2 + C\alpha C_2C_1) - S^2\alpha C_1S_3 \quad (22)$$

$$n_y = -S_3(S_1C_2 + C\alpha C_1S_2) - C\alpha C_3(S_1S_2 - C\alpha C_2C_1) - S^2\alpha C_1C_3 \quad (23)$$

$$a_y = S\alpha(S_1S_2 - C\alpha C_2C_1) - C\alpha S\alpha C_1 = S\alpha(S_1S_2 - C\alpha C_1(C_2 + 1)) \quad (24)$$

$$P_y = d_2 + d_3a_y = d_2 + d_3S\alpha(S_1S_2 - C\alpha C_1(C_2 + 1)) \quad (25)$$

$$S_z = S\alpha C_3 S_2 + C\alpha S\alpha(S_3 + C_2 S_3) \quad (26)$$

$$n_z = C\alpha S\alpha(C_3 + C_2 C_3) - S\alpha S_2 S_3 \quad (27)$$

$$a_z = C^2\alpha - S^2\alpha C_2 \quad (28)$$

$$P_z = d_3 a_z = d_3(C^2\alpha - S^2\alpha C_2) \quad (29)$$

### III.6. Modèle géométrique inverse.

Le problème inverse consiste à calculer les coordonnées articulaires correspondants à une situation donnée de l'organe terminal. Lorsqu'elle existe la forme explicite qui donne toutes les solutions possibles (il y a rarement unicité de solution) constitue ce que l'on appelle le modèle géométrique inverse (MGI).

Nous citons ici trois méthodes les plus utilisées pour de calcul du MGI :

- **La méthode de Paul** qui traite séparément chaque cas particuliers et convient pour la plus part des robots.
- **La méthode de Pieper** qui permet de résoudre le problème pour les robots à 6 d.d.l possédant trois articulations rotoïdes d'axes concourants ou trois articulations prismatiques.
- **La méthode générale de Raghavan et Roth** , donnant la solution générale des robots à six articulation à partir d'un polynôme de degré au plus égal à 16.

Lorsqu'il n'est pas possible de trouver une forme explicite du MGI, on peut calculer une solution particulière par des procédures numériques.

Nous exprimons la position de l'effecteur (sonde) dans une situation désirée par la matrice:

$$U_0 = \begin{bmatrix} S_x & n_x & a_x & P_x \\ S_y & n_y & a_y & P_y \\ S_z & n_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

Ou  $s$ ,  $n$ ,  $a$ , sont les cosinus directeurs, et  $P$  les coordonnées du point de l'extrémité de la sonde. Donc on cherche à résoudre le système d'équations suivant:

$$U_0 = {}^0 T_1(q_1) {}^1 T_2(q_2) {}^2 T_3(q_3) {}^3 T_4(q_4) {}^4 T_5(q_5) {}^5 T_6(q_6) \quad (31)$$

Pour trouver les solutions de cette équation on essaye de faire une identification terme à terme des deux membres de l'équation (31) [Paul] .

On aboutit au modèle géométrique inverse qui est déduit en résolvant un système d'équation à 6 inconnues, et il est donnée par :

$$a_z = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cos \theta_2 \quad \text{D'où}$$

$$\cos \theta_2 = (\cos^2 \alpha - a_z) / \sin^2 \alpha$$

$$\frac{-a_x}{a_y} = \frac{-s\alpha(\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \alpha \sin \theta_1 (\cos \theta_2 + 1))}{s\alpha(\sin \theta_1 \sin \theta_2 - \cos \alpha \cos \theta_1 (\cos \theta_2 + 1))}$$

En connaissant  $\theta_2$  on peut directement calculer  $\theta_1$  en fonction de  $a_x$  et de  $a_y$ .

Donc le développement nous donne :

$$\frac{-a_x}{a_y} = -(c\theta_1 s\theta_2 + c\alpha s\theta_1(c\theta_2 + 1)) / (s\theta_1 s\theta_2 - c\alpha c\theta_1(c\theta_2 + 1))$$

Ainsi :

$$\frac{-s_z}{n_z} = \frac{-(\cos \theta_3 \sin \theta_2 + \cos \alpha \sin \theta_3 (\cos \theta_2 + 1))}{(\sin \theta_3 \sin \theta_2 - \cos \alpha \cos \theta_3 (\cos \theta_2 + 1))}$$

En connaissant  $\theta_2$  on peut directement calculer  $\theta_3$  en fonction de  $S_z$  et de  $n_z$

Ensuite on passe au calcul des variables articulaires de la partie position (prismatique) :

On a :

$$P_z = d_3 a_z \Rightarrow d_3 = \frac{P_z}{a_z}$$

$$P_x = d_1 + d_3 a_x \Rightarrow a_x = \frac{P_x - d_3 a_x}{d_3}$$

$$P_y = d_2 + d_3 a_y \Rightarrow a_y = \frac{P_y - d_3 a_y}{d_3}$$

Donc le MGI est globalement donné par :

$$\cos \theta_2 = \frac{\cos^2 \alpha - a_z}{\sin^2 \alpha} \quad (32)$$

$$\frac{-a_x}{a_y} = \operatorname{tg} \left( \theta_1 + \frac{\theta_2}{2 \cos \alpha} \right) \quad (33)$$

$$\frac{-s_z}{n_z} = \operatorname{tg} \left( \theta_3 + \frac{\theta_2}{2 \cos \alpha} \right) \quad (34)$$

$$d_1 = P_x - a_x d_3 \quad (35)$$

$$d_2 = P_y - a_y d_3 \quad (36)$$

$$d_3 = p_z / a_z \quad (37)$$

Un programme fortran à été établi pour le calcul du MGI du robot otelo, et il est donné en annexe 1.

### III.7.Modèle cinématique.

#### III.7.1.Modèle cinématique directe.

Le modèle cinématique est, littéralement, un modèle des vitesses. Il exprime les relations entre les vitesses articulaires de chaque joint et les vitesses cartésiennes d'un point de la chaîne cinématique, généralement l'organe terminal ou (sonde). Ce modèle est donc un modèle par accroissements infinitésimaux : chaque variation élémentaire de la valeur d'une articulation implique une variation de position de l'organe terminal, et inversement. Lorsque ces variations infinitésimales sont exprimées par rapport au temps, on peut les considérer comme des vitesses.

De cette définition, si on note les vitesses articulaires  $\dot{q}$ , et  $\dot{X}$  les vitesses cartésiennes le modèle cinématique peut être résumé par l'obtention de la matrice Jacobienne  $J$  définie par :

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} W_6 \\ V_6 \end{bmatrix} = J(q) \dot{q} \quad (38)$$



$J(q)$  : Désigne la matrice Jacobienne du robot de dimension  $6 \times 6$  fonction de la configuration articulaires  $q$ .

L'intérêt de cette matrice Jacobienne est multiple :

- Elle est la base du modèle différentiel (cinématique) inverse, permettant de calculer une solution locale des variables articulaires  $q$  connaissant les coordonnées opérationnelles  $X$ .
- Elle facilite le calcul des singularités et de la dimension de l'espace opérationnel accessible du robot [27] et [8].
- En statique, on utilise le Jacobien pour établir la relation liant les efforts exercés par l'organe terminal sur l'environnement aux forces et couples des actionneurs.

Dans notre cas le modèle cinématique donne la relation entre les vitesses opérationnelles (sonde) repère 6, exprimé dans le repère galiléen lié au patient  $[W_6 \ V_6]^T$  et les vitesses articulaires. La vitesse de la sonde est telle que :

$W_6$  : représente la vitesse de rotation de la sonde.

$V_6$  : La vitesse de translation du point de l'extrémité de cette sonde.

Les vitesses articulaires sont données par

$$\dot{q} = [\dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2 \ \dot{\theta}_3 \ \dot{d}_1 \ \dot{d}_2 \ \dot{d}_3]^T \quad (39)$$

Dans notre cas nous avons comme variables articulaires:

$$q_1 = d_1, \ q_2 = d_2, \ q_3 = \theta_1, \ q_4 = \theta_2, \ q_5 = \theta_3, \ q_6 = d_3$$

$$W_6 = [Z_3 \ Z_4 \ Z_5 \ 0 \ 0 \ 0] \dot{q} \quad (40)$$

$$V_6 = [Z_3 \times d_3 Z_6 \ Z_4 \times d_3 Z_6 \ Z_5 \times d_3 Z_6 \ Z_1 \ Z_2 \ Z_6] \dot{q} \quad (41)$$

### III.7.2. Calcul de la matrice Jacobienne.

Le calcul de la matrice Jacobienne peut être mené de plusieurs façons comme il a été montré au chapitre II.

Pour notre robot qui à une structure découplable (PPRRRP), le robot peut être divisé en deux parties : la partie de translation et la partie de rotation.

Pour la partie de translation le Jacobien est calculé comme suit :

$$J_{ij} = \frac{\partial P_i}{\partial q_j} \quad \text{avec: } i = 1,2,3 \text{ et } j = 1,\dots,6 \quad (42)$$

On a :

$$P_x = P_1 = d_1 + d_3 a_x = d_1 + d_3 S\alpha(C_1 S_2 + C\alpha C_2 S_1) + C\alpha S\alpha S_1$$

$$P_y = P_2 = d_2 + d_3 a_y = d_2 + d_3 S\alpha(S_1 S_2 - C\alpha C_2 C_1) - C\alpha S\alpha C_1$$

$$P_z = P_3 = d_3 a_z = d_3 C^2\alpha - S^2\alpha C_2$$

Donc le Jacobien de la partie translation est calculé comme suit :

$$J_{41} = \frac{\partial P_x}{\partial \theta_1} = \frac{\partial(d_1 + d_3 S\alpha(C_1 S_2 + C\alpha S_1(C_2 + 1)))}{\partial \theta_1} = -d_3 s\alpha [s\theta_1 s\theta_2 - c\alpha c\theta_1(c\theta_2 + 1)]$$

$$J_{42} = \frac{\partial P_x}{\partial \theta_2} = \frac{\partial(d_1 + d_3 S\alpha(C_1 S_2 + C\alpha S_1(C_2 + 1)))}{\partial \theta_2} = d_3 s\alpha [c\theta_1 c\theta_2 - c\alpha s\theta_1 s\theta_2]$$

$$J_{43} = \frac{\partial P_x}{\partial \theta_3} = \frac{\partial(d_1 + d_3 S\alpha(C_1 S_2 + C\alpha S_1(C_2 + 1)))}{\partial \theta_3} = 0$$

$$J_{44} = \frac{\partial P_x}{\partial d_1} = \frac{\partial(d_1 + d_3 S\alpha(C_1 S_2 + C\alpha S_1(C_2 + 1)))}{\partial d_1} = 1$$

$$J_{45} = \frac{\partial P_x}{\partial d_2} = \frac{\partial(d_1 + d_3 S\alpha(C_1 S_2 + C\alpha S_1(C_2 + 1)))}{\partial d_2} = 0$$

$$J_{46} = \frac{\partial P_x}{\partial d_3} = \frac{\partial(d_1 + d_3 S\alpha(C_1 S_2 + C\alpha S_1(C_2 + 1)))}{\partial d_3} = s\alpha [c\theta_1 s\theta_2 + c\alpha s\theta_1(c\theta_2 + 1)]$$

$$J_{51} = \frac{\partial P_y}{\partial \theta_1} = \frac{\partial(d_2 + d_3 S\alpha(S_1 S_2 - C\alpha C_1(C_2 + 1)))}{\partial \theta_1} = d_3 s\alpha [c\theta_1 s\theta_2 + c\alpha s\theta_1(c\theta_2 + 1)]$$

$$J_{52} = \frac{\partial P_y}{\partial \theta_2} = \frac{\partial(d_2 + d_3 S\alpha(S_1 S_2 - C\alpha C_1(C_2 + 1)))}{\partial \theta_2} = d_3 s\alpha [s\theta_1 c\theta_2 - c\alpha c\theta_1 s\theta_2]$$

$$J_{53} = \frac{\partial P_y}{\partial \theta_3} = \frac{\partial(d_2 + d_3 S\alpha(S_1 S_2 - C\alpha C_1(C_2 + 1)))}{\partial \theta_3} = 0$$

$$J_{54} = \frac{\partial P_y}{\partial d_1} = \frac{\partial(d_2 + d_3 S\alpha(S_1 S_2 - C\alpha C_1(C_2 + 1)))}{\partial d_1} = 0$$

$$J_{55} = \frac{\partial P_y}{\partial d_2} = \frac{\partial(d_2 + d_3 S\alpha(S_1 S_2 - C\alpha C_1(C_2 + 1)))}{\partial d_2} = 1$$

$$J_{56} = \frac{\partial P_y}{\partial d_3} = \frac{\partial(d_2 + d_3 S\alpha(S_1 S_2 - C\alpha C_1(C_2 + 1)))}{\partial d_3} = s\alpha [s\theta_1 s\theta_2 - c\alpha c\theta_1(c\theta_2 + 1)]$$

$$J_{61} = \frac{\partial P_z}{\partial \theta_1} = \frac{\partial(d_3(C^2\alpha - S^2\alpha C_2))}{\partial \theta_1} = 0$$

$$J_{62} = \frac{\partial P_z}{\partial \theta_2} = \frac{\partial(d_3(C^2\alpha - S^2\alpha C_2))}{\partial \theta_2} = d_3 S^2\alpha S\theta_2$$

$$J_{63} = \frac{\partial P_z}{\partial \theta_3} = \frac{\partial(d_3(C^2\alpha - S^2\alpha C_2))}{\partial \theta_3} = 0$$

$$J_{64} = \frac{\partial P_z}{\partial d_1} = \frac{\partial(d_3(C^2\alpha - S^2\alpha C_2))}{\partial d_1} = 0$$

$$J_{65} = \frac{\partial P_z}{\partial d_2} = \frac{\partial(d_3(C^2\alpha - S^2\alpha C_2))}{\partial d_2} = 0$$

$$J_{66} = \frac{\partial P_z}{\partial d_3} = \frac{\partial(d_3(C^2\alpha - S^2\alpha C_2))}{\partial d_3} = C^2\alpha - S^2\alpha C_2$$

$$J_{Translation} = \begin{bmatrix} -d_3 s\alpha [s\theta_1 s\theta_2 - c\alpha c\theta_1 (c\theta_2 + 1)] & d_3 s\alpha [c\theta_1 c\theta_2 - c\alpha s\theta_1 s\theta_2] & 0 & 1 & 0 & s\alpha [c\theta_1 s\theta_2 + c\alpha s\theta_1 (c\theta_2 + 1)] \\ d_3 s\alpha [c\theta_1 s\theta_2 + c\alpha s\theta_1 (c\theta_2 + 1)] & d_3 s\alpha [s\theta_1 c\theta_2 - c\alpha c\theta_1 s\theta_2] & 0 & 0 & 1 & s\alpha [s\theta_1 s\theta_2 - c\alpha c\theta_1 (c\theta_2 + 1)] \\ 0 & d_3 s^2\alpha s\theta_2 & 0 & 0 & 0 & -s^2\alpha c\theta_2 + c^2\alpha \end{bmatrix}$$

La matrice Jacobienne de la partie rotation est calculée de la façon suivante :

$$J_i = [{}^0 z_{i-1}] \quad (43)$$

Donc le Jacobien de rotation est donné par :

$$J_{rotation} = \begin{bmatrix} 0 & s\alpha s_1 & s\alpha [c\theta_1 s\theta_2 + c\alpha s\theta_1 (c\theta_2 + 1)] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s\alpha c_1 & s\alpha [s\theta_1 s\theta_2 - c\alpha c\theta_1 (c\theta_2 + 1)] & 0 & 0 & 0 \\ 1 & c\alpha & -s^2\alpha c\theta_2 + c^2\alpha & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le Jacobien global est :

$$J = \begin{bmatrix} 0 & s\alpha s_1 & s\alpha [c\theta_1 s\theta_2 + c\alpha s\theta_1 (c\theta_2 + 1)] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s\alpha c_1 & s\alpha [s\theta_1 s\theta_2 - c\alpha c\theta_1 (c\theta_2 + 1)] & 0 & 0 & 0 \\ 1 & c\alpha & -s^2\alpha c\theta_2 + c^2\alpha & 0 & 0 & 0 \\ -d_3 s\alpha [s\theta_1 s\theta_2 - c\alpha c\theta_1 (c\theta_2 + 1)] & d_3 s\alpha [c\theta_1 c\theta_2 - c\alpha s\theta_1 s\theta_2] & 0 & 1 & 0 & s\alpha [c\theta_1 s\theta_2 + c\alpha s\theta_1 (c\theta_2 + 1)] \\ d_3 s\alpha [c\theta_1 s\theta_2 + c\alpha s\theta_1 (c\theta_2 + 1)] & d_3 s\alpha [s\theta_1 c\theta_2 - c\alpha c\theta_1 s\theta_2] & 0 & 0 & 1 & s\alpha [s\theta_1 s\theta_2 - c\alpha c\theta_1 (c\theta_2 + 1)] \\ 0 & d_3 s^2\alpha s\theta_2 & 0 & 0 & 0 & -s^2\alpha c\theta_2 + c^2\alpha \end{bmatrix} \quad (44)$$

### III.8.Modèle cinématique inverse.

L'objectif du modèle cinématique inverse est de calculer, à partir d'une configuration  $q$  donnée, les vitesses articulaires  $\dot{q}$  qui assurent au repère terminal (sonde) une vitesse opérationnelle  $\dot{x}$  imposée.

Pour obtenir le modèle cinématique inverse du robot, on inverse le modèle cinématique direct, on aboutit ainsi au :

$$\dot{q} = J^{-1} \begin{bmatrix} w_6 \\ V_6 \end{bmatrix} \quad (45)$$

Et comme notre robot possède six degrés de liberté 3 Rotations et 3 translations, la forme générale du Jacobien est celle décrite par l'équation (46) d'après [9].

$$J = \begin{pmatrix} A & O_3 \\ B & C \end{pmatrix} \quad (46)$$

Avec  $A, B, C$  des matrices de dimensions  $3 \times 3$  et  $O_3$  une matrice nulle de dimensions  $3 \times 3$ .

Donc ces matrices  $A, B, C$  sont extraites de  $J$  et elles sont données par :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & s\alpha s\theta_1 & s\alpha [c\theta_1 s\theta_2 + c\alpha s\theta_1 (c\theta_2 + 1)] \\ 0 & -s\alpha c\theta_1 & s\alpha [s\theta_1 s\theta_2 - c\alpha c\theta_1 (c\theta_2 + 1)] \\ 1 & c\alpha & -s^2\alpha c\theta_2 + c^2\alpha \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -d_3 s\alpha [s\theta_1 s\theta_2 - c\alpha c\theta_1 (c\theta_2 + 1)] & d_3 s\alpha [c\theta_1 c\theta_2 - c\alpha s\theta_1 s\theta_2] & 0 \\ d_3 s\alpha [c\theta_1 s\theta_2 + c\alpha s\theta_1 (c\theta_2 + 1)] & d_3 s\alpha [s\theta_1 c\theta_2 - c\alpha c\theta_1 s\theta_2] & 0 \\ 0 & d_3 s^2\alpha c\theta_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & s\alpha [c\theta_1 s\theta_2 + c\alpha s\theta_1 (c\theta_2 + 1)] \\ 0 & 1 & s\alpha [s\theta_1 s\theta_2 - c\alpha c\theta_1 (c\theta_2 + 1)] \\ 0 & 0 & -s^2\alpha c\theta_2 + c^2\alpha \end{bmatrix}$$

Les matrices  $A$  et  $C$  étant carrées inversibles l'inverse de cette matrice s'écrit:

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0_3 \\ -C^{-1}BA^{-1} & C^{-1} \end{bmatrix} \quad (47)$$

Quand le robot possède six degrés de liberté et une poignet de type rotule, la forme générale de  $J$  est celle de la relation (46). La résolution du problème se ramène donc à l'inversion beaucoup plus simple de deux matrices de dimensions moindre [6].

Ici l'étude et la caractérisation des singularités que présente le Jacobien sont très nécessaires, pour la l'optimisation du paramètre géométrique.

### III.8.1. Espace de travail du robot.

L'espace de travail est l'ensemble des positions et /ou orientations accessibles par l'effecteur. La géométrie de l'espace de travail dépend de la morphologie du robot. Ses frontières sont entièrement définies par les singularités et les butées articulaires. Toutes fois lorsque des obstacles existent dans le champ d'action du mécanisme des frontières supplémentaires apparaissent, définissant des zones inaccessibles pouvant être très importantes [8].

Pour représenter l'espace de travail de notre robot, nous avons deux genres d'espaces :

- Espaces des positions accessibles
- Espaces des orientations accessibles.

Le premier représente l'espace de travail du point de l'extrémité de la sonde, et le deuxième l'espace de travail d'un point de l'axe de la sonde quand toutes les liaisons prismatiques sont fixes. Ici on s'intéresse pour ce deuxième cas. Nous projetons les axes de rotation sur une sphère centrée au point concourant des trois rotoïdes. Nous obtenons une surface plane. Voir figure III.5 et Figure III.5.I

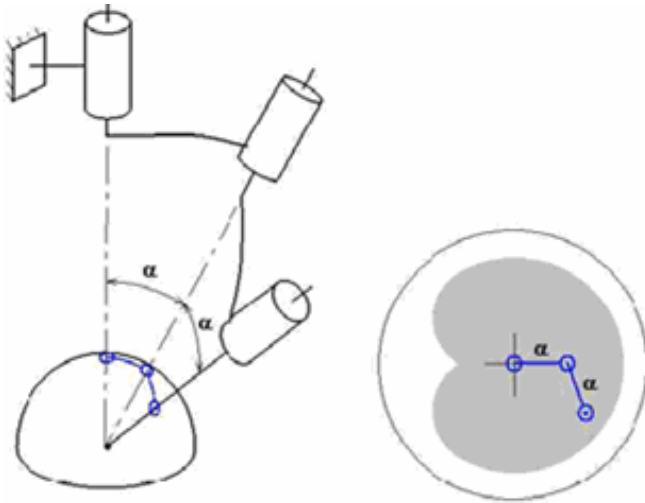


Figure III.5. Espace des orientations accessibles

Du robot [7]

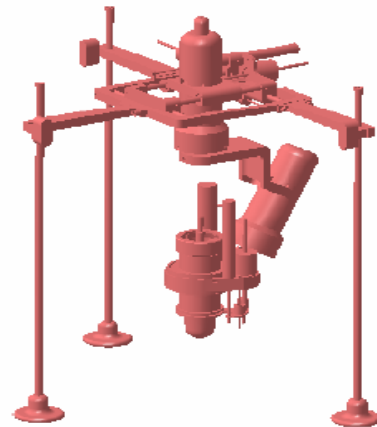


Figure III.5.I. Robot Otelo à 6 d.d.l

## III.9. Etude des singularités

### III.9.1. Redondance.

C'est une situation dans laquelle le nombre de degrés de libertés (NDL) de l'organe terminal est inférieur au nombre d'articulation motorisée.

Avantage :

- Augmentation du domaine accessible
- Déplacement en présence d'obstacles
- Situation d'une structure redondante dans le cas des chaînes ouvertes simples :
- Nombre d'articulations motorisées supérieur à 6;
- Nombre d'articulations rotoïdes d'axes concourants supérieur à 3;
- Nombre d'articulations rotoïdes d'axes parallèles supérieur à 3 ;
- Nombre d'axes d'articulations prismatiques supérieurs à 3 ;
- Nombre d'axes d'articulations prismatiques parallèles égale à 2 ;
- Nombre d'axes d'articulations rotoïdes confondus égale à 2.

### III.9.2. Configurations singulières

Pour tous les robots, qu'ils soient redondants ou non, il se peut que dans certaines configurations dites singulières, ce soit une situation dans laquelle le nombre de degrés

de libertés (NDL) de l'organe terminal est inférieur à la dimension de l'espace opérationnel. C'est une situation de redondance locale.

Exemples :

- Deux axes d'articulations prismatiques se trouvent parallèles;
- Deux axes d'articulations rotoïdes se trouvent confondus

En fonction de la tâche à réaliser, la compatibilité robot/tâche :

(NDL) organe terminal  $\geq$  (NDL) tâche

Les configurations singulières des robots sériels sont des positions particulières dans lesquelles le robots perd sa rigidité naturelle, elles se manifestent par l'apparition de degrés de liberté incontrôlables, partant d'une configuration singulière sous l'effet d'un torseur statique applique a l'effecteur, par exemple, le robot va se déplacer vers une position d'équilibre. Ce mouvement se fait à variable articulaire motorisée constantes donc sans intervention de commande, selon une trajectoire le long de laquelle la matrice Jacobienne est singulière. Mathématiquement les positions singulières peuvent être mises en évidence par l'étude de l'équilibre statique de la structure.

Pour que la structure soit en équilibre, il faut que la matrice Jacobienne inverse soit régulière.

Une méthode possible d'analyse des positions singulières repose donc sur l'étude des conditions de singularité de la matrice **J**. Cette matrice étant connue, il suffit d'étudier son déterminant.

### **III.10.Singularité du robot**

L'objectif final du contrôle du robot pour le suivi du geste médical est de détermine pour chaque position et orientation de la sonde fictive, une configuration correspondante du robot [7].

On est amené ainsi à étudier ces configurations particulières liées à la construction du robot et aux configurations courantes de la sonde du médecin. Pour ces configurations,

le Jacobien présente des singularités qu'il est nécessaire de caractériser et d'optimiser pour la suite.

Pour  $\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$  avec  $\alpha_{\min} > 0$  et  $\alpha_{\max} \leq \pi/2$  le robot a des configurations singulières en deux situations :

a) Les axes des liaisons R1, R2 et R3 sont coplanaires,

$(z_3 \times z_4) \cdot z_5 = 0$  Dans ce cas l'axe de la sonde est

-soit incliné de la normale de la peau de  $2\alpha$ ,  $\theta_2 = k\pi$   $k=0,1,2,\dots$  voir figure (a2)

-soit perpendiculaire à la peau du patient et  $\theta_2 = k\pi$   $k=0,1,2,3,\dots$  voir figure (a1)

b) L'axe de la liaison P3 est parallèle au plan défini par les axes des liaisons P1 et P2,

$(z_1 \times z_2) \cdot z_6 = 0$  Dans ce cas :  $\cos\theta_2 = 1/\text{tg}^2\alpha$  voir figure (a3). On remarque que pour  $\alpha < \pi/4$  cette équation n'a pas de solution.

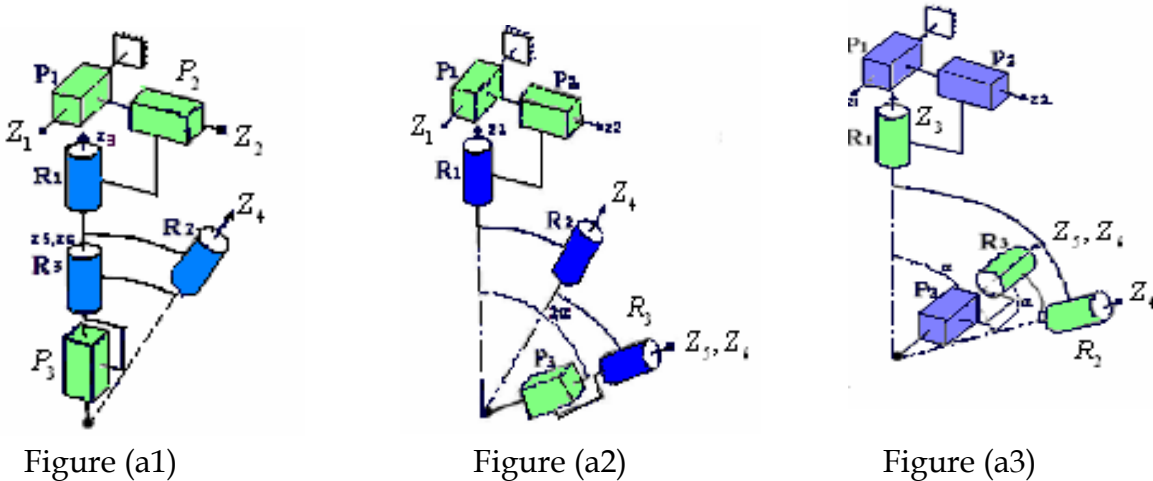


Figure III.6 Configurations singulières du robot

Cette configuration singulière figure. (a3) peut être évitée en choisissant pour  $\alpha_{\max}$  une valeur inférieure à  $45^\circ$ . Cette singularité sera traitée dans le chapitre IV.

Par contre les deux configurations singulières figure. (a1) et figure. (a2) ne sont pas facilement évitables, surtout que le médecin met la sonde pendant l'examen près de la normale à la peau.



### III.11. Stratégie de résolution au voisinage des singularités et butées.

Concernant les deux singularités figure. (a1) et figure. (a2), en pratique le robot Otelo doit avoir des butées articulaires (mécaniques) sur les axes 3,4,5.

On considère que les positions d'origine des différents axes correspondent à celle données par les figures a1 et a2. Dans ce cas pour l'axe de R1 on doit avoir des butées à des distances de  $\pm b_1=2$  à 3 radians et pour l'axe R2 les butées sont à  $\pm b_2=2$  à 3 rads. Pour l'axe R3 une butée est à  $\pm b_3=\pm \pi$ .

On a vu que les positions singulières qui annulent le déterminant de la Jacobienne sont pour  $\theta_2 = k\pi$ . La singularité  $\theta_2 = 0$  étant la plus contraignante puisque  $\theta_2 = \pi$  ne peut jamais être atteint du fait des butées articulaires mécaniques.

Pour obtenir l'orientation désirée, le modèle géométrique inverse nous permet d'obtenir les consignes articulaires, ainsi disposant d'un MGI l'ordinateur peut calculer rapidement et avec précision les positions articulaires désirées.

### III.12. Conclusion

Dans ce chapitre on a exposé les modèles géométriques et cinématiques directes et inverses ainsi que la façon de déterminer les singularités du mécanisme.

La caractérisation des positions singulières nécessite obligatoirement une optimisation du paramètre géométrique, afin de permettre au médecin un bon suivi de l'acte d'échographie

---

**CHAPITRE IV**  
**OPTIMISATION DU PARAMETRE**  
**GEOMETRIQUE DU ROBOT**

---

## IV.OPTIMISATION

### IV .1.Manipulabilité

Elle caractérise l'habilité du manipulateur de changer la position et l'orientation de son organe terminal. Elle est nulle pour une posture singulière .D'ou l'idée de Yoshikawa [11] de dire que la meilleur posture est globalement celle qui est la plus éloignée des postures singulières. Donc il est appréciable de la maximiser pour un emplacement donné du robot dans le site de travail. La manipulabilité est l'un des critères les plus utilisés pour évaluer la performance cinématique du robot. Elle est utilisée dans diverses applications: lors de la conception des mécanismes, la planification des trajectoires, ou la commande des systèmes mécaniques [17].

#### IV.1.2.Mesures de manipulabilité

Une des mesures de manipulabilité la plus courante, dérivée de l'ellipsoïde de manipulabilité, est :

$$W_B = \sqrt{J_B(q_B) \cdot J_B^T(q_B)} \quad (48)$$

qui s'écrit en fonction des valeurs singulières de  $J_B$  sous la forme :

$$W_B = \sigma_{B1} \cdot \sigma_{B2} \cdots \sigma_{BmB} \quad (49)$$

Cette mesure est proportionnelle au volume de l'ellipsoïde donnée par :

$$C_{mB} W_B \quad (50)$$

Avec :  $C_{mB}$  est une constante.

Dans le cas des manipulateurs non redondants [9] l'expression de la mesure de manipulabilité  $W_B$  se réduit à :

$$W_B = |J(q_B)| \quad (51)$$

Dans la littérature, plusieurs autres indices de manipulabilité cinématique ont été tirés du concept de l'ellipsoïde de manipulabilité [18], [19], [20], parmi lesquels on cite

$$W_{B2} = \frac{\sigma_{Bm_B}}{\sigma_{B1}} \in [0,1] \quad (52)$$

qui exprime le rapport entre les longueurs du demi-petit axe et demi-grand axe de l'ellipsoïde.

Yoshikawa [11] rappelle qu'il s'agit du nombre de conditionnement de la matrice Jacobienne et Salisbury [21] dit que c'est un indice numérique intéressant pour évaluer la distance aux singularités.

Deux autres indices ont été définis par [11]. Le premier se résume à la plus faible valeur singulière de la matrice  $B$  ( $J$ ), il s'écrit sous la forme suivante :

$$W_{B3} = \sigma_{Bm_B} \quad (53)$$

Le second est une mesure quantitative qui est en fonction de  $W_B$ . Elle est donnée par la formule suivante :

$$W_{B4} = (\sigma_{B1}\sigma_{B2}\dots\sigma_{Bm_B})^{1/m_B} = (W_B)^{1/m_B} \quad (54)$$

Bayle [20] a défini une nouvelle mesure de manipulabilité en généralisant la notion d'excentricité d'une ellipse. Cette mesure est donnée par :

$$W_{B5} = \sqrt{1 - \frac{\sigma_{Bm_B}^2}{\sigma_{B1}^2}} \in [0,1] \quad (56)$$

Cette grandeur donne des indications sur la forme de l'ellipsoïde de manipulabilité. Dans le cas où la tâche opérationnelle est de dimension 2,  $W_{B5}$  qui tend vers 0 signifie que l'ellipse tend vers un cercle. l'OT peut se déplacer sans direction préférentielle. Au contraire,  $W_{B5}$  qui tend vers 1, signifie que l'ellipse tend à s'aplatir. l'OT possède des directions préférentielles pour son déplacement (répartition des vitesses généralisées non isotrope) [28].

**Remarque :** Parmi les indices présentés ci-dessus, les plus couramment utilisés sont :  $W_B$ ,  $W_{B2}$  et  $W_{B5}$ . L'indice  $W_B$  donne des informations quantitatives sur l'ellipsoïde de manipulabilité alors que les deux autres indices ( $W_{B2}$  et  $W_{B5}$ ) fournissent le même type

d'informations qualitatives sur la forme de l'ellipsoïde de manipulabilité. Les indices  $W_{B_5}$  et  $W_{B_2}$  évoluent inversement.

### IV.1.3 Application de la manipulabilité des robots manipulateurs.

Une des applications principales de la manipulabilité est l'analyse de la cinématique des mécanismes. Pour illustrer les différentes notions décrites ci-dessus, nous considérons le bras manipulateur plan à deux liaisons rotoïdes, donné sur la figure IV.1.

Cet exemple est choisi par rapport à sa simplicité et au grand nombre travaux qui l'utilisent.

On le trouve dans presque tous les livres de robotique [9], [24].

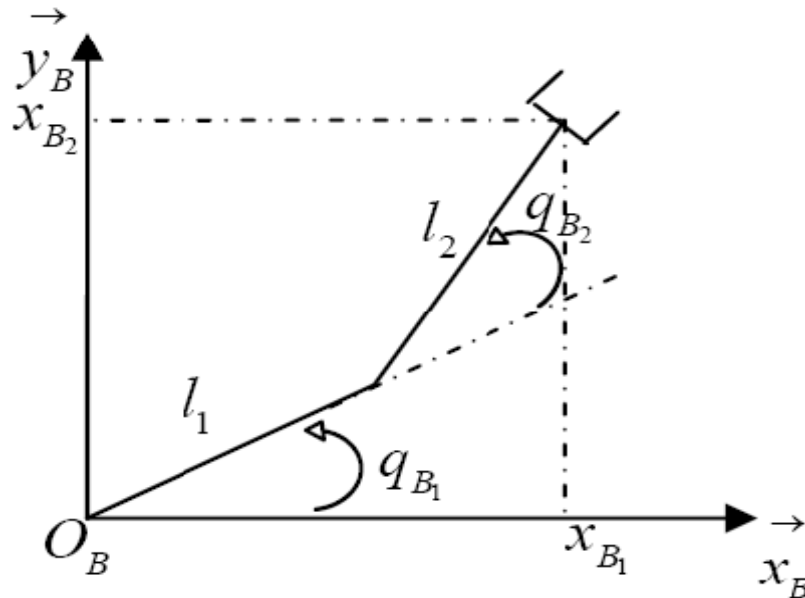


Figure IV.1 Robot manipulateur plan à deux liaisons rotoïdes.

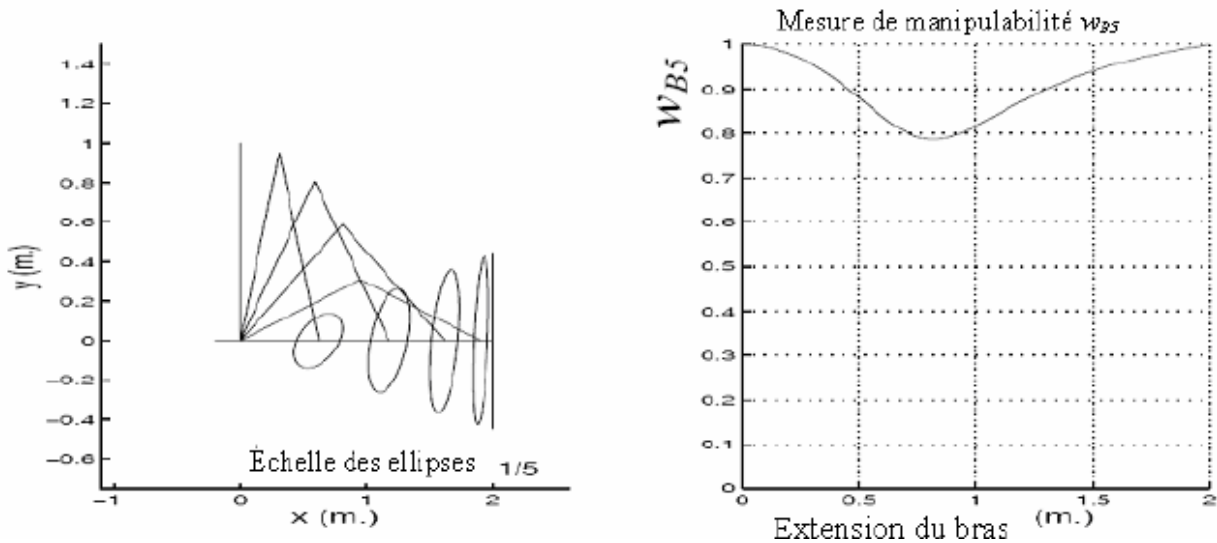
La configuration du bras manipulateur plan est donnée par les angles de rotation  $q_{B_1}$  et  $q_{B_2}$  des deux liaisons. Si l'on considère uniquement la position de l'organe terminal, donnée par :

$$\begin{cases} x_{B_1} = l_1 C_1 + l_2 C_{12} \\ x_{B_2} = l_1 S_1 + l_2 S_{12} \end{cases} \text{ La matrice Jacobienne du bras est donc :}$$

$$J_B(q_B) = \begin{bmatrix} -(l_1 S_1 + l_2 S_{12}) & -l_2 S_{12} \\ l_1 C_1 + l_2 C_{12} & l_2 C_{12} \end{bmatrix}$$

On examine l'évolution de la manipulabilité quand la position de l'OT suit une ligne droite depuis une configuration étendue  $q_{B1} = q_{B2} = 0$  en radian à une configuration repliée ( $q_{B1} = \pi/2$  et  $q_{B2} = -\pi$  en radian exemple de Yoshikawa [11] repris par Bayle [20]).

La figure IV.2 montre respectivement les ellipses de manipulabilité et l'évolution de la mesure  $W_{B5}$ , en fonction de l'extension du bras. [28]



**Figure IV.2.** Ellipses et mesure de manipulabilité d'un bras plan (tirée de [20])

La mesure  $W_{B5}$  affichée donne des renseignements sur la forme des ellipses de manipulabilité.

Elle est égale à 1 lorsque l'ellipse est dégénérée (plate), ce qui correspond à une configuration singulière, et tend vers 0 lorsque la forme de l'ellipse se rapproche d'un cercle. La mesure de manipulabilité  $W_B$  du mécanisme vaut  $W_B = |(J(q_B))| = l_1 l_2 s_2$ , elle s'annule si et seulement si  $q_{B_2} = 0$  ou  $\pi$  (bras étendu ou replié).  $W_B$  est maximale pour toutes les configurations telles que  $q_{B_2} = \pi/2$ . Yoshikawa [11] appelle ces configurations « configurations optimales ».

## IV.2. Manipulabilité du robot Otelo.

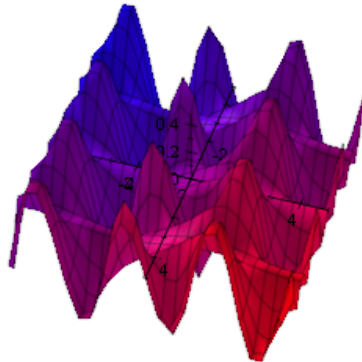
Pour le robot Otelo étudié, l'expression de la mesure de manipulabilité  $W_B$  se réduit au calcul du déterminant de sa matrice Jacobienne, et elle est donné par :

$$W_B = |J(q_B)|$$

Pour ce genre de robots découplables [9]. On a :

$$\det(J(q_B)) = \det(A)\det(C) = |\sin^2 \alpha (-\sin^2 \alpha \cos \theta_2 + \cos^2 \alpha) \sin \theta_2|$$

L'allure de cette fonction en 3.D est donnée par la courbe figure IV.3.



**Figure. IV.3** Allure de la courbe de manipulabilité en 3.D [29].

L'indice de performance tel qu'il est défini dépend de la variable  $\theta_2$  et de l'angle  $\alpha$  à déterminer. Pour avoir un indice performant on doit maximiser la fonction  $W_B$  sous des contraintes :

$\alpha \leq \pi/4$  Pour éviter plus de configurations singulières.

$\alpha \geq \pi/8$  Pour obtenir une inclinaison de la sonde de  $\pi/4$  au minimum. (Cahier de charge des experts médicaux) [7] avec un contournement des configurations de la sonde de :  $\theta_2 \in [0 \ 2\pi]$ .

## IV.3. OPTIMISATION

### IV.3.1 Formulation d'un problème d'optimisation

La formulation d'un problème d'optimisation comporte toujours trois étapes :

- choix des variables du modèle,
- formulation de l'objectif,
- formulation des contraintes.

## 1. Choix des variables

**Définition IV.1** On appelle **variable** toute quantité utile à la résolution du problème dont le modèle doit déterminer la valeur [14].

Cette définition permet de différencier les variables des paramètres, qui sont des données qui peuvent varier, par exemple d'une période à l'autre.

## 2. Expression de l'objectif

**Définition IV.2.** On appelle **fonction objective** d'un problème d'optimisation le critère de choix entre les diverses solutions possibles [14].

## 3. Expression des contraintes

**Définition IV.3.** On appelle **contraintes du problème** toutes les relations limitant le choix des valeurs possibles des variables [14]. Ces relations peuvent être de simples bornes sur les variables.

### IV.3.2.. Formulation mathématique du problème d'optimisation

Un programme mathématique est un problème d'optimisation sous contraintes dans  $\mathbb{R}^n$  de la forme [16]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{minimiser } f(x); f \in \mathbb{R} \\ \text{sous les contraintes} \\ g_i(x) = 0 \quad (i=1, \dots, n) \\ h_j(x) \leq 0 \quad (j=1, \dots, m) \end{array} \right. \quad (58)$$

Où le vecteur  $x \in \mathbb{R}^n$  a pour composantes  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  qui sont les inconnues (les variables) du problème.

$f(x)$  La fonction objectif.

$g_i(x) = 0 \quad (i=1, \dots, n)$  : L'ensemble des contraintes d'égalité du problème.

$h_j(x) \leq 0 \quad (j=1, \dots, m)$  : L'ensemble des contraintes d'inégalité du problème.

### IV.4. Différence entre la programmation linéaire et non linéaire



Dans le cas de la programmation linéaire, la solution optimale pouvait toujours être déterminée en un sommet de la région réalisable. Dans la programmation non linéaire cette propriété est perdue : on peut avoir une solution optimale non extrémale ou encore une solution intérieure. On peut avoir un optimum local différent de l'optimum global. Ce problème ne se produit cependant pas pour les problèmes convexes.

#### IV.5. Les minimums locaux et globaux.

En première remarque, maximiser une fonction  $f$  revient à minimiser la fonction  $-f$ . On considère donc le problème de minimisation d'une fonction à un où plusieurs variables.

**Définition**  $x^*$  est un minimum local  $\Leftrightarrow \begin{cases} \exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } f(x) - f(x^*) \geq 0 \\ \forall x \neq x^* \text{ tel que } \|x - x^*\| < \varepsilon \end{cases}$

**Définition**  $x^*$  est un minimum globale  $\Leftrightarrow f(x) - f(x^*) \geq 0 \forall x \neq x^*$

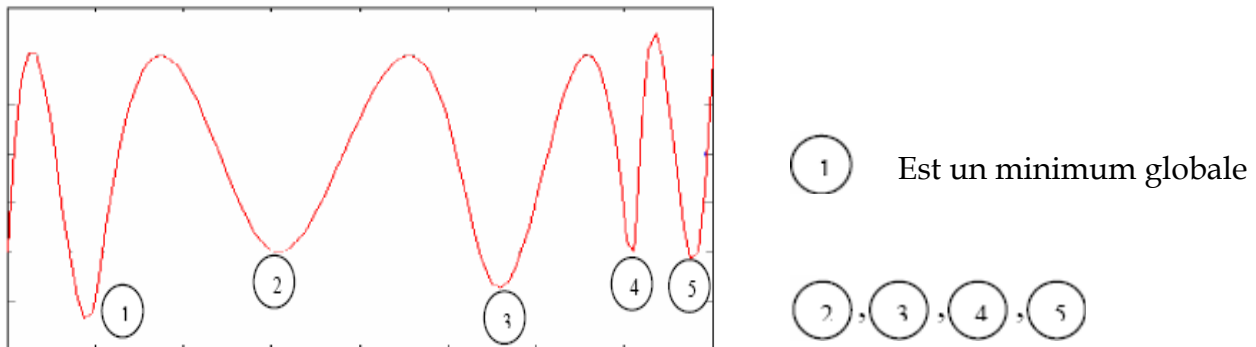


Figure IV.4 le minimum local et le minimum global [14]. Des minimums locaux

#### IV.6. Convergence des méthodes d'Optimisation

Nous ne pouvons pas nous attendre à ce qu'un problème non linéaire soit résolu de façon exacte en nombre fini d'étapes ; tout ce que nous pouvons espérer est que la suite d'itérations  $\{x_t\}$  produite par la méthode en question converge vers l'ensemble de solution du problème quand  $t \rightarrow \infty$ . Dans la théorie d'optimisation numérique, la convergence d'une méthode d'optimisation sur certaine famille des problèmes est exactement ce qui donne le droit à la méthode d'être qualifiée comme un outil pour résoudre des problèmes de la famille [15].

## IV.7.Méthodes d'optimisation non linéaires

### IV.7.1 Méthodes d'optimisation sans contraintes

Elles sont appelées méthodes d'optimisation directes, et elles permettent de résoudre des problèmes d'optimisation sans contraintes sous la forme :

Minimiser  $f(x)$  avec  $x \in \mathbb{R}^n$

### IV.7.2 Méthodes d'optimisation avec contraintes

En premier lieu on remarque que toute contrainte sous forme d'égalité peut être exprimée de manière équivalente par deux inégalités :

$g_i(x) = 0$  Peut être écrite sous la forme : 
$$\begin{aligned} g_i(x) &\leq 0 \\ -g_i(x) &\leq 0 \end{aligned}$$

#### IV.7.2.1 La programmation quadratique séquentielle (SQP)

La programmation quadratique séquentielle (SQP) est utilisée pour la résolution des problèmes généraux d'optimisation non linéaire avec contraintes. Les problèmes à résoudre avec cette méthode sont de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \\ \text{sous } g_i(x) = 0, \quad i=1, \dots, n \\ \quad h_j(x) \geq 0 \quad j=n+1, \dots, m \\ \quad x^{\text{inf}} \leq x \leq x^{\text{sup}} \end{array} \right. \quad (59)$$

Où toutes les fonctions du problème sont continues différentiables.

La méthode, basée sur la formulation itérative pour établir une direction de recherche, et la solution de sous problème de la programmation quadratique, on obtient le sous problème en utilisant une approximation quadratique du Lagrangien et par linéarisation des contraintes [17].

Alors on peut écrire le sous problème de la SQP sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{d \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} d^T H_k d + \nabla f(x_k)^T d \\ \text{sous } \nabla g_i(x_k)^T d + g_i(x_k) = 0, \quad i=1, \dots, n \\ \quad \nabla h_j(x_k)^T d + h_j(x_k) \geq 0 \quad j=n+1, \dots, m \\ \quad x^{\text{inf}} - x_k \leq d \leq x^{\text{sup}} - x_k \end{array} \right. \quad (60)$$

Où  $H_k$  est une approximation de l'Hessien définie positive. On utilise la recherche linéaire pour trouver le nouveau point itéré :  $x_{k+1}$

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k, \quad \alpha_k \in ]0, 1]$$

Avec  $\alpha_k$  est le pas de descente le long de la direction.

$d_k$  Direction de descente.

Telle qu'une "fonction modale" aura une valeur de la fonction inférieure au nouveau point. Ici, la fonction Lagrange est utilisée comme une fonction modale. Lorsque l'optimalité n'est pas accompli,  $H_k$  est mis à jour d'après la formule BFGS.

**Les avantages :** avec la programmation quadratique on peut résoudre tous les types de l'optimisation non linéaire avec contraintes (quadratique ou non quadratique), et quelque soit le type de contraintes (contraintes d'égalité ou contraintes d'inégalité) [25]. Elle est bien expliquée dans l'annexe 2

C'est cette méthode que nous allons utiliser pour maximiser la fonction de manipulabilité, nous rappelons qu'elle est implémentée automatiquement sur le logiciel MAPLE.

## IV.8 Optimisation du paramètre géométrique

Le but de cette étude est de déterminer la valeur optimale du paramètre géométrique  $\alpha$  (angle d'inclinaison caractéristique du robot) pour améliorer la performance cinématique de ce robot à proximité des configurations singulières et donc de suivre au mieux le geste de l'expert médical avec la sonde dans une position normale à la peau. Ce choix de paramètre optimum nous permettra, pour un déplacement donné au voisinage

du point singulier, de minimiser les déplacements dans l'espace articulaire ; ainsi on augmentera la stabilité dans le positionnement de la sonde.

Dans le cas de notre robot, l'expression de la mesure de manipulabilité se réduit à:

$$W_B = |(J(q_B))| = |\sin^2 \alpha (-\sin^2 \alpha \cos \theta_2 + \cos^2 \alpha) \sin \theta_2| \quad (61)$$

L'indice de performance tel qu'il est défini dépend de la variable  $\theta_2$  et de l'angle  $\alpha$  à déterminer. Pour avoir un indice performant on doit maximiser la fonction de la manipulabilité  $W_B$  sous des contraintes :

$\alpha \leq \pi/4$  Pour éviter plus de configurations singulières.

$\alpha \geq \pi/8$  Pour obtenir une inclinaison de la sonde de  $\pi/4$  au minimum. (Cahier de charge des experts médicaux) avec un contournement des configurations de la sonde de :

- 1) Si  $\theta_2 \in [0 \ 2\pi]$ .
- 2) Si  $\theta_2 \in [0 \ \pi]$

On traitera les deux cas de ce contournement de la sonde et on fera une comparaison des deux valeurs de l'angle qu'on trouvera.

**1er cas :** le problème qu'on veut résoudre est sous la forme :

$$\begin{cases} \text{Max } W(\alpha, \theta_2) \\ \text{sous } \alpha \in [\pi/8 \ \pi/4] \\ \theta_2 \in [0 \ 2\pi] \end{cases} \quad \text{Où } W \text{ est la fonction de manipulabilité à maximiser.}$$

#### IV.9. 1<sup>er</sup> Résultat

La méthode de programmation séquentielle quadratique est choisie ici pour l'optimisation.

Nous obtenons un angle d'inclinaison  $\alpha$  de  $44.9^\circ$  pour un contournement de  $\theta_2 = 2\pi/3$  avec l'utilisation de l'outil d'optimisation du logiciel Maple 10. Voir figure IV.5.

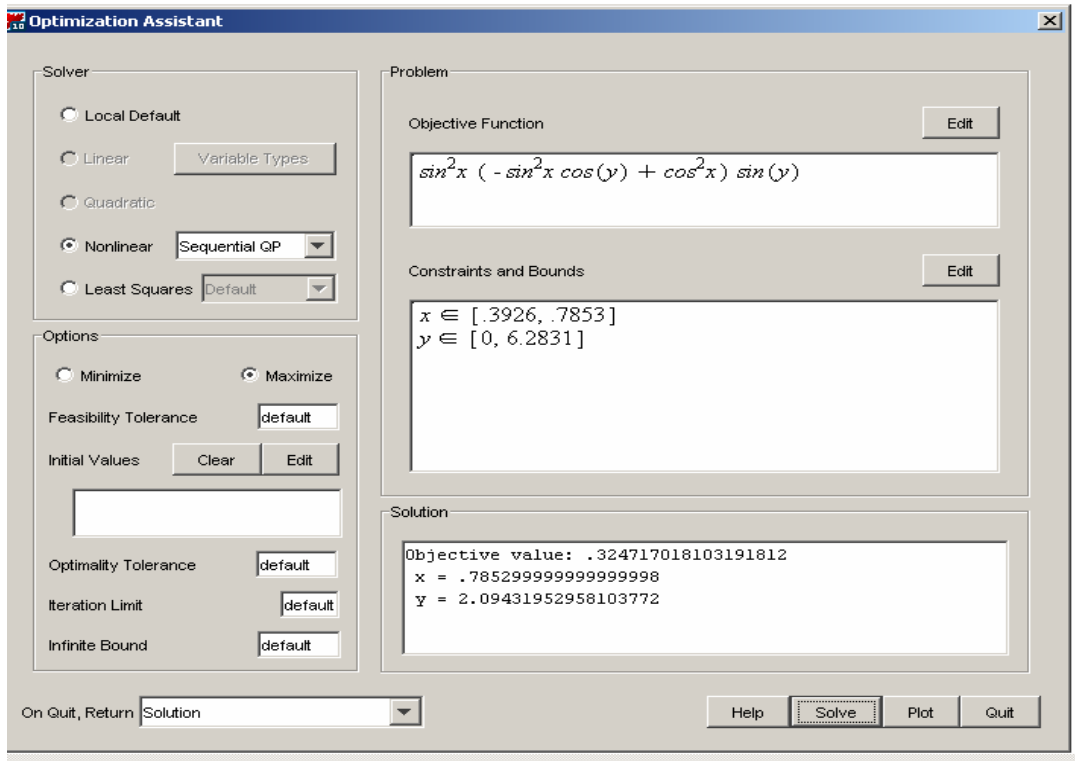


Figure IV.5. 1<sup>er</sup> cas Résultat d'optimisation sur logiciel Maple10 [29].

Les valeurs obtenues sont en radians, avec :

$$x = \alpha \text{ et } y = \theta_2$$

Nous remarquons que la valeur de la manipulabilité maximale est de 0,324 pour un angle d'inclinaison  $\alpha$  de  $44.9^\circ$  et une rotation de la sonde de  $\theta_2 = 2\pi/3$ . voir figure.VI.6

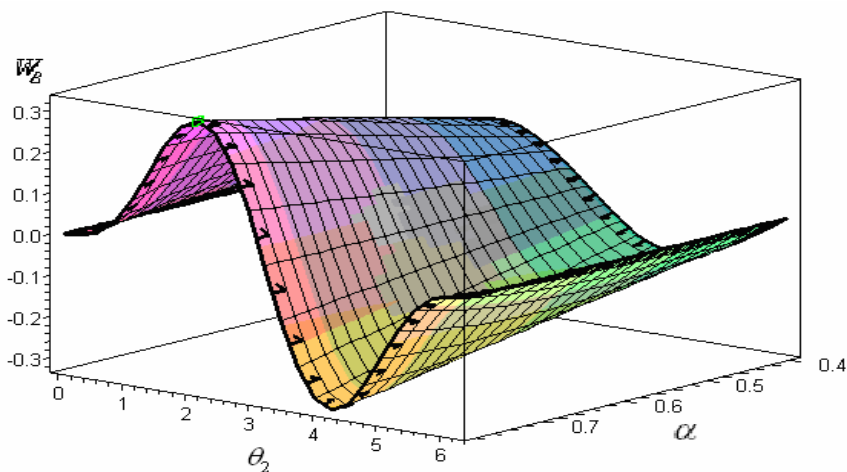


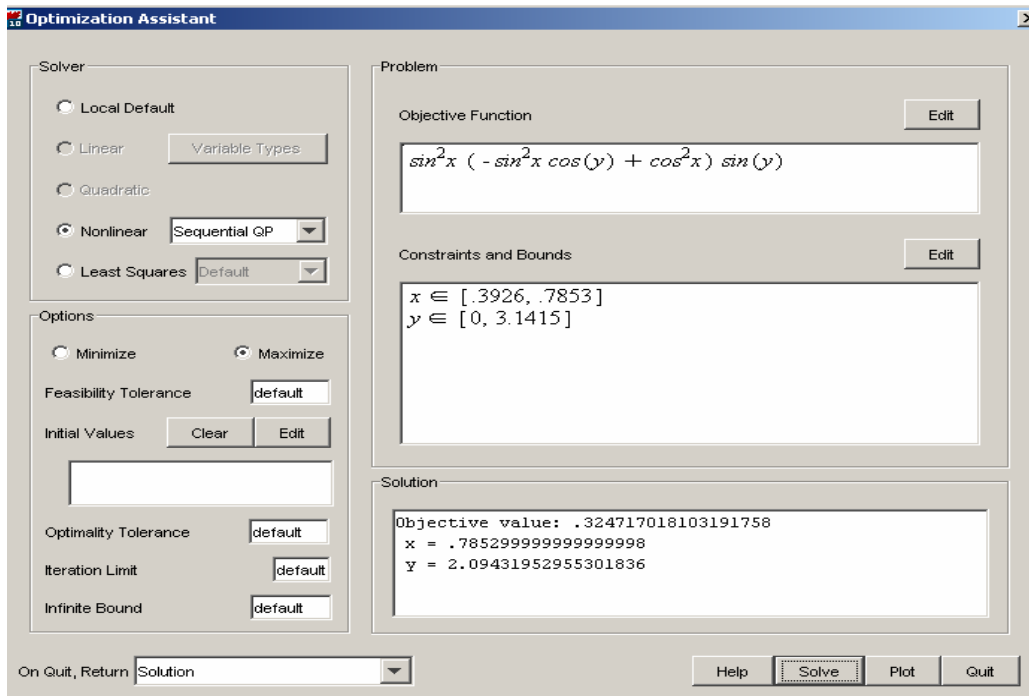
Figure.IV.6 Courbe de mesure de manipulabilité du robot [29].

**2 eme cas :** le problème qu'on veut résoudre est sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max } W(\alpha, \theta_2) \\ \text{sous } \alpha \in [\pi/8 \ \pi/4] \\ \theta_2 \in [0 \ \pi] \end{array} \right. \quad (62)$$

#### IV.10 2eme Résultat

Toujours la méthode de programmation séquentielle quadratique est choisie ici pour l'optimisation. Nous obtenons un angle d'inclinaison  $\alpha$  de  $44.9^\circ$  pour un contournement de  $\theta_2 = 2\pi/3$  avec l'utilisation de l'outil d'optimisation du logiciel Maple10. Voir figure. IV.7

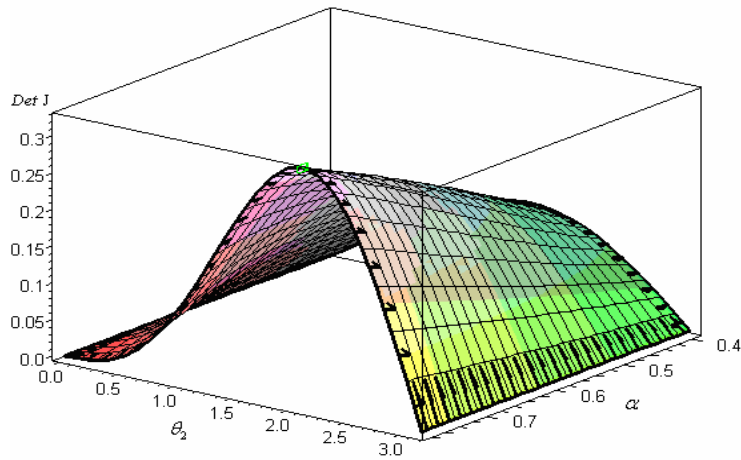


**Figure. IV.7** 2° Cas Résultats d'optimisation sur logiciel Maple 10

Les valeurs obtenues sont en radians, avec :

$$x = \alpha \text{ et } y = \theta_2$$

Nous remarquons que la valeur de la manipulabilité maximale est de 0,324 pour un angle d'inclinaison  $\alpha$  de 44.9 et une rotation de la sonde de  $\theta_2 = 2\pi/3$ . voir figure.

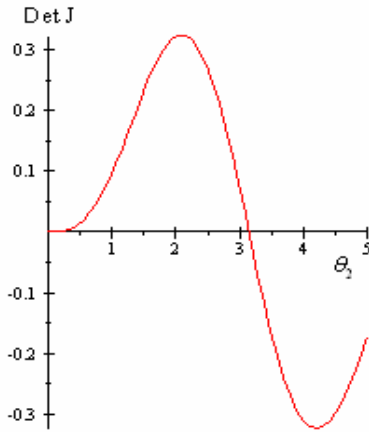


**Figure IV.8** Courbe de mesure de manipulabilité du robot.

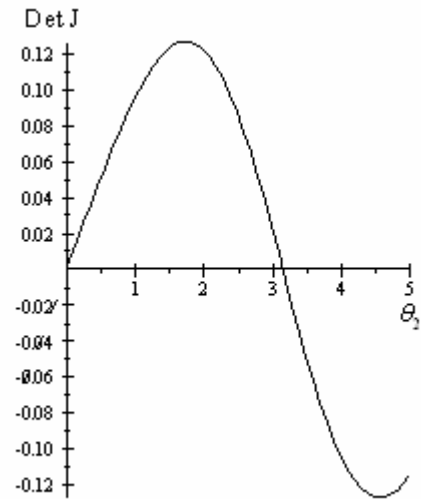
Nous remarquons que les résultats d'optimisation sont les mêmes pour les deux cas.

La figure IV.9 montre la variation de la fonction de la manipulabilité en fonction de la valeur de l'angle  $\theta_2$  pour différentes valeurs de  $\alpha$

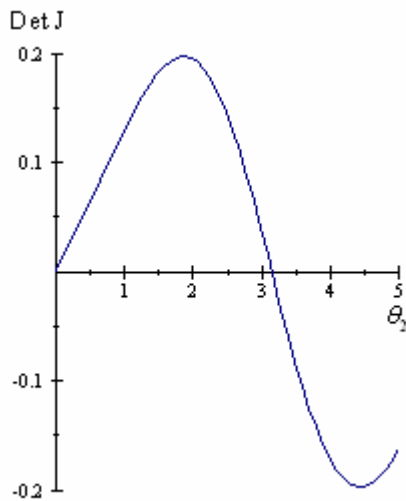
$$\alpha = \pi/4$$



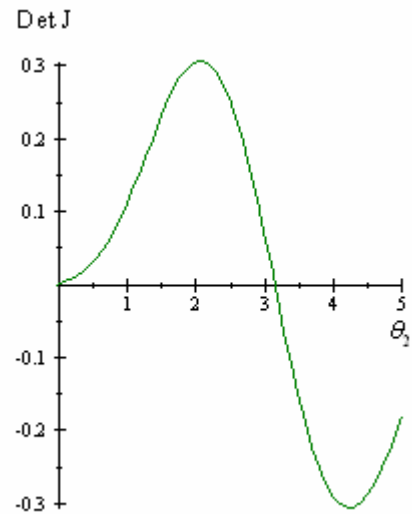
$$\alpha = \pi/8$$



$$\alpha = \pi/6$$



$$\alpha = 42.7^\circ$$



**Figure. IV.9** variation de la manipulabilité en fonction de l'angle  $\theta_2$  pour différentes valeurs de l'angle  $\alpha$ .



### IV.11 Interprétation.

Nous remarquons que le déterminant de la Jacobienne qui exprime la manipulabilité est compris entre deux valeurs maximales  $[-0.4, 0.4]$ .

La **manipulabilité** pour une valeur de  $\alpha$  de  $\pi/8$  admet une valeur maximale inférieure à 0.2 avec un contournement inférieur à  $2\pi/3$ .

La **manipulabilité** pour une valeur de  $\alpha$  de  $\pi/6$  admet une valeur maximale supérieure à 0.2 avec un contournement inférieur à  $2\pi/3$ .

La **manipulabilité** pour une valeur de  $\alpha$  de  $42.7^\circ$  admet une valeur maximale supérieure à 0.3 avec contournement inférieur à  $2\pi/3$ .

La **manipulabilité** pour une valeur de  $\alpha$  de  $\pi/4$  ( $44.9^\circ$ ) admet une valeur maximale 0.324 pour un contournement de  $2\pi/3$ .

### IV.12. Conclusion

Nous pouvons conclure que la manipulabilité cinématique du robot est maximale pour une valeur de  $\alpha = 44.9^\circ$  et un contournement de la sonde de  $2\pi/3$ .

Cette valeur optimale de construction du robot permet de minimiser les effets de la singularité sur l'ensemble des configurations du mécanisme, et par conséquent elle facilite au médecin de mieux suivre son acte d'échographie à distance.

---

## V. Conclusion générale.

Les travaux présentés dans ce mémoire avaient pour but de mener une modélisation dans la phase de conception, d'un robot à 6.d.d.l dédié à la télé-échographie ultrasonore.

L'usage de ce manipulateur porte sonde représente une certaine source de suivi médicale pour les personnes en sites éloignés. Un mécanisme robotisé portant une sonde offre des possibilités accrues pour la télé-échographie à distance. Malgré son intérêt il présente un certain nombre d'inconvénient dus à la complexité de sa modélisation et de sa commande. L'objectif de ce mémoire était d'apporter une contribution dans l'optimisation de son angle d'inclinaison, et cela tout en tenant compte de minimiser les effets de singularités sur les configurations du robot, en vue de mieux faciliter la tâche d'échographie au médecin expert.

L'optimisation du paramètre d'inclinaison nécessitait les modèles géométriques et cinématiques du mécanisme. Il a fallu établir ces modèles pour déterminer l'expression de la manipulabilité cinématique, nécessaire pour l'optimisation.

Un programme en langage Fortran a été développé pour le calcul du MGI. L'étude des singularités du robot nécessitait obligatoirement une optimisation et une stratégie de commande au voisinage des butées articulaires. La méthode SQP implémenté sur le logiciel Maple 10 pour l'optimisation a été choisie à base de :

- Sa capacité de résoudre des problèmes non linéaires avec plusieurs variables.
- Sa capacité de résoudre des problèmes non linéaires avec différentes contraintes (d'égalités et d'inégalités).
- Sa vitesse de convergence.

Les résultats obtenus dans ce mémoire s'avèrent optimaux et minimisent les effets de la singularité sur l'ensemble des configurations du mécanisme, pour mieux faciliter la tâche d'échographie. Enfin je peux dire que ce travail m'a permis de mieux connaître de près l'intérêt de la modélisation en phase de conception pour préparer la phase ultime de suivi à distance du robot.

- l'optimisation dans le domaine de la robotique.
- La programmation en fortran.

**VI References bibliographiques:**

- [1] D. de Cunha, P.Gravez,, C.Leroy,E. Maillard, J.Jouan. P.Varley, "The MIDSTEP ,system for ultrasound guided remote telesurgery",in20th annual intelligent conference, IEEE Engineering in Medicine and biology society,1998,pp.1266-1269.
- [2] G.Kontaxakis, S.Walter, G.Sakas, E.UteleInViVo: "an intergrated portable telemedicine workstation, featuring acquisition, processing and transmission over low-bandwidth lines of 3D ultrasound volume images",in Proceedings of IEEE EMBS ITAB 2000 Arlington, VA,November 2000,pp 158-163.
- [3] G.A.Triantafyllidis,N.Thomas,C.Canero,P. Vieyres, M.G.Strintzis,"A user interface for mobile robotized tele-echography", Nuclear instruments and methods in physics research A 569(2006)645-648 ELSEVIER, 2006.
- [4] N. Smith-Guérin<sup>1</sup>, L. Al Bassit<sup>1</sup>, G. Poisson<sup>1</sup>, C. Delgorge<sup>1</sup>, Ph. Arbeille<sup>2</sup>, P. Vieyres, << Clinical validation of a mobile patient-expert tele-echography system using ISDN lines >>, in proceedings of the fourth Annual IEEE/EMBS ITAB'03,2003.
- [5] Site Internet du projet Otelo : <http://www.bourges.univ-orleans.fr/Otelo>.
- [6] Gorla B., Renaud M., « Modèles des robots manipulateurs : application a leurs commandes », Cepadues Edition Toulouse 1984.
- [7] L. ALBassit , G.Poisson, P.Vieyres,"Kinematics of a dedicated 6 DOF robot for tele-echography",in:11<sup>th</sup> international conference on advanced robotics, ICAR,2003 .
- [8] Wenger P « Aptitude d'un robot manipulateur à parcourir son espace de travail en présence d'obstacles ». Thèse de doctorat, ENSM. Nantes, sept.1989.
- [9] Khalil Wisama et Etienne Dombre « Modélisation identification et commande des robots ». 2<sup>o</sup>édition revue et augmentée.1999
- [10] Angeles, "Fundamentals of Robotic Mechanical Systems: Theory, Methods and Algorithms" Second Edition, Springer, 2002
- [11] T.Yoshikawa "Manipulability of robotic mechanisms". International journal of robotics: reaserch, vol 4, 1985

- [12] J. Suomela. " Tele-presence aided tele-operation of semi-autonomous work vehicles". Rapport de recherche, Helsinki University of Technology, Department of Automation and Systems Technology, Automation Technology Laboratory, pages 9-14, 2000.
- [13] N. Smith-Guérin<sup>1</sup>, L. Al Bassit, G. Poisson, C. Delgorge, Ph. Arbeille, P. Vieyres "Clinical validation of a mobile patient-expert télé-échographie system using isdn lines " international conference on advanced robotics University of Orleans, Bourges, France 2004
- [14] « Daniel DE WOLF Théorie et pratique de l'optimisation » Université Charles de gaulle - Lille 3, Ufr de mathématiques, sciences économiques et sociales, Villeneuve d'ascq, Octobre 2002.
- [15] M. Minoux « Programmation mathématique : théorie et algorithmes tome1 » Dunod,Bordas et C.N.E.T.-E.N.S.T., Paris 1983
- [16] M. Brahim, K. Haddouche « l'Optimisation non linéaire des paramètres de coupe en tournage » 1er Congres International de Mécanique - Constantine, Algérie, Décembre 2002
- [17] "IMSL Fortran Subroutines for Mathematical Applications IMSL STAT/Library User's Manual " , Version 2.0, IMSL, Houston. 1991.
- [18] Y. Nakamura. " Advanced robotics, redundancy and optimization ", Addison Wesley Publishing, 1991.
- [19] J. Lee. " A study on the manipulability measures for robot manipulators ", IROS1997, France, Grenoble.
- [20] B. Bayle, J. Y. Fourquet, M. RENAUD. « Manipulability analysis for mobile manipulators. International Conference on Robotics and Automation » (ICRA'2001), Seoul (Korée), 21-26 Mai 2001, pp.1251-1256.
- [21] J K. Salisbury and J.J. Craig. « Articulated hands force Control and Kinematic issues ". Intl J. Robotics Research, Vol. 1, No. 1, pp. 4-17, 1982.

- [22] T.YoshikawaT. Yoshikawa. " Analysis and control of Robot manipulators with redundancy ", In M. Brady & R. Paul, editors, Robotics Research: The First International Symposium, pages 735-747, MIT Press, 1984.
- [23] T.Yoshikawa. " Foundation of robotics: Analysis and control ". The MIT Press, 1990.
- [24] L. Sciavicco and B. Siciliano. "Modeling and control of robot manipulators ", The Mc Graw-Hill companies, inc., 1996.
- [25] A .Belloufi mémoire de magistère " Optimisation du processus d'usinage à l'aide de la programmation non linéaire (PNL) ".
- [26] Lama Al Bassit, Natalie Smith-Guérin, Cyril Novales, Pierre Vieyres, Gérard Poisson : « Un robot portable de télé-échographie mobile ». CNRIUT 2002 France.
- [27] Borrel P. "contribution à la modélisation géométrique des robots manipulateurs : application à la conception assistée par ordinateur ". Thèse d'état USTL ,Montpellier,Juillet 1986.
- [28] Khiar Nait Chabane « Exploitation de la redondance pour la commande coordonnée d'un manipulateur mobile d'assistance aux personne handicapées ».Thèse de doctorat novembre/2006. Université d'Evry-Val d'essonne France.
- [29] Rebiai cherif , Assas Mekki " Modélisation et performance cinématique d'un robot en télé-opération à 6.d.d.l. " .Conférence internationale sur les sciences de la mécanique - cism - Oum el Bouaghi Algerie 16,17,18 novembre 2008.

---

## Annexe 1

### Le programme Fortran établi pour calculer le MGI du robot :

```
!C Declare variables
INTEGER ITMAX, N
REAL ERRREL
PARAMETER (N=12)
!C
INTEGER K, NOUT
REAL FNORM, X(N), XGUESS(N)
EXTERNAL FCN, NEQNF, UMACH
do i=1,n
XGUESS (i)=0.
end do
!C
ERRREL = 1.e-5
ITMAX = 100000
!C
CALL UMACH (2, NOUT)
!C Find the solution
CALL NEQNF (FCN, ERRREL, N, ITMAX, XGUESS, X, FNORM)
!C Output
do i=1,n
WRITE(*,*)i, X(i)
end do
END
!-----
!C User-defined subroutine
SUBROUTINE FCN (X, F, N)
parameter (nl=4,nc=4)
INTEGER N
REAL X(N), F(N)
!C
REAL EXP, SIN
INTRINSIC EXP, SIN
real T01(nl,nc),T12(nl,nc),T23(nl,nc),T34(nl,nc),T45(nl,nc),T56(nl,nc),T06(nl,nc)
real U0(nl,nc),U1(nl,nc),U2(nl,nc),U3(nl,nc),U4(nl,nc),U5(nl,nc)
real nx,ny,nz
pi=acos(-1.)

alpha=    *pi/180.
```

$sx=$  ; $nx=$  ; $ax=$  ; $px=$   
 $sy=$  ; $ny=$  ; $ay=.$  ; $py=$   
 $sz=$  ; $nz=$  ; $az=.$  ; $pz=$

$U0(1,1)=x(7)$  ; $U0(1,2)=x(8)$ ;  $U0(1,3)=ax$  ; $U0(1,4)=px$   
 $U0(2,1)=x(9)$  ; $U0(2,2)=x(10)$  ; $U0(2,3)=ay$  ; $U0(2,4)=py$   
 $U0(3,1)=x(11)$  ; $U0(3,2)=x(12)$  ; $U0(3,3)=az$  ; $U0(3,4)=pz$   
 $U0(4,1)=0$  ; $U0(4,2)=0$  ; $U0(4,3)=0$  ; $U0(4,4)=1$

!-----

$T01(1,1)=1$  ; $T01(1,2)=0$  ; $T01(1,3)=0$  ; $T01(1,4)=x(1)$   
 $T01(2,1)=0$  ; $T01(2,2)=1$  ; $T01(2,3)=0$  ; $T01(2,4)=0$   
 $T01(3,1)=0$  ; $T01(3,2)=0$  ; $T01(3,3)=1$  ; $T01(3,4)=0$   
 $T01(4,1)=0$  ; $T01(4,2)=0$  ; $T01(4,3)=0$  ; $T01(4,4)=1$

!-----

$T12(1,1)=1$  ; $T12(1,2)=0$  ; $T12(1,3)=0$  ; $T12(1,4)=0$ .  
 $T12(2,1)=0$  ; $T12(2,2)=1$  ; $T12(2,3)=0$  ; $T12(2,4)=x(2)$   
 $T12(3,1)=0$  ; $T12(3,2)=0$  ; $T12(3,3)=1$  ; $T12(3,4)=0$   
 $T12(4,1)=0$  ; $T12(4,2)=0$  ; $T12(4,3)=0$  ; $T12(4,4)=1$

!-----

$T23(1,1)=\cos(x(3))$  ; $T23(1,2)=-\sin(x(3))$  ; $T23(1,3)=0$  ; $T23(1,4)=0$ .  
 $T23(2,1)=\sin(x(3))$  ; $T23(2,2)=\cos(x(3))$  ; $T23(2,3)=0$  ; $T23(2,4)=0$ .  
 $T23(3,1)=0$  ; $T23(3,2)=0$  ; $T23(3,3)=1$  ; $T23(3,4)=0$   
 $T23(4,1)=0$  ; $T23(4,2)=0$  ; $T23(4,3)=0$  ; $T23(4,4)=1$

!-----

$T34(1,1)=\cos(x(4))$  ; $T34(1,2)=-\sin(x(4))$  ; $T34(1,3)=0$  ; $T34(1,4)=0$ .  
 $T34(2,1)=\cos(\alpha)*\sin(x(4))$  ; $T34(2,2)=\cos(\alpha)*\cos(x(4))$  ; $T34(2,3)=-\sin(\alpha)$   
;  $T34(2,4)=0$   
 $T34(3,1)=\sin(\alpha)*\sin(x(4))$ ;  $T34(3,2)=\sin(\alpha)*\cos(x(4))$  ; $T34(3,3)=\cos(\alpha)$   
;  $T34(3,4)=0$   
 $T34(4,1)=0$  ; $T34(4,2)=0$  ; $T34(4,3)=0$  ; $T34(4,4)=1$

!-----

$T45(1,1)=\cos(x(5))$  ; $T45(1,2)=-\sin(x(5))$  ; $T45(1,3)=0$  ; $T45(1,4)=0$ .  
 $T45(2,1)=\cos(\alpha)*\sin(x(5))$  ; $T45(2,2)=\cos(\alpha)*\cos(x(5))$  ; $T45(2,3)=-\sin(\alpha)$   
;  $T45(2,4)=0$   
 $T45(3,1)=\sin(\alpha)*\sin(x(5))$ ;  $T45(3,2)=\sin(\alpha)*\cos(x(5))$  ; $T45(3,3)=\cos(\alpha)$   
;  $T45(3,4)=0$   
 $T45(4,1)=0$  ; $T45(4,2)=0$  ; $T45(4,3)=0$  ; $T45(4,4)=1$

!-----

$T56(1,1)=1$  ; $T56(1,2)=0$  ; $T56(1,3)=0$  ; $T56(1,4)=0$ .  
 $T56(2,1)=0$  ; $T56(2,2)=1$  ; $T56(2,3)=0$  ; $T56(2,4)=0$   
 $T56(3,1)=0$  ; $T56(3,2)=0$  ; $T56(3,3)=1$  ; $T56(3,4)=x(6)$   
 $T56(4,1)=0$  ; $T56(4,2)=0$  ; $T56(4,3)=0$  ; $T56(4,4)=1$

```
!***** système *****
call prod(nl,nc,T01,T12,T06)
call prod(nl,nc,T06,T23,T06)
call prod(nl,nc,T06,T34,T06)
call prod(nl,nc,T06,T45,T06)
call prod(nl,nc,T06,T56,T06)
!-----
k=0
do i=1,nl-1
do j=1,nc
k=k+1
F(k)=U0(i,j)-T06(i,j)
end do
end do
RETURN
END
!-----
subroutine mat(nl,nc,k,x,T)
real x(100),T(nl,nc)
do i=1,nl-1
do j=1,nc
k=k+1
T(i,j)=x(k)
end do
end do
T(nl,nc)=1.
return
end
!-----
subroutine prod(nl,nc,a,b,c)
real a(nl,nc),b(nl,nc),c(nl,nc)
do k=1,nc
do i=1,nl
s=0.
do j=1,nc
s=s+(a(i,j)*b(j,k))
end do
c(i,k)=s
end do
end do
return
end
!-----
```



```
real x(100),T(nl,nc),U(nl,nc),TU(nl,nc)
do i=1,nl
do j=1,nc
T(i,j)=T(j,i)
end do
end do
call prod(nl,nc,T,U,TU)
return
end
```

## Annexe 2

### La programmation non linéaire : La programmation quadratique séquentielle (SQP)

Un problème d'optimisation paramétré se pose généralement de la façon suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \\ \text{sous } G_i(x) = 0, \quad i=1, \dots, n \\ G_j(x) \geq 0 \quad j=n+1, \dots, m \\ x^{\text{inf}} \leq x \leq x^{\text{sup}} \end{array} \right. \quad (1)$$

Ou:

- $X$  est le vecteur des paramètres de conception ou de commande ( $x \in \mathbb{R}^n$ )
- $F(x)$  est la fonction objective qui restitue un scalaire pour tout vecteur de conception

( $f(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ).

- $G(x)$  est une fonction vectorielle qui restitue les valeurs des contraintes type égalité ou inégalité évaluée à  $x$   $G(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Dans l'optimisation avec contraintes, l'objectif général est de transformer le problème en un sous problème plus facile à résoudre à l'aide de processus itératifs. Une caractéristique des premières méthodes utilisées pour résoudre ce genre de problèmes est de transformer le problème original en un problème de base sans contraintes en utilisant une fonction de pénalité pour les contraintes. De cette façon le problème avec contraintes est résolu en utilisant une séquence de problèmes d'optimisation paramétrée sans contraintes, qui à la limite, converge au problème avec contraintes.

Ces méthodes sont considérées maintenant relativement inefficaces et ont été remplacées par des méthodes gravitant autour des équations de Kuhn-Tucker (KT).

Les équations de (KT) sont les conditions nécessaires d'optimalité pour un problème d'optimisation avec contraintes. Si le problème est ce qu'on appelle problème de programmation convexe, c'est-à-dire, la fonction objective et les contraintes sont convexes, dans ce cas les conditions de (KT) deviennent nécessaires et suffisantes pour un optimum global. En se référant au problème général, les conditions de (KT) peuvent être écrites comme suit ;

$$\begin{aligned} \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla G_i(x) &= 0 \\ \nabla G_i(x^*) &= 0 \quad i=1, \dots, m \\ \lambda_i^* &\geq 0 \quad i=1, \dots, m \end{aligned} \tag{3}$$

La première équation décrit une dépendance entre les gradients de la fonction objective et les contraintes actives au niveau de la solution. Les multiplicateurs de Lagrange ( $\lambda_i$ ,  $i=1, \dots, m$ ) sont nécessaires pour équilibrer entre les variations dans les valeurs de la fonction objective et les gradients des contraintes. Du moment que seulement les contraintes actives sont incluses dans cette équation, les multiplicateurs de Lagrange correspondants aux contraintes inactives sont systématiquement nuls. Ceci est implicitement indiqué dans les deux dernières équations de la relation (3).

La solution des équations de KT forme la base de plusieurs algorithmes de la programmation non linéaire. Ces algorithmes tentent de calculer directement les multiplicateurs de Lagrange. Les méthodes quasi-Newtoniennes garantissent une convergence superlinéaire par accumulation d'informations du second ordre relatives aux équations de KT, en utilisant une méthode de mises à jour quasi-Newtoniennes. Ces méthodes sont généralement désignées par le nom de méthodes de Programmation séquentielle quadratique SQP. (Disponible sous le logiciel Maple et Matlab), du moment qu'un sous problème de programmation quadratique est résolu en chaque itération principale.

La méthode permet d'utiliser la méthode de Newton pour une optimisation avec contrainte généralement appliquée pour une optimisation sans contraintes. En effet, à chaque itération principale, une approximation du Hessien de la fonction Lagrangienne

est exécutée en utilisant une procédure de mise à jour. Elle est par la suite utilisée pour générer un sous problème de programmation quadratique dont la solution est utilisée pour former une direction de recherche pour une procédure de recherche linéaire. La méthode générale est expliquée par la suite.

Etant donné un problème d'optimisation décrit par les relations (1) et (2), l'idée de base est de formuler un sous problème de programmation quadratique en se basant sur une approximation de la fonction Lagrangienne.

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) \quad (4)$$

Le sous problème de programmation quadratique est obtenu en linéarisant les contraintes non linéaires autour du point  $x_k$ .

### Sous problème de programmation quadratique

Il est de la forme:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{d \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} d^T H_k d + \nabla f(x_k)^T d \\ \text{sous } \nabla g_i(x_k)^T d + g_i(x_k) = 0, \quad i=1, \dots, n \\ \nabla h_j(x_k)^T d + h_j(x_k) \geq 0 \quad j=n+1, \dots, m \\ x^{\text{inf}} - x_k \leq d \leq x^{\text{sup}} - x_k \end{array} \right. \quad (5)$$

Ce sous problème peut être résolu en utilisant n'importe quel algorithme de programmation quadratique. La solution est utilisée pour former un nouveau itéré:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k \quad (7)$$

La longueur du pas  $\alpha_k$  est déterminée par une procédure de recherche linéaire appropriée de telle façon une décroissance suffisante dans la valeur de la fonction de mérite  $\phi$  soit enregistrer. Cette fonction est construite comme suit:

$$\phi(x_k) = f(x_k) + \sum_{i=1}^p r_i g_i(x_k) \quad (8)$$

$$r_i = \max\{\lambda_i, 1/2(r_{ik-1} + \lambda_i)\} \quad i=1 \dots p$$

L'initialisation de  $r_i$  est donnée par :

$$r_i = \frac{\|f_x(x)\|}{\|g_{x_i}(x)\|}$$

La matrice  $H_k$  est définie positive et approche la matrice Hessienne de la fonction Lagrangienne (4).

## Résumé

Dans le présent travail, nous nous sommes intéressés à la modélisation, dans la phase de conception, d'un robot à six degrés de liberté dédié à la télé-échographie ultrasonore. Le robot est conçu pour reproduire à distance le geste médical d'un expert qui manipule une sonde échographique. Il s'agit ici de la modélisation du robot et de la détermination de son paramètre optimal d'inclinaison. Ce paramètre géométrique de conception est lié aux singularités de configurations fonctionnelles du robot, en regard des gestes courants du médecin. Prés de la singularité, un petit mouvement de la sonde fictive entraîne des mouvements dans les articulations du robot de grandes amplitudes et de grandes vitesses. Pour adoucir au mieux ces mouvements, nous proposons dans ce mémoire un choix optimal de ce paramètre, comme étant le maximum global d'une fonction, qui définit l'expression de la manipulabilité, cette dernière qui est un facteur important pour l'évaluation de la performance cinématique du robot. Le paramètre optimisé qu'on a trouvé, minimise les effets de la singularité sur l'ensemble des configurations possibles du robot, ceci permet de ne pas perturber l'expert médical dans son acte d'échographie. L'objectif final dans ce travail a été de montrer que la démarche de modélisation dans la phase de conception du robot peut servir de mieux préparer la phase ultime de suivi de mouvements à distance.

**Mots clés :** Télé-échographie, optimisation, manipulabilité, modélisation, télérobotique.

## Abstract

In this work, we summons ourselves interested in modeling, in the phase of design, of a robot to six degrees of freedom dedicated to ultrasonic télé-echography. The robot is designed to remotely reproduce the medical gesture of an expert who handles an echographic probe. It is here about the modeling of the robot and the determination of its optimal parameter of slope. This geometrical parameter of design is related to the singularities of functional configurations of the robot, compared to the current gestures of the doctor. Meadows of the singularity, a small movement of the fictitious probe involves movements in the articulations of the robot of great amplitudes and high speeds. To soften these movements as well as possible, we propose in this memory a best alternative of this parameter, as being the total maximum of a function, which definite the expression of the manipulability, the latter which is a big factor for the kinematic performance evaluation of the robot. The optimized parameter that one found, minimizes the effects of the singularity on the whole of the possible configurations of the robot, this makes it possible not to disturb the medical expert in his act of echography. The final objective in this work was to show that the step of modeling in the phase of design of the robot can be used for to better prepare the ultimate phase of follow-up of remote movements.

**Keywords:** Télé-échography, optimization, manipulability, modeling, télérobotic.

## الملخص

في هذا العمل اهتمنا بالنمذجة في مرحلة التصور لمجسم الي- رويو- ذو ستة درجات للتحرك مصمم للاكوغرافيا عن بعد. هذا المجسم يستطيع تمثيل عن بعد الحركة الطبية لمختص يحرك لولب ايكوغرافي. سنجد نمذجة للآلي مع إيجاد الزاوية الأحسن لميوله. هذه الزاوية مرتبطة بحالات الربط و عدم استطاعة التحرك للمجسم الآلي بالنظر إلي الحركات العادية للطبيب. لأجل هذا نقترح في هذه المذكرة اختيار امثل لهذه الزاوية كعدد اكبر إجمالي لدالة المعرفة لجملة الحركية التي تمثل معامل هام لتقدير الحركة. الزاوية لتي وجدنا تنقص من عوامل الربط مما يساعد الطبيب في اداء مهامه علي احسن يرام. أخيرا المغزى العام من هذا العمل هو البرهان علي أن التمثيل للمجسم في مرحلة التصور يستطيع ان يجعل ما الاستعداد لمتابعة الحركة عن بعد.

**الكلمات المفتاحي :** ايكوغرافيا عن بعد . التمثيل الحركي. النمذجة