

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la

VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : Analyse

Par

**Maamir fatima zohra**

Titre :

**Résolution Numérique Des Équations aux Dérivées Partielles**

Membres du Comité d'Examen :

Pr.	KACI FATMA	UMKB	Président
Pr.	RADJEH FOUZIA	UMKB	Encadreur
Dr.	OUAAR FATIMA	UMKB	Examinatrice

10/06/2024

## Dédicace

A mes chers parents, « Maman et Papa », pour leur patience, leur amour  
et leurs encouragements.

A mes précieux frères et sœurs avec qui j'ai partagé les plus beaux moments, ainsi  
qu'à toute ma famille.

A tous mes professeurs, depuis le début de ma carrière d'enseignant jusqu'à  
aujourd'hui, pour leur soutien, leurs conseils précieux.

Et également à ma chère amie Wafa Ziza pour ton soutien et ton encouragement  
continues

Ce mémoire vous est dédié.

## REMERCIEMENTS

**J**e voudrais commencer par exprimer ma gratitude à Dieu qui m'a donné la force et la capacité de travailler dur pour atteindre ce niveau et terminer ce mémoire.

**U**n grand merci à ma superviseure, le Dr FOUZIA

RAJAH pour son soutien scientifique et moral important, ainsi que pour les suggestions et encouragements prodigués tout au long de mon mémoire.

**J**e remercie également les membres du comité de discussion Pr. KACI FATMA et Dr.OUAAR FATIMA qui m'a fait l'honneur de juger ce travail. Ma sincère gratitude au professeur MOUHAMMAD SOURI MIMOUNE pour

son aide dans le domaine de la physique. Enfin, un grand merci à mes parents, ma famille, mes professeurs et tout

**L**e personnel du département de mathématiques qui m'ont soutenu et encouragé.

**M**erci à tous.

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>ii</b>
<b>Table des matières</b>	<b>iii</b>
<b>Table des figures</b>	<b>v</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Equations aux dérivées partielles</b>	<b>3</b>
1.1 Notions de base sur les <i>EDP</i> . . . . .	3
1.2 Caractéristiques des <i>EDP</i> . . . . .	5
1.3 Classification des <i>EDP</i> . . . . .	7
<b>2 Méthode des différences finies</b>	<b>9</b>
2.1 Méthode des différences finies en D1 . . . . .	9
2.2 Méthode des différences finies en D2 . . . . .	15
2.3 Stabilité de la méthode . . . . .	19
2.4 Convergence de la méthode . . . . .	20
<b>3 Application</b>	<b>26</b>
3.1 Description du transformateur . . . . .	26

<b>3.2</b> Equations de Maxwell . . . . .	28
<b>3.3</b> Modèle magnétostatique vectorielle . . . . .	30
<b>3.4</b> Transformateur et MDF en 2D . . . . .	31
<b>3.4.1</b> Transformateur et MDF en 2D classique . . . . .	33
<b>3.4.2</b> Transformateur et MDF en 2D modifiée . . . . .	36
<b>Conclusion</b>	<b>40</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>41</b>
<b>Annexe A : Abréviations et Notations</b>	<b>43</b>

# Table des figures

2.1 Maillage deux dimensions . . . . .	16
3.1 Transformateur de puissance dans un réseau de distribution . . . . .	26
3.2 Réseau du transport avec station de transformation . . . . .	27
3.3 Description MDF en deux dimensions . . . . .	31

# Introduction

Les équations aux dérivées partielles (*EDP*) jouent un rôle extrêmement important pour la modélisation des phénomènes physiques ; à la propagation des ondes, la diffusion de la chaleur et dans plusieurs domaines scientifiques. Malheureusement, il n'est pas évident de résoudre ces équations analytiquement ; c'est-à-dire : on ne peut pas trouver la solution exacte. Donc, en faisant appel aux méthodes numériques qui nous permettent de faire des approximations pour obtenir des solutions approchées convenable aux contextes pratiques. Ce mémoire présente quelques techniques de la résolution numérique des *EDP*, en mettant en lumière leur importance et leurs applications variées.

Les équations différentielles partielles (*EDP*) ont fait leur apparition pour la première fois à la mécanique rationnelle au cours du 17<sup>ème</sup> siècle, avec des figures comme Newton et Leibniz, ensuite le domaine des *EDP* s'est progressivement enrichi avec le développement des sciences, en particulier la physique. [5]

Comme on a cité précédemment, les solutions analytiques étant souvent impraticables pour des systèmes complexes, on utilise alors les méthodes numériques (*MDF*). A cette raison, on propose dans notre mémoire la méthode des différences finies (*MDF*) afin de faire nos approximations des solutions par des différences divisées et la discrétisation de l'espace et du temps. L'objectif principal de ce mémoire est d'appliquer cette méthode à quelques équations aux dérivées partielles (*EDP*) du

second ordre.

Pour aboutir à notre objectif, ce mémoire est structuré en trois chapitres. Dans le premier chapitre, on donne quelques concepts fondamentaux concernant les équations aux dérivées partielles, on introduit les notions de base et les types d'équations couramment rencontrées.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de la méthode des différences finies qui consiste à transformer le problème continu en un problème discret ou ponctuel par la discrétisation du maillage ; ensuite, on remplace chaque dérivée partielle par sa valeur approchée à l'aide du développement de Taylor et on démontre enfin la convergence du schéma numérique.

Pour démontrer la grande utilité des équations aux dérivées partielles dans les domaines scientifiques, on expose dans le troisième chapitre une application réelle de l'électromagnétisme.

# Chapitre 1

## Equations aux dérivées partielles

Dans le premier chapitre, on va présenter quelques notions de base sur les équations aux dérivées partielles qu'on aura besoin dans notre étude numérique de ce type d'équations.

### 1.1 Notions de base sur les *EDP*

La notion de la dérivée simple d'une fonction unidimensionnelle  $f'(x)$  non plus valable dans le cas où la fonction d'étude à plusieurs variables, on trouve alors la notion des dérivées partielles.

Pour introduire cette dernière notion, on donne une fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  et un point  $(x_0, y_0)$  de  $\mathbb{R}^2$  ( $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ).

**Définition (1.1)** (*Applications partielles*) : On appelle applications partielles associées à  $f$  en  $(x_0, y_0)$ , les deux applications de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  lorsqu'on fixe l'une des variables ; c'est-à-dire : [9](#)

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow f_1(x) := f(x, y_0) \end{aligned}$$

et la deuxième

$$f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f_2(y) := f(x_0, y).$$

Tout simplement les dérivées partielles de  $f$  en un point  $(x_0, y_0)$  sont exactement les dérivées des applications partielles associées à  $f$  en  $(x_0, y_0)$ .

Pour présenter la dérivabilité partielle d'une fonction, on introduit la définition suivante.

**Définition (1.2)** (*dérivée partielle*) : On considère :  $\Omega = ]a, b[ \times ]c, d[$  dans  $\mathbb{R}^2$ , la fonction  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , le point  $(x_0, y_0) \in \Omega$  et  $f_1 : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie par : [\[9\]](#)

$$f_1(x) := f(x, y_0).$$

On dit que  $f$  admet une dérivée partielle par rapport à la première variable en  $(x_0, y_0)$  lorsque  $f_1$  est dérivable en  $x_0$  et on note :  $\partial_1 f(x_0, y_0)$  ou encore  $\partial_x f(x_0, y_0)$ .

C'est exactement de la même manière pour la deuxième variable, on note par  $\partial_2 f(x_0, y_0)$  à la dérivée partielle ; si elle existe ; de  $f$  par rapport à la deuxième variable en  $(x_0, y_0)$ .

**Définition (1.3)** (*Equation Aux dérivées partielles*) : Une équation aux dérivées partielles est une équation mathématique qui contient la fonction étudiée lui même et ses dérivées partielles. Cette équation est également de la forme : [\[8\]](#)

$$F\left(x, y, \dots, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \dots\right) = 0,$$

où  $F$  est une fonction de plusieurs variables.

Pour simplifier l'écriture, on utilise le sigle *EDP* comme abréviation de l'équation aux dérivées partielles.

Supposant maintenant une *EDP* donnée sous la forme précédente et on cherche à trouver sa solution ; c'est-à-dire, on essaye de trouver une fonction  $u = u(x, y, \dots)$  des variables indépendantes  $x, y, \dots$  ; où les dérivées partielles apparaissant dans l'équation existent aux points de  $D$ .

Lorsqu'on fait après la substitution de cette fonction et ses dérivées partielles dans l'*EDP* doit être satisfaite.

## 1.2 Caractéristiques des *EDP*

Dans cette section, on essaye de donner les caractéristiques et les propriétés les plus utilisées dans la littérature pour les équations aux dérivées partielles.

**Définition (1.4)** (*Dimension et ordre d'une EDP*) : LA dimension d'une équation aux dérivées partielles est le nombre de variable indépendantes de la fonction inconnue  $u$ .

L'ordre d'une équation aux dérivées partielles est l'ordre de la dérivée partielle le plus élevé.

Pour bien comprendre, l'*EDP* suivante :

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + x \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 = e^x,$$

est une équation de dimension 2 et d'ordre 3.

Dans ce qui suit, on veut voir sous quelles conditions l'*EDP* était linéaire et homogène.

**Définition (1.5)** (*Linéarité et homogénéité*) : Une *EDP* de l'inconnue  $u$  est li-

néaire si l'on peut l'écrire sous la forme :

$$Lu = f, \text{ où} \tag{1.1}$$

$L$  biensûr est un opérateur linéaire différentiel.

Dans le cas où  $f$  est une fonction de  $n$  variables indépendantes définies sur un domaine de  $\mathbb{R}^n$ , on dit que l'équation est linéaire homogène si  $f = 0$  ; Si non elle est non homogène.

L'équation donnée par :

$$u + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 1,$$

est linéaire non homogène sur  $\mathbb{R}^2$  car elle peut s'écrire sous la forme (1.1), où

$$Lu = u + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

est un opérateur linéaire différentiel et  $f(x, y) = 1$ .

Pour vérifier la linéarité de  $L$ , on donne  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  et les deux fonctions suffisamment régulières  $u_1$  et  $u_2$ , on a alors :

$$L(au_1 + bu_2) = (au_1 + bu_2) + 2xy \frac{\partial^2 (au_1 + bu_2)}{\partial y^2},$$

on utilise la définition de l'opérateur  $L$  pour trouver :

$$a(u_1 + y \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + 2xy \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}) + b(u_2 + y \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + 2xy \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}),$$

ce qui peut l'écrire encore :

$$aL(u_1) + bL(u_2).$$

Enfin, on peut déduire la linéarité de l'équation donnée.

Dans le cas où l'équation n'est pas linéaire ; c'est-à-dire : l'opérateur n'est pas linéaire par rapport à toutes les dérivées partielles contenant dans l'équation, on introduit une autre notion comme l'indique la définition suivante.

**Définition (1.6)** (*EDP quasi-linéaire*) : La quasi linéarité d'une équation aux dérivées partielles indique que l'opérateur définie précédemment est linéaire par rapport aux dérivées partielles d'ordre le plus élevé (seulement) de  $u$ .

On remarque bien que l'équation suivante :

$$x(y - u) \frac{\partial u}{\partial x} + y(u - x) \frac{\partial u}{\partial y} = (x - y)u,$$

est quasi-linéaire du première ordre en 2 dimension.

### 1.3 Classification des *EDP*

Dans la suite, on veut connaitre comment classer les équations aux dérivées partielles du second ordre ; donc, évidemment, il faut introduire tout d'abord cette dernière notion.

D'une manière générale, Une équation aux dérivées partielles linéaire du second ordre avec  $n$  variables indépendantes est de la forme :

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial y_j} + \sum_{i=1}^n B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = D, \quad (1.2)$$

où  $A_{ij}$ ,  $B_i$ ,  $C$ ,  $D$  sont des fonctions des variables indépendantes  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Ici, on suppose que la fonction cherchée admet toutes leurs dérivées partielles :

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial y_j}; \quad \forall_{i,j}, 1 \leq i, j \leq n. \quad (1.3)$$

Prochainement, on va donner une classification des équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre ; mais le problème qui se pose que chaque type d'équation correspond à un comportement différent des solutions.

A cette raison notre étude est restreinte au cas où  $n = 2$ . Alors, les EDP que nous considérerons initialement seront de la forme suivante :

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G, \quad (1.4)$$

où  $A, B, C, D, E, F$  et  $G$  sont des fonctions bidimensionnelle (de  $x$  et de  $y$  qui ne s'annulent pas simultanément) et on suppose ainsi que  $A, B, C, D, E, F$  et  $G$  admettent des dérivées partielles d'ordre  $m \leq 2$  continues sur un domaine  $D$  de  $\mathbb{R}^2$ .

On définit le discriminant connu :

$$\Delta = B^2 - 4AC. \quad (1.5)$$

1. L'équation (1.4) est dite *hyperbolique* au point  $(x_0, y_0) \in D$  si et seulement si  $\Delta > 0$ .
2. L'équation (1.4) est dite *parabolique* au point  $(x_0, y_0) \in D$  si et seulement si  $\Delta = 0$ .
3. L'équation (1.4) est dite *elliptique* au point  $(x_0, y_0) \in D$  si et seulement si  $\Delta < 0$ .

Si l'EDP est *hyperbolique* (respectivement *parabolique*, *elliptique*) pour tous les points  $(x, y)$  du domaine  $D$ , on dit alors qu'elle est hyperbolique (respectivement parabolique, elliptique) sur  $D$ .

# Chapitre 2

## Méthode des différences finies

Les équations aux dérivées partielles ne sont pas toujours facile à résoudre analytiquement (exactement), on les résout alors qu'approximativement.

Donc, dans ce chapitre on va présenter une méthode très importante et très utile dans les calculs scientifiques pour résoudre les problèmes aux limites soit en dimension 1 ou en dimension 2.

Cette méthode consiste à transformer le problème aux limites en un problème algébrique (système linéaire) facile à résoudre.

### 2.1 Méthode des différences finies en D1

La première des étapes de la méthode des différences finies est la subdivision qui nous permet de transformer le problème continue en un problème ponctuel en chaque point de la subdivision.

1. *La subdivision* : Afin d'appliquer la méthode des différences finies, on va faire une subdivision de l'intervalle  $[a, b]$  ; c'est-à-dire, on donne une suite de points  $(x_i)_{i=0, \dots, N}$ , tels que :  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$ . Pour  $i = \overline{0, N}$ , on note :  $x_i = x_0 + ih$ , où

$h$  est le pas de discrétisation qui exprime la distance entre deux points successives ; ce pas est défini par  $h = \frac{b-a}{N}$  ;  $N$  est le nombre de points de discrétisation.

2. *Les dérivées approchées* : Ici en faisant appel au développement de Taylor d'une fonction  $u \in C^2$  à l'ordre 2 aux points  $u(x+h)$  et  $u(x-h)$ , on trouve alors :

$$\begin{cases} u(x_i+h) = u(x_i) + hu'(x_i) + o(h^2) \\ u(x_i-h) = u(x_i) - hu'(x_i) + o(h^2), \end{cases}$$

où  $o(h^2)$  est l'erreur de troncature. Pour simplifier l'écriture, on pose :  $u_i = u(x_i)$ ,  $u'_i = u'(x_i)$  et  $u''_i = u''(x_i)$ . Si on choisit  $h$  est suffisamment petit, on néglige le reste de troncature pour trouver les dérivées approchées cherchées :

$$u'_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} \text{ et } u'_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{h},$$

ou encore si on suppose que  $u \in C^4$ , on trouve :

$$\begin{cases} u(x_i+h) = u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2!}u''(x_i) + \frac{h^3}{3!}u'''(x_i) + \frac{h^4}{4!}u^{(4)}(\zeta) \\ u(x_i-h) = u(x_i) - hu'(x_i) + \frac{h^2}{2!}u''(\mu) - \frac{h^3}{3!}u'''(x_i) + \frac{h^4}{4!}u^{(4)}(\mu). \end{cases}$$

On fait la soustraction terme à terme pour obtenir l'approximation centrée pour la dérivée première :

$$u'(x_i) = \frac{u(x_i+h) - u(x_i-h)}{2h} + o(h^3),$$

ou plus simplement est :

$$u'(x_i) = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + o(h^3).$$

C'est exactement de la même manière avec le même argument qu'on peut trouver

l'approximation centrée pour la dérivée première :

$$u'(x_i) = \frac{u(x_i + h) - u(x_i - h)}{2h} + o(h^3).$$

Cette formule est un résultat directe de l'addition terme à terme de  $u(x_i + h)$  et  $u(x_i - h)$  et on note après :

$$u_i'' = \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2}.$$

Par la substitution de chaque dérivée par sa valeur approchée, on trouve alors un problème ponctuel (discret) en chaque point de la subdivision qu'on peut l'écrire sous forme d'un système linéaire. Pour faciliter notre étude, on propose le problème suivant :

*Existe-t-il une fonction  $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  qui soit deux fois continûment dérivable et qui vérifie :*

$$\begin{cases} -u''(x) + g(x)u(x) = f(x); & x \in ]0, 1[ \\ u(0) = c, u(1) = d. \end{cases}$$

Il faut citer que ce problème admet une solution unique si :

a.  $f(x)$  et  $g(x)$  sont continues dans  $[0, 1]$ .

b.  $g(x) \geq 0$  pour tout  $x \in [0, 1]$ .

Pour appliquer la méthode des différences finies on suit les étapes suivantes :

1. *La subdivision : On divise l'intervalle  $[0, 1]$  de manière à avoir la discrétisation régulière en  $N$  points  $(x_i)_{i=0}^N$ , où  $x_i = x_0 + ih$  et  $h = \frac{1}{N}$ .*

2. *Les dérivées approchées : En chaque point de discrétisation, on a :*

$$\begin{cases} -u''(x_i) + g(x_i)u(x_i) = f(x_i), & x \in ]0, 1[ \\ u(0) = c, & u(1) = d. \end{cases}$$

On remplace l'approximation centrée pour la seconde dérivée, on trouve alors :

$$\begin{cases} \frac{-u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1}}{h^2} + g(x_i)u_i = f(x_i), & \forall i = \overline{1, N-1} \\ u_0 = c, & u_N = d. \end{cases}$$

Il faut noter que ce problème ponctuel on peut l'écrire sous forme d'un système linéaire de  $(N - 1)$  équations à  $(N - 1)$  inconnues.

2. *Le système linéaire : Par quelques calculs simple, on peut aboutir à :*

$$\begin{cases} -u_{i-1} + (2 + h^2g(x_i))u_i - u_{i+1} = h^2f(x_i), & i = \overline{1, N-1} \\ u_0 = c, & u_N = d. \end{cases}$$

Pour chaque  $i = \overline{1, N-1}$ , posons  $B_i = (2 + h^2g(x_i))$ , on peut donner le système tridiagonal suivant :

$$\begin{cases} -u_0 + B_1u_1 - u_2 & = h^2f(x_1) \\ -u_1 + B_2u_2 - u_3 & = h^2f(x_2) \\ \vdots & \vdots \\ -u_{N-2} + B_{N-1}u_{N-1} - u_N & = h^2f(x_{N-1}) \end{cases}$$

ou encore matriciellement, on écrit :  $A_h U_h = b_h$

$$\begin{pmatrix} B_1 & -1 & \cdots & 0 \\ -1 & B_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & -1 & B_{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{pmatrix} = h^2 \begin{pmatrix} f(x_1) + c \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) + d \end{pmatrix}.$$

$$A_h = A_h^0 + h^2 \underbrace{\begin{pmatrix} g(x_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g(x_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & g(x_{N-1}) \end{pmatrix}}_{B_h}, \quad A_h^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour assurer l'existence et l'unicité de ce système il faut démontrer que la matrice

$A_h$  est inversible.

**Proposition (2.1) :** *La matrice  $A_h$  est symétrique définie positive si  $g(x) \geq 0$  pour tout  $x$ .  $\diamond$*

**Preuve :** La matrice  $A_h$  est symétrique puisque  $A_h = A_h^T$ . On veut démontrer maintenant que  $A_h$  est définie positive ; c'est-à-dire : il faut démontrer que  $z^T A_h z > 0$  pour tout  $z \in \mathbb{R}^{N-1}$ .

En effet, Soit  $z$  un vecteur non nul de  $\mathbb{R}^{N-1}$ , on a : [\[7\]](#)

$$z^T A_h z = z^T A_h^{(0)} z + z^T (h^2 B_h) z$$

et

$$h^2 z^T B_h z = h^2 \sum_{i=1}^{N-1} g(x_i) z_i^2 \geq 0,$$

car :

$$\begin{aligned}
 z^T B_h z &= \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(x_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g(x_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & g(x_{N-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{N-1} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(x_1) & z_1 \\ g(x_2) & z_2 \\ \vdots & \vdots \\ g(x_{N-1}) & z_{N-1} \end{pmatrix} \\
 z^T B_h z &= \sum_{i=1}^{N-1} g(x_i) z_i^2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Donc, on a trouvé que :  $z^T (h^2 B_h) z \geq 0$  ce qui nous permet de conclure que :

$$z^T A_h z = z^T A_h^{(0)} z + h^2 \sum_{i=1}^{N-1} g(x_i) z_i^2 \geq z^T A_h^{(0)} z, \text{ où}$$

$$z^T A_h^{(0)} z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{N-1} \end{pmatrix}$$

ou encore :

$$z^T A_h^{(0)} z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2z_1 - z_2 & -z_2 + 2z_2 - z_3 & \cdots & -z_{N-2} + 2z_{N-1} \end{pmatrix}^T,$$

ce qui est équivalent à :

$$z^T A_h^{(0)} z = z_1^2 + (z_1 - z_2)^2 + (z_2 - z_3)^2 + \cdots + (z_{N-2} - z_{N-1})^2 + z_{N-1}^2.$$

Il est clair que cette valeur est positive et non nulle puisque  $z \neq 0$ , alors  $A_h$  est symétrique et définie positive donc elle est inversible. ♦

## 2.2 Méthode des différences finies en D2

Dans notre étude, on s'intéresse au cas bidimensionnel. Donc, on essaye de faire une généralisation d'une fonction de deux variables et on remarquera après que la méthode des différences finies sera appliquée avec les mêmes principes. Pour simplifier l'étude, on propose :

**1. Le problème de Laplace :** On considère le problème en dimension 2 sur un ouvert borné  $\mathbb{R}^2$  avec conditions aux limites de Dirichlet homogènes :

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) = f(x, y), & (x, y) \in \Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[ \\ u(x, y) = 0, & (x, y) \in \Gamma. \end{cases}$$

L'opérateur de laplacien est :

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Pour appliquer la méthode des différences finies, en suivant les mêmes étapes :

1. *Le maillage :* Dans le cas D2, on donne une fonction  $u(x, y)$  définie sur un domaine spécifique, ce domaine est subdivisé en  $N \times P$  noeuds  $(x_i, y_j)$  régulièrement espacés, avec un pas  $h$  dans la direction  $x$  et  $K$  dans la direction opposée et on note par  $u_i^j$  pour représenter la valeur discrète de  $u(x, y)$  au noeud  $(x_i, y_j)$ ; c'est-à-dire :

$$u_i^j = u(x_i, y_j) = u(ih; jk)$$

2. *Dérivées approchées :* C'est exactement de la même manière que dans le cas en

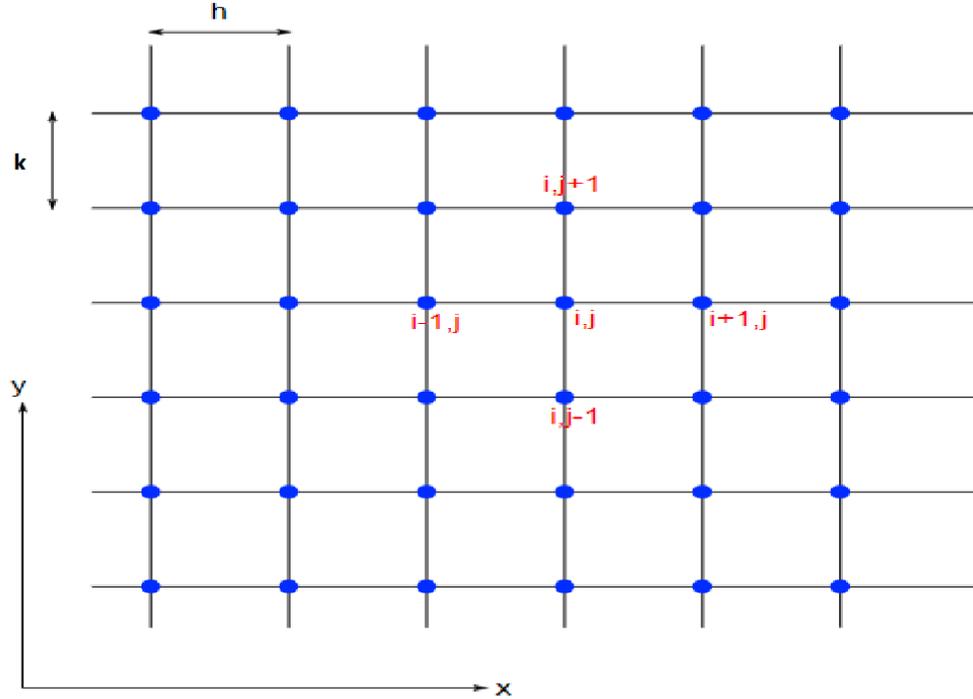


FIG. 2.1 – Maillage deux dimensions

dimension un qu'on obtient les approximations suivantes en  $D2$  :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i &= \frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2h} \text{ D.F centrée} \\ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i &= \frac{u_{i+1}^j - u_i^j}{h} \text{ D.F avant} \\ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i &= \frac{u_i^j - u_{i-1}^j}{h} \text{ D.F arrière} \end{aligned}$$

Par l'application de la formule de Taylor, on a :

$$u(x+h, y) = u(x, y) + h\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \frac{h^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right) + o(\xi^4) \quad (2.1)$$

et

$$u(x-h, y) = u(x, y) - h\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) - \frac{h^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right) + o(\xi^4). \quad (2.2)$$

Par la sommation directe terme à terme de [2.1](#)+[2.2](#), on obtient :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} + o(h^2)$$

et

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{k^2} + o(k^2).$$

On introduit maintenant l'équation de Laplace dans un domaine borné :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0, \quad \Omega \in ]0, 1[^2 \\ u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma \end{cases} \quad (2.3)$$

Pour discrétiser notre domaine, on utilise le pas  $h = 1/N > 0$ ; tel que :

$0 < x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < x_N$  et le pas  $k = \frac{1}{M} > 0$  pour trouver  $0 < t_0 < t_1 < \dots < t_{M-1} < t_M$ . Les points de maillage sont les points d'intersection de ces subdivisions  $u(x_i, t_j) = (ih, jk)$ .

*3. Le problème ponctuel (discret) : Pour transformer le problème continu en un problème ponctuel, on substitue les dérivées partielles approchées qu'on a présenté précédemment dans notre équation, on trouve alors :*

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} + \frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{h^2} + o(h^2),$$

ou encore :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \frac{u_{i-1}^j + u_i^{j-1} - 4u_i^j + u_{i+1}^j + u_i^{j+1}}{h^2} + o(h^2),$$

puisque l'opérateur de Laplace est :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0,$$

on obtient :

$$\frac{u_{i-1}^j + u_i^{j-1} - 4u_i^j + u_{i+1}^j + u_i^{j+1}}{h^2} = 0.$$

En négligeant le reste  $o(h^2)$  et en tenant compte que :  $i = \overline{1, N-1}$  et  $j = \overline{1, M-1}$ ,

on trouve enfin :

$$u_{i-1}^j + u_i^{j-1} - 4u_i^j + u_{i+1}^j + u_i^{j+1} = 0.$$

Il est clair que cette formule est une relation entre cinq nœuds voisins.

**2. L'équation de la chaleur :** Pour comprendre plus, on propose une autre forme d'équation, c'était l'équation de la chaleur dans un domaine borné et on essaye d'appliquer la méthode des différences finies sur ce type d'équations, on considère alors :

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) - v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = 0; \quad x \in ]0, 1[, t \in ]0, T[ \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \in ]0, T[ \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in ]0, 1[, \end{cases} \quad (2.4)$$

où  $u_0 \in C([0, 1])$ .

1. *Le maillage :* Pour faire le maillage, on introduit un pas  $h = 1/N > 0$ , tel que :  $0 < x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < x_N$ ,  $x_i = ih$ ,  $\forall i = \overline{0, N}$  et un pas  $k = \frac{1}{M} > 0$ , où  $0 < t_0 < t_1 < \dots < t_{M-1} < t_M = 1$ ,  $t_j = jk$ ,  $\forall j = \overline{0, M}$ .

Par l'intersection de ces points, on trouve les nœuds de maillage régulier. En chaque point de maillage, on trouve les points cherchés :  $u(x_i, t_j) = (ih, jk)$  pour  $i = \overline{0, N}$  et  $j = \overline{1, M}$  Pour la simplification, on note par  $u_i^j$  la valeur discrète approchée d'une solution au point  $(x_i, t_j)$  de la valeur exacte  $u(x, t)$ .

2. *Dérivées approchées :* C'est exactement avec le même argument qu'on peut trouver les dérivées partielles approchées; on utilise un pas en avant pour obtenir :

$$\left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) \simeq \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k}, \quad (2.5)$$

et

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \simeq \frac{u_{i+1}^j + u_{i-1}^j - 2u_i^j}{h^2}. \quad (2.6)$$

3. *Le problème ponctuel (discret)* : Comme l'équation de la chaleur est vraie en chaque point de domaine, elle reste vraie aux points de maillage. En remplaçant (2.5) et (2.6) dans notre équation, on obtient alors la forme discrète :

$$\begin{cases} \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} - v \frac{u_{i+1}^j + u_{i-1}^j - 2u_i^j}{h^2} = 0, & i = \overline{1, N-1} \text{ et } j = \overline{1, M} \\ u_0^j = u_N^j = 0, & j = \overline{1, M}. \\ u_i^0 = u_0(ih), & i = \overline{1, N-1}. \end{cases} \quad (2.7)$$

A partir de (2.7), on essaye de trouver explicitement  $u_i^{j+1}$  par

rapport aux autres

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} = v \frac{u_{i+1}^j + u_{i-1}^j - 2u_i^j}{h^2}, \quad (2.8)$$

on pose  $r = \frac{vk}{h^2}$  pour trouver en chaque  $i = \overline{1, N-1}$  et  $j = \overline{0, M-1}$

$$u_i^{j+1} = r(u_{i+1}^j + u_{i-1}^j - 2u_i^j) + u_i^j.$$

## 2.3 Stabilité de la méthode

Pour mesurer les caractéristiques numériques : la stabilité et la convergence de la valeur approchée vers la valeur exacte, on introduit la norme  $\|\cdot\|_\infty$ .

**Proposition (2.2) :** *Sous la condition de C.F.L (Courant, Friedrichs, Lewy 1928); c'est-à-dire, on a :  $\frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}$ ; donc la formule exprimée par (2.7) est stable en norme  $\|\cdot\|_\infty$ .  $\diamond$*

**Preuve :** On pose :  $r = \frac{k}{h^2}$  et on fait quelques calculs simple pour trouver :

$$|u_i^{j+1}| = |(1 - 2r)u_i^j + ru_{j+1}^j + ru_{i-1}^j| \leq (1 - 2r) |u_i^j| + r |u_{i+1}^j| + r |u_{i-1}^j|,$$

en norme, on a :

$$\|u^{j+1}\|_{\infty} \leq (1 - 2r + r + r) \|u^j\|_{\infty},$$

alors :

$$\|u^{j+1}\|_{\infty} \leq \|u^j\|_{\infty}.$$

Par récurrence, obtient :

$$\|u^j\|_{\infty} \leq \|u^0\|_{\infty}.$$

C'est le principe du maximum discret.  $\blacklozenge$

## 2.4 Convergence de la méthode

Afin d'étudier la convergence de la solution approchée  $u_h$  vers la solution exacte  $S_h(u)$  lorsque  $h \rightarrow 0$

$$u_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} S_h(u)$$

$S_h(u)$  représente la projection de la solution exacte sur le maillage

sous la même condition ( $\frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}$ ); le schéma explicite (2.7) est *convergente* en norme  $\|\cdot\|$ .

En effet, pour chaque  $i = \overline{1, N-1}$  et  $j = \overline{1, M}$ , on a :

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} - \frac{v}{h^2}(u_{i+1}^j + u_{i-1}^j - 2u_i^j) = 0,$$

et on essaye d'écrire la dernière expression sous forme d'un système linéaire :

$$\frac{u^{(j+1)} - u^{(j)}}{k} + A_h u^{(j)} = c^{(j)}, \quad j = \overline{0, M-1},$$

où  $u^{(j)} \in \mathbb{R}^{N-1}$  et  $u^{(0)}$  est le vecteur donné par les conditions initiales. Vectoriellement, on peut définir pour  $i = \overline{1, N-1}$  et  $j = \overline{0, M}$  les vecteurs :

$$u^{(j)} = \begin{pmatrix} u_1^j \\ u_2^j \\ \vdots \\ u_{N-1}^j \end{pmatrix}, \quad u^{(0)} = \begin{pmatrix} u(x_1) \\ u(x_2) \\ \vdots \\ u(x_{N-1}) \end{pmatrix}, \quad c^{(j)} = \begin{pmatrix} f(x_1, t_j) \\ f(x_2, t_j) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}, t_j) \end{pmatrix}$$

et la matrice tridiagonale  $A_h$  par

$$A_h = \frac{v}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

D'une manière plus simple, le système obtenu, on peut l'écrire sous la forme :

$$u^{(j+1)} = (Id - kA_h)u^{(j)} + ktc^{(j)}.$$

Explicitement, cette formule nous permet de calculer la valeur approchée au temps  $t_{j+1}$  en utilisant simplement la matrice avec la valeur approchée au temps  $t_j$ .

L'écriture vectorielle de l'équation précédente est :

$$B_1 u^{(j+1)} + B_0 u^{(j)} + B_{-1} u^{(j-1)} = c^{(j)}, \quad (2.9)$$

avec  $B_1$  inversible ou  $B_1 = 0$  et  $B_0$  inversible pour le schéma explicite, on a :

$$\begin{cases} B_1 = \frac{1}{k} Id \\ B_0 = -\frac{1}{k} Id + A_h \\ B_{-1} = 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

L'erreur de consistance a l'instant  $t_j$  est le vecteur  $\xi_h(u)^{(j)} \in \mathbb{R}^{N-1}$ , ce vecteur est obtenu lorsqu'on remplace les valeurs de (2.10) dans (2.9) :

$$\frac{1}{k} Id(u^{(j+1)}) - \frac{1}{k} u^{(j)} + A_h = c^{(j)},$$

ou encore

$$\xi_h(u)^{(j)} = \frac{Id s_h(u)(t_{j+1}) - s_h(u)(t_j)}{k} + A_h - c^{(j)}; \quad (2.11)$$

où

$$\xi_h(u)^{(j)} = \begin{pmatrix} \xi_h(x_1, t_j) \\ \xi_h(x_2, t_j) \\ \vdots \\ \xi_h(x_{N-1}, t_j) \end{pmatrix}.$$

On dit que le schéma est consistant pour la norme  $\| \cdot \|$  de  $\mathbb{R}^{N-1}$  si

$$\sup_{1 \leq j \leq M} \|\xi_h(u)^{(j)}\| \xrightarrow[k \rightarrow 0]{h \rightarrow 0} 0. \quad (2.12)$$

De plus, il existe  $c^j > 0, p > 0$  et  $q > 0$  indépendants de  $k$  et  $h$ , tels que :

$$\sup_{1 \leq j \leq M} \|\xi_h(u)^{(j)}\| \leq c[(k)^p + h^q]. \quad (2.13)$$

On dit alors que la méthode est consistante d'ordre  $p$  en temps et  $q$  en espace pour la norme  $\| \cdot \|$ .

On obtient la stabilité pour la norme  $\| \cdot \|$  dans  $\mathbb{R}^{N-1}$ , s'il existe deux constantes positives  $c_1(T)$  et  $c_2(T)$  indépendantes de  $k$  et  $h$ , telles que : si  $B_1 = 0$  ou  $B_{-1} = 0$

$$\max_{0 \leq j \leq M} \| u^{(j)} \| \leq c_1(T) \| u^{(0)} \| + c_2(T) \max_{0 \leq j \leq M} \| c^{(j)} \| .$$

Notre but ici est de connaître sous quelles conditions on obtient la convergence.

**Théorème de Lax :** L'expression (2.9) est convergente si et seulement si elle est consistante et stable.  $\diamond$

Le schéma implicite présente trois points pour la dérivée seconde et on peut approcher encore la dérivée partielle au temps par l'approximation suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) \approx \frac{u(x_i, t_j) - u(x_i, t_{j-1})}{k} \approx \frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{k},$$

on obtient alors le problème discret suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{k} - v \frac{u_{i+1}^j + u_{i-1}^j - 2u_i^j}{h^2} = f(x_i, t_j); \quad i = \overline{1, N-1} \text{ et } j = \overline{1, M} \\ u_0^j = u_N^j = 0, \quad j = \overline{0, M} \\ u_i^0 = u_0(x_i), \quad i = \overline{0, N}. \end{array} \right. \quad (2.14)$$

A partir de cette formule, on peut trouver  $u_i^j$

$$\frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{k} = v \frac{u_{i+1}^j + u_{i-1}^j - 2u_i^j}{h^2} + kf(x_i, t_j),$$

et

$$u_i^j - u_i^{j-1} = \frac{vk}{h^2}(u_{i+1}^j + u_{i-1}^j - 2u_i^j) + kf(x_i, t_j),$$

ou encore

$$u_i^j = v \frac{k}{h^2} u_{i+1}^j + v \frac{k}{h^2} u_{i-1}^j - 2v \frac{k}{h^2} u_i^j + u_i^{j-1} + kf(x_i, t_j).$$

ce qui implique

$$u_i^j + \left(2v \frac{k}{h^2} u_i^j\right) = v \frac{k}{h^2} u_{i+1}^j + v \frac{k}{h^2} u_{i-1}^j + u_i^{j-1} + kf(x_i, t_j).$$

Pour simplifier l'écriture on pose  $r = \frac{vk}{h^2}$ , on trouve alors :

$$u_i^j = r(u_{i+1}^j + u_{i-1}^j - 2u_i^j) + u_i^{j-1} + kf(x_i, t_j),$$

donc

$$u_i^j = ru_{i+1}^j + ru_{i-1}^j - 2u_i^j + u_i^{j-1} + kf(x_i, t_j),$$

qu'on peut l'écrire vectoriellement par

$$\frac{u^{(j)} - u^{(j-1)}}{k} + A_h u^{(j)} = c^{(j)}, \quad (2.15)$$

où

$$u^{(0)} = \begin{pmatrix} u(x_1) \\ u(x_2) \\ \vdots \\ u(x_{N-1}) \end{pmatrix}, \quad c^{(j)} = \begin{pmatrix} f(x_1, t_j) \\ f(x_2, t_j) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}, t_j) \end{pmatrix}, \quad u^{(j)} = \begin{pmatrix} u_1^j \\ u_2^j \\ \vdots \\ u_{N-1}^j \end{pmatrix}.$$

Par la formule (2.5), on peut trouver que  $A_h u^{(j)}$  vérifie :

$$\begin{aligned} \frac{u^{(j)} - u^{(j-1)}}{k} &= c^{(j)} - A_h u^{(j)} \\ u^{(j)} - u^{(j-1)} &= kc^{(j)} - A_h u^{(j)} \\ u^{(j)} + A_h u^{(j)} &= kc^{(j)} + u^{(j-1)} \\ u^{(j)}(Id + A_h) &= kc^{(j)} + u^{(j-1)}. \end{aligned}$$

donc :

$$u^{(j)} = (Id + A_h)^{-1} kc^{(j)} + (Id + A_h)^{-1} u^{(j-1)}.$$

On a démontré dans la première section que la matrice  $A_h$  est symétrique définie positive, donc  $(Id + A_h)$  est aussi symétrique définie positive ; alors elle est inversible.

Le schéma précédent nous pouvons écrire sous la forme générale :

$$B_1 u^{(j+1)} + B_0 u^{(j)} + B_{-1} u^{(j-1)} = c^{(j)}, \quad (2.16)$$

où

$$\begin{cases} B_1 = 0 \\ B_0 = \frac{1}{k} Id + A_h \\ B_{-1} = -\frac{1}{k} Id. \end{cases}$$

On considère le schéma (2.16) et on suppose que les données initiales vérifient :

$B_1 = 0$  ou  $B_{-1} = 0$ . Pour le schéma implicite, on suppose :

$$\| u^{(0)} - (s_h u)(0) \| \xrightarrow[k \rightarrow 0]{h \rightarrow 0} 0.$$

On dit alors le schéma (2.16) est convergente pour la norme  $\| \cdot \|$  si :

$$\sup_{0 \leq j \leq M} \| u^{(j)} - (s_h u)(t_j) \| \xrightarrow[k \rightarrow 0]{h \rightarrow 0} 0.$$

Enfin, on peut conclure que les schéma explicites et implicites sont consistants pour la norme  $\| \cdot \|$ .

# Chapitre 3

## Application

Dans ce chapitre, on va démontrer la grande utilité de la méthode des différences finies bidimensionnelle  $2D$  aux phénomènes physiques par l'exposition d'une application qui concerne l'évaluation de l'induction magnétique dans un transformateur.

### 3.1 Description du transformateur

Dans cette section, on présente un moyen très important et très utilisé par la sonelgaz au niveau de réseau de transport ou au niveau de distribution (*Fig.3.2*). Le



FIG. 3.1 – Transformateur de puissance dans un réseau de distribution

transformateur nous permet de transformer la tension entrée en une tension de sortie

soit en abaisseur ou en éleveur.

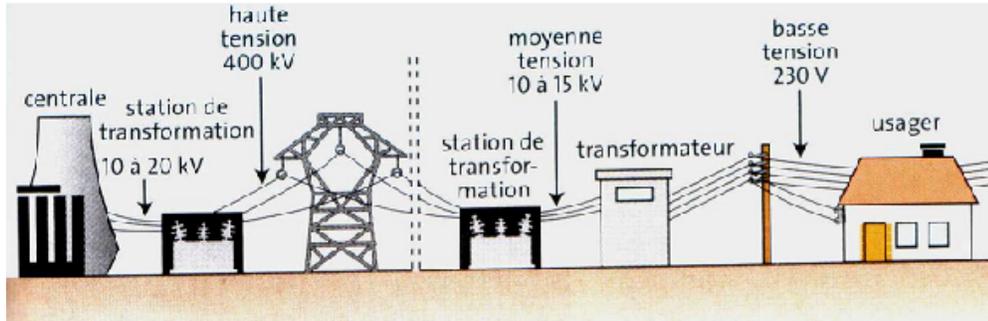


FIG. 3.2 – Réseau du transport avec station de transformation

Pour notre part, nous avons étudié un transformateur de faible puissance (*Fig.A.*). Il consiste à un circuit magnétique en fer/Si feuilleté et un bobinage constitué de 300 spires en cuivre (*Fig.B.*) et (*Fig.C.*) .



*Fig.A.* Transformateur  
étudié de faible puissance



*Fig.B.* Circuit magnétique



*Fig.C.* Bobinage

Pour étudier les transformateurs, on aura besoin d'étudier les phénomènes électromagnétiques qui sont essentiellement basés sur les équations de Maxwell. Comme on va voir prochainement que ces équations sont des équations aux dérivées partielles variables dans n'importe quel point de l'espace. Les équations de Maxwell spécifient que

toute variation spatiale ou temporelle d'un champ magnétique entraîne l'existence d'un autre champ électrique et vice versa.

## 3.2 Equations de Maxwell

Les phénomènes électromagnétiques sont entièrement décrits par les équations de Maxwell associées aux lois constitutives des matériaux. Dans l'approximation des régimes stationnaires, où l'on suppose que les courants de déplacement sont négligeables, ces équations s'écrivent : [6]

### a. Loi de Faraday

Un champ électrique peut induire un champ magnétique. Ce champ induit est utilisé dans de nombreux générateurs électriques. Un aimant permanent en rotation qui crée un champ magnétique en mouvement, génère un champ électrique dans un fil à proximité.

$$\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

### b. loi d'Ampère

Les champs magnétiques peuvent être générés de deux manières : par la variation d'un champ électrique ou par les courants électriques.

$$\overrightarrow{rot}(\vec{H}) = \vec{j}, \quad (3.1)$$

### c. loi de Gauss

Le champ électrique est orienté à partir des charges positives vers les charges négatives. Plus précisément, cette loi relie le flux électrique à travers n'importe quelle surface de Gauss fermée.

$$\operatorname{div}(\vec{D}) = \rho, \quad (3.2)$$

#### d. loi de conservation du flux

La divergence de l'induction magnétique est :

$$\operatorname{div}(\vec{B}) = 0, \quad (3.3)$$

Mathématiquement, cette relation indique qu'il n'existe pas de charges magnétiques parce que les seules sources de champ magnétique sont les courants électriques. Les lignes du champ sont toujours fermées sur elles mêmes ; elles forment alors des boucles ne contiennent ni points de départs, ni points d'arrivées, ni points de convergences. Les relations qui constituent les matériaux sont

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (3.4)$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad (3.5)$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \text{ où} \quad (3.6)$$

#### Modèles électromagnétiques

Les modèles de *J.C Maxwell* décrivent globalement tous les phénomènes électromagnétiques, mais suivant les dispositifs que l'on étudie, certains phénomènes deviennent négligeables parmi ces modèles. On a : modèle électrostatique, modèle électrocinétique, modèle magnétodynamique, modèle magnétostatique scalaire et le modèle magnétostatique vectorielle. Dans notre étude, on s'intéresse au dernier modèle.

### 3.3 Modèle magnétostatique vectorielle

on suppose que le champ magnétique est produit par des sources indépendantes du temps ; c'est -à-dire :  $\frac{d\vec{B}}{dt} = 0$ , les champs électrique  $\vec{E}$  et magnétique  $\vec{B}$  sont découplés et on essaye de modéliser un objet parcouru par des courants non nuls .On obtient alors les équations suivantes :

$$\text{rot}(\vec{H}) = \vec{j}, \quad (3.7)$$

$$\text{Div}(\vec{B}) = 0, \quad (3.8)$$

$$\vec{B} = \mu\vec{H} + \vec{B}_r. \quad (3.9)$$

Parce que la relation  $\text{Div}(\vec{B}) = 0$ , on définit alors une fonction vectoriel  $\vec{A}$  appelée potentiel vecteur magnétique, tel que :

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A}. \quad (3.10)$$

Pour que cette fonction soit totalement définie, il faut également fixer sa divergence, on ajoute alors la condition connue sous le nom : Jauge.de. Coulomb

Donc on trouve le système d'équation suivant :

$$\text{Div}(\vec{A}) = 0. \quad (3.11)$$

$$\text{rot}\left(\frac{1}{\mu}\text{rot}\vec{A}\right) = \vec{j}. \quad (3.12)$$

L'utilisation de la méthode des différences finies aux problèmes physique est un domaine trop vaste ; elle s'applique lorsqu'on veut calculer la densité du courant

(tension) ou bien la densité de la puissance dissipée.

Dans la suite, notre objectif est d'appliquer cette méthode sur un transformateur à l'aide d'une code *Matlab*. Il est nécessaire de citer que cette méthode malgré sa simplicité mais elle s'adapte mal aux objets de géométrie complexe à cause de la « rigidité » du maillage d'une part et d'autre part à cause des conditions de passage d'un milieu physique à un autre (Fer - air) par exemple et des non linéarités (saturation ...). Par toutes ces conditions, on aura besoin d'un traitement spécifique.

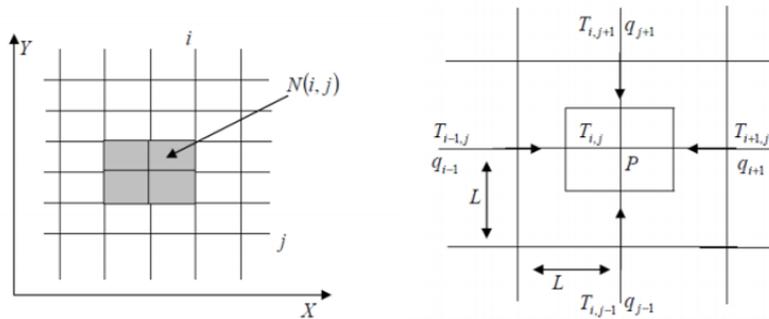


FIG. 3.3 – Description MDF en deux dimensions

### 3.4 Transformateur et MDF en 2D

Le transformateur étudié présente une forme tridimensionnelle mais l'étude physique électromagnétique en 3D devient assez compliquée. Heureusement, on peut faire notre étude au cas bidimensionnelle à l'aide d'une coupe longitudinale; c'es-à-dire, en supposant que le transformateur présente une épaisseur suffisamment longue. La description de l'étude en 2D est présentée par la figure (*Fig.3.4*) et le maillage 2D est présenté par la figure (*Fig.3.5*).

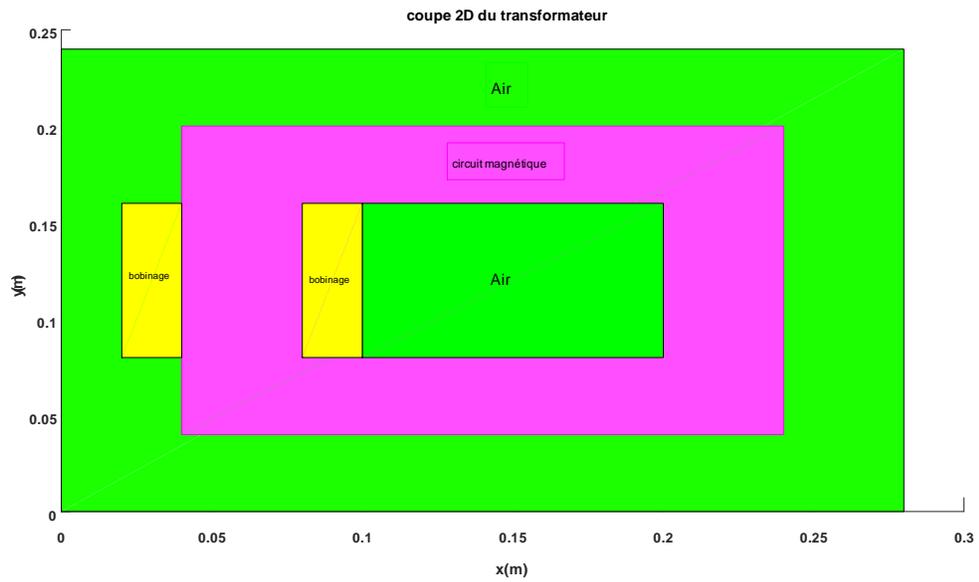


Fig.3.4– Description du transformateur en 2D

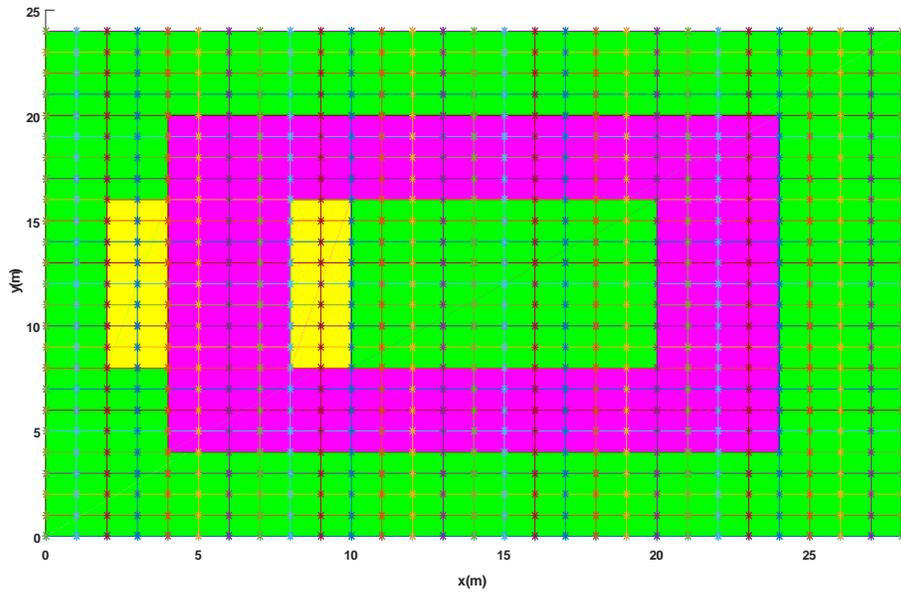


Fig.3.5 –Maillage des différences finies régulier simple

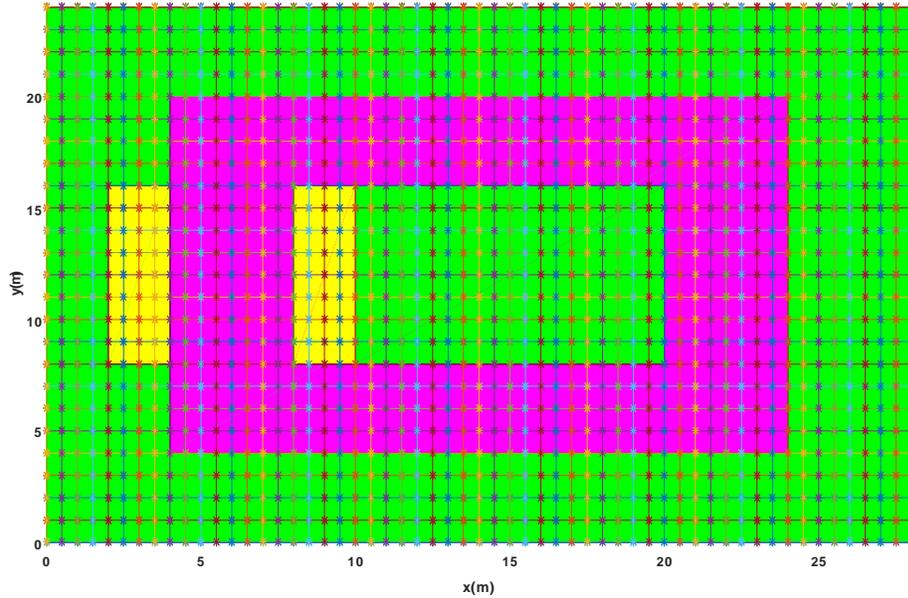


Fig.3.6 – Maillage des différences finies non régulier dense

Par quelques calculs de l'analyse vectorielle, le modèle magnétostatique issu de l'équation (3.12) en 2D avec les coordonnées cartésiens, où ( $\vec{A} = Az \vec{k}$ ) et ( $\vec{j} = jz \vec{k}$ ) :

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{\mu} \nabla(Az) \right) = \text{div} \left( \frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{grad}}(Az) \right) = -jz.$$

### 3.4.1 Transformateur et MDF en 2D classique

Dans le cas où la propriété physique  $\frac{1}{\mu}$  est constante partout, l'opérateur  $\text{div}(\text{grad})$  devient un Laplacien  $\Delta$  :

$$\frac{1}{\mu} \nabla \cdot (\nabla(Az)) = \frac{1}{\mu} \text{div} \left( \overrightarrow{\text{grad}}(Az) \right) = \frac{1}{\mu} \Delta(Az) = -jz.$$

La méthode des différences finies classique qu'on a exposée dans la deuxième chapitre est appliquée ici avec les mêmes principes. Lorsqu'on approche la dérivée seconde on trouve alors l'équation algébrique qui représente les images de la fonction inconnue

aux nœuds du maillage :

$$A(i, j) = 1/ap(i, j)[ae(i, j)A(i + 1, j) + aw(i, j)A(i - 1, j) + an(i, j)A(i, j + 1) + as(i, j)A(i, j - 1) + Sp(i, j)], \text{ où}$$

$$ae(i, j) = \frac{h}{k} \frac{1}{\mu(i, j)},$$

$$aw(i, j) = \frac{h}{k} \frac{1}{\mu(i, j)},$$

$$an(i, j) = \frac{k}{h} \frac{1}{\mu(i, j)},$$

$$aw(i, j) = \frac{k}{h} \frac{1}{\mu(i, j)},$$

$$ap(i, j) = ae(i, j) + aw(i, j) + an(i, j) + as(i, j),$$

$$Sp(i, j) = j(i, j)dxdy,$$

L'utilisation des méthodes directes de résolution des systèmes d'équations linéaires ne répond pas à notre besoin de précision dans le cas où le maillage est dense, donc le dimension de la matrice associée au système des différences finies est très grand ce qui nécessite une complexité très élevée, on utilise alors les méthodes itératives. De notre part, on utilise la méthode de Gauss Seidel pour la résolution du système et comme critère de convergence on utilise la condition d'arrêt :

$$\varepsilon = \frac{\sum |Ai_n| - \sum |Ai_a|}{\sum |Ai_n|} \leq 10^{-5}.$$

En faisant notre simulation, en trouvant l'isocontour de l'inconnue qui est le potentiel vecteur magnétique  $A$  (*Fig.3.7*) et le champ du vecteur induction magnétique. (*Fig.3.8*)

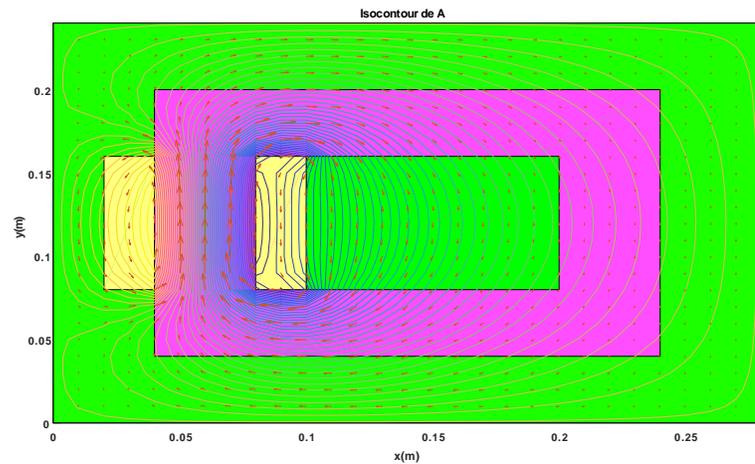


Fig.3.7– Isocontour du potentiel vecteur magnétique A

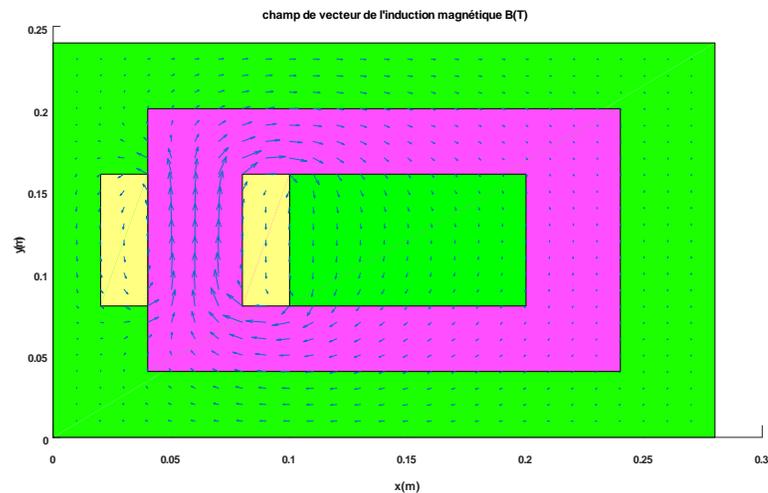


Fig.3.8 –Champ de vecteur de l'induction magnétique B

Lorsqu'on fait la comparaison de nos résultats obtenus avec les autres résultats avec d'autres logiciels éléments finis, on remarque d'après les (Fig.3.7) et (Fig.3.8) qu'on a une mauvaise distribution de l'inconnue (potentiel vecteur magnétique  $A$ ) qui conduit à une mauvaise distribution de l'induction magnétique  $B$ .

Ce mauvais résultat est dû également au fait que le coefficient  $\frac{1}{\mu(i, j)}$  est constante. Donc, on est obligé de changer cette condition et d'utiliser la méthode des différences

finies modifiée.

### 3.4.2 Transformateur et MDF en 2D modifiée

Le coefficient ou la propriété physique  $\frac{1}{\mu}$  n'est pas constante partout mais constante par domaine et ne doit pas sortir des dérivée de l'espace. Dans ce cas, on n'obtient pas Laplacien, on trouve alors l'équation :

$$\nabla \left( \frac{1}{\mu} \nabla(Az) \right) = \text{div} \left( \frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{grad}}(Az) \right) = -jz.$$

L'application directe des différences finies, en explicitant la dérivée première nous permet de conclure l'équation algébrique qui lie l'inconnue au nœud principal avec les inconnues au nœud voisins :

$$A(i, j) = 1/ap(i, j)[ae(i, j)A(i + 1, j) + aw(i, j)A(i - 1, j) + an(i, j)A(i; j + 1) + as(i, j)A(i, j - 1) + Sp(i, j)], \text{ où}$$

$$ae(i, j) = \frac{h}{k} \frac{1}{\mu e(i, j)},$$

$$aw(i, j) = \frac{h}{k} \frac{1}{\mu w(i, j)},$$

$$an(i, j) = \frac{k}{h} \frac{1}{\mu n(i, j)},$$

$$as(i, j) = \frac{k}{h} \frac{1}{\mu s(i, j)},$$

$$ap(i, j) = ae(i, j) + aw(i, j) + an(i, j) + as(i, j),$$

$$Sp(i, j) = j(i, j)dxdy.$$

L'isocontour du potentiel vecteur magnétique  $A$  (*Fig.3.9*) et le champ du vecteur induction magnétique  $B$  (*Fig.3.10*) obtenus par la méthode des différences finies modifiée montre une bonne concordance de l'inconnue (potentiel vecteur magnétique  $A$ ) qui conduit à une précise distribution de l'induction magnétique  $B$  biensûr par la comparaison aux d'autres résultats obtenus avec d'autres logiciels éléments finis.

Logiquement, ces bons résultats est dû au fait de la dépendance du coefficient  $\frac{1}{\mu(i, j)}$  en fonction de l'espace.

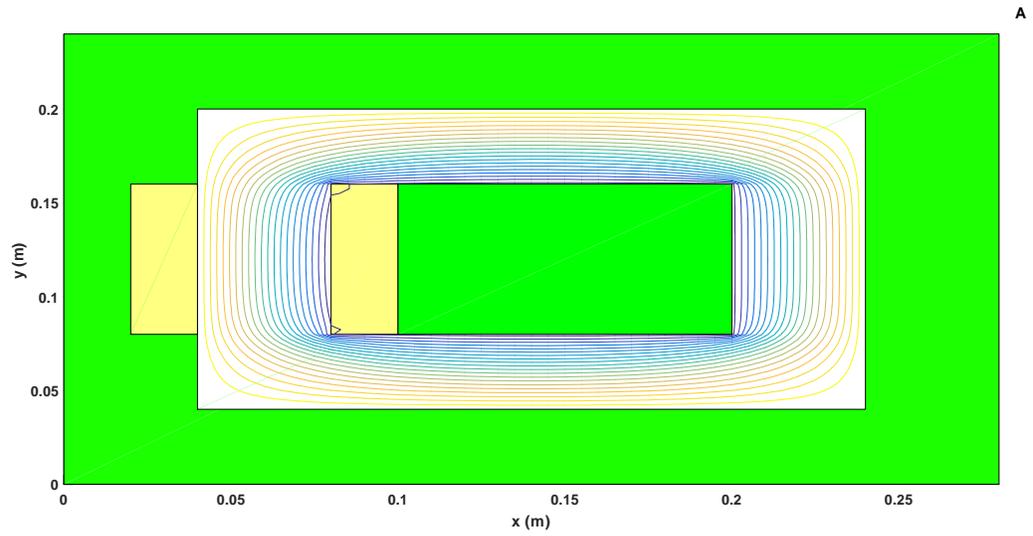


Fig.3.9 – Isocontour du potentiel vecteur magnétique A

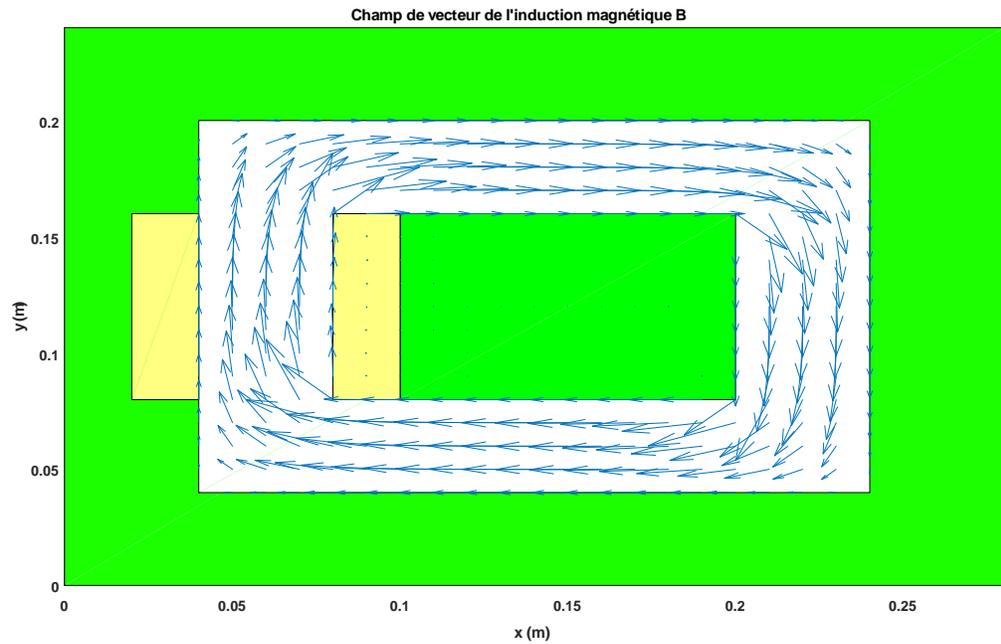


Fig.3.10 – Champ de vecteur de l'induction magnétique B

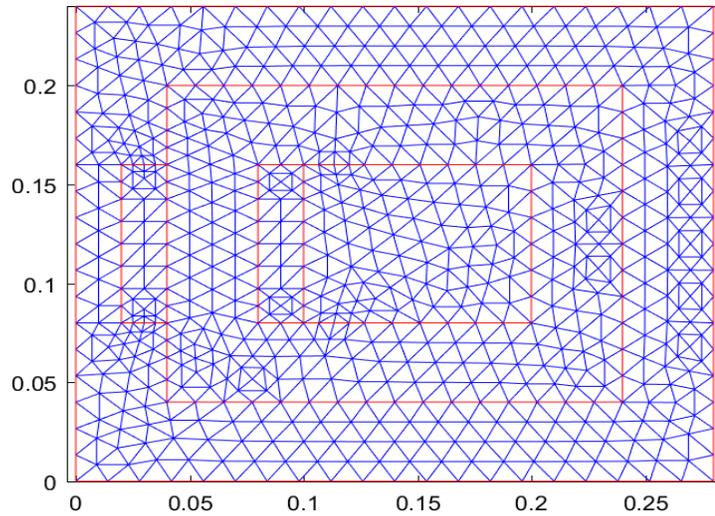


Fig.3.11 – Maillage éléments finis

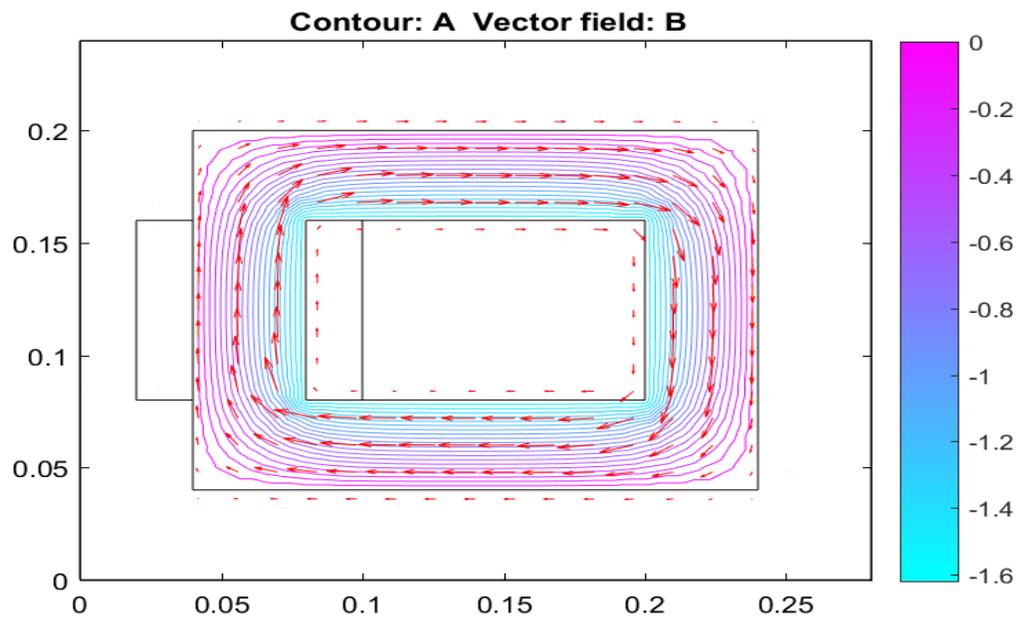


Fig.3.12 – Champ de vecteur de l'induction magnétique B par le logiciel éléments finis de Matlab

Finalement, on peut dire qu'on a aboutit aux résultats numériques de précision importante grâce à la méthode des différences finies modifiée qui est basée sur la non linéarité et la dépendance de l'espace ; des propriétés physiques qui sont mathématiquement des coefficients non linéaires.

# Conclusion

La résolution numérique des équations aux dérivées partielles (*EDP*) est une discipline essentielle en mathématiques appliquées et en sciences de l'ingénieur. Elle permet de modéliser et de simuler des phénomènes physiques complexes qui ne peuvent pas être résolus analytiquement. Les méthodes numériques comme les différences finies est couramment utilisées pour discrétiser ces équations et les transformer en systèmes d'équations algébriques. Cette méthode est souvent plus simple à appliquer mais peut être moins flexible pour des géométries complexes.

En conclusion, la résolution numérique des *EDP* est un domaine dynamique qui bénéficie continuellement des avancées en algorithmes et en puissance de calcul. Ces méthodes numériques sont indispensables pour la recherche scientifique et le développement technologique, permettant des progrès significatifs dans des domaines variés ; comme la mécanique des fluides, la finance, la biologie. . .

# Bibliographie

- [1] Abdelkarim, K. (2020). Équation de la physique mathématique. Faculté des sciences et de la technologie, département de mathématiques et informatique.
- [2] Beggas, M. (n.d.). Méthode des différences finies pour les équations aux dérivées partielles. Cours de première année master. Université Echahid Hamma Lakhdar El-Oued, Faculté des Sciences Exactes, Département de Mathématiques.
- [3] Fernane, K. (2014). Polycopie des cours « Approximations des EDP par la méthode des différences finies (DF) ». Université 8 mai-Guelma.
- [4] Hadji, D, Mhamdi, N, Khenig, M et Chelik, H. (2018). Résolution numérique des équations aux dérivées partielles par la méthode des différences finies, Université Moha-med Khider-Biskra. Soutenu le 26-06-2018..
- [5] Helffer, B. (2007). Introduction aux équations aux dérivées partielles. À partir du texte par Thierry Ramond. Département de mathématiques, Université Paris-Sud.
- [6] Lotfi, K. M. (2014/2015). Etude de l'alimentation dans les supraconducteurs. Thèse de doctorat en science, spécialité : électrotechnique.
- [7] Nicolas, C. (2010). Différences finies et analyse numérique matricielle : cours d'harmonisation en IMAFA. <https://inria.hal.hal.science/cel-01188281>. Robot, B. (2007).

- [8] Robot, B. (2007). Equation aux dérivées partielles. Notes pour le cours des équations aux dérivées partielles (sigle : Mat 4112) offert par le département de mathématiques de l'Université du Québec à Montréal.
- [9] Sébastien, D et Lauren, J. (2017). Introduction aux méthodes numériques de résolution des équations aux dérivées partielles (EDP). Institut de recherche en astrophysique et planétologie.
- [10] Salah, Z, & Khaled, Z. (2018). Équations aux dérivées partielles de nature physique. Éditions universitaires européennes.

# Annexe A : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$\vec{B}(T)$  : Induction magnétique.

$\vec{B}_r(T)$  : Induction magnétique rémanente.

$\vec{D}(C.m^{-2})$  : Induction électrique.

$E(\vec{V}.m^{-1})$  : Champ électrique.

$\vec{j}(A.m^{-2})$  : Densité de courant.

$\varepsilon(\vec{F}.m^{-1})$  : Primitivité électrique.

$\mu_0(H.m^{-1})$  : Perméabilité magnétique du vide =  $4\pi.10^{-7}$ .

$\mu_r$  : Perméabilité relative du matériau magnétique.

$\rho(C.m^{-1})$  : Densité volumique de charge électrique.

$\sigma(\Omega m^{-1})$  : Conductivité électrique.

## Résumé :

Dans ce mémoire, nous nous concentrerons sur la résolution numérique des équations aux dérivées partielles (EDP). Ces équations sont cruciales pour modéliser divers phénomènes naturels et industriels, mais leur complexité rend souvent leur solution analytique impossible. Par conséquent, des techniques numériques sont nécessaires pour obtenir des solutions approchées. Nous commencerons par introduire les concepts de base des EDP. Ensuite, nous examinerons les principales méthodes numériques pour résoudre les EDP. Les méthodes par les différences finies sont souvent préférées pour leur capacité à préserver les propriétés physiques des données. Enfin, nous présenterons une application pratique de ces méthodes numériques sur un transformateur, illustrant ainsi leur utilisation concrète dans la modélisation et l'analyse des systèmes réels.

## Les mots clés :

Équations aux dérivées partielles, solutions approchées, modélisation des phénomènes naturels, modélisation des phénomènes industriels, concepts de base des EDP, transformateur, analyse des systèmes réels, méthodes par différences finies.

## Abstract:

In this memory, we are interesting on the numerical resolution of EDP. This type of equations is crucial to modifying various natural and industrial phenomena, but its complexity makes it impossible for an analytical solution. As a result, the numerical techniques are necessary to improve solutions applications. We begin by introducing the basic concepts of the EDP. Next, we examine the main numerical methods to generate the EDP. The methods with different fine prints should be proven to provide the capacity to preserve the appropriate physical devices. Finally, we have introduced a practical application of these numerical methods to a transformer, illustrating their use in the model and analysis of real systems.

## Keywords

Equations of parts, approach solutions, natural plant modifications, industrial plant modifications, EDP basic concepts, transformers, analysis of systems real, methods par Different finishes.

## الملخص

في هذه المذكرة، سوف نركز على تطبيق الطرق العددية لحل المعادلات التفاضلية ذات المشتقات الجزئية الضرورية لنمذجة الظواهر الطبيعية والصناعية المختلفة ، لكن تعقيدها غالبًا ما يجعل حلها التحليلي مستحيلًا ولذلك سنقوم بدراسة الطرق العددية للحصول على حلول تقريبية وتحديدًا طريقة الفروق المنتهية لقدرتها على الحفاظ على الخصائص الفيزيائية. سوف نبدأ بإدخال المفاهيم الأساسية وإجراء دراسة للطريقة العددية المقترحة وأخيرًا سنقوم بتقديم تطبيقًا عمليًا لهذه الطرق العددية لتوضيح استخدامها الملموس في نمذجة وتحليل الأنظمة الحقيقية .

## الكلمات المفتاحية:

المعادلات التفاضلية الجزئية، الحلول التقريبية، نمذجة الظواهر الطبيعية، نمذجة الظواهر الصناعية ، المفاهيم الأساسية للمعادلات التفاضلية الجزئية، المحولات، تحليل الأنظمة الحقيقية، الطرق بالاختلافات المحدودة