République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : Probabilité

Par

MORGHAD Hind

Titre :

Stabilité des solutions d'équations différentielles stochastiques sous la condition d'unicité trajectorielle.

Membres du Comité d'Examen :

Pr.	CHALA Adel	UMKB	Président
Dr.	MEZERDI Mohamed Amine	UMKB	Encadreur
Dr.	TAMER Lazhar	UMKB	Examinateur

Juin 2024

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

À mes chers parents, qui ont toujours été présents pour moi et qui m'ont donné la vie.

Pour des millions de raisons, ils m'ont offert chaque jour amour et confiance, et ont veillé à m'encourager tout au long de ma vie.

À mes chers frères et sœurs, ma source de joie et de bonheur : Abdelhamid, Abdelkader, Abdelhak, sana, Kaltoum.

À tous mes camarades : Hayat, aya, hodiel, Rayhana.

À tous ceux qui me sont chers,

à tous ceux qui m'aiment,

et à tous ceux que j'aime.

.

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à exprimer ma gratitude envers Dieu tout-puissant pour la volonté et la patience

qu'Il m'a accordées afin de mener à bien ce travail humble.

Je souhaite également adresser mes sincères remerciements, ainsi que mon respect et ma gratitude, à ma mère.

Je tiens à remercier chaleureusement mon encadrant, **Dr. Mezerdi Mohamed Amine**, pour ses précieux conseils,

sa grande disponibilité et sa générosité avec laquelle il a partagé ses travaux, ses idées et ses intuitions.

Mes remerciements vont aussi aux membres du comité d'Examen, **Dr. Chala Adel** comme président, et **Dr. Tamer Lazhar** comme examinateur, pour leur implication.

Je remercie tous les professeurs du département de mathématiques pour leur soutien.

Enfin, je tiens à exprimer ma gratitude envers toutes les personnes qui ont partagé ces moments difficiles avec moi.

Table des matières

Notations et symbols

Voici une explication des abréviations et notations utilisées dans ce mémoire :

$p.s$	Presque sûremente.
$P - p.s$	Prêsque sûremente pour la mesure de probabilité.
$v.a$	Variable aléatoire.
EDS	Equation Différentielle Stochastique.
BDG	Inégalité de Burtholder -Davis -Gundy.
$\mathcal{F}_t$	Filtration.
MB	Mouvement Brownien
$(\Omega, \mathcal{F}, P)$	Espace de probabilité.
$\mathbb{R}^d$	Espace réel euclidien de dimension d
$\mathbb{R}^{n\times m}$	Eensembel des matrice réelles $n \times m$
$\mathcal{B}(.)$	Tribu Borélienne.
$s \wedge t$	$min(s,t)$
$E\left[X\right]$	Espérance mathématique de v.a X

Introduction

Les équations différentielles stochastiques (EDS) apparues au début du 20e siècle, ces équations ont initialement servi à modéliser des phénomènes physiques intégrant des éléments aléatoires essentiels. Norbert Wiener, l'un des pionniers de ce domaine, a posé les bases de la modélisation stochastique avec ses travaux sur le mouvement brownien. Par la suite, Kiyoshi Itô a enrichi ce domaine en développant le calcul stochastique en 1942. Itô a développé la théorie des EDS pour étudier les trajectoires des processus de diffusion. Depuis lors, les EDS ont trouvé des applications dans divers domaines, notamment la finance, la physique, la biologie et l'ingénierie.

L'analyse de la stabilité des systèmes dynamiques a débuté avec les travaux pionniers de Henri Poincaré et Lyapunov. Lyapunov, en particulier, a développé des méthodes pour étudier la stabilité des solutions des équations différentielles ordinaires (EDO). Ces méthodes ont ensuite été adaptées pour les EDS par Kiyosi Itô, son calcul stochastique, en particulier l'intégrale d'Itô, a permis d'analyser les processus stochastiques de manière rigoureuse, ce cadre a été essentiel pour étudier la stabilité des solutions des EDS, car il permet de manipuler les termes aléatoires dans les équations.

L'objectif de ce mémoire est d'étudier certaines propriétés de stabilité des solutions des équations différentielles stochastiques. Il est bien connu que les propriétés de stabilité des systèmes dynamiques déterministes ou stochastiques sont cruciales dans l'étude de tels systèmes. Cela signifie que les trajectoires ne changent pas trop sous de petites perturbations. En utilisant les arguments habituels du calcul stochastique, nous étudions la stabilité par rapport aux conditions initiales et aux coefficients et la convergence des approximations successives de Picard, ces propriétés seront étudiées sous la condition de Lipschitz. En outre, on va étudier la stabilité sous la condition d'unicité trajectorielle, dans cette partie, nous étudions les mêmes proriétés que dans la partie précédent, mais avec l'hypothèse de Lipschitz en moins. Cette absence de régularité apporte une diffculté cruciale, dûe au fait qu'on ne peut plus appliquer le lemme de Gronwall, on suppose à la place seulement une hypothèse de continuité et de bornitude des coeffcients et l'unicité trajectorielle des solutions. Les principaux outils utilisés dans les démonstrations sont le fameux théorème de Skorokhod et les critères de tension de Kolmogorov. [1, 5, 6].

Ce mémoire est structuré en trois chapitres, abordant différentes problématiques liées à la stabilité des solutions d'équations différentielles stochastiques (EDS). Voici un aperçu du contenu de ces chapitres :

Premier chapitre : C'est une introduction aux processus stochastiques, aux notions de mouvement Brownien et de martingales, est aussi sur l'intégrale stochastique et l'équation différentielle stochastique.

Deuxième chapitre : Dans ce chapitre, nous étudions certaines propriétés des EDS telles que les propriétés d'existence, d'unicité et de la stabilité des solutions par rapport aux conditions initiales, aux coefficients et la convergence des approximations successives de Picard dans le cas où les coefficients sont Lipschitziens.

Troisième chapitre : Nous avons étudié les mêmes propriétés que dans le deuxième chapitre, mais sans l'hypothèse de Lipschitz sur les coefficients.

Chapitre 1

Rappel sur le calcul stochastique

Ce chapitre vise à revisiter les définitions et les caractéristiques du calcul stochastique ainsi que ses résultats clés, tels que les processus stochastiques, les mouvements browniens, les martingales... etc, en vue de les appliquer dans la suite (Voir [4])

1.1 Processus stochastique

Définition 1.1.1 (Processus stochastique) *Un processus stochastique (ou fonction aléatoire) est une famille de variables aléatoires* $(X_t; t \in [0, \infty[)$ *définies sur le même espace de probabilité.*

Remarque 1.1.1 *L'application* $t \in T \longrightarrow X_t\ (\omega)$ *est appelée la trajectoire du processus stochastique.*

Définition 1.1.2 (Modification) *On dit que deux processus* X *et* Y *sont égaux à une modification prés si* $\forall t \leq T$ *on a* $P(X_t = Y_t) = 1$ *C'est- à-dire :*

$$\forall t \leq T, \qquad X_t(\omega) = Y_t(\omega) \quad \mathbb{P}{-}P.s.$$

Définition 1.1.3 (Indistingable) *Deux processus* X *et* Y *sont dits indistingables* *si $\mathbb{P}-p.s$ les trajectoires de X et Y sont les mêmes,C'est- à-dire :*

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t, \forall t \in T) = 1.$$

Définition 1.1.4 (Filtration) *Une filtration est une famille croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire :*

$$\forall s \leq t \Longrightarrow \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t.$$

1. L'espace $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ s'appelle espace filtré.
2. On dit qu'un espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ satisfait les conditions habituelles si :

   i. Les ensembles négligeables sont contenus dans $\mathcal{F}_0$ i.e $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_0$.

   ii La filtration est continue à droite i.e : $\mathcal{F}_t = \bigcap\limits_{s \geq t} \mathcal{F}_s, \forall t.$

Définition 1.1.5 (Filtration naturelle) *Filtration naturelle (propre) d'un processus $X = (X_t)_{t \in T}$ est définie par*

$$\mathcal{F}_t = \sigma(X_s : s \leq t \quad t \in T),$$

$\mathcal{F}_t$ est la classe des évènement que l'on peut identifier au temps t.

Remarque 1.1.2 *1. Une filtration $\{\mathcal{G}_t, t \in T\}$ est dite plus grosse que la filtration $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ si $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t$ $\forall t \in T$.*

2. Une filtration est continue à droit si $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+} = \bigcap\limits_{s > t} \mathcal{F}_s$.

3. Une filtration est continue à gauche si $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^-} = \sigma(\bigcup\limits_{s < t} \mathcal{F}_s)$.

Définition 1.1.6 (Processus adapté) *On dit qu'un processus X est adapté par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$,si pour tout t, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*

Remarque 1.1.3 *Un processus X est toujours adapté à sa filtration naturelle.*

Définition 1.1.7 (Processus mesurable) *Un processus X est dit mesurable si l'application $(t,\omega) \longmapsto X_t(\omega)$ de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^d$ est mesurable par rapport à $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.*

Définition 1.1.8 (Processus continu) *On dit que le processus est à trajectoires continues (ou est continu) si les applications $t \to X_t(\omega)$ sont continues pour presque tout ω.*

Définition 1.1.9 (Processus cadlàg) *Le processus X est dit cadlàg si les trajectoires sont continues à droite, pourvu de limites à gauche.*

Définition 1.1.10 (Processus caglàd) *Le processus X est dit caglàd si les trajectoires sont continues à gouche, pourvu de limites à droite.*

Définition 1.1.11 *Deux processus sont égaux en loi $X \overset{loi}{=} Y$ si pour tout $(t_1, t_2, ..., t_n)$ et pour tout n on a $(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n}) \overset{loi}{=} (Y_{t_1}, Y_{t_2}, ..., Y_{t_n})$.*

Définition 1.1.12 (Processus progrressivement mesurable) *On dit que X est un processus progressivement mesurable si pour tout $t \in T$, l'application $(\omega, s) \longrightarrow X(\omega, s)$ définie sur $\Omega \times$ $[0,t]$ dans $\mathbb{R}^d$ est mesurable par rapport à $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}([0,t])$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.*

1.1.1 Martingales

Définition 1.1.13 *Une famille de variables aléatoires $(X_t, t \in [0, \infty[)$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)$ si t.*

1. X_t est $\mathcal{F}_t-$mesurable et intégrable pour tout t.

2. $\forall s \leq t$,

$$\mathbb{E}(X_t / \mathcal{F}_s) = X_s.$$

Définition 1.1.14 *Une famille de variables aléatoires $(X_t, t \in [0, \infty[)$ est une sur-martingale (resp. sousmartingale) par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)$ si :*

1. X_t est $\mathcal{F}_t-$mesurable et intégrable pour tout t.
2. $E(X_t|F_s) \leq X_s, \forall s \leq t$ (resp. $E(X_t|Fs) \geq X_s$).

Remarque 1.1.4 *X_t est une martingale si il est à la fois une sous-martingale et sur-martingale.*

1.1.2 Mouvement Brownien

Définition 1.1.15 *Le processus $(B_t, t \geq 0)$ est un mouvement Brownien (standard) si :*

1. $B_0 = 0 \ \mathbb{P} - p.s$,
2. $\forall s \leq t$, $B_t - B_s$ est une variable réelle de loi gaussienne, centrée de variance $(t - s)$.
3. $\forall n$, $\forall t_i$, $0 \leq t_0 \leq t_1 ... \leq t_n$, les variables $(B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, ..., B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_0})$ sont indépendantes.

La propriété 2 est la stationarité des accroissements du mouvement Brownien,

La propriété 3 traduit que le mouvement Brownien est à accroissements indépendants.

On peut aussi écrire 3 sous la forme équivalente suivante : Soit $s \leq t$. La variable $B_t - B_s$ est indépendante de la tribu du passé avant s, soit $\sigma(B_u, u \leq s)$.

Propriétés 1.1.1 *Dans ce qui suit, $B = (B_t, t \geq 0)$ est un mouvement Brownien et $\mathcal{F}_t = \sigma\{B_s, s \leq t\}$ est sa filtration naturelle.*

1. Le processus B est un processus gaussien, sa loi est caractérisée par son espérance nulle et sa covariance $Cov(B_t, B_s) = s \wedge t$.

Preuve. La covariance est égale à $E(B_tB_s)$ car le processus est centré.

$$\text{Si } s \leq t, E(B_tB_s) = E((B_t - B_s)B_s + B_s^2) = E(B_t - B_s)E(B_s) + E(B_s^2) = s$$

2. Si $(B_t, t \geq 0)$ est un mouvement Brownien, alors $-B_t$ est un mouvement Brownien.
3. Pour tout s, le processus $(W_t, t \geq 0)$ défini par $W_t = B_{t+s} - B_s$ est un mouvement Brownien indépendant de $\mathcal{F}_s$.
4. Les trajectoires du mouvement Brownien sont continues.
5. Le processus B est une martingale. Le processus $(B_t^2 - t, t \geq 0)$ est une martingale. Réciproquement, si X est un processus continu tel que X et $(X_t^2 - t, t \geq 0)$ sont des martingales, X est un mouvement Brownien.
6. Soit B_1 et B_2 deux MB indépendants. Le produit B_1B_2 est une martingale.
7. Pour tout λ réel, le processus $(exp(\lambda B_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t), t \geq 0)$ est une martingale.

1.1.3 Intégrale stochastique

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ un espace de probabilité filtré $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est une filtration de $\mathcal{F}$ satisfait conditents usuelles et $B = (B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien définit dans cet espace.

Définition 1.1.16 *Une intégrale stochastique est une intégrale de la forme* $\int_0^t X_s dB_s$,*avec* X *un processus stochastique et* B *est un mouvement brownien.*

L'intégrale stochastique possède les propriétés suivantes :

1. **La linéarité :** Soit a et b des constantes, et X et Y deux processus alors :

$$\int_0^t (aX_s + bY_s)dB_s = \alpha \int_0^t X_s dB_s + b \int_0^t Y_s dB_s.$$

2. **Propriétés de martingale :** Soit $M_t = \int_0^t X_s dB_s$, alors le processus M est une martingale.

3. **L'additivité**, pour $0 \leq s \leq k \leq t \leq T$.

$$\int_0^t X_s dB_s = \int_0^k X_s dB_s + \int_k^t X_s dB_s.$$

1.1.4 Processus d'Itô

Définition 1.1.17 *Un processus $X = (X_t)_{0 \leq t \leq T}$ est un processus d'Itô si :*

$$X_t = x + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s,$$

b et σ sont deux processus progressivement mesurables vérifiant les conditions : $\int_0^t |b_s| \, ds < \infty$ et $\int_0^t |\sigma_s|^2 \, ds < \infty$.

On utilise la notation plus concise suivante

$$\begin{cases} dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

Le coefficient b est le drift ou la dérivée, σ est le coefficient de diffusion.

Propriété 1.1.1 *On a $E(X_t) = E(x) + \int_0^t E(b_s) ds$.*

Proposition 1.1.1 (Intégration par parties) *Si X et Y sont deux processus d'itô, alors :*

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y \rangle_t,$$

on pose :

$$\langle X, Y \rangle_t = \int_0^t \sigma_s . \sigma'_s ds \quad \text{et} \quad dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t.$$

Crochet d'un processus d'Itô

Soit M une martingale continue de carré intégrable. Il existe un processus croissant continu A tel que $(M_t^2 - A_t, t \geq 0)$ est une martingale. Le processus A est appellé le crochet de M. On le note trés souvent $A_t = \langle M, M\rangle_t$ ou encore $\langle M\rangle_t$.

Propriétés 1.1.2 *1. Le crochet du Brownien est t*

2. Le crochet de l'intégrale stochastique $M_t = \int_0^t X_s dB_s$ est $\int_0^t X_s^2 ds$.

Formule d'Itô :

Dans ce qui suit, X est un processus d'Itô de décomposition $dXt = b_t dt + \sigma_t dB_t$.

1. Premiére forme : Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^2 à dérivées bornées. Alors

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f^{'}(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f^{''}(X_s)\sigma_s^2 ds.$$

Cette formule s'écrit sous forme condensée comme suit :

$$df(X_t) = f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f^{''}(X_s)\sigma_s^2 ds,$$

ou encore :

$$df(X_t) = f'(X_t)b_t dt + \frac{1}{2}f''(X_t)\sigma_t^2 dt + f'(X_t)\sigma_t dB_t,$$

$$df(X_t) = \left(f'(X_t)b_t + \frac{1}{2}f''(X_t)\sigma_t^2\right)dt + f^{'}(X_t)\sigma_t dB_t,$$

et en utilisant le crochet, on a :

$$df(X_t) = f'(X_t)b_t dt + \frac{1}{2}f''(X_t)d\langle X\rangle_t + f'(X_t)\sigma_t dB_t.$$

La condition de bornitude des dérivées n'est exigée que pour l'existence des intégrales et pour la propriété de martingale de l'intégrale stochastique.

2. Fonction dépendant du temps :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de classe C^1 par rapport à t, de classe C^2 par rapport à x, à dérivées bornées, on a :

$$f(t, X_t) = f(0, X_t) + \int_0^t f_t'(s, X_s)\, ds + \int_0^t f_x'(s, X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}''(s, X_s)\, \sigma_s^2 ds,$$

ou sous forme condensée :

$$df(t, X_t) = f_t'(t, X_t)dt + f_x'(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}f_{xx}''(t, X_t)\sigma_s^2 dt.$$

1.1.5 Quelque Résultats importants

Inégalité de Doob : Si $(X_t)_{t\geq 0}$ est une martingale continue, alors

$$E[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t|] \leq 4E[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t|^2].$$

Inégalité de Hölder : Soit $p, q \in]1, +\infty[$ tel que q est l'exposant conjugué de p. Si $f, g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ alors :

$$\int_a^b |f.g| \leq \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} . \left(\int_a^b |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz (cas particulier de Hölder) : Si $f, g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ alors :

$$\int_a^b |f.g| \leq \left(\int_a^b |f|^2\right)^{\frac{1}{2}} . \left(\int_a^b |g|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Inégalité Burkhoder-davis-Gundy "BDG" : Soit M_t une martingale. $\forall p > 0$, on a :

$$c_p E\left[\langle M, M\rangle^{\frac{p}{2}}\right] \leq E\left[(M^*)^p\right] \leq C_p E\left[\langle M, M\rangle^{\frac{p}{2}}\right].$$

avec $M_t^* = \sup\{|M_s| \diagup s \leq t\}$, et c_p , $C_p$sont des constantes positives.

Lemme de Granwall : Soit $T \geq 0$ et g une fonction positive mesurable bornée telle que :

$$g(t) \leq a + b\int_0^t g(s)ds \quad \forall t \leq T.$$

Alors, on a pour tout $t \in [0, T]$:

$$g(t) \leq a\exp(bt).$$

Chapitre 2

Stabilité de la solution des équations différentielles stochastiques : cas Lipschitz.

Dans ce chapitre, nous envisageons d'étudier les questions de stabilité des solutions par rapport aux données initiales, aux coefficients et la convergence des approximations successives de Picard, en considérant que les coefficients satisfaisant la condition Lipschitzienne. Les propriétés de stabilité pour les systèmes, aussi bien déterministes que stochastiques, sont cruciales dans l'étude qualitative de ces systèmes.

La stabilité des systèmes dynamiques par rapport à de petites perturbations est sensible aux changements des conditions initiales et des coefficients des équations, ainsi qu'à tout autre paramètre important pour le système considéré [5, 1, 3].

2.1 Préliminaires et hypothèses

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité, équipé d'une filtration $(\mathcal{F}_t)$, satisfaisant les conditions usuelles, et (B_t) un mouvement brownien.

Une équation différentielle stochastique est une équation de la forme

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s$$

ou sous forme condensée

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \\ X_0 = x \end{cases} \tag{2.1}$$

où b est le drift et σ est le coefficient de diffusion.

Une solution d'une équation différentielle stochastique est un processus X qui satisfait l'équation pour tout $t \in [0, T]$.

Les hypothèses suivantes seront prises en compte tout au long de ce chapitre.

(H_1) **(Condition de la croissance linéaire)** Supposons que

$$b : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$$
$$\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$$

sont des fonctions mesurables de Borel et il existe $C > 0$ tel que pour tout

$(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$

$$|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq C(1 + |x|) \tag{2.2}$$

(H_2) **(Condition de Lipschitz)** Il existe $L > 0$ tel que pour tout $t \in [0, T]$, $x, y \in \mathbb{R}^d$

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq L\,|x - y|$$

Remarque 2.1.1 *La condition (H_1) est une condition suffisante pour la non-explosion des solutions et la condition (H_2) garantit que l'eds à une solution unique.*

Les conditions (H_1) et (H_2) s'expliquent facilement au vu des deux exemples simples d'équations différentielles déterministes suivants (i.e. $\sigma = 0$) :

1. On a l'équation suivante :

$$\begin{cases} dX_t = X^2 dt, \\ X_0 = 1, \end{cases}$$

correspondant à $b(x) = x^2$(qui ne satisfait pas H_1) a la (unique) solution

$$X_t = \frac{1}{1-t}; 0 \leq t < 1.$$

Ainsi, il est impossible de trouver une solution globale (définie pour tout t) dans ce cas. Plus généralement, la condition de la croissance linéaire garantit que la solution $X_t(\omega)$ de l'équation différentiel stochastique ne diverge pas, c'est-à-dire que $|X_t(\omega)|$ ne tend pas vers l'infini en un temps fini (la solution n'explose pas)

2. L'équation

$$\begin{cases} dX_t = 3X_t^{2/3} dt, \\ X_0 = 0, \end{cases} \tag{2.3}$$

à plus d'une solution. En fait, pour tout $a > 0$ la fonction

$$X_t = \begin{cases} 0 \quad \text{pour } t \leq a, \\ (t-a)^3 \quad \text{pour } t > a, \end{cases}$$

est une solution de l'équation (2.3). Dans ce cas, $b(x) = 3x^{2/3}$ ne satisfait pas la condition de Lipschitz (H_2) en $x = 0$.

Ainsi, la condition (H_2) garantit que l'équation différentiel stochastique a une solution unique.

Le théorème suivant aborde une question fondamentale dans l'étude des équations différentielles stochastiques, il établit les conditions sous lesquelles on peut garantir l'existence et l'unicité de la solution à une EDS donnée.

Théorème 2.1.1 (Existance et unicité) Sous les hypothèses (H_1) et (H_2), l'équation 2.1 admet une solution unique telle que :

$$E\left[\int_0^T |X_t|^2 dt < \infty\right]$$

Preuve. Voir ([2]) ∎

2.2 Stabilité de la solution d'équation différentielle stochastique

2.2.1 Stabilité par rapport à la condition initiale

Dans cette partie du chapitre, nous étudierons la stabilté par rapport aux petits perturbations sur la condition initiale, nous désignons par (X_t) la solution unique Soit l'EDS suivant :

$$\begin{cases} dX_t^n = b(t, X_t^n)dt + \sigma(t, X_t^n)dB_t \\ X_0^n = x^n \end{cases}$$

Théorème 2.2.1 Supposons que b et σ satisfaisant (H_1) et (H_2), alors la suite (X_t^n) converge vers X_t la solution unique de l'équation 2.1 i.e :

$$\lim_{n\to\infty} E[\sup_{t\leq T} |X_t^n - X_t|^2] = 0$$

Preuve. En utilisant l'inégalité élémentaire $|a+b+c|^2 \leq 3\left(|a|^2 + |b|^2 + |c|^2\right)$ nous avons :

$$E\left[\sup_{t\leq T}|X_t^n - X_t|^2\right] \leq 3\,|x_n - x|^2 + 3E\left[\sup_{s\leq t}\int_0^t |b(s,X_s^n) - b(s,X_s)|\,ds\right]^2 + 3E\left[\sup_{s\leq t}\int_0^t |\sigma(s,X_s^n) - \sigma(s,X_s)|\,dB_s\right]^2$$

Une application des inégalités de Cauchy-Schwartz, Burkholder–Davis–Gundy et la condition de Lipschitz (l'hypothèse H_2) nous donne :

$$\begin{aligned}
E\left[\sup_{t\leq T}|X_t^n - X_t|^2\right] &\leq 3\,|x_n - x|^2 + 3TE\left[\int_0^t |b(s,X_s^n) - b(s,X_s)|^2\,ds\right] \\
&\quad + 3C_2E\left[\int_0^t |\sigma(s,X_s^n) - \sigma(s,X_s)|^2\,dB_s\right] \\
&\leq 3\,|x_n - x|^2 + 3(T+C_2)L^2\left[\int_0^t E\left[|X_s^n - X_s|^2\right]\right] ds \\
&\leq 3\,|x_n - x|^2 + 3(T+C_2)L^2\int_0^t E\left[\sup_{s\leq t}|X_s^n - X_s|^2\right] ds.
\end{aligned}$$

Enfin, nous appliquons le lemme de Gronwall pour conclure que :

$$E\left[\sup_{t\leq T}|X_t^n - X_t|^2\right] \leq 3\,|x_n - x|^2 \exp[3(T+C_2)L^2t].$$

et comme $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, alors nous obtenons

$$\lim_{n\to+\infty} E\left[\sup_{t\leq T}|X_t^n - X_t|^2\right] = 0.$$

■

2.2.2 Stabilité par rapport aux coefficients

Dans cette partie, nous établirons la stabilité de la solution d'une EDS par rapport aux petits perturbation sur les coefficients b et σ.

Considérons des suites de fonctions (b_n) et (σ_n) et considérons l'équation correspondante :

$$\begin{cases} dX_t^n = b_n(t, X_t^n)dt + \sigma_n(t, X_t^n)dB_t \\ X_0^n = x. \end{cases} \tag{2.4}$$

Théorème 2.2.2 Supposons que les fonctions $b(t,x)$, $b_n(t,x)$, $\sigma(t,x)$et $\sigma_n(t,x)$ satisfaisant (H_1) et (H_2). Supposons en outre que pour chaque $T > 0$ et chaque ensemble compact K il existe $C > 0$ tel que

(i) $\sup\limits_{t\leq T} (|b_n(t,x)| + |\sigma_n(t,x)|) \leq C(1+|x|)$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{t\leq T} \sup\limits_{x\in k} |b_n(t,x) - b(t,x)| + |\sigma_n(t,x) - \sigma(t,x)| = 0$

alors

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\sup_{t\leq T} |X_t^n - X_t|^2\right] = 0$$

où (X_t^n) et (X_t) sont respectivement des solutions des équations (2.4) et (2.1).

Preuve. Pour chaque $n \in N$, soit (X_t^n) une suite de solution de (2.4), En utilisant l'inégalité élémentaire $|a+b+c|^2 \leq 3(|a|^2 + |b|^2 + |c|^2)$, on a :

$$\begin{aligned} |X_t^n - X_t|^2 \leq\ & 3\left(\int_0^t |b_n(s, X_s^n) - b_n(s, X_s)|\, ds\right)^2 + 3\left(\int_0^t |b_n(s, X_s) - b(t, X_s)|\, ds\right)^2 \\ & + 3\left|\int_0^t (\sigma_n(s, X_s^n) - \sigma_n(s, X_s))\, dB_s\right|^2 + 3\left|\int_0^t (\sigma_n(s, X_s) + \sigma(s, X_s))\, dB_s\right|^2 \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités de Cauchy-Schwartz, de Burkholder–Davis–Gundy et la condition de Lipschitz, on trouve que :

$$\begin{aligned} E\left[\sup_{t\leq T} |X_t^n - X_t|^2\right] \leq\ & 3(T+C)L^2 \int_0^t E\left[|X_s^n - X_s|^2\right] ds \\ & + 3(T+C)E\left[\int_0^t |b_n(s, X_s) - b(s, X_s)|^2 + |\sigma_n(s, X_s) - \sigma(s, X_s)|^2\, ds\right] \end{aligned}$$

$$E\left[\sup_{t\leq T}|X_t^n - X_t|^2\right] \leq 3(T+C)L^2\int_0^T E\left[|X_s^n - X_s|^2\right]ds + K_n$$
$$\leq 3(T+C)L^2\int_0^T E\left[\sup_{s\leq t}|X_s^n - X_s|^2\right]ds + K_n$$

avec $K_n = 3(T+C)E\left[\int_0^t |b_n(s,X_s) - b(s,X_s)|^2 + |\sigma_n(s,X_s) - \sigma(s,X_s)|^2 ds\right]$

Une application du lemme de Gronwall nous permet d'obtenir :

$$E\left[\sup_{t\leq T}|X_t^n - X_t|^2\right] \leq K_n \exp 3(T+C)L^2 T$$

En utilisant les hypothèses (i) et (ii) du théorème, il est facile de voir que $K_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$ ce qui réalise la preuve. ■

2.2.3 Convergence des approximations successives de Picard

Supposons que $b(t,x)$ et $\sigma(t,x)$ satisfaisant aux hypothèses (H_1), (H_2). Nous allons démontrer la convergence du schéma d'itération de Picard. Ce schéma est utile pour les calculs numériques de la solution unique de 2.1. Soit $(X_t^0) = x$ pour tout $t \in [0,T]$ et définissons (X_t^{n+1}) comme solution de l'EDS suivant :

$$\begin{cases} dX_t^{n+1} = b(t,X_t^n)dt + \sigma(t,X_t^n)dB_t, \\ X_0^{n+1} = x. \end{cases}$$

Théorème 2.2.3 Sous les hypothèses (H_1) et (H_2), la suite (X^n) converge vers l'unique solution de 2.1, i.e :

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\sup_{t\leq T}|X_t^n - X_t|^2\right] = 0.$$

Preuve. Soit $n \geq 0$, en appliquant les arguments habituels tels que l'inégalité de Cauchy-Schwartz et l'inégalité de Burkholder–Davis–Gundy pour la partie martingale, nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
|X_t^{n+1} - X_t^n|^2 &\leq 2\left(\int_0^t |b(s, X_s^n) - b(s, X_t^{n-1})| ds\right)^2 \\
&+ 2\left(\int_0^t |\sigma(s, X_s^n) - \sigma(s, X_s^{n-1})| dBs\right)^2 \\
E\left[\sup_{t\leq T} |X_t^{n+1} - X_s^n|^2\right] &\leq 2TE\left[\int_0^T |b(s, X_s^n) - b(s, X_s^{n-1})|^2 ds\right] \\
&+ 2C_2 E\left[\int_0^T |\sigma(s, X_s^n) - \sigma(s, X_s^{n-1})|^2 ds\right].
\end{aligned}
$$

Les coefficients b et σ étant Lipschitziens, on obtient :

$$
\begin{aligned}
E\left[\sup_{t\leq T} |X_t^{n+1} - X_t^n|^2\right] &\leq 2(T + C_2)L^2 \int_0^T E\left[|X_s^n - X_s^{n-1}|^2\right] ds \\
&\leq 2(T + C_2)L^2 \int_0^T E\left[\sup_{t\leq T} |X_s^n - X_s^{n-1}|^2\right] ds.
\end{aligned}
$$

Alors pour tout $n \geq 1$, et $t \leq T$, on a :

$$
\begin{aligned}
E\left[\sup_{t\leq T} |X_s^1 - X_s^0|^2\right] ds &\leq 2T \int_0^T b\,|(s, x)|^2 ds + C_2 \int_0^T \sigma\,|(s, x)|^2 ds \\
&\leq 2(C_2 + T)C^2 \left(1 + E(|x|^2)\right) T \\
&\leq A_1 T,
\end{aligned}
$$

où la constante A_1 dépend uniquement de C_2, C, T et $E[|x|^2]$.

Donc, en déduire par récurrence sur n que :

$$
E\left[\sup_{t\leq T} |X_t^{n+1} - X_t^n|^2\right] \leq \frac{A_2^{n+1} T^{n+1}}{(n+1)!}.
$$

Ce la implique notamment que (X_t^n) est une suite de Cauchy dans L^2, qui est complet. Donc (X_t^n) converge vers une limite (X_t) qui est l'unique solution de 2.1. ∎

Chapitre 3

Stabilité de la solution des EDS sous la condition d'unicité trajectorielle.

Dans cette partie, nous étudions les mêmes propriétés que dans le deuxiéme chapitre, mais avec l'hypothèse de Lipschitz en moins. Cette absence de régularité apporte une difficulté cruciale, dûe au fait qu'on ne peut plus appliquer le lemme de Gronwall. On se contente de formuler une hypothèse de continuité et de bornitude des coefficients et l'unicité trajectorielle des solutions. Les principaux outils utilisés dans les démonstrations sont le théorème de Skorokhod et les critères de tension de Kolmogorov. (Voir [3])

3.1 Préliminaires et hypothèses

Supposons que les coefficients satisfaisant aux conditions suivantes :

(H_1') Supposons que

$$b : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d,$$

$$\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d,$$

sont des fonctions mesurables et continues.

(H_2') Il existe une constante $C > 0$ tel que pour tout $t \in [0, T]$ et $x \in \mathbb{R}^d$ on a,

$$|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq M(1 + |x|).$$

La définition suivante énonce le concept d'unicité trajectorielle pour l'équation 2.1.

Définition 3.1.1 (Unicité trajectorielle) *Nous disons que l'unicité trajectorielle est vérifiée pour l'équation 2.1 si X et X' sont deux solutions définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ avec un mouvement brownien commun B, et avec éventuellement des filtrations différentes telles que $P[X_0 = X_0'] = 1$, alors X et X' sont indistinguables.*

Rappelons les critères de tension de Kolmogorov pour les processus stochastiques ainsi que le théorème de Skorokhod, des outils qui seront fréquemment utilisés par la suite.

Lemme 3.1.1 (Skorokhod) *Soit (S, ρ) un espace métrique séparable complet et soit $P_n, n = 1, 2, ...,$ et P des mesures de probabilité sur $(S, \mathcal{B}(S))$ telles que*

$$P_n \underset{n \to \infty}{\to} P.$$

Ensuite, sur un espace de probabilité $(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathcal{F}}, \widehat{P})$, nous pouvons construire S des variables aléatoires à valeur $X_n, n = 1, 2, ...,$ et X tel que :

(i) $P_n = \widehat{P^{X_n}}, n = 1, 2, ...,$ et $P = \widehat{P^X}$.

(ii) X_n converge vers X, $\widehat{P}$ presque sûrement.

Lemme 3.1.2 (Critères de tension de Kolmogorov [3] page 18) *Soit $X^n(t)$, où $n = 1, 2, \ldots$, être une suite de processus continus d-dimensionelle satisfaisant les deux conditions suivantes :*

(i) Il existe des constantes positives M et γ telles que : $E[|X^n(0)|^\gamma] \leq M$ pour tout $n = 1, 2, ...$

(ii) Il existe des constantes positives α, β, $M_k, k = 1, 2, ...,$ tel que :

$E[|X^n(t) - X^n(s)|^\alpha] \leq M_k|t - s|^{1+\beta}$ pour tout n et $t, s \in [0, k], k = 1, 2, ...$

alors, il existe une sous-suite (n_k), un espace de probabilité $(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathcal{F}}, \widehat{P})$ et des processus continus d-dimensionelle $\widehat{X_{n_k}}, k = 1, 2, ...,$ et X défini dessus tel que

(a) les lois de $\widehat{X_n}$ et X coincident,

(b) $X_{n_k}(t)$ converge vers $X(t)$ uniformément sur tout intervalle de temps fini P presque sûrement.

Lemme 3.1.3 *(Voir [3] page 170) Soit $C_m(m = 1, 2...)$ une constante positives, on a :*

$$\sup_{s \leq t} E[|X_t - X_s|^{2m}] \leq C_m|t - s|^m$$

Preuve. L'inégalité de Burkholder–Davis–Gundy nous permet d'obtenir :

$$\begin{aligned}
E[|X_t - X_s|^{2m}] &\leq C_m^{(1)} E[|\int_s^t b(r, X_r)dr|^{2m}] + C_m^{(2)} E[|\int_s^t \sigma(r, X_r)dB_r|^{2m}] \\
&\leq C_m^{(3)} E\left[\left(\int_s^t |b(r, X_r)|^2 \, dr\right)^m\right] + C_m^{(4)} E\left[\left(\int_s^t |\sigma(r, X_r)|^2 \, dr\right)^m\right] \\
&\leq C_m^{(5)} \, |t - s|^m,
\end{aligned}$$

tels que $C_m^{(1)}, C_m^{(2)}, ..., C_m^{(2)}$ sont des constantes positives dépendants de m, T et M.

3.2 Stabilité des solutions par rapport aux conditions initiales et aux coefficients

3.2.1 Stabilité par rapport aux conditions initiales

Soit l'EDS suivant :

$$\begin{cases} dX_t^n = b(t, X_t^n)dt + \sigma(t, X_t^n)dB_t, \\ X_0^n = x^n. \end{cases} \tag{3.1}$$

Théorème 3.2.1 Soient $\sigma(t,x)$ et $b(t,x)$ des fonctions continues satisfaisant la condition de croissance linéaire : pour tout $T \geq 0$, il existe M tel que :

$$\lim_{n\to\infty} E[\sup_{t\leq T} |X_t^n - X_t|^2] = 0, pour\ tout\ T \geq 0.$$

Preuve.

Supposons que la conclusion de notre théorème soit fausse, alors il existe un nombre positif δ et une suite (x_n) convergeant vers x telle que :

$$\inf_{n\in N} E[\sup_{t\leq T} |X_t^n - X_t|^2] \geq \delta. \tag{3.2}$$

Notons X^n la solution de 3.1 correspondant à la condition initiale x^n et X la solution de 2.1 correspondant à la condition initiale x.

En utilisant les hypothèses (H_1') et (H_2') et les arguments classiques du calcul stochastique, il est facile de voir que (lemme 3.1.3. avec $m = 2$)

$$E[\sup_{s\leq t} |X_t - X_s|^4] \leq C(t)|t-s|^2.$$

où $C(T)$ est une constante. Une estimation similaire est également valable pour X^n et le mouvement brownien B. Ensuite, la famiile (X^n, X, B) satisfait les conditions $i)$ et $ii)$ du lemme 3.1.2 avec $\alpha = 4$ et $\beta = 1$. Par conséquent, cette suite est tendue, ce qui implique qu'elle est relativement compacte dans la topologie de la convergence faible des mesures de probabilité. Ainsi, selon le théorème de Skorokhod (lemme 3.1.1), il existe un espace de probabilité.$(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathcal{F}}, \widehat{P})$ et une suite $(\widehat{X_t^n}, \widehat{Y_t^n}, \widehat{B_t^n})$ de processus stochastiques définis sur cette espace tels que :

$\alpha)$ Les lois de (X^n, X, B) et $(\widehat{X_t^n}, \widehat{Y_t^n}, \widehat{B_t^n})$ coincident pour tout $n \in N$.

$\beta)$ Il existe une sous-suite $(\widehat{X^{n_k}}, \widehat{Y^{n_k}}, \widehat{B^{n_k}})$ convergeant vers $(\widehat{X_t}, \hat{Y_t}, \widehat{B_t})$ uniformément sur tout intervalle de temps fini $\hat{P}$-a.s.

Si nous notons $\widehat{\mathcal{F}_t^n} = \sigma(\widehat{X_s^n}, \widehat{Y_s^n}, \widehat{B_s^n}; s \leq T)$ et $\widehat{\mathcal{F}_t} = \sigma(\widehat{X_s}, \hat{Y_s}, \widehat{B_s}; s \leq T)$, alors $(\widehat{B_t^n}, \widehat{\mathcal{F}_t^n})$et $(\widehat{B_t}, \widehat{\mathcal{F}_t})$ sont des mouvements browniens.

D'après la propriété $\alpha)$ et le fait que X_t^n et X_t satisfont 2.1 avec les données initiales x_n et x, on peut prouver que $\forall n \in N$, $\forall t \geq 0$

$$\widehat{X_t^n} = x_n + \int_0^t b(s, \widehat{X_s^n})ds + \int_0^t \sigma(s, \widehat{X_s^n})d\widehat{B_s^n}.$$

En écrivant des relations similaires, on obtient :

$$\widehat{Y_t^n} = x_n + \int_0^t b(s, \widehat{Y_s^n})ds + \int_0^t \sigma(s, \widehat{Y_s^n})d\widehat{B_s^n}.$$

En utilisant la propriété (β) et un théorème limite de Skorokhod, on obtient que

$$\int_0^t b(s, \widehat{X_s^{n_k}})ds \xrightarrow[k\to\infty]{P} \int_0^t b(s, \widehat{X_s})ds$$

$$\int_0^t \sigma(s, \widehat{X_s^{n_k}})d\widehat{B_s^{n_k}} \xrightarrow[k\to\infty]{P} \int_0^t \sigma(s, \widehat{X_s})d\widehat{B_s}$$

Donc $\widehat{X}$ et $\widehat{Y}$ satisfont la même équation différentielle stochastique 2.1, sur $(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathcal{F}}, \widehat{P})$, avec le même mouvement brownien $\widehat{B}$ et la même condition initiale x. Ensuite, par l'hypothése d'unicité trajectorielle, nous concluons que $\widehat{X_t} = \widehat{Y}_t$, $\forall t \;\; \hat{P}$ a.s.

Par intégrabilité uniforme, on obtient que :

$$\delta \leq \liminf_{n \in N} E[\sup_{t \leq T} |X_t^n - X_t|^2] \leq \liminf_{k \in N} \widehat{E}[\sup_{t \leq T} \left| \widehat{X_t^{n_k}} - \widehat{Y_t^{n_k}} \right|^2] = \widehat{E}[\sup_{t \leq T} \left| \widehat{X_t} - \widehat{Y_t} \right|^2]$$

ceci est une contradiction.

3.2.2 Stabilité par rapport aux coefficients

En utilisant les mêmes techniques que précédemment, nous pouvons démontrer la stabilité de la solution de l'équation différentielle stochastique par rapport aux coefficients de l'équation.

Considérons une suite de fonctions et l'équation différentielle stochastique suivante

$$\begin{cases} dX_t^n = b_n(t, X_t^n)dt + \sigma_n(t, X_t^n)dB_t \\ X_0^n = x \end{cases} \tag{3.3}$$

Théorème 3.2.2 Supposons que les fonctions $b_n(t, X_t^n)$ et $\sigma_n(t, X_t^n)$ soient continus. Supposons en outre que pour chaque $T > 0$ et chaque ensemble compact I K il existe $C > 0$ tel que

i) $\sup_{t \leq T}(|b_n(t,x)| + |\sigma_n(t,x)|) \leq C(1 + |x|)$.

ii) $\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in K} \sup_{t \leq T}(|b_n(t,x) - b(t,x)| + |\sigma_n(t,x) - \sigma(t,x)|) = 0$.

Si l'unicité trajectorielle est vérifée pour l'équation 2.1 , nous avons :

$$\lim_{n \to +\infty} E[\sup_{t \leq T} |X_t^n - X_t|^2] = 0.$$

pour chaque $T \geq 0$.

Preuve.

Similaire à la démonstration du théorème précédent.

3.3 Convergence des approximations successives de Picard

Soit σ et b satisfaisant les hypothéses H_1' et H_2' et considérons l'équation différentielle stochastique 2.1.

La suite d'approximations successives associée à 2.1 est définie comme suit :

$$\begin{cases} X_t^{n+1} = \int_0^t b(s, X_s^n)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^n)dB_s \\ X_0^{n+1} = x \end{cases} \tag{3.4}$$

Dans le chapitre précédent, nous avons fait l'hypothèse que les coefficients sont Lipschitziens. Nous avons ensuite prouvé que la suite (X^n) converge vers l'unique solution X de l'équation stochastique 2.1. Maintenant, si nous abandonnons la condition de Lipschitz et supposons seulement que l'équation 2.1 admet une solution unique forte, une autre hypothèse doit être ajoutée pour garantir la convergence de la suite (X^n) vers l'unique solution X.

L'objectif du théorème qui suit est de définir une condition supplémentaire à la fois nécessaire et suffisante pour garantir la convergence des approximations successives.

Théorème 3.3.1 Soit b et σ satisfaisant H_1' et H_2'. Sous l'unicité trajectorielle pour 2.1, (X^n) converge vers l'unique solution de 2.1 si et seulement si $(X^{n+1} - X^n)$ converge vers 0.

Lemme 3.3.1 *Soit* (X^n) *défini par* 3.4,

1) Pour tout $p > 1$, $E[\sup\limits_{t\leq T} |X_t^n|^{2p}] \leq +\infty$

2) Pour tout $T > 0$ et $p > 1$, il existe une constante C indépendante de n telle que pour tout $s < t$ dans $[0, T]$, $E[|X_t^n - X_s^n|^{2p}] \leq C\,|t-s|^p$.

Preuve (Lemme 3.3.1).

1) Pour tout $t > 0$ et $n > 1$, on a

$$|X_t^n|^{2p} \leq C_1[|x|^{2p} + |\int_0^t b(s, X_s^{n-1})ds|^{2p}| + |\int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1})dBs|^{2p}]$$

l'inégalité de Hölder nous donne :

$$|\int_0^t b(s, X_s^{n-1})ds|^{2p} \leq t^p[\int_0^t \left|b(s, X_s^{n-1})\right|^2 ds]^p \leq t^{2p-1}.\int_0^t \left|b(s, X_s^{n-1})\right|^{2p} ds$$

Les inégalités de Burkholder-Davis-Gundy et de Hölder conduisent à la formulation de l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} E[\sup_{s\leq t}\left|\int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1})dB_s\right|^{2p}] &\leq C_2E[(\int_0^t \left|\sigma(s, X_s^{n-1})\right|^2 ds)^p] \\ &\leq C_2T^{p-1}E[\int_0^t \left|\sigma(s, X_s^{n-1})\right|^{2p} ds] \end{aligned}$$

Alors, on a :

$$E[\sup_{t\leq T}|X_t^n|^{2p}] \leq C_3[|x|^{2p} + C_4E\int_0^t (|b|^{2p} + |\sigma|^{2p})(s, X_s^{n-1})ds]$$

En utilisant la condition de la croissance linéaire (H_2') on obtient :

$$E[\sup_{t\leq T}|X_t^n|^{2p}] \leq C_5(1 + |x|^{2p}) + C_5\int_0^T E[\sup_{t\leq T}\left|X_t^{n-1}\right|^{2p}]dt$$

où les différentes constantes C_k ne dépendent que de T, m, d.

L'itération de la dernière inégalité donne :

$$E[\sup_{t\leq T}|X_t^n|^{2p}] \leq C_5(1+|x|^{2p})\left[1+CT+\frac{(CT)^2}{2!}+...+\frac{(CT)^n}{n!}\right]$$

Donc

$$\sup_n E[\sup_{t\leq T}|X_t^n|^{2p}] \leq C_5(1+|x|^{2p})\exp(CT)$$

2) Si on fixe $s \leq t$ dans $[0,T]$, on peut procéder de la même manière que précédemment pour obtenir :

$$E[|X_t^n - X_s^n|^{2p}] \leq Cte.\,|t-s|^p$$

Preuve.(Théorème 3.3.1)

Supposons que $|X^{n+1}-X^n|$ converge vers 0 et qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} E[\sup_{t\leq T}|X_t^n - X_t|^2] \geq \delta$$

D'après le lemme 3.3.1, la famille (X^n, X^{n+1}, X, B) satisfaisant les conditions $i)$ et $ii)$ du lemme 3.1.2 avec $\alpha = 4$ et $\beta = 1$. Par conséquent, cette suite est tendue, ce qui implique qu'elle est relativement compacte dans la topologie de la convergence faible des mesures de probabilité. Ainsi, selon le théorème de Skorokhod (lemme 3.1.1), il existe un espace de probabilité $(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathcal{F}}, \widehat{P})$ portant une suite de processus stochastiques $(\widehat{X^n}, \widehat{Z^n}, \widehat{Y^n}, \widehat{B^n})$ avec les propriétés suivantes :

$i)$ les lois de $(\widehat{X^n}, \widehat{Z^n}, \widehat{Y^n}, \widehat{B^n})$ et (X^n, X^{n+1}, X, B) coincident pour chaque $n \in N$,

$ii)$ il existe une sous-suite $(\widehat{X^{n_k}}, \widehat{Z^{n_k}}, \widehat{Y^{n_k}}, \widehat{B^{n_k}})$ converge vers $(\widehat{X}, \widehat{Z}, \widehat{Y}, \widehat{B})$ uniformément sur tout intervalle de temps fini $\widehat{P}.p.s.$

Mais nous savons que $X^{n+1}-X^n$ converge vers 0, alors nous pouvons montrer facilement que $\widehat{X} = \widehat{Z}$, $\widehat{P}$.p.s.

En procédant comme dans la preuve du théorème 3.2.1, on peut montrer que :

$$\widehat{Z^{n_k}} = x + \int_0^t b(s, \widehat{X_s^{n_k}})ds + \int_0^t \sigma(s, \widehat{X_s^{n_k}})d\widehat{B_s^{n_k}}$$
$$\widehat{Y^{n_k}} = x + \int_0^t b(s, \widehat{Y_s^{n_k}})ds + \int_0^t \sigma(s, \widehat{Y_s^{n_k}})d\widehat{B_s^{n_k}}$$

En prenant la limite telle que k tend vers $+\infty$, on obtient que

$$\widehat{X_t} = x + \int_0^t b(s, \widehat{X_s})ds + \int_0^t \sigma(s, \widehat{X_s})d\widehat{B_s}$$
$$\widehat{Y_t} = x + \int_0^t b(s, \widehat{Y_s})ds + \int_0^t \sigma(s, \widehat{Y_s})d\widehat{B_s}$$

En d'autres termes $\widehat{X}$ et $\widehat{Y}$ résolvent l'équation 2.1. Alors, par unicité trajectorielle, nous avons $\widehat{X} = \widehat{Y}$, $\hat{P}$ a.s.

En utilisant l'intégrabilité uniforme, on obtient :

$$\delta \leq \liminf_k E[\sup_{t\leq T} |X_t^n - X_t|^2] = \liminf_k \widehat{E}[\sup_{t\leq T} \left|\widehat{X_t^{n_k}} - \widehat{Y_t^{n_k}}\right|^2]$$
$$= \widehat{E}[\sup_{t\leq T} \left|\widehat{X_t} - \widehat{Y_t}\right|^2]$$

ceci est une contradiction.

Alors sous la condition d'unicité trajectorielle pour l'équation 2.1, (X^n) converge vers X l'unique solution de 2.1.

Conclusion

Dans cette étude, nous avons exploré un aspect crucial des équations différentielles stochastiques, la stabilité des solutions par rapport aux conditions initiales et aux coefficients, ainsi que la convergence des approximations successives de Picard. Nous avons d'abord examiné le cas où les coefficients sont Lipschitz, en utilisant des agruments de calcul stochastique pour garantir la stabilité des solutions de telles équations face à de petites perturbations. Ensuite, nous avons abordé le cas plus complexe où les coefficients ne sont pas Lipschitz. Dans ce contexte, nous avons utilisé des théorèmes avancés, notamment ceux de Skorokhod et de Kolmogorov, pour surmonter les défis associés. Grâce à ces théorèmes, nous avons pu établir des conditions sous lesquelles les solutions restent stables et les approximations successives de Picard demeurent convergentes, malgré l'absence de régularité sur les coefficients.

Bibliographie

[1] Bahlali, K., Mezerdi, M. A., & Mezerdi, B. (2020). Stability of McKean–Vlasov stochastic differential equations and applications. Stochastics and Dynamics, 20(01), 2050007.

[2] Oksendal, B. (2000). Stochastic Differential Equations : An Introduction with Applications. 5th edition. Springer-Verlag.

[3] N. Ikeda and S. Watanabe, Stochastic Differntial Equations and Diffusions Processes. 2nd edn. (North- Holland Publishing Company, 1989).

[4] Jeanblanc, M. (2006). Cours de Calcul stochastique Master 2IF EVRY. Lecture Notes, University of Évry. Available at http ://www. maths. univ-evry. fr/pages_perso/jeanblanc.

[5] Bahlali, K., Mezerdi, B., Ouknine, Y. (1998). Pathwise uniqueness and approximation of solutions of stochastic differential equations. In : S eminaire de Probabilit es XXXII. Berlin : Springer, pp. 166–187.

[6] Mezerdi, Mohamed Amine and Khelfallah, Nabil. "Stability and prevalence of McKean–Vlasov stochastic differential equations with non-Lipschitz coefficients" Random Operators and Stochastic Equations, vol. 29, no. 1, 2021, pp. 67-78. https ://doi.org/10.1515/rose-2021-2053

Résumé

L’objectif de ce mémoire est d’étudier la stabilité des solutions des équations différentielles stochastiques, par rapport à la condition initial et aux coefficients sous la condition de Lipschitz d’une part et sans la condition de Lipschitz d’autre part.

Mots clés: Équation différentielle stochastique, Lipschitz, Stabilité, Skorokhod, Tension.

Abstract

The objective of this work is to study the stability of solutions to stochastic differential equations, with respect to the initial condition and the coefficients, both under the Lipschitz condition on one hand and without the Lipschitz condition on the other hand.

Keywords: Stochastic differential equation, Lipschitz, Stability, Skorokhod, Tightness.

ملخص

ملخص هدف هذه الأطروحة هو دراسة استقرار حلول المعادلات التفاضلية العشوائية، فيما يتعلق بالشرط الأولي والمعاملات، سواء تحت شرط ليبشيتز من جهة ومن دون شرط ليبشيتز من جهة أخرى.

كلمات مفتاحية: معادلة تفاضلية عشوائية، ليبشيتز، استقرار، سكوروخود، توتر