République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : Statistique

Par

CHEKKAL Chaima

Titre :

L'evaluation des pertes associées à la survenance des événements rares

Membres du Comité d'Examen :

Pr.	NECIR Abdelhakim	UMKB	Président
Pr.	TOUBA Sonia	UMKB	Encadreur
Dr.	BENELMIR Imen	UMKB	Examinateur (rice)

Juin 2024

Dédicace

Je dédie ce humble travail à

de la soirée de laaqi tous les jours

à ma mére bien-aimée,

A momsoutien, mom cher père,

Aux compagnons de mes peines et de mes

joies,mes frères,

Les photos sont prises à la maison,

Un lutte contre les habitudes et une

lutte pour la continuité,

Et à toute ma famille,

Et à tous ceux qui m'ont étudié et

à tous ceux qui étaient heureux de me voir

parmi ceux qui ont réussi,

Et à chaque élève qui s'efforce dur

et me donne ce qu'il m'a amené.

....

REMERCIEMENTS

Louange à Dieu car sa grâce est juste,

Louange à Dieu et merci à Dieu en premier et en dernier,

Après toutes les significations de l'amour et

de la gratitude envers l'habitant de mon cœur,

envers Sultana Chékkal Noura, ma mère,

je dis que la gratitude ne suffit pas, merci, mon amour.

Louange à Dieu qui m'a envoyé une mère comme toi.

Merci à ceux qui m'ont appris à voler,

en soutenant mon père Moussa.

Merci à ceux qui m'ont soulagé, m'ont fait oublier

ma solitude et renforcé ma détermination, mes frères,

les bougies de ma vie et les étoiles de mon ciel.

Merci à ceux qui sont venus partager ma joie avec

moi en ce jour, Merci au

Professeur Necir Abdelhakim et DR Benelmir Imen.

Merci à ceux qui m'ont aidé et m'ont éclairé sur le chemin

pour terminer mon mémoire de fin d'études,

Merci à DR Touba Sonia.

Merci à mes amies de toujours, voire à mes sœurs,

que j'ai gagnées tout au long de mes années d'études.

Merci à tous ceux de ma famille qui m'ont soutenu.

Merci à ceux qui ont été présents et écoutés.

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Introduction

Les risques sont liés à la plupart des activités humaines depuis la création de l'homme, car les risques varient selon la nature du risque. Il existe des risques naturels (séismes,...), environnementaux, sanitaires (épidémies,...), économiques risques (fluctuations des marchés financiers,...).

Aujourd'hui, les sociétés sont confrontées à de grands défis liés à ces risques, ce qui nécessite de les étudier et d'essayer de les comprendre et de réduire les pertes qui en résultent.

Dans cette recherche, nous parlerons des risques politiques, notamment des fluctuations des marchés financiers, qui jouent un rôle prépondérant dans le financement de l'économie mondiale. Puisque les fluctuations financières (pertes ou profits) génèrent des rendements financiers (rendements des actifs financiers), ce qui a nécessité l'étude de ces rendements instables dus à la variance du rendement d'actif.

La variance finie où infinie ?,Cette question peut paraître facile ou simple, mais cette question a fait comprendre que les queues de distribution d'une loi normale est inefficace ou irréaliste en cas d'événements inattendus.

Pour la variance infinie on utilise les lois α-stable parce qu'elles sont les plus adaptés aux rendements des actifs financiers car leurs fortes fluctuations sont régulières dans le temps et sont cohérentes avec les caractéristiques du l'espérence et de la variance de la loi α-stable ($\alpha < 2$) 1.2.Dans ce cas, nous prenons toujours les variables aléatoires indépendantes identiquement distribuéses.

Comme nous l'avons dit précédemment, les fluctuations des données financières entraînent des risques sur les marchés financiers mondiaux, ce qui a nécessité la création de mesures de risque à appliquer dans le financement, l'assurance et d'autres procédures financières en bourse et ailleurs.

Espérence,Variance et la déviation standard ont été parmi les premiers indicateurs de risque à être créés, et après plusieurs études (par exemple Rolski et al [17]), il a été conclu qu'ils ne sont pas bons pour le risque d'événements de pertes importantes. D'autres normes ont donc été créées.

L'une des mesures les plus utilisées dans les études scientifiques est la VaR. Elle est définie comme du montant d'argent qu'il est possible de perdre pendant une certaine période et qui est déterminé par α, estimé à 95% ou 99% dans la plupart des cas, mais la VaR correspond à une certaine quantité, et si cette quantité dépasse la VaR ses risques ne sont pas pris en compte, c'est aussi une mesure incohérente car elle ne répond pas aux conditions d'Artzner [3].

Quant aux états financiers, Wang([19]) a créé en 1998 une mesure adaptée, plus courante et appelée TSD. Elle est basée sur L-fonction avec des fonctions de pondération spécifiques, connue sous le nom de L-statistiques, et a été étudiée par plusieurs chercheurs, dont Necir et Meraghni [15],Jones et Zitikis [9], Monchaya Chiangpradit et al [13] , Kaiser et Brazauskas [10], Necir et al(2010)....

Ces chercheurs ont enrichi TSD de nombreux ajouts importants et éprouvés (CTE,...).

Il est important d'estimer un prix du risque d'assurance qui reflète la distribution des variables aléatoires qui décrivent les pertes correspondantes.

Si la variable de perte a une distribution à queue lourde, il n'est pas possible d'appliquer des mesures normales, c'est pourquoi Necir et Meraghni [15], en utilisant le théorème des valeurs extrêmes, ont trouvé une valeur normale dans le cas des distributions à queue lourde pour les mesures de risque financier.

Wang [20] a proposé une mesure dans le cas des queues lourdes, qui est la file d'attente à deux déviation, qui est la plus appropriée dans le cas des données financières, notamment des rendements logarithmiques Δ_r est une variance finie pour $0 < r < 1$, qui est une nouvelle mesure pour mesurer les risques de distributions bilatérales lourdes sous les modèles α-stables. Cela a déterminé les limites de confiance pour les échelles de risque de déformation avec les rendements d'actifs suivent une lois α-stables.

Pour cela on a partagé notre mémoire comme suit :

Le premier chapitre on définie les rendements d'actifs et définirons également la loi α-stable et certaines de ses caractéristiques.

Le $2^{\text{éme}}$ chapitre on parle par la statistique d'ordre.

La $3^{\text{émé}}$ chapitre on parle par les lois α-stables et la mesure de risque TSD.

Chapitre 1

Les rendements d'actifs et les lois α-stables

Les marchés financiers constituent l'une des zones commerciales les plus importantes au monde. Ils jouent un rôle essentiel dans le financement de l'économie mondiale et dans l'orientation des investissements dans les secteurs économiques, offrant ainsi aux investisseurs la possibilité d'obtenir des rendements d'actifs. Ces derniers présentent des fluctuations génératrices de pertes ou de profits, ce qui a nécessité d'étudier ces fluctuations dès leur origine.

Après de nombreuses études, Mandelbrot conclut en 1960 que le modèle gaussien n'est pas adapté aux conditions du marché, ce qui l'amène à utiliser les lois de Pareto pour trouver un nouveau modèle.

La loi stable ou comme on l'appelle la loi de lévy tronquée.

Nommé d'après le mathématicien Paul Lévy, où la loi α-stable est basée sur $\alpha \in]0, 2[$, où α est le paramêtre caractéristique de la loi α-stable.

Dans cette chapitre, nous visons à définir les rendements d'actifs et à présenter la loi α-stable et ses caractéristiques.

1.1 Rendements d'actifs

1.1.1 Définition

Définition 1.1.1 *(Les rendements)C'est le montant des profits et des pertes réalisés grâce à l'investissement.*

Définition 1.1.2 *(D'actifs)C'est quelque chose qui peut appartenir à des pays , des individus et des entreprises dans l'espoir qu'il apportera un avantage futur à son propriétaire.*

Définition 1.1.3 *(Les rendements d'actifs)Il s'agit d'une mesure permettant de déterminer combien de profits et de pertes les actifs peuvent générer pour leur propriétaire.*

$$R_{t,t+\Delta t} = \log P_{t+\Delta t} - \log P_t.$$

Donc :

P_t : est le prix initial à un certain instant t pour les actifs réels ou financiers.

Δ_t : est le montant du profit ou de la perte résultant de l'actif au cours d'une période spécifique.

Remarque 1.1.1 *Pour les investisseurs, le rendement de l'actif est plus important que le prix de l'actif lui-même .*

1.1.2 Un exemple de rendement d'actifs

L'indice boursier est considéré comme un actif financier et est défini commeindice qui mesure quotidiennement les cours boursiers. C'est la somme du cours de l'action multipliée par la taille du marché de l'entreprise. Par conséquent, il est positif lorsque le nombre d'actions dont le prix a augmenté est supérieur au nombre d'actions dont le prix a diminué au cours de la même période aujourd'hui et vice versa.

Il existe de nombreux indices mondiaux pour diverses bourses dans le monde, par exemple : CAC40 , DAX30 , SetP500 , AEX , MDAX , BEL20 , PSI20 et beaucoup plus .

Nous prenons comme exemple l'indicateur CAC, qui est un indicateur il a été créé en l'année 1987.L'indice CAC40 est de type Gande casquette et est basé sur la méthode de pondération Capitalizaion weighted .Il comprend les 40 entreprises les plus importantes de Paris et est géré par la Bourse Euronext Paris.

Nous prenons les cours de clôture quotidiens de cet indicateur entre les dates d'aujourd'hui 130 de l'an 1991 à aujourd'hui 169 de l'an 1998,puisque l'année compte 260 jours,où les données sont constituées de 1860 observations.

De là nous concluons la statistique de rendement de l'indice CAC40, dans la période allant d'aujourd'hui 130 de l'an 1991 à aujourd'hui 169 de l'an 1998 est :1.1

Skewness	580.3142
Variance	336764.6
Min	1611
1st quantile	1875.0
Médiane	1992.3
Moyenne	2227.828
3rd quantile	2274.3
Max	4388.5

Tab. 1.1 – Statistiques des rendements de l'indice boursier CAC40, de la période allant d'aujourd'hui 130 de l'an 1991 à aujourd'hui 169 de l'an 1998.

Remarque 1.1.2 *Suivez les changements de prix un loi normale tandis que les prix suivent un loi α-stable.*

1.1.3 "QQ-plot"[18]

Le QQ-plot c'est un test graphique, c'est-à-dire un graphe, et c'est le premier des tests anormaux. Il décroît avec les grandeurs de la distribution empirique avec les grandeurs de la distribution théorique qui sont envisagées. pour savoir s'il existe une source théorique spécifique pour la distribution de la variable échantillon.

Dans les valeurs extrême QQ-plot prend la distribution exponentielle.

Sur l'axe X , nous mettons les quantités de distribution empirique et sur l'axe Y, nous mettons les quantités de distribution exponentielle donc QQ-plot est donné par :

$$\left\{\left(X_{k:n}, F_{0.1}^{-1}\left(\frac{n-k+1}{n+1}\right)\right), k=1,...,n\right\} .$$

on remarque que les rendement d'actifs ne sont pas normalement distribitués.

1.2 Les lois α-stables

1.2.1 Généralisée de la loi α-stable

Dans cette partie,nous présentons les généralités et les caractéristiques les plus importantes de la loi α-stable :

Définition la loi stable :[18]

Définition 1.2.1 *Soit $X_1, ..., X_n$ es un n variable aléatoires iid de la même loi avec la variable aléatoires réels X. Pour étre X a une distribution un stable ;il existe deux réels positifs a_n et b_n ; tels que :*

$$X_1 + ... + X_n =^d a_n X + b_n.$$

Remarque 1.2.1 *Si $b_n = 0$ alors X est strictement stable.*

Définition la loi α-stable :

Définition 1.2.2 *D'aprés la définition précédente de la loi stable ,en prenante la constante $a_n = n^{\frac{1}{\alpha}}$ avec $\alpha \in [0; 2]$,on troune que X a une distribution α-stable .*

Remarque 1.2.2 *Nous disons à propos la variable aléatoire X suivant une les lois sables par $X \sim S_\alpha(\delta, \beta, \gamma)$.*

Remarque 1.2.3 *[1]*

-α : *Le paramêtre de l'index de stabilité.*

-δ : *Le paramêtre de position.*

-β : *Le paramêtre d'asymétrie.*

-γ : *Le paramêtre d'echelle.*

Exemple 1.2.1 *- La loi normal $N(\mu, \sigma^2)$ est une loi α-stable avec $\alpha = 2$ et $\gamma = \frac{\sigma}{\sqrt[2]{2}}$ ($S_2\left(\delta, \beta, \frac{\sigma}{\sqrt[2]{2}}\right)$).*

-La loi cauchy est une loi α-stable avec $\alpha = 1$ et $\beta = 0$ ($S_1(\delta, 0, \gamma)$).

Les proprites

Proprites 01[1] -Soit $X_1 \sim S_\alpha(\delta_1, \beta_1, \gamma_1)$ et $X_2 \sim S_\alpha(\delta_2, \beta_2, \gamma_2)$ deux variables aléatoires independantes , danc $(X_1 + X_2) \sim S_\alpha(\delta, \beta, \gamma)$ si et seulement si :

$$\delta = (\delta_1^\alpha + \delta_2^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}, \beta = \frac{\beta_1\delta_1^\alpha + \beta_2\delta_2^\alpha}{\delta_1^\alpha + \delta_2^\alpha} \text{ et } \gamma = \gamma_1 + \gamma_2 \ .$$

-Soit X_1 et X_2 est variables aléatoires suivent la loi $S_\alpha(\delta, \beta, \gamma)$,avec a et b deux nombres réels positifs ,il exist c un nombre réel donc :

$$(ax_1 + bx_2 + c) =^d S_\alpha\left(\delta, \beta\left(a^\alpha + b^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \gamma\left(a^\alpha + b^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}} + c\right) \ .$$

-Pour $\alpha = 2, \forall p \in \mathbb{N}^*; E|X|^p < +\infty$.

$$\text{Pour } 0 < \alpha < 2 \begin{cases} \forall 0 \leq p < \alpha; E|X|^p < +\infty \ . \\ \forall p \geq \alpha; E|X|^p = +\infty \ . \end{cases}$$

Proprites 02 :[18] L'effet de la paramêtre α sur la moyene et la variance est :1.2

	$0 < \alpha \leq 1$	$1 < \alpha < 2$	$\alpha = 2$
$E(X)$	∞	μ	μ
$Var(X)$	∞	∞	$2\sigma^2$

TAB. 1.2 – Varianceet moyenne théorique d'une variable aléatoire alpha stable.

Fonction caractéristique :[18] Soit X une variable aléatoire de distribution stable la fonction caractéristique de X est :

$$\varphi_X(t) = \exp \begin{cases} i\delta t - \gamma |t| \left[1 + i\beta \frac{2}{\pi} (sign(t)) \ln |t|\right]; \ \alpha = 1. \\ i\delta t - \gamma^\alpha |t|^\alpha \left[1 - i\beta (sign(t)) \tan \frac{\alpha\pi}{2}\right]; \ \alpha \neq 1. \end{cases} \tag{1.1}$$

avec : $0 < \alpha \leq 2, \gamma > 0, -1 \leq \beta \leq 1$ et un réel δ

et

$$sign(t) = \begin{cases} 1; \text{ si } t > 0 \ . \\ 0; \text{ si } t = 0 \ . \\ 1; \text{ si } t < 0 \ . \end{cases} \tag{1.2}$$

Cas symetrique :[18] Dans la loi α-stable si le deux paramêtres β et δ sont nuls alors la loi α-stable $(S_\alpha(0, 0, \gamma))$ est un loi symetrique donc $X \sim S\alpha S$.

Si $\gamma = 1$ alors $S\alpha S$ est un standard .

1.2.2 La distribution de la loi α-stable

Nous consacrrons cette partie à la présentation de la fonction de dénsite et la fonction de répartition de la loi α-stable ,qui se distinguent par leur absence en termes explicites .

La fonction de dénsite de la loi α-stable[18]

Nous pouvons trouver la dénsite de loi α-stable .

Avec de l'aide la fonction caracteristique 1.2.1 et donnée :

$$f_x(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-itx)\varphi_x(t)dt \ .$$

ou utilisant la loi α-stable symétrique 1.2.1 et donnée par :

$$f_x(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \exp(-t^{\alpha})\cos\left[xt + \beta t^{\alpha} g(t,\alpha)\right] dt \ .$$

tels que :

$$g(t,\alpha) = \begin{cases} \tan\frac{\alpha\pi}{2}, \text{ si } \alpha \neq 1. \\ \frac{-2}{\pi}\ln|t|\,, \text{ si } \alpha \neq 1. \end{cases}$$

Exemple 1.2.2 *-Pour* $\beta = 0$*,*$\delta = 0$*,et* $\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$ *on a :1.1*

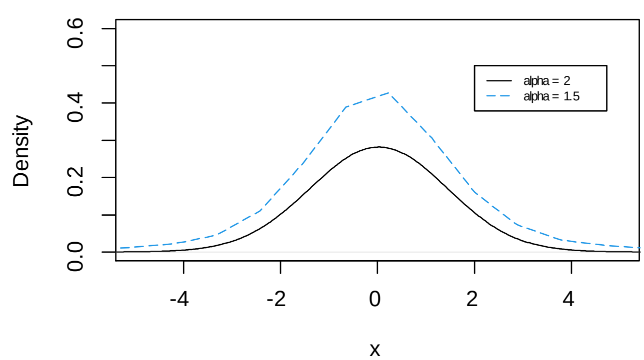

FIG. 1.1 – La courbe représente les changements en la fonction de dénsite de loi α-stable avec un changement le paramÍtre α.

-Pour $\alpha = 1.5$*,*$\delta = 0$*,*$\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$ *on a :1.2*

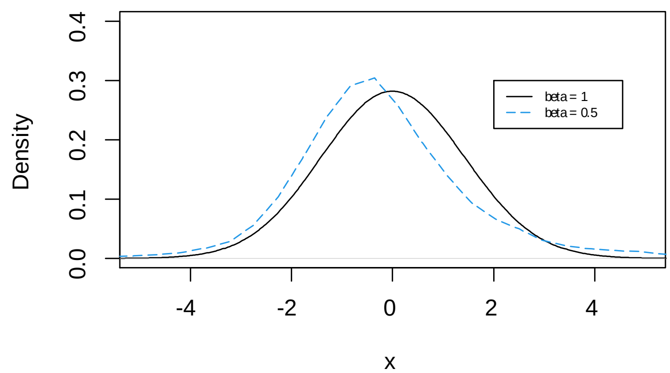

FIG. 1.2 – La courbe représente les changements en la fonction de dénsite de loi α-stable avec un changement le paramÍtre β.

Proposition 1.2.1 *Soit la variable aléatoire $X \sim S_{\alpha}(1, \beta, 0)$ il existe f_x la fonction de dénsite donc :*

$$S_{\alpha}(1, -\beta, 0) =^{d} -S_{\alpha}(1, \beta, 0) \quad et \quad f_x\left(\frac{-x}{\alpha}, \beta\right) = f_x\left(\frac{x}{\alpha}, -\beta\right).$$

La fonction de répartition de la loi α-stable[18]

Soit un variable aléatoire $X \sim S_{\alpha}(\delta, \beta, \gamma)$,si $x > 0$ et $\alpha \neq 1$,la fonction de répartition de la loi α-stable est donnée par :

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-\beta) + \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}\beta}^{\frac{\pi}{2}} \exp(-V_{\alpha}(x,\theta))d\theta, \text{ si } \alpha < 1. \\ 1 - \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}\beta\frac{1-|1-\alpha|}{\alpha}}^{\frac{\pi}{2}} \exp(-V_{\alpha}(x,\theta))d\theta, \text{ si } \alpha > 1. \end{cases}$$

$$V_{\alpha}(x,\theta) = x^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} a(\theta).$$

avec :

$$a(\theta) = \left(\frac{\sin(\alpha\theta + \frac{\pi}{2}\beta(1-|1-\alpha|))}{\cos\theta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \frac{\cos((\alpha-1)\theta + \frac{\pi}{2}\beta(1-|1-\alpha|))}{\cos\theta}.$$

Remarque 1.2.4 *Soit la variable aléatoire* $X \sim S_\alpha(1, \beta, 0)$ *,il existe* F_X *la fonction de répartition donc :*

$$F_X\left(\frac{-x}{\alpha}, \beta\right) = 1 - F_X\left(\frac{x}{\alpha}, -\beta\right).$$

1.3 Les proprétés de la loi α-stable

Dans cette section ,nous concentrons sur les caracteristiques les plus importontes de la loi α-stable , notamment la caractéristique de queues lourdes et la caractéristique de la algorithme de simulation ,et nous les présentons également de estimation des paramêtres de la loi α-stable par méthode de l'approche de McCulloch .

1.3.1 Caractéristique des queues inférieures et supérieures de la distribution de la loi α-stables

Dans la loi α-stable ,si le paramêtre $\alpha < 2$,(les queues inférieures et supérieures de la fonction de distribution cumulative F de $X \sim S_\alpha(\delta, \beta, \gamma)$ sont asymptotiquement équivalentes) avec la distribution de Pareto 2.3.3.

Proposition 1.3.1 *[18]-Il exist* C_1 *et* C_2 *deux constantes supérieur à zéro telque*

$$0 < \alpha < 2 : F(-x) \sim C_1 x^{-\alpha} \text{ et } 1 - F(x) \sim C_2 x^{-\alpha}, x \to \infty.$$

-Pour $\alpha \to \infty$ *la distribution* $(F(-x))$ *et* $(1 - F(x))$ *sont à variation réguliére2.2.1 donc nous ecrivons à :*

$$F(-x) = x^{-\alpha} L_1(x) \text{ et } 1 - F(x) = x^{-\alpha} L_2(x).$$

De sorte que $L_1(x)$ *et* $L_2(x)$ *est une fonction à variation lente2.2.1 ,Aussi ,les deux* *fonction* $L_1(x)$ *et* $L_2(x)$ *satisfaisant à la condition d'équilibre :*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{L_1(x)}{L_1(x)+L_2(x)}=\frac{1+\beta}{2}\ .$$

Proposition 1.3.2 *Pour* $\lambda = 2\alpha$ *,il exict* c_L,d_L,c_R *et* d_R *est constantes réelles ,on les retrouve en utilisant la paramètre* α,β,γ *et* δ *1.2.3de la loi stable et* $x \rightsquigarrow \infty$ *donc :*

$$F(-x)=c_Lx^{-\alpha}+d_Lx^{-\lambda}+o(x^{-\lambda}),$$

et

$$1-F(x)=c_Rx^{-\alpha}+d_Rx^{-\lambda}+o(x^{-\lambda}).$$

1.3.2 L'algorithme de Chambers , Mallows et Stuck [18]

-Soit la variable aléatoire $X \sim S_\alpha(\delta,\beta,\gamma)$,L'absence d'expression analytique de l'inverse F^{-1} est plus grande problème de simulation d'une X .

-La paramêtre étape a été créée par kaner (qui a donné la méthode directe pour simuler $S_{\alpha<1}(1,1,0)$).

-L'algorithme de Chambers , Mallows et Stuck [5],que nous a permis de trouver une loi $S_\alpha(1,\beta,0)$,et pour obtenir une loi $S_\alpha(\delta,\beta,\gamma)$,en changemant une variable .

-On la loi I uniforme sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et la loi W exponentielle ,il existe U_1 et U_2 deux variables aléatoires réelles uniformes sur $]0,1[$;Pour utilisé la changement de variables on a :

$$I=\pi U_1-\frac{\pi}{2}.$$

et

$$W=-\log(1-U_2).$$

Il y a :

$$\varepsilon = 1 - \alpha.$$
$$a = \tan \frac{I}{2}.$$
$$b = \tan \frac{\varepsilon I}{2}.$$
$$\tau = -\varepsilon \tan(\alpha I_0).$$
$$B = \frac{b}{\frac{\varepsilon I}{2}}\ .$$
$$d = \frac{z^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} - 1}{\varepsilon}.$$
$$z = \frac{\cos(\varepsilon I) - \tan(\alpha I_0)\sin(\varepsilon I)}{W \cos I}\ .$$

et donnée :

$$Y = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\left(\left(\frac{1}{2}\pi + \beta I\right)\tan I - \beta \log\left(\frac{\frac{1}{2}\pi W \cos I}{\frac{1}{2}\pi + \beta I}\right)\right); \text{si } \alpha = 1, \\ (\cos(\alpha I_0))^{\frac{1}{\alpha}} \frac{2(a-b)(1+ab) - I\tau B\left[b(1-a^2)-2a\right]}{(1-a^2)(1+b^2)}(1+\varepsilon d) + \tau(d + \frac{1}{\varepsilon}); \text{si } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

ou :

$$Y = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\left(\left(\frac{1}{2}\pi + \beta I\right)\tan I - \beta \log\left(\frac{\frac{1}{2}\pi W \cos I}{\frac{1}{2}\pi + \beta I}\right)\right); \text{si } \alpha = 1, \\ \frac{\sin \alpha(I - I_0)}{(\cos I)^{\frac{1}{\alpha}}}\left(\frac{\cos(I - \alpha(I - I_0))}{W}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}; \text{si}\alpha \neq 1. \end{cases}$$

avec :

$$I_0 = \frac{\pi\beta}{2}\frac{1 - |1-\alpha|}{\alpha}.$$

alors la variables aléatoires réelles $Y \sim S_\alpha(1, \beta, 0)$;On met :

$$C = \frac{\arctan\left(\beta \tan \frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\alpha} \quad \text{et} \quad D = \left(1 + \beta^2 \tan^2 \frac{\alpha\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2\alpha}}.$$

Puis on calcule :

$$Y = \begin{cases} D\frac{\sin(\alpha(V+C))}{(\cos V)^{\frac{1}{\alpha}}}\left(\frac{\cos(V-\alpha(V+C))}{W}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}, \text{ si } \alpha \neq 1. \\ \frac{2}{\pi}\left(\left(\frac{\pi}{2}+\beta V\right)\tan V - \beta\log\left(\frac{W\cos V}{\frac{\pi}{2}+\beta V}\right)\right), \text{ si } \alpha = 1. \end{cases} \tag{1.3}$$

avec W est une variable aléatoire exponentielle et V une variable aléatoire uniforme.

-La variable aléatoire Y aussi suit la loi $S_\alpha(1,\beta,0)$.

-Par changement la variable :

$$X = \begin{cases} \gamma Y + \delta \text{ , pour } \alpha \neq 1. \\ \gamma Y + \frac{2}{\pi}\beta\gamma\log\gamma + \delta \text{ , pour } \alpha = 1. \end{cases}$$

Donc la variable aléatoire X suit la loi $S_\alpha(\delta,\beta,\gamma)$.

1.3.3 Estimation des paramêtres de la loi α-stable avec méthed de McCulloch

Cette méthode est efficace en termes de précision des estimateurs en termes de temps de calcul requis pour l'estimation [18].

Il est généralement utilisé pour fournir des valeurs de paramêtres initiales pernettant de démarrer des itinéraires plus efficaces mais plus longs et plus lourds .

En 1986 ,McCulloch [12] élargit la méthode de Fama Roll [7],pour la cas $\alpha \geq 0.6$ et $\beta \in [-1;1]$.

-Dans cette méthode on utilisé un echantillon $X_1; ...; X_n$ de variables aléatoires stables iid ,Soit la variable aléatoire $X_i \sim S_\alpha(\delta,\beta,\gamma)$,de fonction de répartition F ,il existe x_p la quantile d'ordre p ,avec $F(x_p) = p$.

On défini la statistique V_α la fonction de α et la statistique V_β la fonction de β ,il sont ne dépendent pas de γ et de δ par :

$$V_\alpha = \phi_1(\alpha, \beta) = \frac{\hat{x}_{0.95} - \hat{x}_{0.05}}{\hat{x}_{0.75} - \hat{x}_{0.25}} \ .$$
$$V_\beta = \phi_2(\alpha, \beta) = \frac{\hat{x}_{0.95} + \hat{x}_{0.05} - 2\hat{x}_{0.50}}{\hat{x}_{0.95} - \hat{x}_{0.05}} \ .$$

-En utilisant α et β nous trouvons la paramêtre d'echelle γ :

$$V_\gamma = \phi_3(\alpha, \beta) = \frac{\hat{x}_{0.75} - \hat{x}_{0.25}}{\gamma} \ .$$

alors :

$$\hat{\gamma} = \frac{\hat{x}_{0.75} - \hat{x}_{0.25}}{\phi_3\left(\hat{\alpha}, \hat{\beta}\right)} \ .$$

On a $\hat{x}_p$ est le $\mathrm{p}^{\text{ème}}$ quantile de l'echantillon .

Pour estimer δ ,posons :

$$V_\eta = \phi_4(\alpha, \beta) = \frac{\eta - \hat{x}_{0.50}}{\gamma} \ .$$
$$\eta = \begin{cases} \delta + \beta\gamma \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \ , \text{si } \alpha \neq 1. \\ \delta \ , \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

alors :

$$\hat{\eta} = \hat{x}_{0.50} + \hat{\gamma}\phi_4\left(\hat{\alpha}, \hat{\beta}\right) \ .$$

l'estimateur de $\hat{\delta}$ est donné par :

$$\hat{\delta} = \begin{cases} \hat{\eta} - \hat{\beta}\hat{\gamma} \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \ , \text{si } \alpha \neq 1 \ . \\ \hat{\eta}, \text{si } \alpha = 1 \ . \end{cases}$$

Remarque 1.3.1 *$\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ et $\phi_4\left(\hat{\alpha}, \hat{\beta}\right)$ est obtenu d'aprés le tableau de la figure 26 dans [2].*

Exemple 1.3.1 *1.3(On va simuler 5000 réalisation des v.a qui suivent la loi alpha-stable pour différentes valeurs de α et β . On trouve les résultats suivants :*

α	2	1.75	1.5	1.25	1
β	0	-0.5	0.5	0.8	1
V_α	2.46	2.67	3.16	3.80	5
V_β	-0.01	-0.12	0.23	0.51	0
$\hat{\alpha}$	2	1.73	1.47	1.21	1.1
$\hat{\beta}$	0	-0.48	0.41	0.68	0.99

TAB. 1.3 – Estimation des paramêtres du loi alpha-stable via l'approche de McCulloch pour 5000 réalisations.

Comme $\hat{x}_p$ est un estimateur consistant de x_p, et que les fonctions ϕ_i sont continues, alors les estimateurs des paramètres sont consistants [18].)

Remarque 1.3.2 *[18]-La méthode de McCulloch permet de trouver α et γ trés proches de lours valeurs.*

-La méthode de McCulloch nous permet de trouver que β et δ sont correctement estimés; Si est petite valeur ceci s'applique à la bourse.

Remarque 1.3.3 *Les rendement d'actifs suiti une distribition non normale il sont de type pareto2.3.3.*

Chapitre 2

Les valeurs extrêmes

Dans ce chapitre,nous parlerons principalement de la définition de la statistique d'ordre et présenterons ses caractéristiques et la distribution des valeurs extremes ;La statistique d'ordre est l'un des outils les plus importants en matière d'inférence statistique, et la statistique non-paramétrique, car la théoréme des valeurs extremes a été utilisé pour mettre la queue des distribution des pertes, ce qui a contribué au domaine de la finance et des assurances.

2.1 Statistique d'ordre [11]

Un statistique d'ordre on parle par n varibles aléatoires $(X_1, ..., X_n)$ de fonction de répartition $F_{X_1,...,X_n}(x_1, ..., x_n)$,et de dénsité $f_{X_1,...,X_n}(x_1, ..., x_n)$,et on parle par la loi de $X_{1,n}$ et $X_{n,n}$ avec on utilise pour la varibles aléatoires indépendantes on a :$F_{X_1,...,X_n}(x_1, ..., x_n) = F_{X_1}(x_1) \times ... \times F_{X_n}(x_n)$.

2.1.1 Définition Statistique d'ordre

Définition 2.1.1 *Soit* $X_1, ..., X_n$ *est un* n *varibles aléatoires indépendantes identiquement distribués (iid),de la méme loi ,et de fonction de répartition*

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \ .$$

Si nous parlons de statistique d'ordre notée $X_{1,n}, ..., X_{n,n}$ *les varibles aléatoires ordennées en sens coroissant :*$X_{1,n} \leq .... \leq X_{n,n}$ *.*

Dans statistique d'ordre ,la plus petite valeurs extrêmes est $m_n = X_{1,n} = \min(X_1, ..., X_n)$*,et la plus grande valeurs extrêmes est* $M_n = X_{n,n} = \max(X_1, ..., X_n)$

Remarque 2.1.1 *Dans statistique d'ordre si* $1 < k < n$ *le valeurs extrémes est appelée* $X_{k,n}$ *(la* $k^{iéme}$*statistique d'ordre).*

2.1.2 La distribution des valeurs extrêmes $X_{1,n}$,$X_{n,n}$

Dans cette partie ,nous parlerons de la fonction de répartition et la fonction de dénsité pour les deux valeur extréme $X_{1,n}$ et $X_{n,n}$.

La distribution de le premier valeur extréme $X_{1,n}$

Proposition 2.1.1 *Soit* $X_1, ..., X_n$ *varibles aléatoires iid de fonction de dénsité* f *et de fonction de répartition* F *,Dans un statistique d'ordre la loi de valeurs extrêmes* $X_{1,n} = \min(X_1, ..., X_n)$ *est donnée par :*

$$F_{X_{1,n}}(x) = 1 - [1 - F_X(x)]^n \ , \forall x \epsilon \mathbb{R} \ .$$

et la fonction de dénsité est :

$$f_{X_{1,n}}(x) = nf_X(x) \times [1 - F_X(x)]^{n-1} \text{ ; } \forall x \epsilon \mathbb{R} \text{ .}$$

Preuve. *on a :*

$$\begin{aligned} F_{X_{1,n}}(x) &= P(X_{1,n} \leq x); \forall x \epsilon \mathbb{R} \\ &= P(\min(X_1, ..., X_n) \leq x); \forall x \epsilon \mathbb{R} \\ &= 1 - P(\min(X_1, ..., X_n) > x); \forall x \epsilon \mathbb{R} \\ &= 1 - P((X_1 > x) \cap (X_2 > x) \cap ... \cap (X_n > x)); \forall x \epsilon \mathbb{R} \\ &= 1 - [P(X_1 > x) \times P(X_2 > x) \times ... \times P(X_n > x)] \, ; \forall x \epsilon \mathbb{R} \\ &= 1 - [(1 - P(X_1 \leq x)) \times (1 - P(X_2 \leq x)) \times ... \times (1 - P(X_n \leq x))] \, ; \forall x \epsilon \mathbb{R} \\ &= 1 - [(1 - F_{X_1}(x)) \times (1 - F_{X_2}(x)) \times ... \times (1 - F_{X_n}(x))] \, ; \forall x \epsilon \mathbb{R} \text{ .} \end{aligned}$$

on a de la même loi donc :

$$F_{X_{1,n}}(x) = 1 - [(1 - F_X(x)) \times (1 - F_X(x)) \times ... \times (1 - F_X(x))] \, ; \forall x \epsilon \mathbb{R}.$$

$$=1\text{-}[1 - F_X(x)]^n \, ;\forall x \epsilon \mathbb{R}.$$

et la dénsité de $X_{1,n}$:

$$\begin{aligned} f_{X_{1,n}}(x) = \frac{\partial}{\partial x} F_{X_{1,n}}(x) &= \frac{\partial}{\partial x}(1 - [1 - F_X(x)]^n) && ; \ \forall x \epsilon \mathbb{R}, \\ &= nf_X(x) \times [1 - F_X(x)]^{n-1} && ; \ \forall x \epsilon \mathbb{R}. \end{aligned}$$

■

La distribution de le dernier valeur extrême $X_{n,n}$:

Proposition 2.1.2 *Soit $X_1, ..., X_n$ varibles aléatoires iid de fonction de dénsité f et de fonction de répartition F ,Dans un statistique d'ordre la loi de valeurs extrêmes* $X_{n,n} = \max(X_1, ..., X_n)$ *est donnée par :*

$$F_{X_{n,n}}(x) = [F_X(x)]^n \, ; \forall x \epsilon \mathbb{R}.$$

et la fonction de dénsité est :

$$f_{X_{n,n}}(x) = nf_X(x) \times [F_X(x)]^{n-1}\,;\forall x\epsilon\mathbb{R}.$$

Preuve. *on a :*

$$\begin{aligned} F_{X_{n,n}}(x) \quad &= P(X_{n,n} \leq x); \forall x\epsilon\mathbb{R} \\ &= P(\max(X_1, ..., X_n) \leq x); \forall x\epsilon\mathbb{R} \\ &= P((X_1 \leq x) \cap (X_2 \leq x) \cap ... \cap (X_n \leq x)); \forall x\epsilon\mathbb{R} \\ &= P(X_1 \leq x) \times P(X_2 \leq x) \times ... \times P(X_n \leq x); \forall x\epsilon\mathbb{R} \\ &= F_{X_1}(x) \times F_{X_2}(x) \times ... \times F_{X_n}(x); \forall x\epsilon\mathbb{R}. \end{aligned}$$

on a de la même loi donc :

$$\begin{aligned} F_{X_{n,n}}(x) = &\ F_X(x) \times F_X(x) \times ... \times F_X(x) \quad ;\forall x\epsilon\mathbb{R} \\ &= [F_X(x)]^n \qquad ;\forall x\epsilon\mathbb{R}\ . \end{aligned}$$

et la dénsité de $X_{n,n}$:

$$\begin{aligned} f_{X_{n,n}}(x) = \tfrac{\partial}{\partial x} F_{X_{n,n}}(x) \quad &= \tfrac{\partial}{\partial x}\, [F_X(x)]^n \qquad\qquad ;\forall x\epsilon\mathbb{R}, \\ &= nf_X(x) \times [F_X(x)]^{n-1} \quad ;\forall x\epsilon\mathbb{R}. \end{aligned}$$

·Si varibles aléatoires indépendantes et ont la même loi on dit qu'elles sont identiquement distribués.

·La loi de la $k^{iéme}$ est :

$$F_{X_{k,n}}(x) = \sum_{j=k}^{n} C_n^j (F_X(x))^j (1 - F_X(x))^{n-j};\ \forall x\epsilon\mathbb{R}.$$

et la dénsité est :

$$f_{X_{k,n}}(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} (F_X(x))^{k-1} (1 - F_X(x))^{n-k} f_X(x)\ ;\ \forall x\epsilon\mathbb{R}.$$

$\cdot$*Si les varibles aléatoires* $X_1, ..., X_n$ *no iid donc :*

$$F_{X_{n,n}}(x) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x) \quad et \quad F_{X_{1,n}}(x) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - F_{X_i}(x)) \quad ; \forall x \epsilon \mathbb{R}.$$

■

Remarque 2.1.2 *Soit* $X_1, ..., X_n$ *n varibles aléatoires on a :*

$$\min(X_1, ..., X_n) = -\max(-X_1, ..., -X_n).$$

2.2 La distribution des valeurs extrêmes (TVE)

Avant de discuter de la loi des valeurs extrêmes ,vous devez connaître quelques bases.

2.2.1 Caractéristiques générales[1]

La fonction à variation lente

Définition 2.2.1 *On peut dire que la fonction* $L(x)$ *est une fonction à variation lente ssi :*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{L(tx)}{L(t)} = 1.$$

ou :

$$\lim_{x \to \infty} L(x) = cte.$$

La fonction à variation régulière

Nous avons la fonction à variation lente $L(x)$ donc :

Définition 2.2.2 *On peut dire que la fonction* $H(x)$ *est une fonction à variation* *régulière d'ordre α ssi :*

$$H(x) = x^{\alpha} \times L(x).$$

Théorème 2.2.1 *de Binghour et all (1984) :Si $h : [0, \alpha] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est mesurable ,h est à variation régulière d'ordre α ssi :*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{h(tx)}{h(t)} = x^{\alpha}.$$

Théorème 2.2.2 *de Marice 2000 :Si $h : [0, \alpha] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable est à variation régulière à dioite de 0 ssi :*

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{h(tx)}{h(t)} = x^{\alpha}; \alpha > 0.$$

La fonction de survie :

Définition 2.2.3 *Soit X est une varible aléatoire définie sur un espace de probabilié $(\Omega, \mathcal{F}, P)$,avec F est fonction de répartition donc la fonction de survie est donnée par :*

$$\overline{F}(x) = 1 - F(x) = P(X > x); \forall x \in \mathbb{R}.$$

Le point terminal de F :

Définition 2.2.4 *le point terminal x_p de la fonction de répartition F est :*

$$x_p := \sup \{x \in \mathbb{R} : F(x) < 1\}.$$

La fonction de F^{-1} : [22]

Définition 2.2.5 *La fonction de F^{-1} est la fonction inverse est donné par :*

$$F(x) = y \Leftrightarrow F^{-1}(y) = x.$$

2.2.2 La loi de valeur extrême

Théoréme Fisher_Typet(1928)[1]

Définition 2.2.6 *Soit $X_1, ..., X_n$ est n varibles aléatoires iid de distribution $F_X(x)$,et il'ya donnée la statistique d'ordre $X_{1,n}, ..., X_{n,n}$ .S'il existe $a_n > 0$et $b_n \in \mathbb{R}$ telles que :*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_{n,n} - b_n}{a_n} \leq x\right) = G_X(x); \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned}
(\ \lim_{n\to\infty} P\left(\tfrac{X_{n,n}-b_n}{a_n} \leq x\right) &= \lim_{n\to\infty} P(X_{n,n} - b_n \leq a_n x) \quad &&; \forall x \in \mathbb{R} \\
&= \lim_{n\to\infty} P(X_{n,n} \leq a_n x + b_n) &&; \forall x \in \mathbb{R} \\
&= \lim_{n\to\infty} F_{X_{n,n}}(a_n x + b_n) &&; \forall x \in \mathbb{R} \\
&= \lim_{n\to\infty} (F_X(a_n x + b_n))^n &&; \forall x \in \mathbb{R}.)
\end{aligned}$$

alors $G_X(x)$ apportient à trois distributions de valeurs extrêmes :

Loi Gumble -Nous symbelisons la distribution de Gumbel avec :$D(\Lambda)$.

-On dit que $G_X(x)$ est distribution de Gumbel ssi :

$$G_X(x) = \Lambda(x) = \exp(-\exp(-x)); \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

-Si $F_X(x)$ est dans le domaine d'attraction de Gumbel alors :

$$a_n = F_X^{-1}(1 - \frac{1}{ne}) - F_X^{-1}(1 - \frac{1}{n}); \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

$$b_n = F_X^{-1}(1 - \frac{1}{n}); \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

Exemple 2.2.1 *$X_1, ..., X_n$ iid ,et $X_i \rightsquigarrow$ exponentielle(2) donc :*

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-2x); x \geq 0\ . \\ 0; x < 0\ . \end{cases}$$

$\exists b_n \in \mathbb{R}, a_n > 0$:

$\lim_{n\to\infty} F_{X_{n,n}}(a_n x + b_n) = \lim_{n\to\infty}(F_X(a_n x + b_n))^n = \exp(-\exp(-x))$?

Calculer $F_X^{-1}(y)$ *:*

$$y = F_X(x) = \begin{cases} si : x \geq 0 \Rightarrow y = 1 - \exp(-2x) \Leftrightarrow 1 - y = \exp(-2x) \Leftrightarrow x = \frac{-1}{2}\log(1-y). \\ si : x < 0 \Rightarrow y = 0 \ . \end{cases}$$

donc :

$$F_X^{-1}(y) = \frac{-1}{2}\log(1-y).$$

donc :

$$\begin{aligned} b_n \quad &= F_X^{-1}(1 - \tfrac{1}{n}) \\ &= \tfrac{-1}{2}\log\left(1 - \left(1 - \tfrac{1}{n}\right)\right) \\ &= \tfrac{-1}{2}\log\left(\tfrac{1}{n}\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\log n. \end{aligned}$$

alors :

$$b_n = \frac{1}{2}\log n.$$

$$\begin{aligned} a_n &= F_X^{-1}(1 - \frac{1}{ne}) - F_X^{-1}(1 - \frac{1}{n}) \\ &= \frac{-1}{2}\log(1 - (1 - \frac{1}{ne})) - \frac{1}{2}\log n \\ &= \frac{1}{2}(\log(ne) - \log n) = \frac{1}{2}(\log n + \log e - \log n) \\ &= \frac{1}{2}(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow a_n = \frac{1}{2} \ . \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(F_X(a_nx+b_n))^n &= \lim_{n\to\infty}(F_X(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\log n))^n \\
&= \lim_{n\to\infty}(1-\exp(-2(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\log n)))^n \\
&= \lim_{n\to\infty}(1-\exp(-(x+\log n)))^n \\
&= \lim_{n\to\infty}(1-\exp(-x)\times\exp(-\log n))^n \\
&= \lim_{n\to\infty}(1-\frac{\exp(-x)}{n})^n \\
&= \exp(-\exp(-x)); \forall x\in\mathbb{R} \ .
\end{aligned}$$

Donc $\exists a_n > 0, b_n \in \mathbb{R} : F_X(x) \in D(\Lambda)$.

Loi fréchet -Nous symbelisons la distribution de fréchet avec :$D(\Phi_\gamma)$.

-Le paramètre $\gamma > 0$.

-On dit que $G_X(x)$ est distribution de fréchet ssi :

$$G_X(x) = \Phi_\gamma(x) = \begin{cases} \exp(-x^{\frac{-1}{\gamma}}); x \geq 0. \\ 0; x < 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

-Si $F_X(x)$ est dans le domaine d'attraction de fréchet alors :

$$a_n = F_X^{-1}(1-\frac{1}{n}); \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.5}$$

$$b_n = 0; \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.6}$$

Proposition 2.2.1 *Si $L(x)$ fonction à variation lente on a :*

$$F(x) = 1 - F(x) = x^{\frac{-1}{\gamma}} \times L(x) \Leftrightarrow F_X(x) \in D(\Phi_\gamma); \forall x \in DF. \tag{2.7}$$

Loi Weibull -Nous symbelisons la distribution de Weibull avec :$D(\Psi_\gamma)$.

-Le paramètre $\gamma < 0$.

-On dit que $G_X(x)$ est distribution de Weibull ssi :

$$G_X(x) = \Psi_\gamma(x) = \begin{cases} 1; x > 0. \\ \exp(-(-x)^{\frac{-1}{\gamma}}); x \leq 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

-Si $F_X(x)$ est dans le domaine d'attraction de Weibull alors :

$$a_n = F_X^{-1}(1) - F_X^{-1}(1 - \frac{1}{n}); \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.9}$$

$$b_n = F_X^{-1}(1); \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.10}$$

Proposition 2.2.2 -$X \in D(\Phi_1) \Rightarrow \log(X) \in D(\Lambda)$.

-$X \in D(\Psi_{-1}) \Rightarrow \frac{-1}{X} \in D(\Phi_1)$.

-$X \in D(\Psi_{-1}) \Rightarrow \log(\frac{-1}{X}) \in D(\Lambda)$.

Max stable[11] On dit que $G_X(x)$ est distribution de max-stable ssi : $G_X(x) = F_X(x)$.

Exercise 2.2.1 *On a :*

$$F_X(x) = \begin{cases} 1; x \leq 0. \\ \exp(\frac{-2}{x}); x \geq 0. \end{cases}$$

pour $a_n = n$ et $b_n = 0$ est-ce que $F_X(x)$ distribution max-stable ?.

Solution 2.2.1

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} P(\tfrac{X_{n,n}-b_n}{a_n} \leq x) &= \lim_{n\to\infty} P(X_{n,n} \leq a_n x + b_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} F_{X_{n,n}}(a_n x + b_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} (F_X(nx+0))^n.\end{aligned}$$

si $x \geq 0$ *:*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(F_X(nx+0))^n &= \lim_{n\to\infty}(\exp(\tfrac{-2}{nx}))^n \\ &= \lim_{n\to\infty}(\exp(\tfrac{-2n}{nx})) \\ &= \lim_{n\to\infty}(\exp(\tfrac{-2}{x})) \\ &= \exp(\tfrac{-2}{x}) = F_X(x).\end{aligned}$$

si $x \leq 0$ *:* $\lim_{n\to\infty}(F_X(nx+0))^n = 1 = F_X(x)$ *.*

donc $\lim_{n\to\infty} P(\frac{X_{n,n}-b_n}{a_n} \leq x) = F_X(x)$ *.*

Donc $F_X(x)$ *est distribution max-stable .*

Distribution dégénére

Définition 2.2.7 *On dit que* $G_x(x)$ *est distribution dégénére ssi :* $G_X(x)$ *prends les valeuir* 0 *ou* 1 *(*$G_X(x) = \Pi_{\{F_X(x)=1\}}$*).*

2.3 La distribution généralisées (GEV et GPD)

On parle dans cette section par la distribution des valeurs extremes généralisées avec on utilise la théorème central limite ,et la distribution de Pareto généralisée.

2.3.1 Distribution des valeurs extremes généralisées (GEV)

Théorème central limite (TCL) :[18]

Soit $X_1, ..., X_n$ varibles aléatoires iid de moyenne μ et de variance $\delta^2 < \infty$ alors :

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\delta/\sqrt[2]{n}} \longrightarrow_{n\to\infty} N(0,1).$$

Théorème des valeurs extrêmes généralisées (GEV)[1]

Définition 2.3.1 *Soit $X_1, ..., X_n$ n valeurs extrêmes iid de loi $F_X(x)$,et de statistique d'ordre $X_{1,n}, ..., X_{n,n}$,il existe $a_n > 0$ et $b_n \in \mathbb{R}$ ($\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_{n,n}-b_n}{a_n} \leq x\right)$) ;nous trouvons la distribution des valeurs extrêmes généralisées notée $H_\gamma(x)$ est donnée par :*

$$H_\gamma(x) = \begin{cases} \exp(-(1+\gamma x)^{\frac{-1}{\gamma}}); \gamma \neq 0, 1+\gamma x > 0, \\ \exp(-\exp(-x)); \gamma = 0, -\infty \leq x \leq +\infty. \end{cases} \tag{2.11}$$

telle que :2.3.1

b_n : paramètre de position (TCL(μ)).

a_n : paramètre d'ehelle (TCL($\delta/\sqrt[2]{n}$)).

γ : l'indice des valeurs extrêmes .

La densité de distribution des valeurs extremes généralisées

Définition 2.3.2 *On a $H_\gamma(x)$ est la distribution des valeurs extremes généralisées ,telle que :*

$$h_\gamma(x) = \frac{\partial}{\partial x} H_\gamma(x) \ .$$

donc :

$$h_\gamma(x) = \begin{cases} (1+\gamma x)^{\frac{-1}{\gamma}-1} \times \exp(-(1+\gamma x)^{\frac{-1}{\gamma}}); \gamma \neq 0. \\ \exp(-x-\exp(-x)); \gamma = 0. \end{cases} \tag{2.12}$$

Proposition 2.3.1 *:*-$\Lambda(x) \cong H_0(x); \forall x \in \mathbb{R}.$

-$\Phi_\alpha(x) \cong H_{\frac{1}{\alpha}}(\alpha(x-1)); x > 0.$

-$\Psi_\alpha(x) \cong H_{\frac{-1}{\alpha}}(\alpha(x+1)); x < 0.$

2.3.2 La distribution de Pareto généralisée (GPD)

Avant de parler sur la distribution de Pareto généralisée il fout d'abord parler surla distribution des excés.

Distribution des excés [18]

Définition 2.3.3 *Soit* $X_1, ..., X_n$ *iid de distribution* $F_X(x)$,*et* $Y_1, ..., Y_{N_u}$ *iid de distribution* $F_u(y)$ *avec* $N_u \leq n$, $Y_i = X_i - u$ *si* $X_i \geq u$, $u < x_p$ *fixé et* X, Y *de même loi donc la distribution des excés est :*

$$F_u(y) = P(Y \leq y / X > u) = \frac{F_X(y+u) - F_X(u)}{\overline{F_X(u)}}. \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}
F_u(y) &= P(Y \leq y / X > u) \\
&= \frac{P(Y \leq y, X > u)}{P(X > u)} \\
&= \frac{P(X - u \leq y, X > u)}{1 - P(X \leq u)} \\
&= \frac{P(X \leq y + u, X > u)}{1 - P(X \leq u)} \\
&= \frac{P(u < X \leq y + u)}{1 - P(X \leq u)} \\
&= \frac{F_X(y+u) - F_X(u)}{\overline{F_X}(u)}.
\end{aligned}$$

2.3.3 Généralisée la distribution de Pareto (GPD)[18]

La généralisation de la distribution de pareto est donnée par :

$$G_{\gamma,\beta}(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\gamma}{\beta}x\right)^{\frac{-1}{\gamma}}; \gamma \neq 0. \\ 1 - \exp\left(\frac{-x}{\beta}\right); \gamma = 0. \end{cases} \tag{2.14}$$

et définie pour :

$$\begin{cases} x \geq 0; \gamma \geq 0. \\ 0 \leq x \leq \frac{-\beta}{\gamma}; \gamma < 0. \end{cases}$$

La dénsite de GPD

On a $G_{\gamma,\beta}(x)$ est la distribution de Pareto généralisée telle que :

$$g_{\gamma,\beta}(x) = \frac{\partial}{\partial x} G_{\gamma,\beta}(x)\ . \tag{2.15}$$

donc :

$$g_{\gamma,\beta}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta}\left(1 + \frac{\gamma}{\beta}x\right)^{\frac{-1}{\gamma}-1}; \gamma \neq 0. \\ \frac{1}{\beta}\exp\left(\frac{-x}{\beta}\right); \gamma = 0. \end{cases} \tag{2.16}$$

Proposition 2.3.2 *:La relation entre GEV et GPD est :*

$$G_{\gamma,\beta}(x) = 1 + \log(H_\gamma(x)); \log(H_\gamma(x)) > -1. \tag{2.17}$$

Théoréme Balkema de Haan et Pickands 1954 (BDHP)[18]

Théorème 2.3.1 *Si F appartiont à l'un des trois distribution de valeurs extremes (Gumbel,Fréchet et Weibull) ,F_u est la fonction de répartition des excés et $G_{\gamma,\beta}(x)$ est GPD alors il exist une fonction $\beta(u) > 0$ telle que :*

$$\lim_{u \to x_p} \sup_{0<x<x_p-u} \left| F_u(x) - G_{\gamma,\beta(u)}(x) \right| = 0; \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.18}$$

Chapitre 3

La mesure de risque à deux déviations

La survenance d'événements rares provoquant des pertes importantes a stressé de nombreux scientifiques, c'est pourquoi des efforts vigoureux ont été faits pour mesurer ces risques.

Des mesures de risque ont été donc crées, chacune ont des inconvénients et des avantages. Par exemple, sur les marchés financiers, les actifs financiers diffèrent (CAC40,DAX,...), et donc les rendements des actifs diffèrent.

Notre objectif dans ce chapitre est de définir le mesures de risque, et présenter leurs caractéristiques, et de définir la mesure la plus utilisée dans le domaine des marchés financiers, dons lequel est le risk à deux déviation.

3.1 Mesures de risque

3.1.1 Les définition

Définition 3.1.1 *(Le risque)Le risque a plusieurs définitions tout dépend de leur domaine on utilisation, et l'une de ses définitions est qu'il s'agit de la possibilité qu'un événement indésirable se produise , c'est-à-dire la possibilité d'être exposé à un moment donné.*

Définition 3.1.2 *(la mesures)Une mesure est une fonction qui relie une quantité numérique telle que la volume , la longueur ,la surface ou la probabilité à certains sous-ensembles d'un ensemble donné.*

Définition 3.1.3 *(la mesures de risque [18])Le mesures de risque est une application fonctionnelle de distribution des pertes ou des profits vers les nombres réels.*

$$F : X \to \mathbb{R} \ .$$

3.1.2 Les proprété

Proposition 3.1.1 *La moyenne , la variance et l'écart-type sont considérés comme mesures se risque .*

-En utilisant la moyenne ,nous constatons que la mesure de risque est défini comme suit :

$$F(X) = (1+\alpha)\, E(X) \quad ; \ avec\ \alpha \geq 0. \tag{3.1}$$

-En utilisant la variance ,nous constatons que la mesure de risque est défini comme suit :

$$F(X) = E(X) + \alpha Var(X) \quad ; \ avec\ \alpha \geq 0. \tag{3.2}$$

-En utilisant la moyenne ,nous constatons que la mesure de risque est défini comme

suit :

$$F(X) = E(X) + \alpha \sqrt[2]{Var(X)} \;\; ; \;\; avec\ \alpha \geq 0. \tag{3.3}$$

3.1.3 Le mesure de risque cohérente [1]

Proposition 3.1.2 *Pour être le mesure de risque $F(X)$ est un mesure de risque cohérente ; vous devez vérifier que 3.1.3 :*

- $F(X)$ *est invariance par translation.*
- $F(X)$ *est homogénéité.*
- $F(X)$ *est monotonie.*
- $F(X)$ *est sous-additivité.*

Proposition 3.1.3 *[4]*

-$F(X)$ *invariance par translation :*

$F(X + a) = F(X) + a$ *;avec* a *cst.*

-$F(X)$ *homogénéité :*$F(aX) = aF(X)$ *; avec* a *cst.*

-$F(X)$ *monotonie :*$X \leq Y \Rightarrow F(X) \leq F(Y)$.

- $F(X)$ *sous-additivité :*$F(X + Y) \leq F(X) + F(Y)$.

- $F(X)$ *additivité comonotone :*$F(X + Y) = F(X) + F(Y)$.

3.1.4 Le mesure de risque de distorsion [18]

Définition de mesure de risque de distorsion ($F_g(X)$)

Définition 3.1.4 $F_g(X)$ *est une'espérance distordue de toute les variables aléatoires non-négatives* α *de perte avec l'utilisantion de la fonction de distribution décumulative .*

$$S(x) = 1 - F(x) = P(X > x) \ . \tag{3.4}$$

Alors :

$$F_g(X) = \int_0^{+\infty} g\left(S(x)\right) dx \ . \tag{3.5}$$

Avec g est une fonction croissante dans $[0.1]$ *avec* $g(0) = 0$ *et* $g(1) = 1$ *.*

Remarque 3.1.1 *g est une fonction de distorsion et $g(S(x))$ fonction de survie 2.2.1 ajustée de risque .*

Les proprites

Pour être le mesure de risque $F_g(X)$ est un mesure de risque de distorsion ; vous devez vérifier que :3.1.3

- $F_g(X)$ est invariance par translation .

- $F_g(X)$ est homogénéité positive .

- $F_g(X)$ est monotonie .

-$F_g(-X) = -F_{\tilde{g}}(X)$ avec $\tilde{g}(X) = 1 - g(1 - x)$.

-Si il existe $F_g(X)$ on a : $ie \quad X_n \to^w X \Rightarrow F_g(X_n) \to F_g(X)$.

- $F_g(X)$ ne sont pas additive seulement si X et Y sont des risques comonotones ,alors tu nous donnes $F_g(X)$ additivité comonotone .

-Si $g(X)$ est concave ,alors $F_g(X)$ est sous-additive .

-Si g fonction distorsion non-décroissante ,alors $F_g(X)$ est consistante à la domination stochastique3.1.3 d'ordre 01 :

$$X \leq_1 Y \Rightarrow F_g(X) \leq F_g(Y) .$$

et si c'est g aussi concave donc à la domination stochastique3.1.3 d'ordre 02 :

$$X \leq_2 Y \Rightarrow F_g(X) \leq F_g(Y) .$$

-La mesure de risque F_g est strictement consistante à la domination stochastique3.1.3 du deuxième ordre si seulement si g est une fonction distorsion concave.

Remarque 3.1.2 *-La mesure distorsion de risque concave de risque est une mesure de risque cohérente.*

-Toutes F(X) cohérente est consistante avec la domination stochastique d'ordre 02 .

Remarque 3.1.3 *Stochastique domination c'est une forme de randomisation, qui nous permet de créer une classification de différentes hypothèses dans un ensemble partiellement ordonné .*

Remarque 3.1.4 *La variance et la déviation standard ne fournissent pas beaucoup d'informations sur le risque extrême, c'est-à-dire qu'ils ne prennent pas en compte les risques d'événements de perles importantes.*

Par conséquent, Risque à deux déviation à été utilisé comme indicateur qui constitue une mesure des risque à un monent donné.

3.2 Risque à deux déviation (TSD)

Après avoir utilisé la variance et la déviation standard comme mesures de risque à un moment donné et constaté qu'ils ne prenaient pas en compte les pertes réelles dans queues lourdes .

Par conséquent, de nombreuses mesures de risque ont été trouvées, notamment VaR , TVaR , CTE , CVaR , ES , Risque à deux déviation et d'autres.

Dans cette section, nous concentrerons sur la mesure à deux déviation présente par Wang [20] in 1998.

3.2.1 Définition le risque à deux déviations (TSD)

Définition 3.2.1 *Il s'agit d'une méthode de mesure du risque dans le cas de queues lourdes pour évaluer les pertes reélles d'incidents spécifiques à un moment précis.*

C'est la mesure la plus appropriée du risque financier et elle est connue mathématiquement [18] avec :

$$\Delta_r(X) = \int_0^1 J_r(s)Q(s)ds \ , si \ 0 < r < 1 \ . \tag{3.6}$$

pour :

$$J_r(s) = \left(\frac{r}{2}\right) \frac{s^{1-r} - (1-s)^{1-r}}{s^{1-r}(1-s)^{1-r}}, si \ \ 0 < s < 1 \ . \tag{3.7}$$

3.2.2 Les L-fonction auxiliaire

Meraghni et Necir ont trouvé une grandeur naturelle proche de laL- fonction en utilisant théorême des valeurs extrêmes, et elle peut être utilisée dans le cas de distributions queue lourde pour les mesures de risque financier.

Les L-fonctions [18]

Définition 3.2.2 *Soit F la fonction distribution de la variables aléatoires réelle X, on définie L-fonction par :*

$$L(J) = \int_0^1 J(s)Q(s)ds. \tag{3.8}$$

où :

$$Q(s) = \inf \{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq s\}, si \ 0 < s \leq 1. \tag{3.9}$$

Avec la fonction mesurable J dans $[0, 1]$,et F la fonction quantile associée.

Remarque 3.2.1 *Pour toute $\beta \in \mathbb{R}$ et $0 < \alpha < 2$ il existent les L-fonction $L(J)$ telle que $\frac{1}{\alpha} - \beta < 1$.*

Certaines les L-fonction [18]

Répondre à certaines questions liées au distributions queue lourde et aux paramètres des coupés n'en fait qu'un.

Trouver Elamir et Seheult [6] des moments TL des quatre premières théories sont :

$$m_i = \int_0^1 J_i(s)Q(s)ds, i = 1, 2, 3, 4, \tag{3.10}$$

pour :

$$J_i(s) = s(1-s)\phi_i(s), 0 < s < 1, \tag{3.11}$$

Avec un degré de $(i-1)$ nous définissons ϕ_i comme :

$$\begin{aligned}
\phi_1(s) &= 6, \\
\phi_2(s) &= 6(2s-1), \\
\phi_3(s) &= \frac{20}{3}(5s^2 - 5s + 1), \\
\phi_4(s) &= \frac{15}{2}(14s^3 - 21s^2 + 9s - 1).
\end{aligned}$$

Jones et Zetikis [9] ont trouvé une relation entre L-statistiques classiques et la mesurede risque distorsion, La théorême centrale limite a beaucoup contribué en discutant de cette théorie.

Necir et al [16] ont utilisé cette théorie pour développer la théorie des statistiques inférentielle de ce type de mesure de risque dans le cas des distributions à queue lourde.

L-fonction a de nombreuses applications pour mesurer le risque actuel. Exemple

$B(X)$prime de risque déformée :

$$B(X) = \int_0^{\infty} G(1 - F(x))dx. \tag{3.12}$$
$$= \int_0^1 g(1-s)Q(s)ds.$$

avec :

$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)dt.$$

Avec G fonction concave et non décroissante dans $[0, 1]$ avec $G(0) = 0$ et $G(1) = 1$.

Necir et Meraghni [14] déterminent $H(X)$ les mesures des risques distorsions dans le cas de la queue lourde des rendements financiers en exploitant $B(X)$, où $X \in \mathbb{R}$ représente les données financières donc :

$$H(X) = \int_{-\infty}^{0} \left(G(1 - F(x)) - 1\right) dx + \int_0^{+\infty} G(1 - F(x))dx. \tag{3.13}$$
$$= \int_0^1 g(1-s)Q(s)ds.$$

Remarque 3.2.2 *$B(X), H(X)$ et $\Delta_r(X)$ sont des L-fonction.*

3.3 Estimateur de $\Delta_r(X)$

3.3.1 Estimation les L-fonction

Pour estimes $\Delta_r(X)$ doit d'abord estimes les L-fonction :

Définition les estimation de L-fonction [18]

Définition 3.3.1 *Soit $X_1, ..., X_n$ est une n variables aléatoires ; avec F est un fonction de distribution donc l'estimateur $L(J)$ 3.8 est :*

$$\hat{L}_n(J) = \int_0^1 J(s)Q_n(s)ds. \tag{3.14}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_{i,n}X_{i,n}.$$

avec :

$$Q_n(s) = \inf \{x \in \mathbb{R} : F_n(x) \geq s\}, si0 < s \leq 1. \tag{3.15}$$

pour :

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum \Pi \{X_i \leq x\}, x \in \mathbb{R}. \tag{3.16}$$

où

$$a_{i,n} = \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} J(s)ds, i = 1, ..., n. \tag{3.17}$$

La distribution normal pour la statistique L-fonction

Est donnée par ([18]) :

$$\sqrt[2]{n}\left(\hat{L}_n(J) - L(J)\right) \rightarrow^D N\left(0, \sigma_n^2(J)\right), \text{ telle que } n \rightarrow \infty. \tag{3.18}$$

avec :

$$\sigma_n^2(J) = \int_0^1 \int_0^1 (\min(s,t) - st)\, J(s)J(t)dQ(s)dQ(t) < \infty. \tag{3.19}$$

Cette instruction 3.18 correspond à théorême centrale limite ; Depuis que l'instruction 3.19 a résolu le problème de la variance de $L(J)$ est infinie.

3.3.2 Estimateur de quantile extrême [18]

Soit F fonction de distribution de la variables aléatoires X et t la distance entre les X_i $(t = X_{i+1} - X_i)$.

On a x_R représentant les quantités extrêmes à droite telles que :

$$1 - F(x_R) = t, \text{ donc } x_R = Q(1-t).$$

et x_L représentant les quantités extrêmes à gauche telles que :

$$F(x_L) = t, \text{ donc } x_L = Q(t).$$

On a $m = m_n$ et $l = l_n$ deux séquences entiers $(\mathbb{Z})$. telles que :

$$1 < l < n, 1 < m < n, l \to \infty, m \to \infty, \frac{l}{n} \to 0, et \frac{m}{n} \to 0, \ pour \ n \to \infty. \tag{3.20}$$

Alors :

$$\hat{x}_L = Q_L^W(t) = -\left(\frac{nt}{l}\right)^{-\frac{1}{\hat{\alpha}_L^H}} X_{l,n} \text{ , et } \hat{x}_R = Q_R^W(1-t) = \left(\frac{nt}{m}\right)^{-\frac{1}{\hat{\alpha}_R^H}} X_{n-m,n}$$

avec :

$$\hat{\alpha}_L^H = \hat{\alpha}_L^H(l) = \left(\frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l} \log^+(-X_{i-1,n}) - \log^+(-X_{l,n})\right)^{-1}, \tag{3.21}$$

et

$$\hat{\alpha}_R^H = \hat{\alpha}_R^H(m) = \left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \log^+(X_{n-i+1,n}) - \log^+(X_{n-m,n})\right)^{-1}. \tag{3.22}$$

Ce dernier me donne deux formes d'estimations Hill [8] de l'indo : ice α.

On but $Z_{1,n}, ..., Z_{n,n}$ la statistiques d'order de l'échantillon de Z alors :

$$\hat{\alpha} = \hat{\alpha}(k) = \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \log^{+} \left(Z_{n-i+1,n} \right) - \log^{+} \left(Z_{n-k,n} \right) \right)^{-1}. \tag{3.23}$$

L'estimation de $\hat{\Delta}_{r,n}$ de la mesure de risque à deux déviation :

Le Δ_r 3.6 est un la moyenne de la queue déviation à droite $D_r^R [X]$ et à gauche $D_r^L [X]$ pour $0 < r < 1$ avec :

$$D_r^R [X] = \int_{-\infty}^{\infty} \left([1 - F(x)]^r - [1 - F(x)] \right) dx, \tag{3.24}$$

et

$$D_r^L [X] = D_r^R [-X] = \int_{-\infty}^{\infty} \left([F(x)]^r - F(x) \right) dx. \tag{3.25}$$

alors :

$$\Delta_r = \Delta_r [X] = \frac{1}{2} \left(D_r^L [X] + D_r^R [X] \right), \ si \ 0 < r < 1. \tag{3.26}$$

C'est l'équivalent de l'expression précédente 3.6.

-Les $\Delta_{n,r}$ est une l'estimation non-paramêtrique de Δ_r 3.6, soit $X_{1,n}, ..., X_{n,n}$ les statistiques d'order de variables aléatoires $X \sim S(\delta, \beta, \gamma)$ on a :

$$\begin{aligned} \Delta_{n,r} &= \int_0^1 J_r(s) Q_n(s) ds \ , si \ 0 < r < 1, \qquad (3.27) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{i,n}^{(r)} X_{i,n}. \end{aligned}$$

De sorte que l'expression Qn dans 3.15 . et :

$$a_{i,n}^{(r)} = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{i-1}{n} \right)^r - \left(1 - \frac{i}{n} \right)^r + \left(\frac{i-1}{n} \right)^r - \left(\frac{i}{n} \right)^r \right]. \tag{3.28}$$

Soit $b_{n,r}$ est le biais et $e_{n,r}$ est l'erreur moyenne quadratique est donnée par :

$$b_{n,r} = E\left[\Delta_{n,r} - \Delta_r\right] \text{ ,et } e_{n,r} = \sqrt[2]{E\left[\Delta_{n,r} - \Delta_r\right]^{\,2}},$$

Pour tout $0 < r < 1$:

$$b_{n,r} = 0 \text{ ,et } e_{n,r} = \frac{\delta_r}{\sqrt[2]{n}}$$

avec :

$$\delta_r^2 = \int_0^1 \int_0^1 \left(\min\left(s,t\right) - st\right) J_r(s) J_r(t) dQ(s) dQ(t). \tag{3.29}$$

Remarque 3.3.1 *Puisque l'erreur est $e_{n,r}$, alors $\Delta_{n,r}$ 3.27 est une quantité non-biaisée dans $0 < r < 1$.*

Proposition 3.3.1 *Necir et Meraghni [16] ont créé une méthode d'estimation pour inclure les cas qui la variances infinies quoi qu'il en soit la queues distribution de la finance où d'assurance, C'est par l'exploitation la théorême des valeurs extrêmes , on utilises F (appartient au domaine d'attraction de la distribution de Lévy stable)[18]. L'estimateur normal semi-paramétrique $\tilde{\Delta}_{n,r}^{*}$ asymptotique a été trouvé pour Δ_r 3.6 et donnée par [18] :*

$$\tilde{\Delta}_{n,r}^{*} = \int_0^{\frac{l}{n}} J_r(s) Q_L^W(s) ds + \int_{\frac{l}{n}}^{1-\frac{m}{n}} J_r(s) Q_n(s) ds + \int_{1-\frac{m}{n}}^{1} J_r(s) Q_R^W(s) ds, \tag{3.30}$$

avec :

$$Q_L^W(t) = -\left(\frac{nt}{l}\right)^{-\frac{1}{\hat{\alpha}_L^H}} X_{l,n} \text{ et } Q_R^W(1-t) = \left(\frac{nt}{m}\right)^{-\frac{1}{\hat{\alpha}_R^H}} X_{n-m,n} \text{ , avec } t \downarrow 0.$$

Q_R^W et Q_L^W sont des estimateurs de Weissman [21], où Q_R^W est une quantité droite et Q_L^W est une quantité gauche.

(Notez que les deux fonctions $s \to Jr(s) Q_L^W(s)$ et $s \to Jr(s) Q_R^W(s)$ sont à variation régulière avec les indices de queue $r - 1 - \frac{1}{\hat{\alpha}_L^H}$ et $r - 1 - \frac{1}{\hat{\alpha}_R^H}$ respectivement,pour tout

n grand)[18] *,alors :*

$$\int_0^{\frac{l}{n}} J_r(s)Q_L^W(s)ds = -(1+o(1))\frac{\left(\frac{l}{n}\right)J\left(\frac{l}{n}\right)}{r-\frac{1}{\hat{\alpha}_L^H}}X_{l,n} \ , \tag{3.31}$$

et

$$\int_0^{\frac{l}{n}} J_r(s)Q_R^W(s)ds = (1+o(1))\frac{\left(\frac{m}{n}\right)J\left(1-\frac{m}{n}\right)}{r-\frac{1}{\hat{\alpha}_R^H}}X_{m,n} \ . \tag{3.32}$$

pour :

$$r-\frac{1}{\hat{\alpha}_L^H} > 0 \ , et \ r-\frac{1}{\hat{\alpha}_R^H} > 0 \ .$$

et on a :

$$J(\frac{l}{n}) = -(1+o(1))\frac{r}{2}\left(\frac{l}{n}\right)^{r-1} \ , \ et \ J\left(1-\frac{m}{n}\right) = (1+o(1))\frac{r}{2}\left(\frac{m}{n}\right)^{r-1} \ .$$

donc nous pouvons utiliser $\hat{\Delta}_{n,r}$ *au lieu de* $\tilde{\Delta}^*_{n,r}$ 3.30 *:*

$$\hat{\Delta}_{n,r} = \frac{r}{2}\frac{\left(\frac{l}{n}\right)^r}{r-\frac{1}{\hat{\alpha}_L^H}}X_{l,n} + \sum_{j=l+1}^{n-m-1} a_{j,n}^{(r)}X_{j,n} + \frac{r}{2}\frac{\left(\frac{m}{n}\right)^r}{r-\frac{1}{\hat{\alpha}_R^H}}X_{n-m,n} \ . \tag{3.33}$$

Notation 3.3.1 *Si l'on suppose que la perte est positive pour les risques d'assurance, de nombreuses études similaires ont été menées, et pour plus d'informations à leur sujet, voir :Necir et al* [14] *;et Necir et Meraghni* [15]*.*

Théorème 3.3.1 *Pour* $0 < \alpha < 2$ *et* $F \in D(\alpha)$ *avec* $\frac{1}{(r+\frac{1}{2})} < \alpha < \frac{1}{r}$ *et* $0 < r < 1$ *.Ensuite pour toutes les séquences d'entiers m et l il remplissent les conditions* 3.20 *et* $\frac{l}{m} \to \theta < \infty$ *et* $\sqrt{ka}\left(\frac{m}{n}\right)A\left(\frac{m}{n}\right) \to 0, n \to \infty$*,donc pour* $n \to \infty$ *on a :*

$$\frac{\sqrt{n}\left(\hat{\Delta}_{n,r}(X) - \Delta_r(X)\right)}{\left(\frac{l}{n}\right)^{r-\frac{1}{2}}X_{l,n}} \to^D N\left(0, V_r^2\right),$$

avec :

$$V_r^2 = \frac{r^2}{4}\left(1 + \left(\frac{q}{p}\right)^{-\frac{2}{\alpha}} \theta^{\frac{2}{\alpha}-2r+1}\right) \tag{3.34}$$
$$\cdot\left(\frac{2\alpha^2 + (r\alpha - \alpha - 1)^2 + 2\alpha\,(r\alpha - \alpha - 1)}{2\,(r\alpha - 1)^4} + \frac{1}{r\alpha - 1}\right) + 1.$$

Conclusion

L'évaluation du risque de rendement des actifs est un processus essentiel dans le domaine de la gestion de portefeuille et la prévision d'investissement financier judicieuses. En utilisant une variété d'outils et de modèles tels que l'écart type, l'espérence et le TSD, les investisseurs peuvent évaluer les risques potentiels associés à un portefeuille d'actifs et comprendre leur impact potentiel sur le rendement financier. Cette évaluation contribue à prendre les bonnes décisions d'investissement et à atteindre l'équilibre requis entre risque et rendement, ce qui conduit finalement à améliorer la performance du portefeuille et à atteindre les objectifs financiers des investisseurs.

Bibliographie

[1] Abdelli,J(2018).Sur la théorie des valeurs extrêmes,mesures des risques et applications.Thése de Doctorat,Université de Biskra,Algérie.

[2] Adam, E. (2001). L'analyse fractale des marchés financiers. Stage effectué à Finama Asset Management.

[3] Artzner, P., Delbaen, F., J. M. Eber, Heath, D., 1999. Coherent measures of risk.Mathematical Finance.203-228.

[4] Bouchareb,S(2019).Sur Risque et mesure de risque.Mémoire des master,Université de Biskra,Algérie.

[5] Chambers J.M., Mallows C.L., Stuck B.W., 1976. A method for simulating stable random variables. Journal of the American Statistical Association, 71, p. 340-344.

[6] Elamir, E.A.H., Seheult, A.H., 2003. Trimmed L-moments. Computational Statistics and Data Analysis 43, 299-314.

[7] Fama, E.F. et Roll, R. (1971). Parameter Estimates for Symmetric Stable Distributions. Journal of the American Statistical Association, 66, 331-338.

[8] Hill, B. M., 1975. A simple approach to inference about the tail of a distribution. Ann. Statist. 3, 1136-1174.

[9] Jones, B. L. and Zitikis, R., 2003. Empirical estimation of risk measures and related quantities. North American Actuarial Journal. 7(4), 44-54.

[10] Kaiser, T., Brazauskas, V., (2006). Interval estimation of actuarial risk measures.North American Actuarial Journal, Volume 10, Number 4.

[11] Lardjani,M(2018).Distribution des Statistiques d'ordreet des Valeurs Extrêmes.Mémoire des master,Université de Biskra,Algérie.

[12] McCulloch, H. J. (1986). Simple consistent estimators of stable distribution parameters. Communications in statistics - simulations Vol. 15, 1109-1136.

[13] Monchaya Chiangpradit et al (2011). Confidence Interval Estimation for Right-Tailed Deviation Risk Measures Under Heavy-Tailed Losses. Chiang Mai J. Sci.2011 ; 38(1) : 13-22.

[14] Necir, A., Meraghni, D., and Meddi, F., 2007. Statistical estimate of the proportional hazard premium of loss. Scand. Actuar. J, no. 3, 147-161.

[15] Necir, A. and Meraghni, D. 2009. Empirical estimation of the proportional hazard premium for heavy-tailed claim amounts. Insurance Math. Econom. 45, no. 1, 49-58.

[16] Necir, A. and Meraghni, D., 2010. Estimating L-functionals for Heavy-tailed Distributions and Applications. Journal of Probability and Statistics. Volume 2010, ID707146.

[17] Rolski, T., Schmidli, H., Schmidt, V. and Teugels, J. (1999). Stochastic Processes for Insurance and Finance, John Wiley and Sons, New York.

[18] Touba,S(2013).Sur la l'estimation des parametres des lois stables.Thése de Doctorat,Université de Biskra,Algérie.

[19] Wang, S.S., 1996. Ordering of risks under PH-transforms. Insurance Mathematics and Economics 18, no. 2, 109-114.

[20] Wang, S., 1998. An actuarial index of the right-tail risk. North American Actuarial Journal. 2(2), 88-101.

[21] Weissman, I., 1978. Estimation of parameters and large quantiles based on the k largest observations. Journal of American Statistical Association. 73, 812-815.

[22] Weisstein,Eric W."Inverse Function." From MathWorld–A Wolfram Web Resource. https ://mathworld.wolfram.com/InverseFunction.html.

Annexe A : Logiciel R

Le langage R, créé en 1993 à l'Université d'Auckland, Nouvelle-Zélande, par Ross Ihaka et Robert Gentleman, est à la fois un langage de programmation et un environnement mathématique utilisés pour le traitement de données. Il permet d'effectuer une gamme étendue d'analyses statistiques, des modèles linéaires ou non-linéaires, des tests d'hypothèses, de la modélisation de séries chronologiques, de la classification, etc. De plus, il offre de nombreuses fonctions graphiques de qualité professionnelle, ce qui en fait un outil puissant pour les professionnels de divers domaines. Le nom du langage est un jeu de mots sur les initiales des prénoms de ses deux créateurs (Ross Ihaka et Robert Gentleman) ainsi que sur le nom du langage S, auquel il est apparenté.

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$E(.)$	:	Espérence un mathématique.
$Var(.)$	:	Variance un mathématique.
$\varphi_X(.)$	:	La fonction caractéristique de X.
$S_\alpha(\delta, \beta, \gamma)$	:	Un loi α-stable.
$f_X(.)$	:	La fonction de densite de X.
$F_X(.)$	:	La fonction de répartition de X.
m_n ou $X_{1,n}$	:	Le premier valeur extrême.
$X_{k,n}$	:	Le $K^{\text{iéme}}$ valeur extrême.
M_n ou $X_{n,n}$	:	Le dernier valeur extrême.
cte	:	Constante.
$v.ex$	:	Valeurs extrêmes.
$v.a$	:	Variables aléatoires.
$v.a.r$	:	Variables aléatoires réels.
iid	:	Indépendantes identiquement distribués
TCL	:	Théorême centrale limite.
TVE	:	Théorême valeurs extrêmes.

$D(\Lambda)$	:	Distribution de Gumbel.
$D(\Phi_\alpha)$	:	Distribution de Frechet.
$D(\Psi_\alpha)$	:	Distribution de Weibull.
GEV	:	Valeurs extrêmes généralisées.
GPD	:	Généralisée la distribution de Pareto
$BDHP$	:	Théorême de Balkema de Haan et Pickands (1954).
$F_g(x)$	:	Le mesure de risque de distorsion.
VaR	:	Valeur à Risque.
TSD	:	Risque à deux déviations.
DF	:	Domaine d'une fonction .
ie	:	En d'autre terme.

ملخص

بالأساس، تتسم الأسواق المالية بتقلبها الشديد، والذي يعتمد على عوامل يصعب تنبؤها للغاية، بما في ذلك العوامل الجيوسياسية، والمخاطر المناخية، وحتى الأحداث الاقتصادية والإنتاجية. ونتيجة لذلك، يكون المستثمرون ومديرو المخاطر حساسين بشكل خاص لحدوث خسائر كبيرة. وفي هذا السياق، يعد توفر الأدوات اللازمة لتحديد المخاطر المرتبطة بتقلبات الأسعار أمرا مهمًا ,حيث قدمنا مقياسا للمخاطر الاكثر ملاءمة لهذا النوع من المخاطر.

Résumé

Fondamentalement, les marchés financiers se caractérisent par une forte volatilité, qui dépend de facteurs très difficiles à prévoir, notamment des facteurs géopolitiques, des risques climatiques, voire des événements économiques et productifs. En conséquence, les investisseurs et les gestionnaires de risques sont particulièrement sensibles à la survenance de pertes importantes. Dans ce contexte, la disponibilité d'outils permettant d'identifier les risques associés aux fluctuations des prix est importante, d'ou on a presenté une mesure de risque(TSD) .la plus à propriée , Pour ce genre de risque.

Abstract

Fundamentally, financial markets are characterized by high volatility, which depends on factors that are very difficult to predict, including geopolitical factors, climate risks, and even economic and production events. As a result, investors and risk managers are particularly sensitive to the occurrence of significant losses. In this context, the availability of tools to identify risks associated with price fluctuations is important, from which we presented a most appropriate risk measure(TSD), for this type of risk.