République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : Analyse

Par

BELKACEMI Hadjer

Titre :

Équations Intégrales Linéaires de Fredholm de Seconde Espèce et Méthode Directe

Membres du Comité d'Examen :

Président	HAOUES AMRANE	U.Biskra
Encadreur	CHEMCHAM MADANI	U.Biskra
Examinatrice	OUAAR FATIMA	U.Biskra

10Juin 2024

Dédicace

À mon soutien et à la lumière de mon Seigneur, à celui qui m'a appris la détermination et la persévérance, source d'espoir et d'ambition, **mon cher père.**

À la fontaine de tendresse et au cœur blanc brillant, qui me reçoit avec le sourire et me fait ses adieux avec une invitation... **ma chère maman**.

Pour **mon mari** et tous ceux qui m'ont soutenu, il était le meilleur mari et ami.

À ma sœur et compagne bien-aimée, "**Meriem**".

À mon frère bien-aimé et à la prunelle de mes yeux, " **Abdennour** ".

À **mes filles**, "**Sondous**" et " **Hibat Al-Rahman**" , vous qui avez éclairé ma vie.

À tous ceux qui m'ont donné un coup de main de près ou de loin. Mon parcours d'obtention du diplôme n'a pas été facile, mais il a plutôt été semé de défis et de difficultés, et Dieu soit loué, toutes les louanges et bénédictions soient sur lui. Comme je suis heureux de vous voir fier et heureux de ma réussite. **Dieu** merci pour toujours et pour toujours.

REMERCIEMENTS

Je remercie **Dieu** Tout-Puissant qui nous a permis d'achever ce travail et en reconnaissance de Sa grâce sur nous et conformément à ce qu'Il, que les prières et la paix de **Dieu** soient sur lui, **a dit** : << *Celui qui travaille pour vous, récompensez-le Si vous. ne trouvez rien pour le récompenser, alors priez pour lui jusqu'à ce que vous voyiez que vous l'avez récompensé*>>. Nous exprimons nos plus profonds remerciements et notre gratitude au **Pr." Madani Chemcham "**, qui a été notre mentor, conseiller et guide. Peu importe ce que nous disons ou faisons, nous ne lui donnerons qu'une petite partie de ce qu'il mérite. Nous adressons également nos sincères remerciements au respecté professeur " **Houas Amrane** " et " **Ouaar Fatima** " pour avoir discuté de cette mémoire. Nous ne pouvons également manquer de remercier tous ceux qui nous ont prêté main forte, de loin ou de près, pour accomplir cet humble travail, sans oublier ceux qui ont contribué à notre éducation, en commençant par nos professeurs et en terminant par nos chers collègues. Merci, que **Dieu** vous récompense dans ce monde et dans l'au-delà.

Table des matières

Introduction

“Erik Ivar Fredholm”

‹‹était un mathématicien suédois (1866- 1927) qui a étudié à l’Université d’Uppsala, à l’Université de Stockholm et à l’Institut royal de technologie. Il était célèbre dans le domaine des équations intégrales, qui occupent une place très importante dans toutes les branches de l’ingénierie et de la technologie. sciences physiques››.

Les équations intégrales linéaires de Fredholm du deuxième type, ce type d’équations est considéré comme l’un des sujets importants en mathématiques appliquées et en analyse numérique, son importance et ses applications réside dans les mathématiques théoriques, où il est utilisé dans l’analyse des fonctions et des systèmes dynamiques. On le retrouve en physique et en ingénierie et il apparaît dans la mécanique quantique, les théories électromagnétiques et la propagation des ondes.

Ce travail contient deux chapitres principaux :

Chapitre 01 : est une introduction des termes et définitions, dans le but de mieux présenter au lecteur le concept de ces équations et leurs classifications. Nous discutons également de quelques exemples concernant leur relation avec les équations différentielles EDO d’une meilleure manière, et à la fin de ce chapitre, nous répondons à la question de l’existence de la solution et de son unicité.

Chapitre 02 : nous parlons de la méthode directe, qui est l’une des nombreuses méthodes de résolution d’équations intégrales , en fournissant des exemples illustratifs.

Chapitre 1

Équations intégrales linéaires de Fredholm de seconde espèce

Les équations intégrales linéaires de Fredholm de seconde espèce sont des outils mathématiques essentiels en physique, ingénierie et sciences appliquées. Elles modélisent des phénomènes complexes . Leur résolution requiert des méthodes analytiques et numériques. Dans ce chapitre, nous expliquerons le sens de ces équations et mentionnerons certaines de leurs propriétés.

1.1 Les équations intégrales linéaires

1.1.1 Notions fondamentales et définitions

Définition de l'équation intégrale de Fredholm

On appelle équation intégrale de Fredholm une équation, à une inconnue φ de la forme :

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt, \tag{1.1}$$

où f, K sont des fonctions connues et λ est un paramètre non nul, réel ou complexe. La fonction $h(x)$ détermine le type de l'équation intégrale tel que :

1. Si $h(x) = 0$, l'équation 1.1 s'écrit :

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = 0,$$

et s'appelle équation intégrale linéaire de Fredholm de première espèce.

2. Si $h(x) = 1$, l'équation 1.1 s'écrit :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt,$$

et s'appelle équation intégrale linéaire de Fredholm de seconde espèce.

3. Sinon, la formule 1.1 est appelée équation intégrale linéaire de Fredholm de troisième espèce.

Exemple 1.1.1 • $\frac{1}{4}\exp(x) = \int_0^{\frac{1}{4}} \exp(x-t)\alpha(t)dt$. *(équation intégrale linéaire de Fredholm de première espèce)*

• $x^3 + 2x^2 - x + 3 = \int_0^1 (x-t)\varphi(t)dt$. *(équation intégrale linéaire de Fredholm de première espèce)*

• $\varphi(x) = \cos x + 1 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin(t)\varphi(t)dt$. *(équation intégrale linéaire de Fredholm de deuxième espèce)*

• $\varphi(x) = 1 + x - \int_0^1 xt^2\varphi(t)dt$. *(équation intégrale linéaire de Fredholm de deuxième espèce)*

• $x\exp(x)\varphi(x) = 1 + x^2 - \int_0^1 xt^2\varphi(t)dt$. *(équation intégrale linéaire de Fredholm de $3^{ème}$ espèce non homogène)*

• $\cos(x)\varphi(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-t)\varphi(t)dt$. *(équation intégrale linéaire de Fredholm de $3^{ème}$ espèce homogène)*

Remarque 1.1.1 ▶*Si* $f(x) = 0$ *l'équation* 1.1 *est dite homogène.*

▶*Si* $f(x) \neq 0$ *l'équation* 1.1 *est dite non homogène.*

Opérateurs linéaires bornés

Définition 1.1.1 (Opérateurs linéaires) *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels normés, un opérateur* T *défini sur* E *dans* F $(i.e\ Tx \in F;\ \forall x \in E)$ *et dit linéaire s'il vérifie les conditions suivantes, pour tout* x *et* y *dans* E *et pour tous scalaires* α *et* β*,on a :*

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y).$$

Définition 1.1.2 (Opérateurs linéaires bornés) *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels normés, un opérateur linéaire* $T : E \to F$ *est dit borné s'il existe une constante* $M > 0$, *telle que*

$$\|Tx\|_F \leq M\, \|x\|_E\,,\ \forall x \in E.$$

Proposition 1.1.1 *Le plus petit des nombres* M *vérifiant l'inégalité précédente s'appelle norme de l'opérateur* T *et se note* $\|T\|$ *, on a :*

$$\|T\| = \sup_{||x||\leq 1} \|Tx\| = \sup_{||x||\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{||x||=1} ||Tx|| = \inf\{M > 0, \|Tx\|_F \leq M\,\|x\|_E\,,\ \forall x \in E].$$

Opérateur intégral linéaire

Définition 1.1.3 (Opérateur intégral linéaire) *Un opérateur intégral linéaire* T *est un opérateur qui admet une formulation de la forme suivante :*

$$T\varphi(x) = \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt,$$

la fonction K *est appelée noyau de l'opérateur* T*.*

– L'opérateur T est appelé opérateur intégral à noyau.

– Si K est une fonction continue sur $[a, b] \times [a, b]$, l'opérateur T est appelé opérateur intégral à noyau continue K.

Opérateur compact

Définition 1.1.4 *Un opérateur $A \in \mathcal{L}(E, F)$ est compact, s'il transforme tout sous ensemble borné de E à un ensemble relativement compact.*

$$\begin{aligned} A: \quad & E && \rightarrow && F \\ & B \text{ (borné)} && \rightarrow && A(B) \text{ (relativement compact).} \end{aligned}$$

– *A est compact $\Leftrightarrow B(0, 1) \subset E \Longrightarrow \overline{A(B(0, 1))}$ compact.*

– *On désigne l'ensemble des opérateurs compacts par $\mathcal{K}(E)$.*

Propriétés 1.1.1 *1. Un opérateur compact est borné. En effet :*

Si $A \in \mathcal{K}(E)$; alors par définition : $\overline{A(B(0, 1))}$ est compact donc $\overline{A(B(0, 1))}$ est borné, alors :

$$\exists M > 0 : ||Ay|| \leq M, \forall y \in B(0, 1).$$

Soit $x \in E$: $\frac{x}{||x||} \in B(0, 1)$ donc $||A\frac{x}{||x||}|| \leq M, \forall x \in E$ alors $||Ax|| \leq M||x||$ d'où le résultat. la réciproque est fausse, prenons par exemple Id_E l'opérateur identité de E, on a $Id_E(B(, ; 1)) = B(0, 1)$ n'est pas un ensemble relativement compact sauf si E est de dimension fini (d'après le théorème de Riez).

2. *Une combinaison linéaire des opérateurs compacts est compacte.*
3. *Si A et B deux opérateurs bornés alors $A.B$ est compact si l'un des opérateur est compact.*
4. *un opérateur A borné de rang fini (c'est à dire son image $A(E)$ est de dimension fini) est compact.*
5. *Un opérateur $A \rightarrow \mathcal{L}(E)$ est compact si et seulement si pour toute suite bornée*

(x_n) de E on peut extraire de la suite (Ax_n) une sous suite convergente.

1.2 Noyaux particuliers dans les équations intégrales linéaires

1. On dit que le noyau $K(x,y)$ d'une équation intégrale est séparable ou (dégénéré) si :
$$K(x,t)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x)\beta_i(t),$$
où $\forall i\in\{1,\ldots,n\}$, $\alpha_i(x)$ et $\beta_i(x)$ sont linéairements indépendantes.

   Par exemple les noyaux suivants sont noyaux séparables :
$$K_1(x,t)=2x-t,$$
$$K_2(x,t)=\ln(xt),$$
$$K_3(x,t)=\exp(x-t),$$
$$K_4(x,t)=2xt^2.$$

2. Si $K(x,t)\in\mathcal{L}^2([a,b]\times[a,b])$, i.e
$$\int_a^b\int_a^b |K(x,t)|^2\,dxdt<+\infty,$$
alors, ce type de noyau est de carré sommable sur $[a,b]\times[a,b]$.

3. • Si K est une fonction à valeurs complexes, et si
$$K(x,t)=\overline{K(t,x)},$$

alors, il est dit hermtien. Par exemple :

$$K_5(x,t) = i(x-t).$$

- Si K est une fonction à valeurs réelle, et si

$$K(x,t) = K(t,x),$$

alors, il est dit symétrique. Par exemple :

$$K_6(x,t) = \exp(x+t),$$
$$K_7(x,t) = 1 + tx.$$

Une équation intégrale à noyau symétrique est dite aussi symétrique.

1.3 Correspondance entre les équations différentielles linéaires et les équations intégrales linéaires de Fredholm

1.3.1 Conversion de problème aux limites en équation intégrale linéaire de Fredholm

Dans cette partie, nous présenterons une méthode pour convertir le problème de la valeur limite en l'équation intégrale de Fredholm équivalente. Nous présenterons deux problèmes de valeurs limites (PVB) spécifiques pour dériver deux formules différentes qui peuvent être utilisées pour transformer le PVB en l'équation intégrale de Fredholm équivalente.

On considère le problème aux limites (PVB) suivant :

$$\begin{cases} y''(x) + g(x)y(x) = h(x), \ 0 < x < 1 \\ y(0) = \alpha, \ y(1) = \beta, \ \text{avec } c_0, c_1 \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1.2}$$

On pose

$$y''(x) = u(x), \tag{1.3}$$

en intégrant les deux côtés dans 1.3, on obtient

$$\int_0^x y''(t)dt = \int_0^x u(t)dt,$$

ce qui implique

$$y'(x) = \int_0^x u(t)dt + y'(0), \tag{1.4}$$

ou la condition initiale $y'(0)$ n'est pas donnée dans un problème de valeurs limites.

La condition $y'(0)$ sera déterminée ultérieurement en utilisant la condition aux limites lorsque $x = 1$.

L'intégration de deux côtés dans 1.4 donne :

$$y(x) = y(0) + xy'(0) + \int_0^x \int_0^x u(t)dt. \tag{1.5}$$

L'équation 1.5 est équivalente à

$$y(x) = \alpha + xy'(0) + \int_0^x (x-t)u(t)dt. \tag{1.6}$$

Obtener en utilisant la condition $y(0) = \alpha$ et en réduisant la double intégrale à une simple intégrale. Pour déterminer $y'(0)$ nous substituons $x = 1$ dans les deux côtés de 1.6. Et en utilisant la condition aux limites, en $y(1) = \beta$, nous trouvons

$$y(1) = \alpha + y'(0) + \int_0^1 (1-t)u(t)dt,$$

ça donne

$$\beta = \alpha + y'(0) + \int_0^1 (1-t)u(t)dt.$$

Cela donne à

$$y'(0) = \beta - \alpha - \int_0^1 (1-t)u(t)dt. \tag{1.7}$$

Remplacer. 1.7 dans 1.6 donne

$$y(x) = \alpha + x(\beta-\alpha) - x\int_0^1 (1-t)u(t)dt + \int_0^x (x-t)u(t)dt. \tag{1.8}$$

La substitution de 1.3 et 1.8 dans 1.2 donne

$$u(x)+\alpha g(x)+x(\beta-\alpha)g(x)-\int_0^1 xg(x)(1-t)u(t)dt+\int_0^x g(x)(x-t)u(t)dt = h(x). \tag{1.9}$$

De calcul, nous pouvons utiliser la formule

$$\int_0^1 (.) = \int_0^x (.) + \int_x^1 (.),$$

pour transformer l'équation 1.9,

$$u(x) = h(x)-\alpha g(x)-x(\beta-\alpha)g(x)+xg(x)[\int_0^x (1-t)u(t)dt+\int_x^1 (1-t)u(t)dt]-\int_0^x g(x)(x-t)u(t)dt,$$

ça donne

$$u(x) = f(x) + \int_0^x t(1-x)g(x)u(t)dt + \int_x^1 x(1-t)g(x)u(t)dt,$$

Cela conduit à l'équation intégrale de Fredholm

$$u(x) = f(x) + \int_0^1 K(x,t)u(t)dt,$$

où

$$f(x) = h(x) - \alpha g(x) - x(\beta - \alpha)g(x),$$

et le noyau $K(x,t)$ est donné par

$$K(x,t) = \begin{cases} t(1-x)g(x) & si\ 0 \leq t \leq x \\ x(1-t)g(x) & si\ x \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Une conclusion importante peut être tirée ici. Pour le cas spécifique où $y(0) = y(1) = 0$, ce qui signifie que $\alpha = \beta = 0$, c'est-à-dire que les deux limites d'une chaîne en mouvement sont fixes. Il est clair que $f(x) = h(x)$ dans ce cas.

Cela signifie que l'équation de Fredholm résultante dans x est homogène ou non homogène si le problème des valeurs limites dans 1 est homogène ou non homogène respectivement.

Exemple 1.3.1 *Convert le PVB suivant à une équation intégrale de Fredholm équivalente*

$$\begin{cases} y''(x) + xy(x) = 0, \\ y(0) = 0, y(1) = 2. \end{cases}$$

Rappelons qu'il s'agit d'un problème des valeurs limites car les conditions sont données par Bords $x = 0$ et $x = 1$. De plus, le coefficient de $y(x)$ est une variable et non une constante.

On peut facilement observer que $\alpha = 0, \beta = 2, g(x) = x, h(x) = 0$. En ce le tour donne

$$f(x) = -2x^2$$

En remplaçant cela dans 1.8, on obtient l'équation intégrale de Fredholm

$$u(x) = -2x^2 + \int_0^1 K(x,t)u(t)dt,$$

où le noyau $K(x,t)$ est donné par

$$K(x,t) = \begin{cases} tx(1-x) & si\ 0 \leq t \leq x \\ x^2(1-t) & si\ x \leq t \leq 1 \end{cases}$$

1.3.2 Conversion de l'équation intégrale linéaire de Fredholm en problème aux limites

Ci-dessous, nous présenterons une autre technique qui peut transformer l'équation intégrale de Fredholm en problème de valeur limite équivalente (PVB). Considérons d'abord l'équation intégrale de Fredholm donnée par

$$u(x) = f(x) + \int_0^1 K(x,t)u(t)dt, \tag{1.10}$$

où $f(x)$ est une fonction donnée et le noyau $K(x,t)$ est donné par

$$K(x,t) = \begin{cases} t(1-x)g(x) & si\ 0 \leq t \leq x \\ x(1-t)g(x) & si\ x \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Pour raison de simplicité, on peut considérer $g(x) = \lambda$ où λ est constante, l'équation 1.10 peut s'écrire sur la forme

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x t(1-x)u(t)dt + \lambda \int_x^1 x(1-t)u(t)dt$$

ou de manière équivalente

$$u(x) = f(x) + \lambda(1-x)\int_0^x tu(t)dt + \lambda x\int_x^1 (1-t)u(t)dt. \tag{1.11}$$

Chaque terme de deux derniers termes à droite de 1.11 est un produit de deux fonctions de x. En différenciant les deux côtés de 1.11 en utilisant la règle de différentiation du produit et en utilisant la règle de Leipnitz, nous obtenons

$$\begin{aligned} u'(x) &= f'(x) + \lambda(1-x)xu(x) - \lambda\int_0^x tu(t)dt - \lambda(1-x)xu(x) + \lambda\int_x^1 (1-t)u(t)dt, \\ &= f'(x) - \lambda\int_0^x tu(t)dt + \lambda\int_x^1 (1-t)u(t)dt. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Pour nous débarrasser des signes intégraux, nous différencions à nouveau les deux côtés de 1.12 par rapport à x pour trouver que

$$u''(x) = f''(x) - \lambda xu(x) - \lambda(1-x)u(x) \tag{1.13}$$

Cela donne les équations différentielles ordinaires (EDO)

$$u''(x) + \lambda xu(x) = f''(x). \tag{1.14}$$

Les conditions aux limites associées peuvent être obtenues en remplaçant $x = 0$ et $x = 1$ dans 1.11 pour trouver que

$$u(0) = f(0), u(1) = f(1). \tag{1.15}$$

La combinaison de 1.14 et 1.15 donne le problème des valeurs limites équivalentes à l'équation de Fredholm 1.10.

Rappelons que $y''(x) = u(x)$. De plus, si $g(x)$ n'est pas une constante, nous pouvons procéder d'une manière similaire à la discussion présentée ci-dessus pour déterminer le problème des valeurs limites.

La technique ci-dessus pour le type.

Je sera expliqué en étudiant les exemples suivants.

Exemple 1.3.2 *Convertir l'équation intégrale de Fredholm*

$$u(x) = x^3 + \int_0^1 K(x,t)u(t)dt,$$

où le noyau $K(x,t)$ est donné par

$$K(x,t) = \begin{cases} 4t(1-x) & si\ 0 \le t \le x \\ 4x(1-t) & si\ x \le t \le 1 \end{cases}$$

à un problème de valeur limite équivalent, l'équation intégrale de Fredholm peut s'écrire

$$u(x) = x^3 + 4(1-x)\int_0^x tu(t)dt + 4x\int_x^1 (1-t)u(t)dt.$$

En procédant comme avant, nous trouvons

$$u''(x) = 6x - 4u(x).$$

Cela donne à soutour l'EDO

$$u''(x) + 4u(x) = 6x,$$

avec la condition aux limites associées

$$u(0) = f(0) = 0,$$

$$u(1) = f(1) = 1.$$

1.4 L'existence et l'unicité de la solution de l'équation intégrale linéaire de Fredholm de seconde espèce

Il est évident et logique qu'avant de commencer à résoudre une équation, quel que soit son type, on pose cette question : cette équation admet-elle une solution ? et cette solution est-elle unique ?

Dans cette partie,nous découvrons quelques détails qui répondent à ces questions.

Contraction de l'opérateur :

Soit l'équation

$$\varphi - A\varphi = f.$$

L'unicité et l'existence de la solution peut être donnée par la série de 'Neumann' pourvu que l'opérateur A soit une contraction $\|A\| < 1$.

Série de Neumann

Théorème 1.4.1 *Soit A un opérateur linéaire borné d'un espace de Banach X dans lui même, avec $\|A\| < 1$ et soit I l'opérateur identique sur X. Alors, $I - A$ admet un opérateur inverse borné donné par la série de Neumann*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k,$$

de plus

$$\left\|(I-A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}.$$

Preuve. Comme $\|A\| < 1$, on a la convergence absolue :

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left\|A^k\right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty}\|A\|^k = \frac{1}{1-\|A\|}.$$

Dans l'espace de Banach $L(X)$, par conséquent la série de Neumann converge en norme et définit un opérateur linèaire borné

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} A^k,$$

avec, $\|S\| \leq (1-\|A\|)^{-1}$, de plus S est l'inverse de $I-A$. En effet, en utilisant les notations $A^0 = I$, $A^k = AA^{k-1}$ on peut voir que :

$$(I-A)S = (I-A)\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} A^k = \lim_{n\to\infty}(I-A^{n+1}) = I,$$

aussi,

$$S(I-A) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} A^k(I-A) = \lim_{n\to\infty}(I-A^{n+1}) = I,$$

puisque $\|A^{n+1}\| \leq \|A\|^{n+1} \to 0$, lorsque $n\to\infty$. ■

Théorème 1.4.2 *Sous les hypothèses du théorème 1.4.1, la méthode des approximations successives*

$$\varphi_{n+1} = A\varphi_n + f,\ \ n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

où φ_0 est arbitraire dans X, converge vers l'unique solution φ de l'équation $\varphi - A\varphi = f$ pour toute $f \in X$.

Preuve. Il est aisé de voir que :

$$\varphi_n = A^n \varphi_0 + \sum_{k=0}^{n-1} A^k f,\ \ n = 1, 2, 3, \dots$$

d'ou

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \sum_{k=0}^{\infty} A^k f = (I - A)^{-1} f.$$

■

Corollaire 1.4.1 *Soit K un noyau continu vérifiant :*

$$\max_{x\in[a,b]} \int_a^b |K(x,t)|\, dt < 1,$$

alors, l'équation intégrale de seconde espèce :

$$\varphi(x) - \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = f(x),\ \ x \in [a,b]\,,$$

admet une unique solution '$\varphi \in C([a,b])$ pour toute $f \in C([a,b])$. De plus, la méthode des approximations successive

$$\varphi_{n+1}(x) = \int_a^b K(x,t)\varphi_n(t)dt + f(x),\ \ n = 1, 2, 3, \dots$$

converge uniformément vers cette solution pour tout φ_0 arbitraire dans $C([a,b])$.

Corollaire 1.4.2 *Soit $A : X \to X$ un opérateur linéaire compact sur un espace vectoriel normé X.*

Si l'équation homogène

$$\varphi - A\varphi = 0,$$

admet uniquement la solution triviale $\varphi = 0$, alors pour toute $f \in X$,l'équation non *homogène*

$$\varphi - A\varphi = f,$$

admet une solution unique $\varphi \in X$, dépendante de f.

Alternative de Fredholm

– Pour les équations intégrales de Fredholm, nous avons les théorèmes suivants :

Soit l'équation linéaire non homogène du deuxième espèce :

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = f(x), \tag{1.16}$$

a une solution unique pour toute fonction $f(x)$ (dans un espace suffisamment large). où l'équation homogène correspondante

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = 0, \tag{1.17}$$

a au moins une solution non triviale, (i.e. non identiquement nulle).

Théorème 1.4.3 *Si la première alternative est vraie pour l'équation 1.16, alors elle est vraie aussi pour l'équation associée :*

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(t,x)\varphi(t)dt = g(x),$$

aussi, l'équation homogène 1.17 et son équation associée

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(t,x)\varphi(t)dt = 0, \tag{1.18}$$

avoir un seul et même nombre fini de solutions linéairement indépendantes.

Remarque 1.4.1 *Si les fonctions $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x)$ sont des solutions de l'équa-*

tion homogène 1.17, alors leur combinaison linéaire

$$\varphi(x) = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + ... + C_n\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k\varphi_k(x),$$

avec, $C_k(k = 1, 2, ..., n)$ *sont des constantes arbitraires, est également une solution de l'équation.*

Théorème 1.4.4 *Une Condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution* $\varphi(x)$ *de l'équation non homogène 1.16 dans le dernier cas de l'alternative est la condition d'orthogonalité du côté droit de l'équation, c'est-à-dire de la fonction* $f(x)$*, à toute solution* $\varphi(x)$ *de l'équation homogène 1.18 associé à 1.17 :*

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = 0. \tag{1.19}$$

Remarque 1.4.2 *Lorsque la Condition 1.19 est remplie, l'équation 1.16 aura un nombre infine de solutions, puisque cette équation sera satisfaite par toute fonction de la forme* $\varphi(x) + \tilde{\varphi}(x)$*, où* $\varphi(x)$ *est une solution de l'équation 1.16 et* $\tilde{\varphi}(x)$ *sont toute solutions de l'équation homogène correspondants 1.17. De plus si l'équation 1.16 est satisfaite par les fonctions* $\varphi_1(x)$ *et* $\varphi_2(x)$ *alors en vertu de la linéarité de l'équation leur différence* $\varphi_1(x)$ *et* $\varphi_2(x)$ *est une solution de l'équation homogène Correspondante 1.17.*

L'alternative de Fredholm est particulièrement importante dans des situations pratiques. Au lieu de prouver qu'une équation intégrale donnée 1.16 a une solution, il est souvent plus simple de prouver que l'équation non homogène appropriée 1.17 ou son équation associée 1.18 n'a que de solution. D'où il s'ensuit, grâce à l'alternative, que l'équation 1.16 a bien une solution.

Remarque 1.4.3 *Si le noyau* $K(x,t)$ *de l'équation intégrale 1.16 est symétrique,* *c'est-à-dire* $K(x,t) = K(t,x)$, *alors l'équation homogène associée* 1.18 *coincide avec l'équation homogène* 1.17 *qui correspond à l'équation homogène* 1.17.

Dans le cas où l'équation intégrale non homogène a un noyau dégénéré

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b \left[\sum_{k=1}^{n} a_k(x) b_k(x) \right] \varphi(t) dt = f(x).$$

La condition d'orthogonalité 1.19 *du côté droit de cette équation donne* n *égalités*

$$\int_a^b f(t) b_k(t) dt = 0, k = 1, ..., n.$$

Exemple 1.4.1

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (5x^2 - 3) t^2 \varphi(t) dt = e^x$$

Nous avons

$$\varphi(x) = \alpha\lambda(5x^2 - 3) + e^x \tag{1.20}$$

avec,

$$\alpha = \int_0^1 t^2 \varphi(t) dt \tag{1.21}$$

En remplaçant 1.21 *par son expression dans* 1.20 *on obtient*

$$\alpha = \alpha\lambda \int_0^1 (5t^2 - 3t^2) dt + \int_0^1 t^2 e^t dt,$$

d'où

$$\alpha = e - 2.$$

Pour tout λ, *l'équation donnée a une solution unique*

$$\varphi(x) = \lambda(e - 2)(5x^2 - 3) + e^x$$

et l'équation homogène correspondante

$$\varphi(x) - \lambda\int_0^1 (5x^2 - 3)t^2\varphi(t)dt = 0,$$

a une unique solution nulle $\varphi(x) \equiv 0$.

Exemple 1.4.2

$$\varphi(x) - \lambda\int_0^1 \sin\ln x\varphi(t)dt = 2x.$$

Nous avons

$$\varphi(x) = \alpha\lambda\sin\ln x + 2x,$$

avec, $\alpha = \int_0^1 \varphi(t)dt$*. En substituant l'expression* $\varphi(t)$ *en l'intégrale, on obtient*

$$\alpha = \alpha\lambda\int_0^1 \sin\ln tdt + 1,$$

d'où

$$\alpha(1 + \frac{\lambda}{2}) = 1.$$

Si $\lambda \neq -2$*, alors l'équation donnée a une solution unique*

$$\varphi(x) = \frac{2\lambda}{2+\lambda}\sin\ln x + 2x,$$

et l'équation homogène correspondante

$$\varphi(x) - \lambda\int_0^1 \sin\ln x\varphi(t)dt = 0,$$

n'a que la solution nulle $\varphi(x) \equiv 0$.

Mais si $\lambda = -2$*, alors l'équation donnée n'a pas toutes solutions puisque le coté droit* $f(x) = 2x$ *n'est pas orthogonal à la fonction* $\sin\ln x$*, l'équation homogène a une* *infinité de solutions, car il résulte de l'équation définissant* α, $0.\alpha = 0$, *que* α *est une constante arbitraire ; toutes ces solutions sont données par la formule*

$$\varphi(x) = \tilde{\alpha}\lambda \sin \ln x, \tilde{\alpha} = -2\alpha.$$

Chapitre 2

Méthode directe

2.1 Méthode directe

Il existe plusieurs méthodes pour résoudre les équations intégrales de Fredholm, de deuxième espèce. Par exemple, la méthode de décomposition d'ADOMIAN, la méthode des approximations successives, la méthode d'itération variationnelle,etc.

Dans ce chapitre, nous aborderons la méthode directe, qui est une méthode traditionnelle et s'appuie sur les noyaux séparables ou dégénérés. C'est-à-dire de la forme

$$K(x,t) = \sum_{k=1}^{n} g_k(x) h_k(t). \tag{2.1}$$

Des exemples incluent ($x - t$, x^3t^2, xt, etc). Cette méthode nous donne la solution exacte sous forme compacte. Pour appliquer la méthode directe, nous suivons ces quatre étapes :

1. Nous substitutions d'abord 2.1 dans l'équation intégrale de Fredholm sous la forme

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) u(t) dt. \tag{2.2}$$

2. Cette substitution donne

$$u(x) = f(x) + g_1(x)\int_a^b h_1(t)u(t)dt + g_2(x)\int_a^b h_2(t)u(t)dt + \ldots + g_n(x)\int_a^b h_n(t)u(t)dt. \tag{2.3}$$

3. Chaque intégrale du côté droit dépend uniquement de la variable t, avec des limites d'intégration constantes pour t. Cela signifie que chaque intégrale est équivalente à une constante. En se basant là-dessus, l'équation 2.3 devient :

$$u(x) = f(x) + \lambda\alpha_1 g_1(x) + \lambda\alpha_2 g_2(x) + \ldots + \lambda\alpha_n g_n(x), \tag{2.4}$$

où

$$\alpha_i = \int_a^b h_i(t)u(t)dt,\ 1 \leq i \leq n. \tag{2.5}$$

4. La substitution de 2.4 dans 2.5 donne un système de n équations algébriques qui peut être résolus pour déterminer les constantes α_i, telles que $1 \leq i \leq n$. En utilisant les valeurs numériques obtenues de α_i dans 2.4, la solution $u(x)$ de l'équation intégrale de Fredholm 2.2 est facilement obtenue.

2.2 Exemples

Exemple 2.2.1 *Résoudre l'équation intégrale linéaire de Fredholm de seconde espèce en utilisant la méthode directe*

$$u(x) = \left(1/\cos^2(x)\right) - \frac{\pi}{4} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} u(t)dt. \tag{2.6}$$

L'intégral du côté droit équivalent à une constante car elle dépend uniquement sur les fonctions de la variable t avec des limites d'intégration constantes. Par conséquent, *l'équation 2.6 peut être réécrite comme*

$$u(x) = \left(1/\cos^2(x)\right) - \frac{\pi}{4} + \alpha, \tag{2.7}$$

où

$$\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{4}} u(t)dt. \tag{2.8}$$

Pour déterminer α, nous substitutions 2.7 dans 2.8. Pour obtenir

$$\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\left(1/\cos^2(x)\right) - \frac{\pi}{4} + \alpha\right) dt. \tag{2.9}$$

L'intégration du côté droit de 2.9 donne

$$\alpha = 1 - \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{4}\alpha, \tag{2.10}$$

ça donne

$$\alpha = 1 + \frac{\pi}{4} \tag{2.11}$$

En remplaçant 2.11 dans 2.7, nous obtenons la solution exacte

$$u(x) \equiv 1 + 1/\cos^2(x).$$

Exemple 2.2.2 *Nous utiliserons la méthode directe pour résoudre l'équation de Fredholm suivante :*

$$u(x) = 1 + 7x + 20x^2 + x^3 - \int_0^1 (10xt^2 + 20x^2t)u(t)dt. \tag{2.12}$$

Notons que le noyau est séparable et se compose de deux termes. Nous pouvons *réécrire l'équation 2.12 :*

$$u(x) = 1 + 7x + 20x^2 + x^3 - 10x\int_0^1 t^2u(t)dt - 20x^2\int_0^1 tu(t)dt. \tag{2.13}$$

De manière parallèle à l'exemple précédent, on pose

$$\begin{aligned} \alpha &= \int_0^1 t^2u(t)dt, \\ \beta &= \int_0^1 tu(t)dt, \end{aligned} \tag{2.14}$$

où α et β sont des constantes. Par conséquent, l'équation 2.13 peut être exprimée sous la forme :

$$u(x) = 1 + (7 - 10\alpha)x + (20 - 20\beta)x^2 + x^3. \tag{2.15}$$

En remplaçant 2.15 dans 2.14, nous obtenons

$$\alpha = \int_0^1 t^2(1 + (7 - 10\alpha)t + (20 - 20\beta)t^2 + t^3)dt, \tag{2.16}$$

$$\beta = \int_0^1 t(1 + (7 - 10\alpha)t + (20 - 20\beta)t^2 + t^3)dt, \tag{2.17}$$

L'intégration du coté droit des équations 2.16 et 2.17 donne le système

$$\begin{aligned} \frac{7}{2}\alpha + 4\beta &= \frac{25}{4}, \\ \frac{10}{3}\alpha + 6\beta &= \frac{241}{30}. \end{aligned}$$

De sorte qu'en resolvant ce système on trouve

$$\alpha = \frac{7}{10},\ \beta = \frac{19}{20}. \tag{2.18}$$

Insérer 2.18 dans 2.15 donne

$$u(x) = 1 + x^2 + x^3.$$

Exemple 2.2.3 *Résoudre l'équation intégrale linéaire de Fredholm suivante en utilisant la méthode directe :*

$$u(x) = \sin(2x) - \frac{1}{2}x + \int_0^{\frac{\pi}{4}} xu(t)dt, \tag{2.19}$$

l'intégrale du côté droit est équivalante à une constante elle depent uniquement des fonctions de la variable t avec des limites d'intégration constantes. Par conséquent, l'équation 2.19 peut être réécrité comme

$$u(x) = \sin(2x) - \frac{1}{2}x + \alpha x, \tag{2.20}$$

avec,

$$\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{4}} u(t)dt, \tag{2.21}$$

pour déterminer α, on substitue 2.20 dans 2.21 pour obtenir

$$\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin(2t) - \frac{1}{2}t + \alpha t)dt, \tag{2.22}$$

l'intégrale du côté droit donne

$$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{64} + \frac{\pi^2}{32}\alpha, \tag{2.23}$$

ça donne

$$\alpha = \frac{1}{2}. \tag{2.24}$$

Remplaçer 2.24 dans 2.20 donne la solution exacte

$$u(x) = \sin(2x).$$

Exemple 2.2.4 *Résoudre l'équation intégrale linéaire de Fredholm suivante en utilisant la méthode directe :*

$$u(x) = \exp(2x) - \frac{1}{4}(\exp(2) + 1)x + \int_0^1 xtu(t)dt, \tag{2.25}$$

le noyau $K(x,t) = xt$ *est séparable par conséquent nous réécrivons 2.25 comme*

$$u(x) = \exp(2x) - \frac{1}{4}(\exp(2) + 1)x + x\int_0^1 tu(t)dt, \tag{2.26}$$

on pose

$$\alpha = \int_0^1 tu(t)dt, \tag{2.27}$$

alors,

$$u(x) = \exp(2x) - \frac{1}{4}(\exp(2) + 1)x + \alpha x, \tag{2.28}$$

Remplaçons 2.28 dans 2.27 on obtient

$$\alpha = \int_0^1 t(\exp(2t) - \frac{1}{4}(\exp(2) + 1)t + \alpha t)dt, \tag{2.29}$$

l'intégrale du côté droit de 2.29 donne

$$\alpha = \frac{1}{4}(\exp(2) + 1) - \frac{1}{12}(\exp(2) + 1) + \frac{1}{3}\alpha, \tag{2.30}$$

ça donne

$$\alpha = \frac{1}{4}(\exp(2) + 1). \tag{2.31}$$

Remplaçons 2.31 dans 2.28 on obtient enfin la solution exacte

$$u(x) = \exp(2x).$$

Exemple 2.2.5 *Résoudre l'équation intégrale linéaire de Fredholm suivante en utilisant la méthode directe :*

$$u(x) = 4 + 45x + 26x^2 - \int_0^1 (1 + 30xt^2 + 12x^2 t)u(t)dt, \tag{2.32}$$

le noyau $K(x,t) = -(1+30xt^2+12x^2t)$ est séparable. Par conséquent, nous réécrivons 2.32 comme

$$u(x) = 4 + 45x + 26x^2 - \int_0^1 u(t) - 30x \int_0^1 t^2 u(t) - 12x^2 \int_0^1 tu(t)dt, \tag{2.33}$$

l'intégrale du côté droit est équivalante à une constante elle depent uniquement des fonctions de la variable t avec des limites d'intégration constantes. Par conséquent, l'équation 2.33 peut être réécrite comme

$$u(x) = (4 - \alpha) + (45 - 30\beta)x + (26 - 12\gamma)x^2, \tag{2.34}$$

avec,

$$\alpha = \int_0^1 u(t)dt, \tag{2.35}$$

$$\beta = \int_0^1 t^2 u(t)dt,$$

$$\gamma = \int_0^1 tu(t)dt,$$

pour déterminer les constantes α, β *et* γ*, on substitue* 2.34 *dans chaque équations de* 2.35 *pour obtenir*

$$\begin{aligned}
\alpha &= \int_0^1 ((4-\alpha) + (45-30\beta)t + (26-12\gamma)t^2)dt, \\
&= \frac{211}{6} - \alpha - 15\beta - 4\gamma. \\
\beta &= \int_0^1 t^2((4-\alpha) + (45-30\beta)t + (26-12\gamma)t^2)dt, \\
&= \frac{1067}{60} - \frac{1}{3}\alpha - \frac{15}{2}\beta - \frac{12}{5}\gamma. \\
\gamma &= \int_0^1 t((4-\alpha) + (45-30\beta)t + (26-12\gamma)t^2)dt, \\
&= \frac{47}{2} - \frac{1}{2}\alpha - 10\beta - 3\gamma
\end{aligned}$$

Contrairement aux exemples précédents, on obtient un système de trois équations à trois inconnues α, β *et* γ*. La résolution de ce système d'équations algebriques donne*

$$\alpha = 3, \beta = \frac{43}{30}, \gamma = \frac{23}{12}. \tag{2.36}$$

En remplaçant 2.36 *dans* 2.34*,nous obtenons*

la solution qui satisfait l'équation de Fredholm 2.32

$$u(x) = 1 + 2x + 3x^2.$$

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons passé en revue et étudié les bases théoriques et les applications pratiques de la résolution des équations intégrales linéaires de Fredholm de seconde espèce.

La méthode directe se distingue par sa capacité à fournir une solution rapide et efficace aux équations intégrales, ce qui la rend appropriée pour résoudre des problèmes en ingénierie, en physique et dans d'autres domaines scientifiques.

Cependant, la méthode directe présente quelques inconvénients, tels que la complexité des calculs et la possibilité d'erreurs numériques. De plus, elle peut rencontrer des difficultés pour traiter des équations de grande dimension qui nécessitent des ressources de calcul importantes.

En résumé, la méthode directe est un outil efficace pour résoudre les équations intégrales linéaires de Fredholm de seconde espèce, offrant une solution rapide et efficace à un large éventail de problèmes, malgré quelques difficultés rencontrées dans certains cas. En fin les recherches se poursuivent pour développer des méthodes de résolution des équations intégrales linéaires de Fredholm de seconde espèce, y compris la méthode directe. Ces recherches visent à améliorer l'efficacité et la précision des solutions, à réduire la complexité computationnelle, à élargir leur champ d'application à de nouveaux domaines, et à développer de nouveaux outils et techniques pour analyser et résoudre ces équations de manière plus efficace.

Bibliographie

[1] A-M. Wazwaz, A FIRST COURSE IN INTEGRAL EQUATIONS,Saint Xavier University,USA,Second edition,ISBN,978-9814675123,Springer,2015.

[2] A-M. Wazwaz, Linear and Nonlinear Integral Equations,Methods and Applications,ISBN,978-7-031694-0,Springer,2011.

[3] Chergui,Selma.La méthode de quadrature pour les équations intégrales. Mémoire de master, Université Mohamed Khider, Biskra,2023.

[4] Demailly, J.P, Analyse numérique et équations différentielles.(pp.237-243), $3^{ème}$ édition, les Ulis : EDP SCIENCES,2006.

[5] Guedjel, Merzaka, Equations Intégrales de Fredholm de seconde Espèce et Méthode de Collocation. Mémoire de master, Université Mohamed Khider, Biskra,2018.

[6] Krasnov.M, Kissélev.A, Makarenko.G, Equations Intégrales Problèmes Et Exercices.Editions Mir Moscou.Traduction Française Editions Mir 1977.

[7] Krasnov, M.L., Kiselev, A.1v., Makarenko, G.I., Yankovsky, G, Problems and exercises in integral equations.Printed in the Union of Socialist Republics,1971..

Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$K(x,t)$	:	Noyau de l'équation intégrale.
$L(E,F)$	:	L'ensemble des applications linéaires de E dans F.
$K(E)$	:	Ensemble des opérateurs compacts
EDO	:	Equation Différentielle Ordinaire
φ	:	La fonction inconnue dans l'équation intégrale.
I	:	La matrice identité.
Id_E	:	L'opérateur identité.
$C([a,b])$	:	L'espace des fonctions continue sur l'intervalle $[a,b]$.
$\|\|.\|\|$	:	norme.
PVB	:	Problème à valeurs aux bords.

Résumé

Dans cette étude, nous souhaitons trouver la solution des équations intégrales linéaires de Fredholm de seconde espèce avec un noyau séparable (dégénéré), en utilisant la méthode directe. Nous avons étudié l'existence et l'unicité de la solution à l'aide des théories de la "Série de Neumann" et de l'"Alternative de Fredholm". Ensuite, nous avons appliqué la méthode directe pour résoudre ce type d'équations intégrales, et enfin, nous avons présenté un ensemble d'exemples qui expliquent cette méthode de manière mieux.

Mots clés : équations intégrales linéaires de Fredholm de seconde espèce, équations intégrales, noyau séparable, existence, unicité, série de Neumann, alternative de Fredholm, méthode directe, équations intégrales.

ملخص

نهتم في هذه الدراسة بإيجاد الحل للمعادلات التكاملية الخطية لفريدهولم من النوع الثاني بنواة متحللة (مفككة) باستخدام الطريقة المباشرة. درسنا وجود ووحدانية الحل باستخدام نظريات سلسلة نيومان وبديل فريد هولم. ثم طبقنا الطريقة المباشرة لحل هذا النوع من المعادلات التكاملية وقدمنا في النهاية أمثلة توضح لنا هذه الطريقة بشكل أفضل وأحسن.

الكلمات المفتاحية: المعادلات التكاملية الخطية لفريدهولم من النوع الثاني، المعادلات التكاملية، نواة متحللة، الطريقة المباشرة، وجود ووحدانية، سلسلة نيومان، بديل فريد هولم.

Abstract

In this study, we aim to find the solution of Fredholm's linear integral equations of the second kind, with a separable (degenerate) kernel using the direct method. We studied existence and uniqueness of the solution using theories of the « Neumann series » and the « Fredholm Alternative ». Then, we applied the direct method to solve this type of integral equations, and finally, we presented a set of examples which explain this method better and better.

Key words: Fredholm's linear integral equations, existence of the second kind, integral equations, separable kernel, direct method, uniqueness, Neumann series, Fredholm Alternative, integral equations.