

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : Analyse

Par

Gouicem Djihan

Titre :

Résolution des équations intégrales linéaires de deuxième
espèce par la méthode de Galerkin

Membres du Comité d'Examen :

Dr. Laadjal Baya	UMKB	Président
Dr. Dakhia Ghania	UMKB	Encadreur
Dr. Kaboul Hanane	UMKB	Examinatrice

Juin 2024

Dédicace

Au début, la louange soit à Dieu qui m'a donné la force de terminer ce travail.

Et celui qui n'a pas remercié les gens, n'a pas remercié Dieu.

À ma chère *Maman*, source d'amour et de réconfort, merci pour ton soutien
inconditionnel et tes encouragements constants.

À ma cher *Papa*, "*Gouicem Ahmed*", mon modèles et ma force, merci pour la
confiance et ton soutien indéfectible.

À mes chères sours, *Manoubia, Rim, Wafa* et *Adra*, partenaires de vie et plus beaux
cadeaux, merci pour votre soutien et votre amour inconditionnelles.

À mes chers frères, *Chadli, Lakhder* et *Riad* mon soutien dans la vie et mes
meilleurs amis, merci pour votre soutien et votre présence constante.

Un salut spécial à *Rinad, Ahmed, Ayoub, Wateen, Taim Allah* et *Sidra*. Que Dieu
protège et les bénisse toujours.

Un salut spécial à *Nana Fatna*. Que Dieu prolonge sa vie et la comble de bonheur
et de santé.

Je dédie cette réalisation à toutes les familles de *Gouicem, Adjroud, djhaich,*
Benseghier, Rabhi, Hmaidia, Boucharib.

À ma chers amis, *Dounia, Zineb, Asma, Rokia, louiza, Firdous, Bina, Nour, Lolo,*
marwa, Noudjoud, Nossa Fatima, Laila, Merci pour chaque moment de camaraderie
et de soutien. Vous êtes la vraie ricless de ma vie.

À ma professeure *madame Djamilla*, je le remercie infiniment pour ton soutien
inoubliable. Ta bienveillance restera gravée dans mon coeur à jamais.

REMERCIEMENTS

Avant tout, je remercie Dieu pour la grâce d'avoir achevé ce travail.

Je remercie premièrement ma directrice de mémoire Dr *Dakhia Gania*, pour ses efforts conjoints avec moi, son encouragement, son soutien et ses conseils tout au long de la réalisation de mon mémoire.

Je remercie les dames les membres de jury Dr "*Laadjal Baya*" et Dr "*Kaboul Hanane*" qui ont accepté de participer aux jury de soutenance.

Je remercie Dr "*Kaci Fatma*" pour son aide précieuse

Pour tous mes collègues de promotion 2024 pour les bons moments que nous avons passés ensemble et nous les souhaitons le bonheur et réussite dans la vie.

Table des matières

Remerciements	ii
Table des matières	iii
Table des figures	v
Liste des tables	vi
Introduction	1
1 Equations intégrales	3
1.1 Rappel	3
1.1.1 Espace Normé	3
1.1.2 Espace de Hilbert	4
1.1.3 Opérateur linéaire borné	5
1.2 Equation intégrale linéaire	8
1.2.1 Classification des équations intégrales	8
1.3 Relation entre les équations différentielles ordinaires et les équations intégrales	11
1.4 Existence et unicité de la solution des équations intégrales linéaires de seconde espèce	13

1.4.1 Théorie de Riesz Fredholm	15
2 Méthode de Galerkin	16
2.1 Les polynômes orthogonaux	17
2.1.1 Espace des polynômes	17
2.1.2 Orthogonalité	17
2.1.3 Quelques exemples classiques de polynômes orthogonaux	18
2.2 La méthode de Bubnov Galerkin	22
2.3 Exemple	24
2.4 Application numérique	29

Table des figures

2.1	Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée	32
2.2	Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour $n=5$	34
2.3	Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour $n=8$	36
2.4	Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour $n=4$	38
2.5	Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour $n=8$	39

Liste des tableaux

2.1	Table Paramètres inconnus déterminés par la méthode Galerkin . . .	30
2.2	Table Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée .	31
2.3	Table Paramètres inconnus déterminés par la méthode Galerkin	
	pour n=5	32
2.4	Table Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée	
	pour n=5	33
2.5	Table Paramètres inconnus déterminés par la méthode Galerkin pour	
	n=8	34
2.6	Table Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée	
	pour n=8	35
2.7	Table Paramètres inconnus déterminés par la méthode Galerkin pour	
	n=4	36
2.8	Table Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée	
	pour n=4	37
2.9	Table Paramètres inconnus déterminés par la méthode Galerkin . . .	38
2.10	Table Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée	
	pour n=8	39

Introduction

La résolution des équations intégrales linéaires de deuxième espèce constitue un domaine fondamental de la mathématique appliquée, avec des applications étendues dans divers domaines tels que la physique, l'ingénierie et les sciences de la vie. La théorie des équations intégrales, qui a émergé rapidement grâce aux travaux de Volterra et de Fredholm, occupe désormais une place essentielle dans le domaine de l'analyse mathématique. Fredholm a étudié les conditions sous lesquelles une équation intégrale linéaire de deuxième espèce possède une solution. Il a affirmé que si l'opérateur associé à l'équation intégrale est compact, alors l'équation peut posséder une solution unique.

Dans certains cas peu fréquents, la solution exacte des équations intégrales est connue. Mais en général, elles sont relativement simples à résoudre numériquement, car elles se ramènent souvent à la recherche de solutions d'un système linéaire. Une des méthodes numériques, la méthode de Galerkin, se démarque comme une approche efficace. La méthode de Galerkin remonte au mathématicien russe Galerkin né en 1871 et décédé en 1945. Galerkin a développé cette méthode au début du XXe siècle comme un outil pour résoudre divers problèmes mathématiques et géométriques. L'idée de Galerkin repose sur le concept d'approximation à l'aide des fonctions de base, où la solution recherchée est approximée en utilisant un ensemble des fonctions de base préalablement connues.

Ce mémoire porte sur l'étude de la méthode de Galerkin pour résoudre les équations

intégrales linéaires du deuxième espèce. La recherche compose deux chapitres :

Dans le chapitre 1, nous commençons par introduire des concepts mathématiques importants tels que les espaces de Hilbert et les opérateurs linéaires. Ensuite, nous abordons les équations intégrales et leurs classifications, expliquons la relation entre les équations intégrales et les équations différentielles, et discutons de l'existence et de l'unicité de la solution.

Dans le chapitre 2, nous avons abordé les polynômes orthogonaux comme fonctions de base et présenté une vue d'ensemble de la méthode de Galerkin, appuyée par des exemples numériques.

Chapitre 1

Equations intégrales

Dans ce chapitre, on va aborder la notion des équations intégrales, leurs classifications et leur relation avec les équations différentielles ordinaires, on va étudier l'existence et l'unicité des équations intégrales linéaires de deuxième espèce.

D'abord, on fait rappel à des concepts fondamentaux qui jouent un rôle crucial dans notre analyse, tels que les espaces normés et les espaces de Hilbert, en mettant en lumière les opérateurs linéaires et leur rôle dans ce contexte.

1.1 Rappel

1.1.1 Espace Normé

Définition 1.1.1 *Un espace vectoriel E sur \mathbb{k} ($\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) est dit espace normé si pour chaque élément $x \in E$; il existe un nombre réel positif noté par $\|x\|$; vérifie les propriétés suivantes :*

- $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{k}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (homogénéité)
- pour tous $x, y \in E$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire)

Définition 1.1.2 (Suite de Cauchy) Soient $(E, \| \cdot \|)$ un espace normé et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de E . On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n, m \geq n_0, \| u_n - u_m \| < \varepsilon.$$

Définition 1.1.3 (Espace complet) Soit E un espace vectoriel normé. E est un espace complet, si et seulement si toute suite de Cauchy $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de l'espace E converge vers un élément u de E .

1.1.2 Espace de Hilbert

Définition 1.1.4 (Produit scalaire) Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{k} (\mathbb{R} ou \mathbb{C}). On appelle un produit scalaire sur E , toute application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{k}$$

qui vérifie :

- $\forall X \in E, \langle X, X \rangle \geq 0$ et $\langle X, X \rangle = 0 \iff X = 0$
- $\forall X \in E, \forall \alpha \in \mathbb{k} : \langle \alpha X, Y \rangle = \alpha \langle X, Y \rangle$
- $\forall X, Y \in E : \langle X, Y \rangle = \overline{\langle Y, X \rangle}$ ($\langle X, Y \rangle = \langle Y, X \rangle$ si $\mathbb{k} = \mathbb{R}$)
- $\forall X, Y, Z \in E : \langle X + Z, Y \rangle = \langle X, Y \rangle + \langle Z, Y \rangle$

Remarque 1.1.1 Le couple $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est appelé espace préhilbertien

Définition 1.1.5 (espace de Hilbert) Soit E un espace préhilbertien. S'il est complet par rapport à la norme du produit scalaire, on dit que E est un espace de Hilbert.

Définition 1.1.6 (Système orthonormé) Soit E un espace de Hilbert, la suite

$\{e_n\}_{n \geq 1} \subset E$ est appelée un système orthonormé si :

$$\langle e_n, e_m \rangle = \delta_{n,m} = \begin{cases} 1, & \text{si } n = m \\ 0, & \text{si } n \neq m \end{cases}$$

- Si $e_n \perp e_m$, on dit que le système $\{e_n\}_{n \geq 1}$ est orthogonal.
- Si le système $\{e_n\}_{n \geq 1}$ est orthogonal alors le système $\left\{ \frac{e_n}{\|e_n\|} \right\}_{n \geq 1}$ est orthonormé.

Définition 1.1.7 (Base Hilbertienne) Soit E un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On appelle base Hilbertienne (dénombrable) de E une famille dénombrable $\{e_n\}_{n \geq 1}$ d'éléments de E qui est orthonormée pour le produit scalaire et telle que l'espace vectoriel engendré par cette famille est dense dans E .

Lemme 1.1.1 $E = \mathcal{L}^2([a, b], \mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions carré intégrable sur $[a, b]$ muni du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

est un espace de Hilbert.

1.1.3 Opérateur linéaire borné

Définition 1.1.8 (Opérateur linéaire) Soient E et F deux espaces vectoriels normés. On appelle un opérateur linéaire de E dans F toute application A vérifiant :

- $\forall X, Y \in E : A(X + Y) = A(X) + A(Y)$
- $\forall \alpha \in \mathbb{k}, \forall X \in E : A(\alpha X) = \alpha A(X)$

On note par $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace des opérateurs linéaires de E dans F .

Définition 1.1.9 (Opérateur linéaire borné) On dit que $A \in \mathcal{L}(E, F)$ est un

opérateur linéaire borné s'il existe une constante $M \geq 0$ telle que :

$$\|Ax\|_F \leq M\|x\|_E \quad , \forall x \in E$$

On peut utiliser Ax au lieu de $A(x)$.

Remarque 1.1.2 Si $E = F$, on écrit :

$$\mathcal{L}(E, F) = \mathcal{L}(E, E) = \mathcal{L}(E)$$

Définition 1.1.10 (Norme d'un opérateur borné) Soient E, F deux espaces vectoriels normés et $A \in \mathcal{L}(E, F)$. On dit que $\|A\|$ est une norme si elle vérifie :

$$\|A\| = \inf\{M \geq 0, \|Ax\|_F \leq M\|x\|_E\}$$

Proposition 1.1.1 Si $A \in \mathcal{L}(E, F)$ est un opérateur linéaire borné donc,

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$$

Définition 1.1.11 (Ω mesurable au sens de Jordan) Un ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) est considéré comme mesurable selon la définition de Jordan si χ_Ω (la fonction caractéristique) définie par :

$$\begin{cases} \chi_\Omega(x) = 1 & \text{pour } x \in \Omega \\ \chi_\Omega(x) = 0 & \text{pour } x \notin \Omega \end{cases}$$

est Riemann intégrable. La mesure de Jordan $|\Omega|$ est définie par l'intégrale de χ_Ω .

Remarque 1.1.3 • Si un ensemble Ω est mesurable au sens de Jordan, alors son adhérence $\bar{\Omega}$ et sa frontière $\partial\Omega$ son également mesurable selon cette même définition, avec $|\bar{\Omega}| = |\Omega|$ et $|\partial\Omega| = 0$.

• Si Ω est à la fois compact et mesurable selon la définition de Jordan, alors toute fonction continue définie sur Ω ($f \in C(\Omega)$) est intégrable au sens de Riemann.

Définition 1.1.12 (opérateur intégral) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) un ensemble non vide mesurable au sens de Jordan. soit $K : \Omega \times \Omega \mapsto \mathbb{C}$ une fonction continue. On appelle opérateur intégral à noyau continu K tout opérateur linéaire $A : C(\Omega) \mapsto C(\Omega)$ donné sous la forme :

$$(A\varphi)(x) = \int_{\Omega} K(x, t)\varphi(t)dt \quad , x \in \Omega$$

Cet opérateur est borné avec

$$\|A\|_{\infty} = \max_{x \in \Omega} \int_{\Omega} |K(x, t)| dt$$

Remarque 1.1.4 $C(\Omega)$ est l'espace des fonctions continues sur Ω muni de la norme $\|\cdot\|_{\infty}$.

Définition 1.1.13 (opérateur inverse) Soit $A \in \mathcal{L}(E, F)$ est un opérateur. On dit que A est considéré comme inversible s'il existe un autre opérateur $B \in \mathcal{L}(E, F)$ appelé son inverse ($B = A^{-1}$), qui lorsqu'il est appliqué à l'opérateur original produit un résultat équivalent à l'élément neutre de l'opération

$$AB = BA = I$$

Définition 1.1.14 (ensemble relativement Compact) Un ensemble $G \subset E$ est relativement compact si pour toute suite $\{\varphi_n\}$ de G , il existe une sous suite $\{\varphi_{n(k)}\}$ qui converge dans E .

Définition 1.1.15 (opérateur Compact) On dit que $A \in \mathcal{L}(E, F)$ est un opérateur compact s'il transforme tout sous_ensemble borné G dans E à un ensemble

relativement compact $A(G)$ dans F .

Théorème 1.1.1 (critère de compacité) *Un opérateur $A : E \rightarrow F$ est compact si et seulement si l'image par A de toute suite bornée possède une sous-suite convergente.*

1.2 Equation intégrale linéaire

Une équation intégrale est une équation dans laquelle la fonction inconnue $\phi(x)$ apparaît à l'intérieur d'un signe intégrale. Le type le plus courant d'équation intégrale linéaire est de la forme :

$$h(x)\phi(x) = f(x) + \lambda \int_{a(x)}^{b(x)} k(x, t)\phi(t)dt \quad a(x) \leq x \leq b(x) \quad (1.1)$$

où

- $a(x)$ et $b(x)$ sont les limites d'intégration.
- λ est un paramètre constant.
- $k(x, t)$ est une fonction connue, de deux variables x et t . appelée le noyau de l'équation intégrale.
- les fonctions $f(x), k(x, t)$ et $h(x)$ sont donnée à l'avance.
- $\phi(x)$ est la fonction inconnue que nous cherchons à déterminer.

1.2.1 Classification des équations intégrales

Les équations intégrales se présentent sous divers types, principalement en fonction des limites d'intégration et du noyau de l'équation.

- Les deux types principaux sont abordés : les équations intégrales de Fredholm et les équations intégrales de Volterra.

Equation Intégrale de Fredholm

Pour les équations intégrales de Fredholm, les limites d'intégration $a(x)$ et $b(x)$ sont constantes.

Les équations de Fredholm peuvent être de première ou de deuxième espèce, selon que la fonction inconnue apparait uniquement à l'intérieur ou à la fois à l'intérieur et à l'extérieur du signe intégral.

l'équation (1.1) devient :

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)\phi(t)dt = 0 \quad a \leq x \leq b$$

est dite équation de Fredholm de première espèce pour que ce soit ($h(x) = 0$).

D'un autre côté, si ($h(x) = \mu = const \neq 0$) l'équation intégrale de seconde espèce est définie par :

$$\mu\phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)\phi(t)dt \quad a \leq x \leq b$$

Si $h(x) \neq 0$ (l'équation intégrale de Fredholm de troisième espèce).

Equation Intégrale de Volterra

Pour les équations intégrales de Volterra, on a au moins une limite variable.

La forme classique d'une équation intégrale de Volterra s'écrit comme suit :

- si $h(x) = 0$ (première espèce)

$$f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)\phi(t)dt = 0 \quad a \leq x \leq b$$

- si $h(x) = \mu = \text{const} \neq 0$ (sconde espèce)

$$\mu\phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)\phi(t)dt \quad a \leq x \leq b$$

- si $h(x) \neq 0$ (l'équation intégrale de Volterra de troisième espèce).

Homogénéité

Dans l'équation (1.1) si $f(x) = 0$ nous appelons cela une équation homogène de Fredholm (ou de Volterra), et non homogène sinon.

Sa forme

$$h(x)\phi(x) = \lambda \int_a^b k(x, t)\phi(t)dt \quad a \leq x \leq b$$

ou

$$h(x)\phi(x) = \lambda \int_a^x k(x, t)\phi(t)dt \quad a \leq x \leq b$$

Linéarité

- Si l'exposant de la fonction inconnue $\phi(x)$ à l'intérieur du signe intégral est un, l'équation intégrale est dite linéaire.
- Si la fonction inconnue $\phi(x)$ a un exposant différent de un, ou si l'équation contient des fonctions non linéaires de $\phi(x)$, telle que $\sin(\phi)$, $\cos(\phi)$, $\ln(1 + \phi)$ l'équation intégrale est dite non linéaire.

Exemple 1.2.1 • $\phi(x) = 1 - \int_0^x x(1-t)\phi(t)dt$ (équation intégrale linéaire non homogène de Volterra).

- $\phi(x) = \sin x - \int_0^1 (x-t)\phi(t)dt$ (équation intégrale linéaire non homogène de Fredholm).

- $\phi(x) = \int_0^1 (1 + x - t)\phi^4(t)dt$ $\phi(x)$ (équation intégrale non linéaire homogène de Fredholm).

1.3 Relation entre les équations différentielles ordinaires et les équations intégrales

Les équations différentielles et les équations intégrales sont deux aspects complémentaires de la modélisation mathématique. Les premières décrivent les taux de variation tandis que les secondes impliquent des intégrales. Malgré leurs différences, elles interagissent souvent dans la résolution des problèmes, chaque type d'équation pouvant être transformé à l'autre dans certains contextes.

La résolution d'une équation différentielle linéaire :

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_n(x)y = F(x) \quad (1.2)$$

à coefficients continus $a_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$)

avec les conditions initiales

$$y(0) = C_0, y'(0) = C_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = C_{n-1} \quad (1.3)$$

peut être réduit à la résolution d'une équation intégrale de Volterra du deuxième espèce

$$\phi(x) + \int_0^x k(x, t)\phi(t)dt = f(x) \quad (1.4)$$

Démontrons cela dans le cas d'une équation différentielle du second ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = F(x) \quad (1.5)$$

$$y(0) = C_0, y'(0) = C_1 \quad (1.6)$$

Pour arriver à l'équation intégrale (1.4), on utilise la transformation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \phi(x) \quad (1.7)$$

D'où, par intégration de 0 à x , on obtient :

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \phi(t)dt + C_1 \quad (1.8)$$

L'intégrale successive est

$$y = \int_0^x (x-t)\phi(t)dt + C_1x + C_0 \quad (1.9)$$

Compte tenu de (1.7), (1.8) et (1.9), l'équation différentielle (1.5) peut s'écrire ainsi :

$$\phi(x) + a_1(x)\left[\int_0^x \phi(t)dt + C_1\right] + a_2(x)\left[\int_0^x (x-t)\phi(t)dt + C_1x + C_0\right] = F(x)$$

Ce qui donne :

$$\phi(x) + \int_0^x [a_1(x) + a_2(x)(x-t)]\phi(t)dt = F(x) - C_1a_1(x) - C_1xa_2(x) - C_0a_2(x) \quad (1.10)$$

Alors :

$$k(x, t) = [a_1(x) + a_2(x)(x - t)]$$

$$f(x) = F(x) - C_1 a_1(x) - C_1 x a_2(x) - C_0 a_2(x)$$

On voit qu'on peut écrire l'équation différentielle (1.2) comme (1.4)

1.4 Existence et unicité de la solution des équations intégrales linéaires de seconde espèce

Considérons l'équation intégrale du seconde espèce

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_{\Omega} k(x, t)\phi(t)dt \quad x \in \Omega$$

avec $\Omega = [a, b]$ pour Fredholm et $[a, x]$ pour Volterra.

Théorème 1.4.1 (Série de Neumann) *Si A est un opérateur linéaire borné d'un espace de Banach E dans lui même, avec $\|A\| < 1$, et si I est l'opérateur identité sur E , alors l'opérateur $I - A$ a un inverse borné représenté par la série de Neumann*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

Et

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$$

Preuve. Comme $\|A\| < 1$, on a la convergence absolue

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|A^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k = \frac{1}{1 - \|A\|}$$

dans l'espace de Banach $\mathcal{L}(E)$, lorsque la série de Neumann converge en norme, elle

établit la définition d'un opérateur linéaire borné. C'est un concept clé en théorie des opérateurs

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

avec $\|S\| \leq (1 - \|A\|)^{-1}$, de plus, S est l'inverse de $I - A$

En réalité, en se référant aux notations $A^0 = I$, $A^k = AA^{k-1}$ il est possible de constater que :

$$(I - A)S = (I - A) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n A^k = \lim_{n \rightarrow \infty} (I - A^{n+1}) = I$$

aussi

$$S(I - A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n A^k (I - A) = \lim_{n \rightarrow \infty} (I - A^{n+1}) = I$$

puisque $\|A^{n+1}\| \leq \|A\|^{n+1} \rightarrow 0$, lorsque $n \rightarrow \infty$ ■

Corollaire 1.4.1 *Soit K un noyau continu vérifiant :*

$$\max_{x \in \Omega} \int_{\Omega} |K(x, t)| dt < 1$$

Alors, l'équation intégrale linéaire de sconde espèce

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_{\Omega} k(x, t)\phi(t)dt \quad x \in \Omega$$

admet une unique solution $\phi \in C(\Omega)$ pour tout $f \in C(\Omega)$.

Preuve. (voir(□□)) ■

1.4.1 Théorie de Riesz_Fredholm

Théorème 1.4.2 (voir([8])) (*Alternative de Fredholm*) Soit A un opérateur compact sur E (E espace de Hilbert séparable). Alors on a les propriétés suivantes :

- $\text{Ker}(I - A)$ est de dimension finie.
- $\text{Im}(I - A)$ est fermée et $\text{Im}(I - A) = (\text{Ker}(I - A^*))^\perp$.
- $\text{Ker}(I - A) = \{0\}$ si et seulement si $\text{Im}(I - A) = E$.
- $\dim \text{Ker}(I - A) = \dim \text{Ker}(I - A^*)$.

Théorème 1.4.3 (voir([8])) Soit $A : E \rightarrow E$ un opérateur linéaire compact. Alors $I - A$ est injectif si et seulement s'il est surjectif. En outre si $I - A$ est injectif (donc bijectif), alors l'opérateur inverse $(I - A)^{-1} : E \rightarrow E$ est borné.

Chapitre 2

Méthode de Galerkin

Dans l'analyse des équations intégrales linéaires de deuxième espèce, des méthodes numériques comme les méthodes de quadrature (Simpson, trapèze,...) et les méthodes de projection sont employées pour obtenir des solutions approximatives. Parmi ces dernières, la méthode de Galerkin permet de résoudre des problèmes mathématiques dans des espaces de dimensions infinies, tels que les espaces de Hilbert, en les approximant à l'aide de sous-espaces de dimensions finies constitués de fonctions de base sélectionnées. La méthode de Galerkin assure que la solution approximative se rapproche autant que possible de la solution exacte dans ce sous espace.

Dans ce chapitre, nous découvrirons l'approche adoptée par la méthode de Galerkin pour résoudre les équations intégrales linéaires de deuxième espèce à l'aide de polynômes de Tchebychev de deuxième espèce. Nous utilisons ici les polynômes comme base, qui sont un type spécifique de fonctions de base. Avant cela, nous discutons les polynômes orthogonaux en donnant des exemples.

2.1 Les polynômes orthogonaux

Les polynômes orthogonaux jouent un rôle très important dans la méthode de Galerkin. L'utilisation des polynômes orthogonaux dans la méthode permet de présenter de façon précise les fonctions, améliorant ainsi la qualité de l'approximation et réduisant les erreurs.

2.1.1 Espace des polynômes

L'espace des polynômes est un espace infini. Chaque polynôme dans cet espace peut être décrit par une combinaison linéaire des monômes de la forme x^n , où n est un entier non négatif, et des coefficients réels ou complexes. Un polynôme $P_n(x)$ est de degré n s'il s'écrit sous la forme suivante :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

2.1.2 Orthogonalité

Le produit scalaire entre deux fonctions f et g carrées intégrables sur $[a, b]$ est défini par l'intégrale de leur produit. En notant $\langle f, g \rangle$ ce produit scalaire, on a :

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

Dans certains contextes, on utilise une fonction de poids $\omega(x)$ pour définir un produit scalaire pondéré entre deux fonctions f et g . Ce produit scalaire pondéré est défini comme :

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\omega(x)dx$$

L'orthogonalité dans ce contexte signifie que deux fonctions sont orthogonales si leur

produit scalaire pondéré est nul :

$$\langle f, g \rangle = 0$$

Alors on dit que les fonctions f et g sont orthogonales au sens du produit scalaire pondéré par $\omega(x)$.

2.1.3 Quelques exemples classiques de polynômes orthogonaux

Polynômes de Tchebychev

Polynômes de Tchebychev de première espèce Les polynômes de Tchebychev de première espèce $T_n(x)$ sont des polynômes en x de degré n définis à l'aide de la relation suivante :

$$\cos(n\theta) = T_n(x) \quad \text{avec } x = \cos(\theta)$$

ou d'une manière équivalente :

$$T_n(x) = \sum_{m=0}^{n/2} (-1)^m \frac{(n-m-1)!}{m!(n-2m)!} (2x)^{n-2m} \quad n \geq 0$$

Les polynômes de Tchebychev sont une famille de polynômes orthogonaux sur l'intervalle $]-1, 1[$, avec la fonction de poids $\omega(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Les premiers polynômes sont :

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

On a la formule de récurrence :

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad n \geq 1$$

Les polynômes de Tchebychev sont solutions de l'équation différentielle :

$$(1 - x^2)T_n'' - xT_n' + n^2T_n = 0$$

Polynômes de Tchebychev de deuxième espèce Les polynômes de Tchebychev de deuxième espèce $U_n(x)$ sont une famille de polynômes orthogonaux sur l'intervalle $] -1, 1[$, avec la fonction de poids $\omega(x) = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1 - x^2}$

les polynômes de Tchebychev de sconde espèce sont écrites sous la formule suivantes :

$$U_n = \sum_{m=0}^{n/2} (-1)^m \frac{(m - n)}{m!(n - 2m)!} (2x)^{n-2m} \quad n \geq 0$$

Les premiers polynômes sont :

$$U_0(x) = 1$$

$$U_1(x) = 2x$$

$$U_2(x) = 4x^2 - 1$$

$$U_3(x) = 8x^3 - 4x$$

les polynômes de Tchebychev sont définis récursivement par les relations suivantes :

$$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x) \quad n \geq 2$$

Les polynômes de Tchebychev sont solutions de l'équation différentielle :

$$(1 - x^2)U_n'' - 3xU_n' + n(n + 2)U_n = 0$$

polynômes de Legendre

Les polynômes de Legendre sont une famille de polynômes orthogonaux sur l'intervalle $[-1, 1]$, avec la fonction de poids $\omega(x) = 1$

Les polynômes de Legendre notés L_n (n entier positif) peuvent être définis de différentes manières :

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] \quad n \geq 0$$

ou

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \left(\frac{n!}{k!(n-k)!} \right)^2 (x-1)^k (x+1)^{n-k} \quad n \geq 0$$

Les premiers polynômes sont :

$$L_0(x) = 1$$

$$L_1(x) = x$$

$$L_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$L_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

La formule de récurrence est :

$$(n+1)L_{n+1}(x) = x(2n+1)L_n(x) - nL_{n-1}(x) \quad n \geq 1$$

Les polynômes de Legendre sont solutions de l'équation différentielle :

$$(1-x^2)L_n''(x) - 2xL_n'(x) + n(n+1)L_n(x) = 0$$

On a aussi la relation de récurrence suivante :

$$(1-x^2)L_n'(x) = -nxL_n(x) + nL_{n-1}(x) \quad n \geq 1$$

Polynômes de Laguerre

Les polynômes de Laguerre sont des polynômes orthogonaux relativement à la fonction de poids $\omega(x) = x^\alpha \exp(-x)$ (α entier) définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$

Les polynômes de Laguerre sont définis par la formule suivante :

$$V_n(x) = \exp(x) \frac{d^n}{dx^n} [x^n \exp(-x)] \quad n \geq 0$$

Les premiers polynômes sont :

$$V_0(x) = 1$$

$$V_1(x) = -x + 1$$

$$V_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$$

$$V_3(x) = \frac{-1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 3x + 1$$

la formule de récurrence est :

$$(n + 1)V_{n+1}(x) = (2n + 1 - x)V_n(x) - nV_{n-1}(x) \quad n \geq 1$$

Les polynômes de Laguerre sont solutions de l'équation différentielle :

$$xV_n''(x) + (\alpha + 1 - x)V_n'(x) + nV_n(x) = 0$$

On a aussi la relation de récurrence :

$$xV_n'(x) = nV_n(x) - nV_{n-1}(x) \quad n \geq 1$$

Polynômes de Hermite

Les polynômes d'Hermite sont des polynômes orthogonaux relativement à la fonction de poids $\omega(x) = \exp(-x^2)$ définie sur l'intervalle $[-1, 1]$

Les polynômes de Hermite sont définis par la formule suivante :

$$H_n(x) = (-1)^n \exp(x^2) \frac{d^n}{dx^n} [\exp(-x^2)] \quad n \geq 0$$

Les premiers polynômes sont :

$$H_0(x) = 1$$

$$H_1(x) = 2x$$

$$H_2(x) = 2x^2 - 2$$

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

La formule de récurrence :

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \quad n \geq 1$$

Les polynômes de Hermite sont solutions de l'équation différentielle :

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0 \quad (2.1)$$

Relation de récurrence :

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x) \quad n \geq 1$$

2.2 La méthode de Bubnov Galerkin

On considère les équations intégrales linéaires de deuxième espèce qui sont de la forme :

$$\phi(x) + \lambda \int_{\Omega} k(x, t) \phi(t) dt = f(x) \quad x \in \Omega$$

avec $\Omega = [a, b]$ pour Fredholm et $[a, x]$ pour Volterra

La méthode de Bubnov Galerkin est une technique couramment utilisée pour résoudre numériquement les équations intégrales. Elle consiste à approcher la solution d'une équation intégrale en utilisant des fonctions de base. On choisit un système de fonctions $\{\Psi_n(x)\}$ complet de $\mathcal{L}^2(\Omega)$ et tel que pour tout n les fonctions $\{\Psi_0(x), \Psi_1(x), \dots, \Psi_n(x)\}$ sont linéairement indépendantes et nous cherchons la solution approchée $\tilde{\phi}(x)$ sous la forme :

$$\tilde{\phi}(x) = \sum_{i=0}^n c_i \Psi_i(x) \quad (2.2)$$

les coefficients $c_i (i = 0, 1, \dots, n)$ sont trouvés à paratir du système linéaire suivant :

$$(\tilde{\phi}(x) - \lambda \int_{\Omega} k(x, t) \tilde{\phi}(t) dt, \Psi_j) = (f, \Psi_j) \quad j = 0, 1, \dots, n$$

ce qui équivalent à

$$\int_{\Omega} [\tilde{\phi}(x) - \lambda \int_{\Omega} k(x, t) \tilde{\phi}(t) dt] \Psi_j(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \Psi_j(x) dx \quad j = 0, 1, \dots, n \quad (2.3)$$

En substituant la formule (2.2) dans le système (2.3), on obtient :

$$\sum_{i=0}^n c_i [\int_{\Omega} \Psi_i(x) - \lambda \int_{\Omega} k(x, t) \Psi_i(t) dt] \Psi_j(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \Psi_j(x) dx \quad j = 0, 1, \dots, n$$

On peut écrire ce dernier système sous la forme matricielle suivante :

$$MC = F$$

où

$M = (m_{ij})_{0 \leq i, j \leq n}$ est une matrice, avec :

$$m_{ij} = \int_{\Omega} [\Psi_i(x) - \lambda \int_{\Omega} k(x, t) \Psi_i(t) dt] \Psi_j(x) dx \quad i, j = 0, 1, \dots, n$$

C est un vecteur colone, avec :

$$C = [c_0, c_1, \dots, c_n]^T$$

et $F = [F_0, F_1, \dots, F_n]^T$ est un autre vecteur colone, avec :

$$F_j = \int_{\Omega} f(x) \Psi_j(x) dx \quad j = 0, 1, \dots, n$$

2.3 Exemple

On a une équation intégrale linéaire du deuxième espèce de Fredholm :

$$\phi(x) = x + \int_{-1}^1 (xt) \phi(t) dt$$

où $f(x) = x$, $k(x, t) = xt$

Nous choisissons la base du Tchebychev

$$\tilde{\phi}(t) = \sum_{i=0}^2 c_i U_i(t) \tag{2.4}$$

avec $U_0(t) = 1$, $U_1(t) = 2t$, $U_2(t) = 4t^2 - 1$

donc,

$$\tilde{\phi}(t) = c_0 + 2tc_1 + c_2(4t^2 - 1)$$

on essaye de trouver les coefficients (c_0, c_1, c_2) à partir du système linéaire suivant :

$$(\tilde{\phi}(x) - \int_{-1}^1 (xt)\tilde{\phi}(t)dt, U_j) = (x, U_j) \quad , j = 0, 1, 2$$

ou

$$\int_{-1}^1 [\tilde{\phi}(x) - \int_{-1}^1 (xt)\tilde{\phi}(t)dt]U_j(x)dx = \int_{-1}^1 xU_j(x)dx \quad , j = 0, 1, 2 \quad (2.5)$$

En substituant (2.4) dans (2.5), on obtient :

$$\int_{-1}^1 [\sum_{i=0}^2 c_i U_i(x) - \int_{-1}^1 (xt) \sum_{i=0}^2 c_i U_i(t) dt] U_j(x) dx = \int_{-1}^1 x U_j(x) dx \quad j = 0, 1, 2$$

ou encore :

$$\int_{-1}^1 [c_0 + 2xc_1 + c_2(4x^2 - 1) - \int_{-1}^1 (xt)(c_0 + 2tc_1 + c_2(4t^2 - 1))dt] U_j(x) dx = \int_{-1}^1 x U_j(x) dx \quad j = 0, 1, 2 \quad (2.6)$$

On a d'abord :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (xt)(c_0 + 2tc_1 + c_2(4t^2 - 1))dt &= \int_{-1}^1 [xtc_0 + 2xt^2c_1 + xc_2(4t^3 - t)]dt \\ &= \frac{xc_0}{2}t^2 \Big|_{-1}^1 + \frac{2xc_1}{3}t^3 \Big|_{-1}^1 + (xc_2t^4 - \frac{xc_2}{2}t^2) \Big|_{-1}^1 \\ &= \frac{2xc_1}{3} + \frac{2xc_1}{3} \\ &= \frac{4xc_1}{3} \end{aligned}$$

On résout le système (2.6) :

pour j=0, on a :

$$\int_{-1}^1 [c_0 + 2xc_1 + c_2(4x^2 - 1) - \frac{4xc_1}{3}]1dx = \int_{-1}^1 xdx$$

ce qui donne :

$$c_0x \Big|_{-1}^1 + \frac{2x^2}{2}c_1 \Big|_{-1}^1 + (\frac{4x^3}{3} - x)c_2 \Big|_{-1}^1 - \frac{4x^2}{6}c_1 \Big|_{-1}^1 = 0$$

et par suite :

$$2c_0 + \frac{2}{3}c_2 = 0 \quad (2.7)$$

Pour j=1, on a :

$$\int_{-1}^1 [c_0 + 2xc_1 + c_2(4x^2 - 1) - \frac{4xc_1}{3}]2xdx = \int_{-1}^1 2x^2dx$$

alors :

$$\int_{-1}^1 [2xc_0 + 4x^2c_1 + c_2(8x^3 - 2x) - \frac{8x^2c_1}{3}]dx = \int_{-1}^1 2x^2dx$$

et par suite :

$$\frac{8}{9}c_1 = \frac{4}{3} \quad (2.8)$$

Pour j=2, on a :

$$\int_{-1}^1 [c_0 + 2xc_1 + c_2(4x^2 - 1) - \frac{4xc_1}{3}](4x^2 - 1)dx = \int_{-1}^1 x(4x^2 - 1)dx$$

alors :

$$\left(\frac{4x^3}{3} - x\right)c_0 \Big|_{-1}^1 + \left(\frac{8x^4}{4} - \frac{2x^2}{2}\right)c_1 \Big|_{-1}^1 + \left(\frac{16x^5}{5} - \frac{8x^3}{3} + x\right)c_2 \Big|_{-1}^1 - \left(\frac{16x^4}{12} - \frac{4x^2}{6}\right)c_1 \Big|_{-1}^1 = \left(\frac{4x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right) \Big|_{-1}^1$$

ce qui implique :

$$\frac{2}{3}c_0 + \frac{46}{15}c_2 = 0 \quad (2.9)$$

$$c_1 = \frac{3}{2}, c_0 = c_2 = 0$$

Donc :

$$C = [c_0, c_1, c_2]^T = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$F = [0, \frac{3}{4}, 0]^T = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{4}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

La solution approximée est :

$$\tilde{\phi}(x) = \sum_{i=0}^2 c_i U_i(t) = \frac{3}{2} 2x = 3x$$

et la matrice (m_{ij}) est la suivante :

$$m_{ij} = \int_{-1}^1 [U_i(x) - \int_{-1}^1 (xt)U_i(t)dt]U_j(x)dx \quad i, j = 0, 1, 2$$

Pour $i = j = 0$, on a :

$$\begin{aligned} m_{0,0} &= \int_{-1}^1 [1 - \int_{-1}^1 xt dt] dx \\ &= x \Big|_{-1}^1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Pour $i = 1$ et $j = 0$, on a :

$$\begin{aligned} m_{1,0} &= \int_{-1}^1 [2x - \int_{-1}^1 xt 2t dt] dx \\ &= \int_{-1}^1 [2x - \frac{2xt^3}{3} \Big|_{-1}^1] dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

Pour $i = 2$ et $j = 0$, on a :

$$\begin{aligned} m_{2,0} &= \int_{-1}^1 [(4x^2 - 1) - \int_{-1}^1 xt(4t^2 - 1)dt] dx \\ &= \int_{-1}^1 [(4x^2 - 1) - (\frac{4xt^3}{3} - \frac{xt^2}{2}) \Big|_{-1}^1] dx \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Pour $i = 0$ et $j = 1$, on a :

$$\begin{aligned}
 m_{0,1} &= \int_{-1}^1 [1 - \int_{-1}^1 xt dt] 2x dx \\
 &= \int_{-1}^1 2x dx \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Pour $i = 0$ et $j = 2$, on a :

$$\begin{aligned}
 m_{0,2} &= \int_{-1}^1 [1 - \int_{-1}^1 xt dt] (4x^2 - 1) dx \\
 &= \int_{-1}^1 (4x^2 - 1) dx \\
 &= \frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$

Pour $i = 1$ et $j = 1$, on a :

$$\begin{aligned}
 m_{1,1} &= \int_{-1}^1 [2x - \int_{-1}^1 2xt^2 dt] 2x dx \\
 &= \int_{-1}^1 [2x - \frac{2xt^3}{3} \Big|_{-1}^1] 2x dx \\
 &= \frac{8}{9}
 \end{aligned}$$

Pour $i = 1$ et $j = 2$, on a :

$$\begin{aligned}
 m_{1,2} &= \int_{-1}^1 [2x - \int_{-1}^1 2xt^2 dt] (4x^2 - 1) dx \\
 &= \int_{-1}^1 [2x - \frac{2xt^3}{3} \Big|_{-1}^1] (4x^2 - 1) dx \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Pour $i = 2$ et $j = 1$, on a :

$$\begin{aligned} m_{2,1} &= \int_{-1}^1 [(4x^2 - 1) - \int_{-1}^1 xt(4t^2 - 1)dt]2xdx \\ &= \int_{-1}^1 (4x^2 - 1)2xdx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Pour $i = 2$ et $j = 2$, on a :

$$\begin{aligned} m_{2,2} &= \int_{-1}^1 [(4x^2 - 1) - \int_{-1}^1 xt(4t^2 - 1)dt](4x^2 - 1)dx \\ &= \int_{-1}^1 (4x^2 - 1)(4x^2 - 1)dx \\ &= \frac{46}{15} \end{aligned}$$

Donc,

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{8}{9} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{46}{15} \end{pmatrix}$$

2.4 Application numérique

Nous allons présenter dans cette section des exemples sur les équations intégrales linéaires de second type avec leurs solutions exactes. Nous chercherons leurs solutions approximatives en utilisant la méthode de Galerkin basée sur les polynômes de Tchebychev. A la fin, nous fournirons une comparaison entre les résultats obtenus en analysant l'erreur fois que nous changeons la valeur de n .

Exemple 2.4.1 *Considérons l'équation*

$$\phi(x) = x + \int_{-1}^1 (xt)\phi(t)dt$$

telle que la solution exacte est $\phi(x) = 3x$.

Appliquons la méthode de Galerkin en utilisant les polynômes de Tchebychev avec $n = 8$, l'investigation numérique détermine les valeurs de paramètres inconnus c_i qui sont donnés dans le tableau suivant :

c_0	0
c_1	1.5000000000000000
c_2	0
c_3	$-3.46944695195361e - 17$
c_4	0
c_5	$5.55111512312578e - 17$
c_6	0
c_7	0

TAB. 2.1 – Table Paramètres inconnus déterminés par la méthode Galerkin

En remplaçant les valeurs des paramètres du tableau et les polynômes de Tchebychev dans l'équation (2.2), nous obtenons le polynôme approximatif pour la solution $\tilde{\phi}(x)$ qui est donnée par :

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(x) = & x^5/562949953421312 - (37 * x^3)/18014398509481984 \\ & + (108086391056891921 * x)/36028797018963968 \end{aligned}$$

Pour estimer l'erreur dans la solution approchée, nous comparons la valeur approchée et la valeur exacte de l'exemple, puis calculons la différence entre elles. Cette

différence nous donne une idée du degré de précision de la solution approchée, la solution exacte $\phi(x_i)$ et les valeurs de $\tilde{\phi}(x_i)$ pour $i = 1, \dots, 11$ sont donnés dans le tableau suivant :

x_n	<i>sol.exact</i>	<i>sol.appro</i>	<i>erreur</i>
-1	-3	-3	0
-0.8000	-2.4	-2.4	0
-0.6000	-1.8	-1.8	0
-0.4000	-1.2	-1.2	0
-0.2000	-0.6	-0.6	0
0	0	0	0
0.2000	0.6	0.6	0
0.4000	1.2	1.2	0
0.6000	1.8	1.8	0
0.8000	2.4	2.4	0
1	3	3	0

TAB. 2.2 – Table Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée

On remarque à travers le tableau (2.2) que les solutions approchées sont identiques aux solutions exactes, donc il n’y a pas d’erreur. Cela indique que la méthode de Galerkin avec les polynômes de Tchebychev fournit un rapprochement parfait par sa précision pour résoudre les équations intégrales linéaires de deuxième espèce. Voici des exemples que nous avons trouvés dans un article([3]), résolus en utilisant la méthode de Galerkin avec les polynômes de Tchebychev de première espèce. Nous les avons résolus à nouveau en utilisant les polynômes de Tchebychev de sconde espèce.

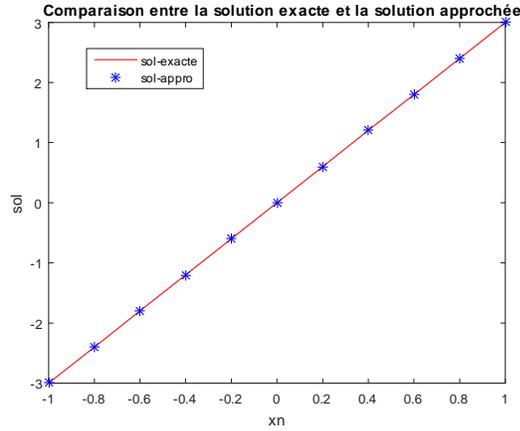


FIG. 2.1 – Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée

Exemple 2.4.2 *Considérons l'équation*

$$\phi(x) = x^5 - \frac{2}{7}\sqrt{1-x^2} + \int_{-1}^1 t\sqrt{1-x^2}\phi(t)dt$$

telle que la solution exacte est $\phi(x) = x^5$.

Les résultats numériques pour $n = 5$ des coefficients ci sont donnée dans le tableau suivant :

c_0	2.288596589936348e17
c_1	0.158730158730159
c_2	4.979627287569227e18
c_3	0.138888888888889
c_4	0.138888888888889e - 21

TAB. 2.3 – Table ParamÈtres inconnus dÈterminÈs par la mÈthode Galerkin pour $n=5$

La solution approchée est donné par :

$$\tilde{\phi}(x) = -(89*x^4)/2361183241434822606848+(10*x^3)/9+(23549*x^2)/1180591620717411303424 - (5 * x)/21 + 726271825429853/40564819207303340847894502572032.$$

Les valeurs de $\phi(x_i)$ et de $\tilde{\phi}(x_i)$ sont donnés dans le tableau suivant :

x_n	<i>sol.exact</i>	<i>sol.appro</i>	<i>erreur</i>
-1	-1	-0.8730	0.127
-0.8000	-0.32768	-0.3784	0.05072
-0.6000	-0.07776	-0.0971	0.01934
-0.4000	-0.01024	0.0241	0.03434
-0.2000	-0.00032	0.0387	0.03902
0	0	0	0
0.2000	0.00032	-0.0387	0.03902
0.4000	0.01024	-0.0241	0.03434
0.6000	0.07776	0.0971	0.01934
0.8000	-0.32768	0.3784	0.05072
1	1	0.8730	0.127

TAB. 2.4 – Table Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour n=5

Les résultats numériques pour $n = 8$ des coefficients c_i sont donnée dans le tableau suivant :

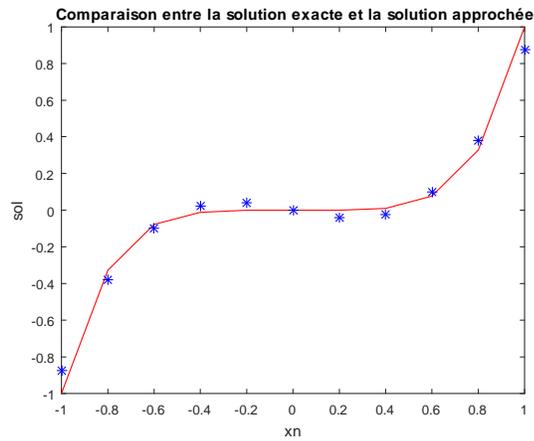


FIG. 2.2 – Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour n=5

c_0	$4.87449945530373 e - 17$
c_1	0.156250000000000
c_2	$4.93410022813060 e - 18$
c_3	0.125000000000000
c_4	$-6.49460233339829 e - 18$
c_5	0.031250000000000
c_6	$1.69591410983195 e - 18$
c_7	$-1.38777878078145 e - 17$

TAB. 2.5 – Table Paramètres inconnus déterminés par la méthode Galerkin pour n=8

La solution approchée est donné par :

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(x) = & -x^7/562949953421312 + (8397759919 * x^6)/77371252455336267181195264 \\ & + (1125899906842627 * x^5)/1125899906842624 \\ & - (37074256333 * x^4)/154742504910672534362390528 \\ & - (5 * x^3)/4503599627370496 + (2676534057 * x^2)/19342813113834066795298816 \\ & + x/9007199254740992 + 722467094433015/20282409603651670423947251286016 \end{aligned}$$

Les valeurs de $\phi(x_i)$ et de $\tilde{\phi}(x_i)$ sont donnés dans le tableau suivant :

x_n	<i>sol.exact</i>	<i>sol.appro</i>	<i>erreur</i>
-1	-1	-1	0
-0.8000	-0.32768	-0.3277	0.00002
-0.6000	-0.07776	-0.0778	0.00004
-0.4000	-0.01024	-0.0102	0.00004
-0.2000	-0.00032	-0.0003	0.00002
0	0	0	0
0.2000	0.00032	0.00032	0
0.4000	0.01024	0.0102	0.00004
0.6000	0.07776	0.0778	0.00004
0.8000	-0.32768	0.3277	0.00002
1	1	1	0

TAB. 2.6 – Table Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour n=8

On remarque que l'erreur est plus petite, donc la solution approximée est mielleure.

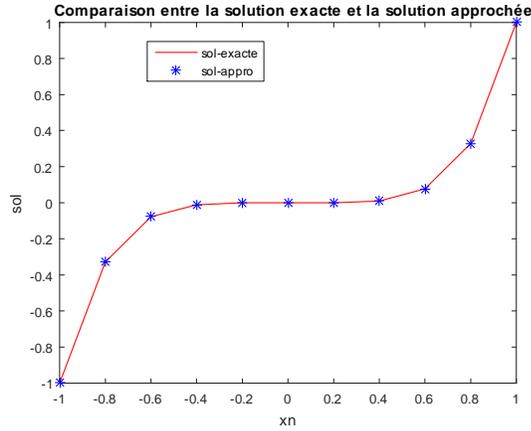


FIG. 2.3 – Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour n=8

Exemple 2.4.3 *Considérons l'équation*

$$\phi(x) = x^4 - \frac{2}{7}\sqrt{1-x^2} + \int_{-1}^1 (t^3 + t^2)\sqrt{1-x^2}\phi(t)dt$$

telle que la solution exacte est $\phi(x) = x^2$

Les résultats numériques pour $n = 4$ des coefficients ci sont donnée dans le tableau suivant :

c_0	0.128571428571429
c_1	0
c_2	0.214285714285714
c_3	0

TAB. 2.7 – Table Paramètres inconnus déterminés par la méthode Galerkin pour n=4

La solution approchée est donné par :

$$\tilde{\phi}(x) = (6x^2)/7 - 3/35.$$

Les valeurs de $\phi(x_i)$ et de $\tilde{\phi}(x_i)$ sont donnés dans le tableau suivant :

x_n	<i>sol.exacte</i>	<i>sol.appro</i>	<i>erreur</i>
-1	1	0.7714	0.2268
-0.8000	0.64	0.4629	0.1771
-0.6000	0.36	0.2229	0.1371
-0.4000	0.16	0.0514	0.1086
-0.2000	0.04	-0.0514	0.0914
0	0	-0.0857	0.0857
0.2000	0.04	-0.0514	0.0914
0.4000	0.16	0.0514	0.1086
0.6000	0.36	0.2229	0.1371
0.8000	0.64	0.4629	0.1771
1	1	0.7714	0.2268

TAB. 2.8 – Table Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour n=4

Les résultats numériques pour $n = 8$ des coefficients ci sont donnée dans le tableau suivant :

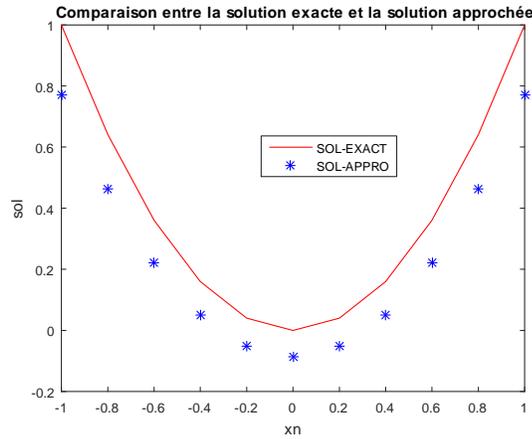


FIG. 2.4 – Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour n=4

c_0	0.1250000000000000
c_1	0
c_2	0.1875000000000000
c_3	0
c_4	0.0625000000000000
c_5	0
c_6	$1.38777878078145e - 17$
c_7	0

TAB. 2.9 – Table Paramètres inconnus déterminés par la méthode Galerkin

La solution approchée est donné par :

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(x) = & x^6/1125899906842624 + (4503599627370491 * x^4)/4503599627370496 \\ & + (3 * x^2)/9007199254740992 - 1/72057594037927936 \end{aligned}$$

Maintenant, les valeurs de $\phi(x_i)$ et de $\tilde{\phi}(x_i)$ sont donnés dans le tableau suivant :

x_n	$sol.exacte$	$sol.appro$	$erreur$
-1	1	1	0
-0.8000	0.64	0.4096	0.2304
-0.6000	0.36	0.1296	0.2304
-0.4000	0.16	0.0256	0.1344
-0.2000	0.04	0.0016	0.0384
0	0	0	0
0.2000	0.04	0.0016	0.0384
0.4000	0.16	0.0256	0.1344
0.6000	0.36	0.1296	0.2304
0.8000	0.64	0.4096	0.2304
1	1	1	0

TAB. 2.10 – Table Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour n=8

On remarque que l'erreur est grande dans cet exemple.

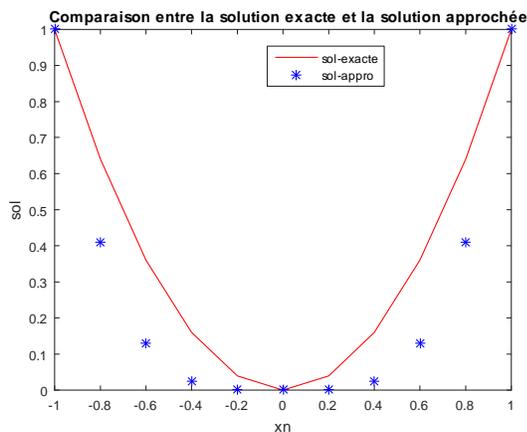


FIG. 2.5 – Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour n=8

Nous remarquons à partir des trois exemples que plus la valeur de n augmente, plus la solution approchée se rapproche de la solution exacte. De plus, plus le noyau est simple et non complexe, plus l'erreur est réduite.

Conclusion

À travers notre étude numérique, nous avons réussi à obtenir des solutions approximatives pour des équations intégrales linéaires de seconde espèce en utilisant la méthode de Galerkin. Nous avons analysé l'erreur résultante de ces solutions approximatives, ce qui constitue une étape importante pour comprendre la précision et l'efficacité de la méthode utilisée.

- Les résultats ont montré que les solutions approximatives se rapprochent considérablement des solutions exactes à mesure que le nombre des fonctions de base utilisées augmente, ce qui signifie le taux d'erreur diminue progressivement avec l'amélioration de la précision de l'approximation, renforçant ainsi l'efficacité de la méthode de Galerkin pour résoudre ce type d'équations.

- Il a été observé que plus le noyau est complexe, plus les erreurs sont nombreuses.

Bien que les résultats obtenus soient positifs et prometteurs, l'étude de la convergence reste une composante cruciale pour garantir la précision et la stabilité des solutions dans diverses applications.

Bibliographie

- [1] AUBRUN,G., Théorie des opérateurs,(cours, Université de la Réunion).
- [2] Beggat,O., Meguerhi,S.,(2014), Les équations intégrales et Transformation de Bessel (Master Academique, université Hamma Lakhder d'el oued, faculté des Sciences et de Technologie.
- [3] Benattia,M. E., Belghaba,K.,(2017), Application of the Galerkin Method with Chebyshev Polynomials for Solving the Integral Equation (Journal of Computer Science & Computational Mathematics, University of Oran 1, Ahmed Ben Bell, Oran, Algeria).
- [4] Chebbah,H.,(2019), Sur les méthodes de Nyström et applications aux équations intégrales et intégrro-différentielles (Thèse de doctorat, Université de Batna 2, Mostefa Ben Boulaid, Faculté des Mathématiques et de l'Informatique).
- [5] Jedrzejewski,F., (2005), Introduction aux méthodes numériques deuxième édition, Paris.
- [6] Kendell,E., The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind, University of Iowa
- [7] Krasnov,M., KisselevI,A., Makarenko,G.,(1977), Equations Integrales Problemes Et Exercices, Mir Moscou.
- [8] Matos,J.,(2014/2015), Analyse Fonctionnelle (cours, Univercité Evry).

- [9] Menacer, T., (2020), Théorie des opérateurs (cours, Université Mohammed Khider Biskra).
- [10] Molla, H. U., Saha, G., Numerical Approximation Of Fredholm Integral Equation (Fie) Of 2nd Kind Using Galerkin and Collocation methods (Articl, University of Dhaka, NDhaka-1000, Bangladesh, Department of Mathematics).
- [11] Rahmoune, A., (2011). Sur la résolution numérique des équations intégrales en utilisant des fonctions spéciales (Thèse de doctorat, Université de Batna, Faculté des Sciences).
- [12] Shirin, A., Islam, M. S., Numerical Solutions of Fredholm Integral Equations Using Bernstein Polynomials (Articl, Institute of Natural Sciences, United International University, Dhaka-1209, Bangladesh).
- [13] Wazwaz, A. M., (2011), Linear and nonlinear integral equations, Berlin :Springer.

Annexe A : Les cods MATLAB

Exemple 2.4.4 *clear all*

```
N=8;
```

```
%polynomes Chebyshev
```

```
syms x t n%Chebyshev
```

```
K=x*t;
```

```
Tt=chebyshevU([0, 1, 2,3,4,5,6,7], t);%de second kind
```

```
Tx=chebyshevU([0, 1, 2,3,4,5,6,7], x);
```

```
I=@(n)int(K*Tt(n),t);II=@(n) (subs(I(n),t,1)-subs(I(n),t,-1));
```

```
T1= @(n) ((Tx(n))-II(n));
```

```
f=x;F=@(n)int(f*Tx(n),x);
```

```
%%%%%%%%Matrix
```

```
A=zeros(N,N);
```

```
for j=1 :N
```

```
for i=1 :N
```

```
A(i,j)=subs(int(T1(j)*Tx(i)),x,1)-subs(int(T1(j)*Tx(i)),x,-1);end
```

```
end
```

```
FF=zeros(N,1);
```

```
for i=1 :N
FF(i)=subs(F(i),x,1)-subs(F(i),x,-1);
end
C=inv(A)*FF
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Approximate solution
Y=C(1)*Tx(1)+C(2)*Tx(2)+C(3)*Tx(3)+C(4)*Tx(4)+C(5)*Tx(5)+C(6)*Tx(6)+C(7)*Tx(7)+C(8)*Tx(8)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Figure
ex=@(x) 3.*x; m=10; h=2/m; xn=-1 :h :1;
plot(xn,ex(xn), 'r-')
hold on
plot(xn,subs(Y,x,xn), 'b*')
```

Exemple 2.4.5 *clear all*

```
N=8;
%polynomes Chebyshev
syms x t n
%Chebyshev
K=t*sqrt(1-x.^2);
Tt=chebyshevU([0, 1, 2,3,4,5,6,7], t);%de second kind
Tx=chebyshevU([0, 1, 2,3,4,5,6,7], x);
I=@(n)int(K*Tt(n),t);II=@(n) (subs(I(n),t,1)-subs(I(n),t,-1));
T1= @(n) ((Tx(n))-II(n));
f=x^5-(2/7)*sqrt(1-x.^2);
F=@(n)int(f*Tx(n),x);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Matrix
```

```
A=zeros(N,N);  
  
for j=1 :N  
  
for i=1 :N  
  
A(i,j)=subs(int(T1(j)*Tx(i)),x,1)-subs(int(T1(j)*Tx(i)),x,-1);  
  
endend  
  
FF=zeros(N,1);  
  
for i=1 :N  
  
FF(i)=subs(F(i),x,1)-subs(F(i),x,-1);  
  
end  
  
C=inv(A)*FF  
  
%%%%%%%%%Approximate solution  
  
Y=C(1)*Tx(1)+C(2)*Tx(2)+C(3)*Tx(3)+C(4)*Tx(4)+C(5)*Tx(5)+C(6)*Tx(6)+C(7)*Tx(7)+C(8)*Tx(8)+C(9)*Tx(9)+C(10)*Tx(10);  
  
%%%%%%%%% Figure  
  
ex=@(x) x.^5;m=10;h=2/m; xn=-1 :h :1;  
  
plot(xn,ex(xn), 'r-')  
  
hold on  
  
plot(xn,subs(Y,x,xn), 'b*')  
  
%%%erreur  
  
Yex=ex(xn);  
  
err=Y-Yex
```


Annexe B : Abréviations et Notations

A	: opérateur linéaire.
$\langle \cdot, \cdot \rangle$: produit scalaire.
$\{e_n\}_{n \geq 1}$: système orthonormé.
\mathbb{N}	: l'ensemble des nombres naturels.
\mathcal{L}^2	: l'espace des fonctions carré intégrable.
\mathbb{R}	: l'ensemble des nombres réels.
\mathbb{R}^n	: l'ensemble des vecteurs de dimension n , à coordonnées réelles.
\mathbb{C}	: l'ensemble des nombres complexes.
\mathbb{k}	: le corps.
\exp	: exponentiel.
A^{-1}	: opérateur inverse.
χ_Ω	: fonction caractéristique.
$K(x, t)$: noyau de l'équation intégrale.
$C(\Omega)$: l'espace des fonctions continues sur Ω .
$\phi(x)$: fonction inconnue.
$\tilde{\phi}(x)$: solution approchée.
$P_n(x)$: Polynôme de degré n .
$T_n(x)$: Polynôme de Tchebychev de première espèce de degré n .
$U_n(x)$: Polynôme de Tchebychev de deuxième espèce de degré n .
$L_n(x)$: polynôme de Legendre de degré n .
$V_n(x)$: Polynôme de Laguerre de degré n .
$H_n(x)$: Polynôme de Hermite de degré n .

الملخص

نهتم بحل المعادلات التكاملية الخطية لفريدهولم وفولتيرا من النوع الثاني عدديا. ندرس وجود ووحداية الحل باستخدام نظرية المؤثرات. ثم نطبق طريقة جالركين باستخدام متعددات حدود تشيبيشاف كدوال تقريب. في النهاية ، نقدم أمثلة عددية.

الكلمات المفتاحية :

المعادلات التكاملية لفريدهولم ، المعادلات التكاملية لفولتيرا، طريقة جالركين ، متعددات حدود تشيبيشاف.

Résumé

On s'intéresse à la résolution numérique des équations intégrales linéaires de Fredholm et de Volterra de seconde espèce. On étudie l'existence et l'unicité de la solution en utilisant la théorie des opérateurs. Puis on applique la méthode de Galerkin avec les polynômes de Tchebychev comme fonctions d'approximation. On donne à la fin des exemples numériques.

Mots clés : équation intégrale de Fredholm, équation intégrale de Volterra, méthode de Galerkin, les polynômes de Tchebychev

Abstract

We are interested in the numerical resolution of linear integral equations of Fredholm and Volterra of the second kind. We study the existence and uniqueness of the solution using operator theory. Then, we apply the Galerkin method using Chebyshev polynomials as approximation functions. Finally, we provide numerical examples.

Keywords

Fredholm integral equations, Volterra integral equations, Galerkin method, Chebyshev polynomials.