

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
UNIVERSITÉ MOHAMED KHIEDER, BISKRA  
FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et la VIE  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



THÈSE POUR OBTENIR LE TITRE DE  
DOCTEUR EN SCIENCES  
DE L'UNIVERSITÉ DE BISKRA, MOHAMED KHIEDER  
En Statistique  
Présentée par  
TOUBA Sonia  
SUR L'ESTIMATION DES PARAMETRES  
DES LOIS STABLES

Thèse dirigée par Pr. NECIR Abdelhakim  
soutenue le() devant le jury composé de

Pr.	MEZERDI	Brahim	U. Biskra	Président
Pr.	NECIR	Abdelhakim	U. Biskra	Rapporteur
Dr.	MERAGHNI	Djamel	U. Biskra	Examineur
Pr.	YOUSFATE	Abderrahmane	U. Sidi belabess	Examineur
Pr.	FELLAG	Hocine	U. Tizi Ouzou	Examineur
Pr.	MOHDEB	ZAHER	U. Constantine	Examineur

## REMERCIEMENTS

La réalisation de ce travail de recherche qui je l'espère, sera bénéfique pour les étudiants présents et futures a exigé, énormément, d'efforts de beaucoup d'acteurs pour lesquels je dois beaucoup de remerciements et de reconnaissance.

En premier lieu, je dédie ce précieux mémoire à mon encadreur Pr. NECIR Abdelhakim pour avoir accepté d'encadrer ce travail, pour ses conseils justes, sa disponibilité et son soutien de chaque instant et inlassable.

En outre, je ne dois en aucune manière oublier de remercier, et chaleureusement, les membres de jury pour l'honneur qu'il nous fait en acceptant l'évaluation de ce travail, ainsi que toute l'équipe du laboratoire de Mathématique Appliquée pour ses encouragements incessants.

Je remercie également toute l'équipe du laboratoire LMSE pour son opportunité, ainsi que toutes les personnes avec lesquelles j'ai été en relation pendant ces années de m'avoir guidé par leur expérience professionnelle et leurs précieux conseils.

Pour finir, il serait injuste de ne pas souligner l'appui sans faille, de toute ma famille qui a toujours cru à toutes mes réussites.

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>i</b>
<b>Table des matières</b>	<b>ii</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>v</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>ix</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Présentation de la loi stable univariée et applications</b>	<b>7</b>
1.1 Définitions et caractéristiques de bases . . . . .	8
1.1.1 Cas général . . . . .	8
1.1.2 Signification des paramètres . . . . .	10
1.1.3 Cas symétrique . . . . .	13
1.2 Propriétés de la loi stable . . . . .	13
1.2.1 La fonction de densité et la fonction de distribution . . . . .	15
1.2.2 Queues lourdes . . . . .	17
1.2.3 Moments . . . . .	19
1.2.4 Algorithme de simulation . . . . .	24
1.3 Estimation des paramètres de la loi stable . . . . .	29
1.3.1 Méthode de Régression . . . . .	30

1.3.2	L'approche de McCulloch . . . . .	34
1.3.3	Méthode des moments . . . . .	36
1.3.4	Méthode du Maximum de Vraisemblance . . . . .	38
1.4	Exemple illustratif . . . . .	39
1.4.1	Rendement D'actif . . . . .	40
1.4.2	Non Normalité des rendements . . . . .	42
<b>2</b>	<b>Théorie Des Valeurs Extrêmes</b>	<b>46</b>
2.1	Statistique d'ordre . . . . .	47
2.1.1	Distributions des statistiques d'ordre . . . . .	48
2.1.2	Distribution des extrema dans le cas fini . . . . .	50
2.2	Distributions asymptotiques du maximum . . . . .	51
2.2.1	Distribution des valeurs extrêmes généralisée . . . . .	51
2.2.2	Domaines d'attractions . . . . .	54
2.2.3	Distribution de Pareto Généralisée . . . . .	56
2.2.4	Choix du seuil . . . . .	59
2.3	Les Paramères du loi stable . . . . .	60
2.3.1	Estimation de l'indice de queue $\alpha$ . . . . .	61
2.3.2	Estimation du paramètre de localisation $\mu$ . . . . .	62
<b>3</b>	<b>Mesures de Risque Financiers</b>	<b>67</b>
3.1	Mesures de Risque de Distorsion . . . . .	67
3.1.1	Quelques mesures de risque traditionnelles . . . . .	68
3.1.2	Propriétés des mesures de risque de distorsion . . . . .	69
3.1.3	Les paramètres de la mesure du risque . . . . .	72
3.1.4	Axiomes d'Artzner . . . . .	73
3.1.5	Quelques mesures du risque de distorsion . . . . .	75
3.2	Estimation Empirique des Mesures de Risque [117] . . . . .	78

3.2.1	L-Fonctionnelles . . . . .	78
3.2.2	Estimation empirique des L-Fonctionnelles . . . . .	81
3.3	Estimation des L-Fonctionnelles quand $F \in D(\alpha)$ . . . . .	83
3.3.1	Estimation des Quantiles Extrêmes . . . . .	83
3.3.2	Le choix optimal des Nombres de Statistiques D'ordre Supérieur et Inférieur . . . . .	85
3.3.3	Certaines hypothèses de régularité pour $J$ . . . . .	86
3.3.4	Définition de l'estimateur $\hat{\Delta}_{r,n}$ de la mesure TSD . . . . .	89
3.3.5	Simulation des Résultats . . . . .	93
<b>4</b>	<b>Estimateur à Biais réduit de la Mesure TSD [12]</b>	<b>97</b>
4.1	L'Approche de Li et al . . . . .	98
4.2	Choix optimal de fractions d'échantillon $m$ et $\ell$ . . . . .	102
4.3	Simulation des Résultats . . . . .	103
4.4	Une Classification des Marchés Financiers Via la Mesure TSD Réduite . . .	107
	<b>Conclusion</b>	<b>114</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>118</b>
	<b>Annexe A : Langage fonctionnel <math>R</math></b>	<b>133</b>
<b>5</b>	<b>Annexe B : Preuve</b>	<b>135</b>
	<b>Annexe B : Preuve</b>	<b>135</b>
	<b>Annexe C : Abréviations et Notations</b>	<b>138</b>

# Table des figures

1.1	Courbe de la densité d'une loi alpha stable symétrique avec $\gamma = 1$ et $\alpha \in \{1.7, 1.5, 1.3\}$ . . . . .	10
1.2	Courbe de la densité d'une loi alpha stable avec $\alpha = 2$ , $\beta = 0$ , $\gamma = 1$ et $\delta \in \{-2; 0; 2\}$ . . . . .	11
1.3	Courbe de la densité d'une loi alpha stable avec $\alpha = 2$ , $\beta = 0$ , $\delta = 0$ et $\gamma \in \{0.7, 1, 1.5\}$ . . . . .	12
1.4	Courbe de la densité d'une v.a. alpha stable avec $\alpha = 1.5$ , $\gamma = 1$ , $\delta = 0$ et $\beta \in \{-1, 0, 1\}$ . . . . .	12
1.5	Queues des distributions $\alpha$ -stable symétrique avec $\gamma = 1$ et $\alpha = 2$ (ligne continue), 1.7 (ligne en tirets) et 1.5 (ligne en pointillés) pour 3000 réalisations.	18
1.6	Graphe de la moyenne (à gauche) et la variance (à droite) de 3000 observations pour une distribution $\alpha$ -stable symétrique avec $\alpha = 2$ et $\gamma = 1$ . La moyenne converge vers 0 et la variance converge vers $1/\sqrt{2}$ . . . . .	21
1.7	Graphe de la moyenne (à gauche) et la variance (à droite) de 3000 observations pour une distribution $\alpha$ -stable symétrique avec $\alpha = 1.2$ et $\gamma = 1$ . La moyenne converge vers 0 et la non stationnarité de la variance. . . . .	21
1.8	Graphe de la moyenne (à gauche) et la variance (à droite) de 3000 observations pour une distribution $\alpha$ -stable symétrique avec $\alpha = 0.75$ et $\gamma = 1$ . La non stationnarité des deux échantillons de la moyenne et la variance. . .	22

1.9	Histogrammes normalisés de lois $S\alpha S$ pour différentes valeurs de $\alpha$ calculés sur sur 5000 réalisations. . . . .	28
1.10	Distribution d'une loi stable de paramètre $\alpha = 2$ ; $\beta = 0$ ; $\delta = 0$ ; et $\gamma = 1$ pour $n = 60000$ . . . . .	28
1.11	Distribution d'une loi stable de paramètre $\alpha = 2$ ; $\beta = 0$ ; $\delta = 0$ ; et $\gamma = 1$ pour $n = 100$ . . . . .	29
1.12	Test graphique; variance empirique calculée sur l'échantillon de 3000 réalisations d'une loi $S\alpha S$ pour différentes valeurs de $\alpha$ . . . . .	30
1.13	Les prix de fermeture quotidienne de l'indice boursier Nasdaq, de la période allant du 05/02/1971 au 23/01/2013, soit 10586 observations, du fait que les marches boursiers sont fermés pendant les fins de la semaine (i.e. Dimanche et Lindi) et les jours fériés, les jours non ouvrables ne sont pas donc pris en compte. . . . .	41
1.14	Distribution des rendements de l'indice boursier Nazdaq, de la période allant du 05/02/1971 au 23/01/2013 (10585 observations). . . . .	41
1.15	L'évolution de la série des rendements de l'indice boursier Nazdaq, de la période allant du 05/02/1971 au 23/01/2013. La ligne verticale représente l'année 1971. La non stationnarité de la série (des périodes de grande variations positives et négatives). . . . .	43
1.16	QQ-plot; quantiles normaux contre quantiles empiriques des rendements de l'indice boursier Nazdaq de la période allant du 05/02/1971 au 23/01/2013. . . . .	44
1.17	Modèle $\alpha$ -stable contre modèle normale pour les queues de rendement de l'indice boursier Nazdaq du période allant 05/02/1971 au 23/01/2013. . . . .	44
2.1	Les distributions des lois limites Gumbul (ligne continue), Fréchet ( $\zeta = 1$ , ligne en pointillés) et Weibull ( $\zeta = 1$ , ligne en tirets). . . . .	53

2.2	Allure des fonctions de densité (coté gauche) et des fonctions de distributions (coté droite) de la <i>GPD</i> standard pour différentes valeurs du paramètre de forme $\zeta$ . . . . .	58
2.3	L'estimateur de Hill de l'indice de stabilité $\alpha$ ( basé sur des échantillons de taille 5000) contre le nombre de statistique d'ordre supérieur $k$ pour $\alpha = 1.1$ (à gauche) et $\alpha = 1.8$ (à droite). La ligne horizontale représente la vraie valeur de $\alpha$ . . . . .	63
2.4	L'estimateur de Peng du paramètre de localisation d'une distribution $\alpha$ -stable symétrique avec le même $\alpha = 1.2$ et $\sigma = 1$ (le coté à gauche) et $\sigma = 0.1$ (le coté à droite). L'estimation est meilleur pour des valeurs petites de $\sigma$ . . . . .	66
3.1	Graphiques des estimateurs de Hill $\hat{\alpha}$ (ligne solide), $\hat{\alpha}_R$ (ligne en tirets) et $\hat{\alpha}_L$ (ligne en pointillés) de l'indice de stabilité $\alpha$ d'une distribution $\alpha$ -stable asymétrique à droite, basé sur 1000 observations avec 50 réplifications. La ligne horizontale représente la vraie valeur de $\alpha = 1.2$ . . . . .	86
3.2	Graphiques des estimateurs de Hill $\hat{\alpha}$ (ligne solide), $\hat{\alpha}_R$ (ligne en tirets) et $\hat{\alpha}_L$ (ligne en pointillés) de l'indice de stabilité $\alpha$ d'une distribution $\alpha$ -stable symétrique, basé sur 1000 observations avec 50 réplifications. La ligne horizontale représente la vraie valeur de $\alpha = 1.2$ . . . . .	87
3.3	Graphiques des estimateurs de Hill $\hat{\alpha}$ (ligne solide), $\hat{\alpha}_R$ (ligne en tirets) et $\hat{\alpha}_L$ (ligne en pointillés) de l'indice de stabilité $\alpha$ d'une distribution $\alpha$ -stable asymétrique à gauche, basé sur 1000 observations avec 50 réplifications. La ligne horizontale représente la vraie valeur de $\alpha = 1.2$ . . . . .	87
3.4	Graphiques du rapport $\theta$ de nombres statistiques extrêmes comme fonction de la taille d'échantillon pour une distribution $\alpha$ -stable symétrique ( ligne solide), une distribution $\alpha$ -stable asymétrique à droite (ligne en tirets) et une distribution $\alpha$ -stable asymétrique à gauche (ligne pointillés). . . . .	88



4.1	Biais (côté à gauche) et RMSE (côté à droite) de la nouvelle estimateur TSD et Necir et Meraghni TSD estimateur pour $\alpha = 1.7$ et $r = 0.6$ , basé sur 200 échantillons de 2000 observations stables. . . . .	105
4.2	Biais (côté à gauche) et RMSE (côté à droite) de la nouvelle estimateur TSD et Necir et Meraghni TSD estimateur pour $\alpha = 1.7$ et $r = 0.6$ , basé sur 200 échantillons de 5000 observations stables. . . . .	106
4.3	Biais (côté à gauche) et RMSE (côté à droite) de la nouvelle estimateur TSD et Necir et Meraghni TSD estimateur pour $\alpha = 1.5$ et $r = 0.7$ , basé sur 200 échantillons de 2000 observations stables. . . . .	106
4.4	Biais (côté à gauche) et RMSE (côté à droite) de la nouvelle estimateur TSD et Necir et Meraghni TSD estimateur pour $\alpha = 1.5$ et $r = 0.7$ , basé sur 200 échantillons de 5000 observations stables. . . . .	107
4.5	L'estimateur de Hill de l'indice de stabilité $\alpha$ ( basé sur des échantillons de taille 5000) contre le nombre de statistique d'ordre supérieur $k$ pour $\alpha = 1.1$ (à gauche) et $\alpha = 1.8$ (à droite). La ligne horizontale représente la vraie valeur de $\alpha$ . . . . .	109
4.6	L'estimateur de Hill de l'indice de stabilité $\alpha$ ( basé sur des échantillons de taille 1000) contre le nombre de statistique d'ordre supérieur $k$ pour $\alpha = 1.8$ avec un changement simple d'échelle. La ligne horizontale représente la vraie valeur de $\alpha$ . . . . .	111
4.7	L'estimateur de Hill de l'indice de stabilité $\alpha$ pour l'indice boursier Nazdaq après un changement d'échelle. . . . .	112

# Liste des tableaux

1.1	Moyenne et variance théorique d'une variable aléatoire alpha stable. . . . .	20
1.2	Moyenne et variance empirique calculées sur 3000 réalisations. . . . .	20
1.3	Valeurs optimales de K en fonction de n et de alpha. . . . .	32
1.4	Estimations de alpha (première valeur ) et de sigma (seconde valeur). . . . .	33
1.5	Estimations des paramètres du loi alpha stable via l'approch de régression. . . . .	34
1.6	Estimation des paramètres du loi alpha-stable via l'approche de McCulloch pour 5000 réalisations. . . . .	36
1.7	Estimations des paramètres du loi alpha stable via l'approch des moments pour 5000 réalisations. . . . .	37
1.8	Statistiques des rendements de l'indice boursier Nazdaq, de la période allant du 05/02/1971 au 23/01/2013. . . . .	42
1.9	Paramètres estimés du modèle stable pour les rendements de l'indice boursier Nazdaq, de la période allant du 11/10/1984 au 08/07/2005. . . . .	45
2.1	Domaines d'attraction. . . . .	55
2.2	Exemples de distributions Heavy-Tailed.. . . . .	60
2.3	Intervalle de confiance de probabilité 0.90 et 0.95 pour la moyenne de la distriburion alpha stable symétrique avec alpha=1.2 et sgma=0.1, basé sur un ensemble de taille 3000. . . . .	66

3.1	Estimation theorique de la mesure de risque a deux deviation pour diffe- rentes valeurs de $r$ . . . . .	94
3.2	Estimation empirique de la mesure de risque a deux deviation pour $0.83 < r < 0.99$ , $\alpha=1.2$ et une taille d'échantion $n=100000$ . . . . .	96
3.3	Estimation empirique de la mesure de risque a deux deviation pour $0.83 < r < 0.99$ , $\alpha=1.2$ et une taille d'échantion $n=5000$ . . . . .	96
4.1	Comparison du nouvel estimateur TSD et l'estimateur de TSD de Necir et Meraghni, basé sur 200 échantillon d'une distribution de Lévy stable standard avec $\alpha = 1.7$ , $r = 0.6$ . La vraie valeur de la <i>TSD</i> est 1.659. . . . .	104
4.2	Comparison du nouvel estimateur TSD et l'estimateur de TSD de Necir et Meraghni, basé sur 200 échantillon d'une distribution de Lévy stable standard avec $\alpha = 1.5$ , $r = 0.7$ . La vraie valeur de la <i>TSD</i> est 1.508. . . . .	104
4.3	Comparaison des deux estimateurs Hill et Meerschaert de l'indice de stabi- lité pour une distribution alpha stable symétrique. . . . .	111
4.4	Estimation empirique de la mesure de risque bilatérale pour quelques indices boursiers pour différentes valeurs de $r$ . . . . .	112

# Introduction

Le point de départ de cette recherche s'articule autour des travaux de B. Mandelbrot [108], et d'autres auteurs tels que Fama et Roll [55]. Ils se sont attachés à démontrer que les queues de distribution d'une loi normale ne rendent pas compte de façon suffisamment réaliste de survenance de variations de grandes amplitudes brusques et instantanées. En particulier, les séries financières où la variance empirique se déclare très grande. Donc la question de savoir si la variance théorique est finie ou infinie, se pose.

Dans le cadre des distributions à variance infinie les lois  $\alpha$ -stables sont les bonnes candidates en modélisation des rendements des actifs financiers dont le moment d'ordre 2 est infini dès que  $\alpha$  est strictement inférieur à 2. Du fait qu'elles reflètent les propriétés statistiques communes à la plupart de ces derniers tels que les grandes fluctuations dont les accroissements ne sont pas réguliers au cours du temps ( $\alpha < 2$ ), une possibilité de dissymétrie dans la distribution, des queues épaisses, une distribution leptokurtic (kurtosis  $> 3$ ) et les moments d'ordre  $p$  ( $p < \alpha$ ) sont infinis. Ce choix est justifié par au moins deux bonnes raisons :

1. Le théorème central limite généralisé, qui dit que les lois  $\alpha$ -stables sont les seules distributions limites possibles pour des sommes, convenablement normalisées et centrées, des *v.a* (i.i.d).
2. Les distributions stables peuvent être dissymétriques et permettent des queues épaisses, de telle sorte qu'elles ajustent les distributions empiriques beaucoup mieux que ne le font les distributions Gaussiennes.

Les lois  $\alpha$ -stables (dites aussi stables, Pareto stables ou Lévy stables) ont été introduites par Paul Lévy [88] lors de ses investigations sur le comportement des sommes des variables aléatoires indépendantes. La loi de Lévy stable est une classe très riche des distributions de probabilité possédant la propriété de stabilité par addition et caractérisée par quatre paramètres ce qui pourrait, à priori, faire penser à un meilleur ajustement. Nous reviendrons ultérieurement sur leur signification. Les domaines d'utilisation de ces lois sont ceux dont les données présentent une très grande variabilité tels que la télécommunication, l'économie, la finance, etc.

Plusieurs monographies sont consacrés à ces lois : Zolotarev [159] a étudié les lois  $\alpha$ -stables dans le contexte univarié ; Samorodnitsky et Taqqu [135] ont traité d'une manière approfondie des différentes propriétés de ces lois dans le cas univarié comme dans le cas multivarié ; Nikias et Shao [119] ont appliqué ces lois dans le domaine du traitement du signal.

La nature de leptokurtic des données financières mène dans la plupart du temps à des risques plus élevés que dans le modèle normal. Dans la littérature de différentes mesures de risque appliquées en finance et en assurances comme : la moyenne, la variance, l'écart-type, la Valeur en Risque, etc (voir par exemple Rolski et al [132]).

En science actuarielle et financière, une mesure de risque importante a été largement utilisée, en l'occurrence, la déviation standard. La déviation standard a été considérée par Markowitz [103] comme une mesure standard de déviation par rapport à la moyenne de la distribution avec une variance finie. Même si la déviation standard a été utilisée pour mesurer l'écart par rapport à la moyenne d'une distribution générale, ce n'est pas une bonne mesure de risque pour les événements de grandes pertes avec des distributions asymétriques, comme rapporté par de nombreux auteurs.

Une mesure plus répandue dans la pratique est la Valeur en Risque (VaR) définie comme la somme d'argent que l'on peut perdre sur une période du temps à un niveau de confiance donné. C'est une évaluation de la probabilité des pertes qui peuvent être subies à la suite

d'un mouvement défavorable de marché. En terme statistique, elle correspond à la notion de quantile. Néanmoins, la VaR étant qu'un outil de mesure du risque présente quelques insuffisances. En effet si elle permet de déterminer le seuil de perte à  $P\%$  elle ne donne aucune indication quand aux pertes supérieures à ce seuil, de plus elle n'est pas une mesure cohérente. Pour avoir la cohérence, toute mesure du risque devrait satisfaire les quatre axiomes d'Artzner [3].

Les mesures du risques, les plus populaires, qui quantifient les données financières sont les mesures de distorsion introduites par Wang [150]. Ces dernières, comme la prime d'assurance distorsée, la mesure de la déviation à queue droite (RSD) et la mesure de risque à deux déviations (TSD), s'écrivent comme des L-fonctionnelles (combinaisons linéaires de statistiques d'ordres) avec des fonctions de poids spécifiques. Les versions empiriques de ces mesures de risques, connues par les L-statistiques, sont largement étudiées par plusieurs auteurs. Jones et Zitikis [79] ont proposé l'estimation empirique des mesures de risque et les quantités relatives, Kaiser et Brazauskas [15] ont proposé l'estimation par intervalle de confiance de diverses mesures du risque dans le cas où la variance est finie comme : la Transformée Proportionnelle Hasard (PHT), la Transformée de Wang (WT), la Valeur en Risque (VaR) et l'Espérance Conditionnelle de la Queue (CTE).

L'estimation du prix d'un risque d'assurance est un problème actuarielle très important. Ce prix doit refléter la propriété de la distribution de la variable aléatoire décrivant la perte correspondante. Si la variable de perte a une distribution à queue lourde ( i.e. une distribution avec une variance infinie), alors la mesure du risque devrait être plus élevé. Pour fournir des mesures du risque pour des distributions heavy tailed, les procédures standard de la statistique classique (la méthode de vraisemblance, moment, les moindres carré, ... où la variance est finie) ne peuvent pas être appliquées. Comme une solution à ce problème via la théorie des valeurs extrêmes, Necir et Meraghni [116] ont proposé une estimation de la prime proportionnelle hasards pour les revendications à queue lourde, Necir et al (2010) ont proposé un estimateur de la CTE pour les grandes pertes et Monchaya

Chiangpradit et al [107] ont proposé une estimation par intervalle de confiance de la RTD pour les grandes pertes.

Wang [151] a proposé la queue à deux déviation qui semble être une mesure appropriée lorsqu'il s'agit des données financières (telles que les rendements logarithmiques), avec une variance finie, dénoté par  $\Delta_r$  pour ( $0 < r < 1$ ) et définie comme la moyenne de la queue à déviation à droite et la queue à déviation à gauche. Par conséquent, il est intéressant de construire un nouvel estimateur d'une mesure de risque par la queue à deux déviation de Wang pour les distributions à queue lourde sous le modèle  $\alpha$ -stable.

Dans cette thèse nous proposons des bornes de confiance pour les mesures de risque de distorsion lorsque les rendements d'actifs suivent des lois  $\alpha$ -stables. Notre considération est basée sur le récent travail de Necir et Meraghni [117] concernant les théorèmes asymptotiques correspondants aux estimateurs obtenus de cette classe des mesures de risque. Les résultats sont validés par des simulations et justifiés par des données réelles.

Un nouvel estimateur de la mesure de déviation bilatérale TSD avec biais réduit est proposé en utilisant les résultats de Peng et Qi [122] et Li et al [92]. Une étude de comparaison est effectuée en termes de biais et de l'erreur quadratique moyenne entre le nouvel estimateur et celui introduit récemment par Necir et Meraghni [117]. Alors, cette thèse est organisée comme suivant :

Le premier chapitre est consacré à l'étude des lois stables qui sont introduites par Paul Lévy [88]. Nous donnons dans un premier temps les définitions et les propriétés de ces lois. Nous introduisons ensuite un algorithme pour générer des variables aléatoires stables, ainsi nous nous proposons de faire un relevé des diverses méthodes d'estimation considérées dans ce domaine et nous en présentons les principales propriétés. Nous appliquons ces méthodes à des données financières qui présentent de l'asymétrie et des queues lourdes. Nous étudions, pour finir ce chapitre, empiriquement les données financières (les rendements logarithmiques des actifs). Premièrement, nous déterminons la variable qui décrit le mieux les variations des actifs financiers. Puis nous exposons les propriétés statistiques

communes à la plupart de ces derniers, en particulier l'indice boursier du Nasdaq de la période allant du 05/02/1971 au 23/01/2013. Ensuite, faire rendre compte ces faits stylisés par un modèle justifier par des causes plausibles en utilisant des tests graphiques tels que : les histogrammes, qui permettent de visualiser la distribution empirique, et les graphiques quantile-quantile.

Dans un deuxième chapitre nous nous intéressons, non pas au comportement en moyenne de données, mais à celui d'événements à valeurs beaucoup moins fréquentes que celles observées autour de la moyenne (appelées valeurs extrêmes). En effet, un rappel des théorèmes probabilistes essentiels à la compréhension de la TVE : les théorèmes de Fisher-Tippet et de Balkema-de Haan-Pickands. Ainsi des méthodes statistiques associées : la méthode Block Maxima qui repose sur les  $k$  plus grandes observations d'un échantillon et détermine les trois lois possibles des extrema et une deuxième utilise les observations au delà d'un seuil déterministe, nous parlons alors de méthode "Pics au delà d'un seuil" (POT). Ces méthodes permettent de prévoir des sinistres graves pour une probabilité d'occurrence donnée (très faible) et un intervalle de confiance fixé. Finalement, une application de cette approche dans l'estimation des paramètres des lois stables.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude des mesures de risque en finance. Dans une première partie, nous définissons premièrement quelques mesures de risques traditionnelles telles que, la moyenne, la déviation standard, la variance et la valeur en risque. Puis, nous exposons les définitions, les propriétés et les paramètres des mesures de risque de distorsion. Ensuite, nous introduisons la propriété de cohérence qui a été introduit par Artzner sous forme de quatre axiomes qu'une mesure de risque doit satisfaire pour qu'elle soit cohérente où la VaR est sous additive seulement si la distribution de la variable financière est normale, ce qui n'est pas souvent le cas. Finalement, nous donnons quelques mesures de risque de distorsion tels que, la CVaR, l'ES, WT, PHT et TSD. La deuxième partie, nous exposons le récent travail de Necir et Meraghni [117] concernant l'estimation des L-fonctionnelles dans le cas des distributions à queue lourde via la théorie des valeurs



extrêmes et qui peuvent être appliqué pour estimer certains mesures de risque de distorsion financières. En premier, une brève introduction sur les L-fonctionnelles, leurs définitions et propriétés. Ensuite, nous étudions leurs estimateurs empiriques dans le cas restrictif pour les distributions à variance finie et leurs estimateurs empiriques semi paramétriques dans le cas des distributions à queue lourde. Puis nous proposons des bornes de confiance pour les mesures de risque de distorsion pour des distributions appartenant au domaine d'attraction de Lévy stables. Finalement, les résultats sont validés par des simulations et justifiés par des données réelles.

Le quatrième chapitre est consacré à la construction d'un nouvel estimateur de la mesure TSD précédente à biais réduit en appliquant les résultats de Peng et Qi [122] et Li et al [92], qui ont présenté respectivement des estimateurs basés sur la méthode du maximum de vraisemblance censuré (CML) pour des paramètres de distributions à variation régulière et des quantiles extrêmes. Dans un premier temps, nous décrivons les méthodes de réduction du biais de Peng et Qi [122] et Li et al [92], avant la construction de notre nouvel estimateur pour la mesure TSD. Puis, nous appliquons l'algorithme de Reiss et Thomas [131] pour sélectionner les valeurs optimales des statistiques d'ordre extrêmes utilisées dans le calcul de l'estimateur TSD. En suite, nous effectuons une étude de simulation par échantillonnage à partir des distributions de Lévy stables, pour comparer l'estimateur récemment proposé à celui précédemment introduit par Necir et Meraghni [117]. Puis, une classification des marchés financiers, via cette nouvelle mesure, a été réalisée pour quelques indices boursiers d'où les investisseurs peuvent prendre une décision à l'investissement. Finalement, quelques remarques et conclusions sont signalées.

# Chapitre 1

## Présentation de la loi stable univariée et applications

Dans les années 60, Mandelbrot étudie les fluctuations boursières, pour lesquelles il était tout-à-fait clair que le modèle gaussien ne convenait pas. Il s'appuie alors sur les lois de Pareto pour mettre en évidence un nouveau modèle de variation des prix, appelé "lois  $\alpha$ -stables". Le paramètre  $\alpha$ , compris entre 0 et 2, représente l'exposant caractéristique des lois stables et lorsque celui-ci est strictement inférieur à 2, la variance de la loi stable est infinie. Mandelbrot [108] confirme que son modèle décrit de façon réaliste la variation des prix pratiqués sur certaines bourses des valeurs. D'une part elles peuvent rendre compte des queues lourdes et du comportement asymétrique, d'autre part, dépendant de quatre paramètres, les lois stables sont plus flexibles que les lois normales pour ajuster des données empiriques dans les processus d'estimation et de test de modèle. Une autre bonne propriété est que ces lois ont un domaine d'attraction, c'est-à-dire qu'elles sont des limites de sommes de variables aléatoires. Les lois stables ont été généralisées aussi au cas multivarié où elles peuvent être utiles pour exprimer des dépendances très complexes.

Dans les 20 années suivantes, le travail théorique a porté plus précisément sur l'estimation du paramètre  $\alpha$ . En effet, c'est le paramètre le plus important car c'est lui qui indique si la

variance est infinie ou non, i.e. nous aide à déterminer la forme ou le degré d'épaisseur de la queue de distribution. Il semble donc de pouvoir l'estimer de la manière la plus correcte qui soit. En 1971, Fama et Roll [55] ont utilisé les propriétés relatives aux quantiles. De nouvelles méthodes d'estimation utilisant la forme de la fonction caractéristique vont apparaître dans les années 80 ; comme celle de Koutrouvelis [85] qui semble être la meilleure méthode selon plusieurs études faites par autres auteurs.

Dans une première partie, le cas univarié est traité. Les lois sont définies et diverses propriétés sont présentées. Puis, sont abordés le problème du test d'une variance finie ou infinie ainsi que l'estimation des paramètres caractérisant une loi alpha stable via les approches de queue, quantiles, moments, maximum de vraisemblance et de fonction caractéristique.

Dans une seconde partie, on discute l'implémentation numérique de ces méthodes et les résultats obtenus sur des échantillons simulés et sur des données financières réelles, telle le rendement journalier de l'indice boursier Nazdaq de la période allant du 05/02/1971 au 23/01/2013.

## 1.1 Définitions et caractéristiques de bases

### 1.1.1 Cas général

Il existe plusieurs façons de caractériser une loi  $\alpha$ -stable :

**Définition 1.1** (*Variable aléatoire stable*) : Une v.a.r.  $X$  a une distribution stable si et seulement si pour tout  $k$  et toute famille  $X_1, \dots, X_k$  i.i.d. de même loi que  $X$ , il existe  $a_k > 0$  et  $b_k$ , deux réels, tels que :

$$X_1 + \dots + X_k \stackrel{d}{=} a_k X + b_k.$$

Lorsque  $b_k = 0$ , on parle de distribution strictement stable.

**Remarque 1.1** *Il est montré dans (Feller [56], p (170-171)) qu'il existe une constante réelle  $\alpha$ ,  $0 < \alpha \leq 2$ , telle que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_k = k^{\frac{1}{\alpha}}$ .*

**Theorem 1.1** *Une v.a.r.  $X$  est la limite en distribution des v.a.r.*

$$\frac{X_1 + \dots + X_n - b_n}{a_n}, \quad a_n > 0,$$

*si et seulement si  $X$  est stable.*

La démonstration est détaillée dans Shirayev [142].

**Définition 1.2** *(La fonction caractéristique) : Il y a plusieurs représentations pour  $\varphi$  (correspondant aux différentes paramétrisations des lois stables) dont la plus célèbre est donnée par Samorodnitsky et Taqqu [135], Weron [155] :*

$$\varphi_X(t) = \exp \begin{cases} i\delta t - \gamma |t| [1 + i\beta \frac{2}{\pi} (\text{sign}(t)) \ln |t|], & \alpha = 1 \\ i\delta t - \gamma^\alpha |t|^\alpha [1 - i\beta (\text{sign}(t)) \tan \frac{\alpha\pi}{2}], & \alpha \neq 1 \end{cases} \quad (\varphi_1)$$

*tel que,*

$$\text{sign}(t) := \begin{cases} 1, & \text{si } t > 0, \\ 0, & \text{si } t = 0, \\ -1, & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Une autre expression de  $\varphi$  utile dans l'application a donné par Zolotarev [159] (M-parametresation de Zolotarev) :

**Définition 1.3** *(La fonction caractéristique) : on appellera  $X \sim S(\alpha, \beta, \gamma, \delta_0; 0)$  si la fonction caractéristique de  $X$  est définie par :*

$$\varphi_x(t) = \exp \begin{cases} i\delta_0 t - \gamma |t| [1 + i\beta \frac{2}{\pi} (\text{sign}(t)) (\ln |t| + \ln \gamma)], & \alpha = 1 \\ i\delta_0 t - \gamma^\alpha |t|^\alpha [1 + i\beta (\text{sign}(t)) (\tan \frac{\alpha\pi}{2}) ((\gamma |t|)^{1-\alpha} - 1)], & \alpha \neq 1 \end{cases} \quad (\varphi_2)$$

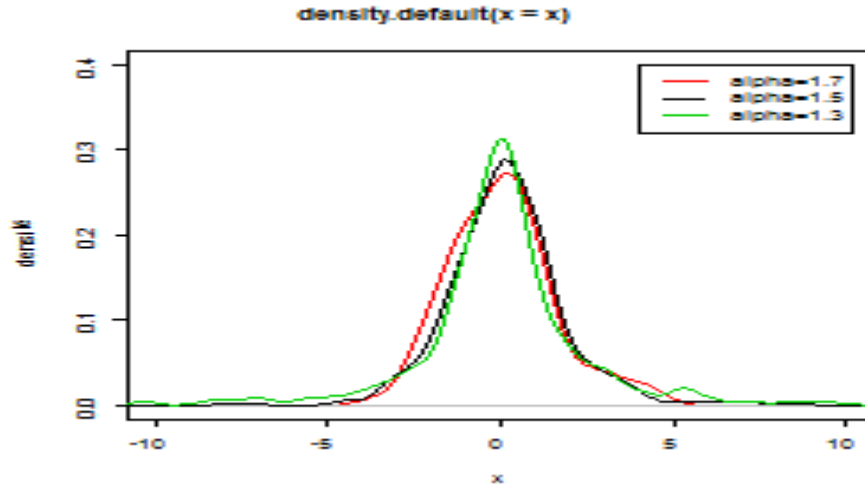


FIG. 1.1 – Courbe de la densité d’une loi alpha stable symétrique avec  $\gamma = 1$  et  $\alpha \in \{1.7, 1.5, 1.3\}$ .

Les paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$ , et  $\gamma$  sont les mêmes dans les deux paramétrisations  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ , d’où les paramètres de position sont reliés comme suivant :

$$\delta = \begin{cases} \delta_0 - \beta \left( \tan \frac{\alpha\pi}{2} \right) \gamma, & \alpha \neq 1 \\ \delta_0 - \beta \frac{2}{\pi} \gamma \ln \gamma, & \alpha = 1 \end{cases}$$

Nous verrons plus loin l’intérêt de la fonction caractéristique car le principal inconvénient de la loi stable est l’absence, de formes explicites pour la plus part de ses fonctions de densités et de fonctions de répartitions.

### 1.1.2 Signification des paramètres

- 1)  $\alpha$  : est l’exposant caractéristique ou l’indice de stabilité qui n’est rien d’autre qu’un coefficient d’aplatissement (Kurtosis), aussi bien pour le mode que pour les queues  $0 < \alpha \leq 2$ .  $\alpha = 2$  correspond a une loi stable particulière : la très célèbre loi de Gauss ou loi normale.

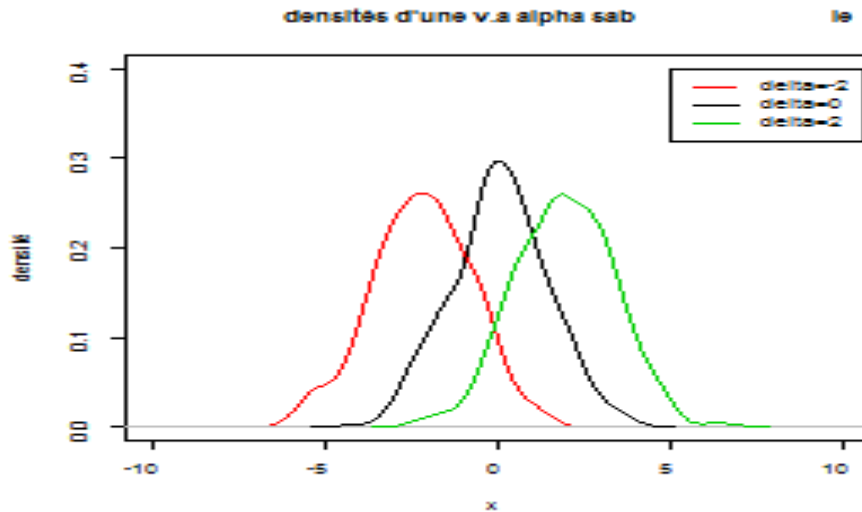


FIG. 1.2 – Courbe de la densité d’une loi alpha stable avec  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 0$ ,  $\gamma = 1$  et  $\delta \in \{-2; 0; 2\}$

Remarquant bien que, plus le paramètre  $\alpha$  est petit, plus la courbe de la densité est pointue et a des queues de distribution épaisses.

- 2)  $\delta$  : est le paramètre de localisation ou de translation, traduisant la position de la moyenne lorsque  $\alpha > 1$ ,  $\delta \in \mathbb{R}$ . Si,  $\beta = 0$  alors  $\delta$  est la médiane. Dans les autres cas le paramètre  $\delta$  ne peut pas être interprété.
- 3)  $\gamma$  : est le paramètre d’échelle auquel on fait jouer le rôle d’une mesure de dispersion quelque fois,  $\gamma \geq 0$ ,

Plus  $\gamma$  est grand, plus les données sont volatiles. Le paramètre  $\gamma$  permet de cintrer plus ou moins le corps de la distribution.

- 4)  $\beta$  : est le paramètre d’asymétrie, mesurant le degré d’asymétrie (skewness) de la distribution,  $-1 \leq \beta \leq 1$ .  $\beta = -1$ ,  $\beta = 0$  et  $\beta = 1$  expriment respectivement une distribution totalement asymétrique à gauche, symétrique et totalement asymétrique à droite.

Lorsque  $\beta$  est positif (resp. négatif), le mode est à gauche (resp. à droite) de la moyenne. Lorsque  $\beta$  est positif (resp. négatif), la queue de la distribution est plus épaisse à droite

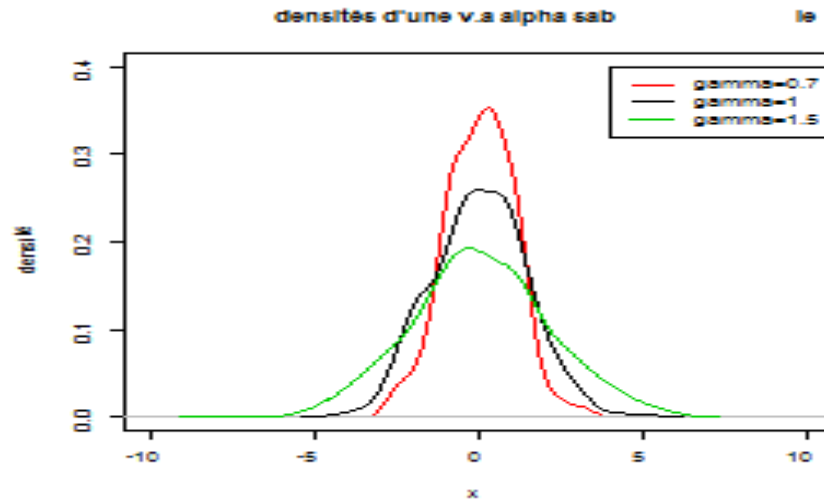


FIG. 1.3 – Courbe de la densité d’une loi alpha stable avec  $\alpha = 2, \beta = 0, \delta = 0$  et  $\gamma \in \{0.7, 1, 1.5\}$ .

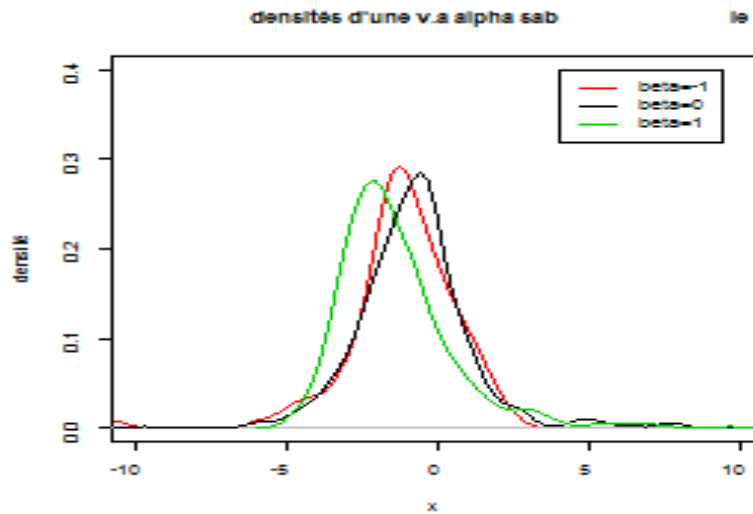


FIG. 1.4 – Courbe de la densité d’une v.a. alpha stable avec  $\alpha = 1.5, \gamma = 1, \delta = 0$  et  $\beta \in \{-1, 0, 1\}$ .

(resp. à gauche).

On notera,  $X \sim S_\alpha(\delta, \beta, \gamma)$  une variable aléatoire distribuée selon une loi stable de paramètres  $\alpha, \delta, \beta$  et  $\gamma$ .

### 1.1.3 Cas symétrique

Nous poursuivons à présent la description de la loi stable dans le cas particulier où les paramètres  $\beta$  et  $\delta$  sont nuls, on appelle alors cette loi loi symétrique par rapport à  $\beta$  et  $\delta$  et nous noterons alors  $X \sim S\alpha S$  pour indiquer que  $X$  suit une loi stable symétrique  $S_\alpha(0, 0, \gamma)$ . Nous obtenons alors une expression simple de la fonction caractéristique de paramètre  $\gamma$  d'après [135] :

$$\varphi(t) = \exp(-\gamma^\alpha |t|^\alpha), \quad t \in \mathbb{R}$$

Dans le cas où on a  $\gamma = 1$  alors la variable aléatoire est dite  $S\alpha S$  standard.

## 1.2 Propriétés de la loi stable

Lorsque  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 0$ ,  $\gamma = \sigma/\sqrt{2}$  et  $\delta = \mu$ , la loi stable n'est rien d'autre que la loi normale  $N(\mu, \sigma^2)$  avec une fonction caractéristique de la forme suivant :

$$\varphi(t) = \exp(-\gamma^2 |t|^2 + i\mu t), \quad t \in \mathbb{R}$$

**Exemple 1.1** Là aussi, certaines des lois connues appartiennent à cette classe :

- 1) La loi normale  $N(\mu, \sigma^2)$  est une loi  $S_2(\delta, \beta, 2\gamma^2)$  (et réciproquement une loi  $S_2(\delta, \beta, \gamma)$  est une loi normale  $N(\mu, \sigma/\sqrt{2})$ ).
- 2) La loi de Cauchy généralisée de densité

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sigma}{\sigma^2 + (x - \mu)^2}$$



est une loi  $S_1(\delta, 0, \gamma)$

3) La loi de Poisson  $P(\lambda)$  n'est pas stable.

**Proof.** En effet, soient  $X_1$  et  $X_2$  deux *v.a.r.* suivant une loi de Poisson. Supposons que  $X_1$  et  $X_2$  sont stables, alors il existe  $a > 0$  et  $b$  tels que :

$$X_1 + X_2 \stackrel{d}{=} aX + b.$$

Par égalité des moyennes et des variances, nous trouvons :

$$\begin{cases} 2\lambda = a\lambda + b \\ 2\lambda = a^2\lambda \end{cases} \implies \begin{cases} b = (2 - \sqrt{2})\lambda \\ a = \sqrt{2} \end{cases}$$

Ce qui entraîne une contradiction car  $(x_1 + x_2)$  a ses valeurs uniquement dans  $IN$  alors

que  $\sqrt{2}x_1 + (2 - \sqrt{2})\lambda$  n'est pas une valeur dans  $IN$ . ■

**Proposition 1.1** (*Propriétés arithmétiques*) : Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux variables aléatoires indépendantes de loi stable  $S_\alpha(\beta_1, \gamma_1, \delta_1)$  et  $S_\alpha(\beta_2, \gamma_2, \delta_2)$  respectivement alors  $(X_1 + X_2)$  suit une loi stable  $S_\alpha(\gamma, \beta, \delta)$  telle que

$$\gamma = (\gamma_1^\alpha + \gamma_2^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}, \beta = \frac{\beta_1^\alpha \gamma_1 + \beta_2^\alpha \gamma_2}{\gamma_1^\alpha + \gamma_2^\alpha} \text{ et } \delta = \delta_1 + \delta_2.$$

Notons que si :

$$\beta_1 = \beta_2 \implies \beta = \beta_1 = \beta_2.$$

Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux variables aléatoires qui suivent une loi  $S_\alpha(\beta, \gamma, \delta)$ ,  $a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R}^+$

et  $c \in \mathbb{R}$  alors :

$$ax_1 + bx_2 + c \stackrel{d}{=} S_\alpha\left(\beta, \gamma(a^\alpha + b^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}, \delta(a^\alpha + b^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} + c\right).$$

### 1.2.1 La fonction de densité et la fonction de distribution

Pour la plupart des lois connues, nous avons une forme explicite de la densité (normale, Cauchy, gamma, ...). Pour la loi  $\alpha$ -stable, nous n'avons que la forme explicite de la fonction caractéristique. A l'aide de la transformée inverse de la fonction caractéristique, donnée par :

$$f_x(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-itx) \varphi_x(t) dt.$$

nous pouvons obtenir  $f$  d'une loi  $\alpha$ -stable symétrique sous la forme d'une intégrale comme suivant :

$$f_x(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \exp(-t^\alpha) \cos [xt + \beta t^\alpha w(t, \alpha)] dt,$$

où

$$w(t, \alpha) = \begin{cases} \tan \frac{\alpha\pi}{2}, & \alpha \neq 1, \\ -\frac{2}{\pi} \ln |t|, & \alpha = 1. \end{cases}$$

**Proposition 1.2** (*Propriété de réflexion*) : Pour toute  $\alpha$  et  $\beta$ , nous avons

$$S_\alpha(1, -\beta, 0) \stackrel{d}{=} -S_\alpha(1, \beta, 0)$$

C'est que

$$f_X(-x/\alpha, \beta) = f_X(x/\alpha, -\beta) \text{ et } F_X(-x/\alpha, \beta) = 1 - F_X(x/\alpha, -\beta)$$

où  $f_X$  et  $F_X$  sont la fonction de densité et la fonction de répartition respectivement d'une v.a  $X \sim S_\alpha(1, \beta, 0)$ .

Zolotarev [159] a démontré que  $F_X$  et  $f_X$  peuvent s'écrire respectivement pour  $\alpha \neq 1$  et  $x > 0$ , comme suivant :

$$F_X(x) := \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - \beta) + \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta \exp(-V_\alpha(x, \theta)) d\theta & \text{si } \alpha < 1, \\ 1 - \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta \frac{1 - |1 - \alpha|}{\alpha} \exp(-V_\alpha(x, \theta)) d\theta & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$$

et

$$f_X(x) := \begin{cases} \frac{\alpha}{\pi(1-\alpha)} x^{1/(1-\alpha)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a(\theta) \exp(-x^{\alpha/(1-\alpha)} a(\theta)) d\theta & \text{si } \alpha < 1, \\ -\frac{\alpha}{\pi(1-\alpha)} x^{1/(1-\alpha)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta \frac{1-|1-\alpha|}{\alpha} \exp(-x^{\alpha/(1-\alpha)} a(\theta)) d\theta & \text{si } \alpha > 1, \end{cases}$$

où

$$a(\theta) := \left( \frac{\sin(\alpha\theta + \frac{\pi}{2}\beta(1-|1-\alpha|))}{\cos\theta} \right)^{\alpha/(1-\alpha)} \frac{\cos((\alpha-1)\theta + \frac{\pi}{2}\beta(1-|1-\alpha|))}{\cos\theta},$$

et

$$V_\alpha(x, \theta) := x^{\alpha/(1-\alpha)} a(\theta).$$

qui peut s'écrire plus simplement  $\forall \alpha \neq 1$ , en rappelant que  $\omega := -\frac{\pi}{2}\beta \left( \frac{1-|1-\alpha|}{\alpha} \right)$

$$f_X(x) := \frac{\alpha}{\pi|1-\alpha|} x^{1/(1-\alpha)} \int_\omega^{\frac{\pi}{2}} a(\theta) \exp(-x^{\alpha/(1-\alpha)} a(\theta)) d\theta, \quad x > 1,$$

Les seules trois distributions stables qui ont des formes explicites de la fonction de densité sont :

1. La distribution gaussienne  $S_2(\gamma, 0, \delta)$  où

$$f(x) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}} \exp - \left( \frac{x - \mu}{2\sigma} \right)^2$$

2. La distribution de Cauchy  $S_1(\gamma, 0, \delta)$  où

$$f(x) = \frac{2\sigma}{\pi((x - \mu)^2 + 4\sigma^2)}$$

3. La distribution de Lévy  $S_{\frac{1}{2}}(\gamma, 1, \delta)$  où

$$f(x) = \left( \frac{\sigma}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} (x - \mu)^{\frac{3}{2}} \exp \left( -\frac{\sigma}{2(x - \mu)} \right) \mathbf{I}_{] \mu, \infty[}(x)$$

avec  $I$  la fonction indicatrice.

L'absence des formules de forme explicites des fonctions de densité pour la plus parts des lois  $\alpha$ -stables et les fonctions de distributions ont des conséquences négatives. Généralement, il y a deux approches à ce problème, la transformé de Fourier (fft, "fast Fourier transform") doit être appliqué à la fonction caractéristique voir, Mittnik, Doganoglu et Chenyao, [109] ou bien l'intégration directe numérique qui a été utilisé par Nolan, [111], [113].

### 1.2.2 Queues lourdes

Lorsque  $\alpha < 2$  les queues inférieures et supérieures de la fonction de distribution cumulative (cdf)  $F$  de  $X \sim S_\alpha(\gamma, \beta, \mu)$  sont asymptotiquement équivalentes à celles d'une distribution de Pareto, i.e. ils ont la forme d'une loi puissance. En effet, la propriété (1.2.15) de la page 16 dans [135], il existe deux constantes non négatives  $C_1$  et  $C_2$  telque, pour  $0 < \alpha < 2$ ,

$$F(-x) \sim C_1 x^{-\alpha} \text{ et } 1 - F(x) \sim C_2 x^{-\alpha}, \text{ quand } x \rightarrow \infty. \quad (1.1)$$

Cela signifie que les deux distributions de queues, si dessus, sont à variation régulière à l'infini avec un indice  $(-\alpha) < 0$ . En d'autre terme, nous avons comme  $\alpha \rightarrow \infty$ ,

$$F(-x) = x^{-\alpha} L_1(x) \text{ et } 1 - F(x) = x^{-\alpha} L_2(x),$$

où  $L_1$  et  $L_2$  sont des fonctions à variation lente à l'infini ( i.e.  $\lim_{t \rightarrow \infty} L_i(xt)/L_i(t) = 1$ ,  $i = 1, 2$ , pour toute  $x > 0$ ). En outre,  $L_1$  et  $L_2$  satisfaisant à la condition d'équilibre,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L_1(x)}{L_1(x) + L_2(x)} = \frac{1 + \beta}{2}.$$

Utilisant l'expansion (du second ordre) de la distribution stable de la queue droite et la relation entre les deux queues, respectivement donné dans la page 95 et la page 65 de

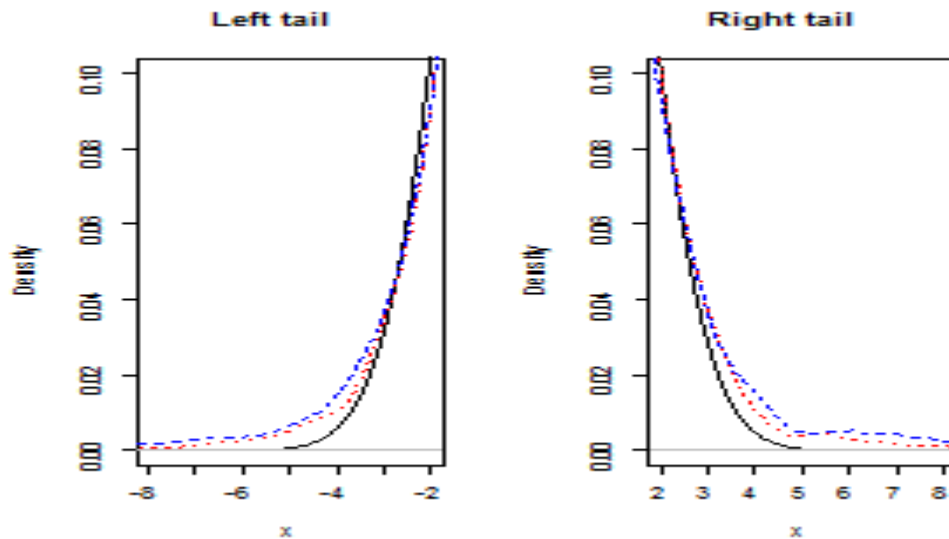


FIG. 1.5 – Queues des distributions  $\alpha$ -stable symétrique avec  $\gamma = 1$  et  $\alpha = 2$  (ligne continue), 1.7 (ligne en tirets) et 1.5 (ligne en pointillés) pour 3000 réalisations.

[159], nous pouvons écrire, pour  $1 < \alpha < 2$ , comme  $x \rightarrow \infty$

$$F(-x) = c_L x^{-\alpha} + d_L x^{-\lambda} + o(x^{-\lambda}), \quad (1.2)$$

et

$$1 - F(x) = c_R x^{-\alpha} + d_R x^{-\lambda} + o(x^{-\lambda}), \quad (1.3)$$

avec  $\lambda = 2\alpha$ , où  $c_L, c_R, d_L$  et  $d_R$  sont des constantes réelles exprimées en termes des paramètres des lois stables  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\delta$ . Cela signifie que les distributions stables appartiennent à la classe de Hall des distributions à queue lourde, voir Hall [70], Hall et Welsh [71], d'où on va définir ultérieurement par la relation (4.1) ci-dessous, qui est un cas particulier d'une condition plus générale de la variation régulière de second ordre, voir de Haan et Stadtmüller [39].

**Proposition 1.3** (*La stabilité*) : Pour  $\alpha \neq 1$ , nous avons l'équivalence suivante ;  $X$  suit une loi  $S_\alpha(\gamma, \beta, \delta) \Leftrightarrow Y = \frac{X-\delta}{\gamma^{\frac{1}{\alpha}}}$  suit une loi  $S_\alpha(1, \beta, 0)$ .

**Proof.** Tout d'abord, remarquons que :

$$\varphi_{mx+p}(t) = E [e^{it(mx+p)}] = e^{itp} \varphi_x(mt).$$

Condition nécessaire : prenons :  $m = \frac{1}{\gamma^\alpha}$  et  $p = -\frac{\delta}{\gamma^\alpha}$ , nous avons alors :

$$\varphi_y(t) = \exp\left(-\frac{i\delta t}{\gamma^\alpha}\right) \varphi_x\left(\frac{t}{\gamma^\alpha}\right)$$

$$\varphi_y(t) = \exp\left(-\frac{i\delta t}{\gamma^\alpha}\right) \exp\left\{\frac{i\delta t}{\gamma^\alpha} - \gamma \left|\frac{t}{\gamma^\alpha}\right|^\alpha \left[1 - i\beta \operatorname{sign}\left(\frac{t}{\gamma^\alpha}\right) \tan \frac{\alpha\pi}{2}\right]\right\}.$$

Or  $\operatorname{sign}\left(\frac{t}{\gamma^\alpha}\right) = \operatorname{sign}(t)$  car  $\gamma > 0$  donc :

$$\varphi_y(t) = \exp\left\{-|t|^\alpha \left[1 - i\beta \operatorname{sign}(t) \tan \frac{\alpha\pi}{2}\right]\right\},$$

qui est bien la forme de la fonction caractéristique d'une loi  $S_\alpha(1, \beta, 0)$ .

Condition suffisante : la démonstration est similaire à la condition nécessaire en prenant  $m = \gamma^\alpha$  et  $p = \delta$ . ■

**Remarque 1.2** Pour la simulation, il suffit de générer des lois  $S_\alpha(0, \beta, 1)$  et par changement de variables, nous pouvons obtenir des lois  $S_\alpha(\gamma, \beta, \delta)$ .

### 1.2.3 Moments

L'une des conséquences de la propriété de la queue lourde de la distribution  $\alpha$ -stable est que l'un de ces moments n'existe pas. En effet, le  $p^{\text{ème}}$  moment de la variable aléatoire stable est généralement infini. Pour bien préciser, nous avons les résultats suivants :

**Proposition 1.4 (Moments)** : Soit  $X$  une v.a. qui suit la loi  $S_\alpha(\delta, \beta, \gamma)$  et  $p \in \mathbb{N}^*$ , les

moments d'ordre  $p$  sont comme suivant :

$$\text{Pour } \alpha = 2, \forall p, E|X|^p < +\infty.$$

$$\text{Pour } 0 < \alpha < 2, \begin{cases} \forall 0 \leq p < \alpha, & E|X|^p < +\infty. \\ \forall p \geq \alpha, & E|X|^p = +\infty. \end{cases}$$

En particulier, pour la moyenne  $EX$  et la variance  $VarX$ , on obtient les résultats suivants :

	$0 < \alpha \leq 1$	$1 < \alpha < 2$	$\alpha = 2$
EX	$\infty$	$\mu$	$\mu$
VarX	$\infty$	$\infty$	$2\sigma^2$

TAB. 1.1 – Moyenne et variance théorique d'une variable aléatoire alpha stable.

On peut constater que, dès que  $\alpha < 2$ , la variance d'une loi  $\alpha$ -stable est infinie et dès que  $\alpha < 1$ , c'est la moyenne qui devient infinie. Lorsque  $\alpha > 1$ , la moyenne d'une loi  $\alpha$ -stable est  $\mu$ .

**Exemple 1.2** *Le tableau suivant représente la moyenne et la variance empirique des 3000 réalisations d'une v.a.  $X \sim S_\alpha(1, 0, 0)$  pour différentes valeurs de l'indice principale  $\alpha$ . Ces résultats confirment l'équation sur le calcul des moments. En effet, lorsque  $\alpha$  décroît vers 1, la variance explose, où on ne peut pas utiliser les résultats du théorème centrale limite, et lorsque  $\alpha$  devient plus petit que 1, c'est la moyenne qui commence à exploser. Comme on peut visualiser graphiquement ces résultats par des diagrammes de la moyenne et la variance (1.6), (1.7) et (1.8) pour une taille d'échantillon donné.*

$\alpha$	2	1.9	1.7	1.5	1.3	1.1	0.7
EX	-0.0049	-0.022	0.091	-0.017	-0.15	-0.32	-87.90
varX	1.93	2.65	10.36	19.09	269.54	2409.403	807950.460

TAB. 1.2 – Moyenne et variance empirique calculées sur 3000 réalisations.

**Proof.** En fait pour la première partie de la proposition, nous avons vu dans l'exemple 2 que le cas ( $\alpha = 2$ ) correspond au cas gaussien. Et nous savons que les variables aléatoires

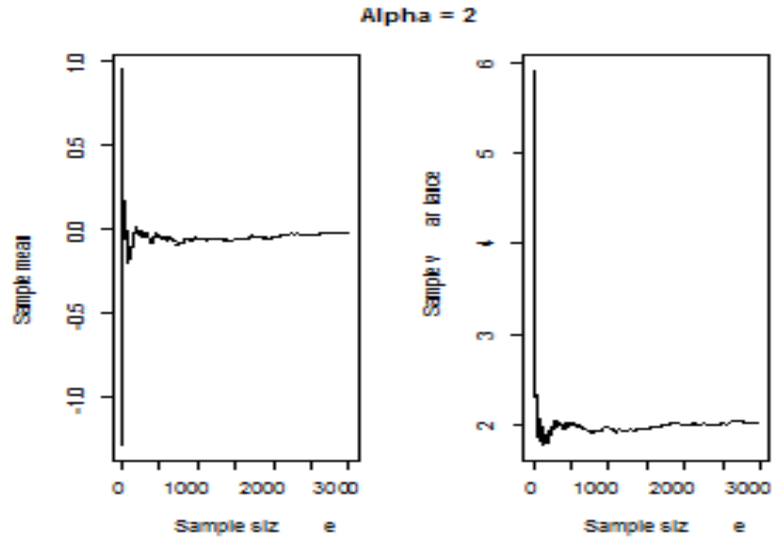


FIG. 1.6 – Graphe de la moyenne (à gauche) et la variance (à droite) de 3000 observations pour une distribution  $\alpha$ -stable symétrique avec  $\alpha = 2$  et  $\gamma = 1$ . La moyenne converge vers 0 et la variance converge vers  $1/\sqrt{2}$ .

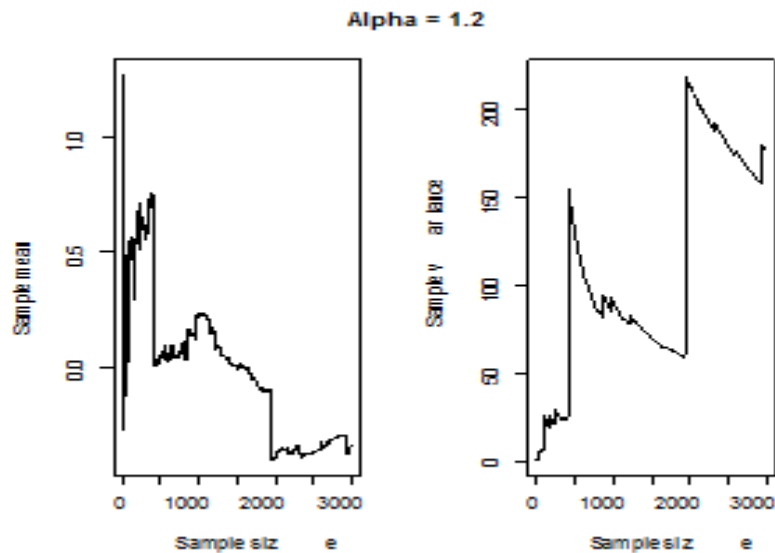


FIG. 1.7 – Graphe de la moyenne (à gauche) et la variance (à droite) de 3000 observations pour une distribution  $\alpha$ -stable symétrique avec  $\alpha = 1.2$  et  $\gamma = 1$ . La moyenne converge vers 0 et la non stationnarité de la variance.



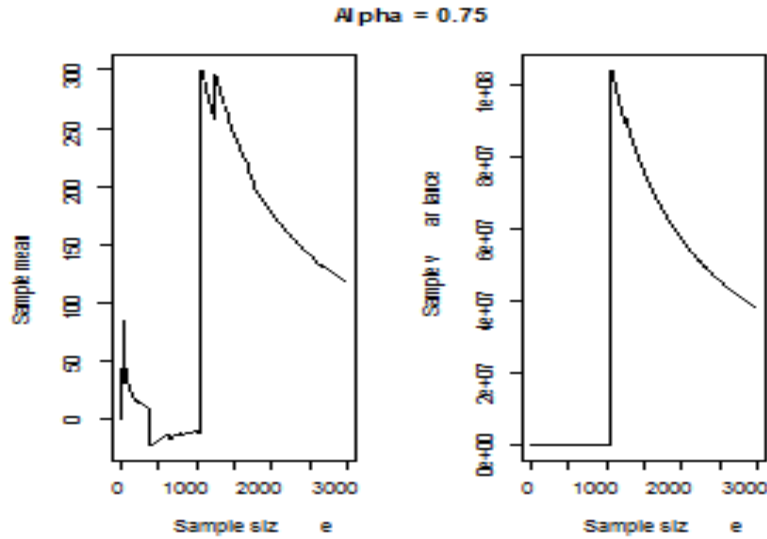


FIG. 1.8 – Graphe de la moyenne (à gauche) et la variance (à droite) de 3000 observations pour une distribution  $\alpha$ -stable symétrique avec  $\alpha = 0.75$  et  $\gamma = 1$ . La non stationnarité des deux échantillons de la moyenne et la variance.

gaussiennes ont toutes leurs moments finis. Pour la seconde partie de la proposition, remarquons tout d'abord que pour toute *v.a.r.* positive et intégrable, on a :

$$E(y) = \int_0^{+\infty} P(y > v) dv.$$

en posant  $y = |X|^p$  et  $v = u^p$ , nous avons :

$$E(|X|^p) = \int P(|X|^p > u^p) pu^{p-1} du. \quad (1.4)$$

or

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^{p-1} P(|X| > u)}{u^{p-1}} = \lim_{u \rightarrow +\infty} P(|X| > u) = 1.$$

donc

$$u^{p-1} P(|x| > u) \sim u^{p-1} \text{ au voisinage de } 0.$$

et

$$\int_0^M u^{p-1} P(|X| > u) du < +\infty \Leftrightarrow \int_0^M u^{p-1} du < +\infty \Leftrightarrow p > 0.$$

or

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^{p-1} P(|X| > u)}{u^{p-\alpha-1}} = \lim_{u \rightarrow +\infty} u^\alpha P(|X| > u) = \gamma C(\alpha).$$

donc

$$u^{p-1} P(|X| > u) \sim u^{p-\alpha-1} \text{ au voisinage de } +\infty.$$

et

$$\int_M^{+\infty} u^{p-1} P(|X| > u) du < +\infty \Leftrightarrow \int_M^{+\infty} u^{p-\alpha-1} du < +\infty \Leftrightarrow p < \alpha$$

Alors comme conclusion, d'après (1.4), il est facile de voir que :

$$E |X|^p < +\infty.$$

lorsque,

$$\begin{aligned} \int_0^M u^{p-1} P(|X| > u) du &< +\infty \\ \int_M^{+\infty} u^{p-1} P(|X| > u) du &< +\infty. \end{aligned}$$

c'est-à-dire lorsque  $0 < p < \alpha$ .

2<sup>ème</sup> partie; nous avons que  $\dot{\varphi}_x(0) = iE(X)$ , et que :

$$\varphi_x(t) = \exp \{i\mu t - \gamma |t|^\alpha g(\text{sign}(t))\}.$$

d'où,

$$g(\text{sign}(t)) = 1 - i\beta \text{sign}(t) \tan \frac{\alpha\pi}{2}.$$

alors,

$$\dot{\varphi}_x(t) = (i\mu - \gamma \operatorname{sign}(t) |t|^{\alpha-1} g(\operatorname{sign}(t))) \exp \{i\mu t - \gamma |t|^\alpha g(\operatorname{sign}(t))\}.$$

Ce qui entraîne que  $\dot{\varphi}_x(0) = i\mu$  d'où  $E(X) = \mu$ . ■

**Proposition 1.5** *Si  $X$  suit une loi  $S_\alpha(0, \beta, \gamma)$ , alors on a :*

$$\forall 0 < p < \alpha, E|X|^p = C(\alpha, \beta, p) \gamma^{\frac{p}{\alpha}},$$

D'où

$$C(\alpha, \beta, p) = \frac{2^{p-1} \Gamma\left(1 - \frac{p}{\alpha}\right)}{p \int_0^{+\infty} u^{-p-1} \sin^2 u \, du} \left(1 + \beta^2 \tan^2 \frac{\alpha\pi}{2}\right)^{\frac{p}{2\alpha}} \cos\left(\frac{p}{\alpha} \arctan\left(\beta \tan \frac{\alpha\pi}{2}\right)\right).$$

La démonstration se trouve dans l'article de Hardin, [73].

## 1.2.4 Algorithme de simulation

La complexité du problème de simulation d'une  $v.a.X \sim S_\alpha(\delta, \beta, \gamma)$  est le manque d'une expression analytique de l'inverse  $F^{-1}$  de la fonction cumulative  $F$ . Le premier pas a été fait par Kanter [83], qui a donné la méthode directe pour simuler  $S_{\alpha < 1}(1, 1, 0)$ .

L'algorithme de Chambers, Mallows et Stuck [21], qui nous a permis de générer une loi  $S_\alpha(1, \beta, 0)$ , et pour obtenir une loi  $S_\alpha(\gamma, \beta, \delta)$ , il suffit de faire un changement de variable (propriété 1).

**Première étape**

Elle consiste à générer une loi  $\Phi$  uniforme sur  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  et une loi  $W$  exponentielle de paramètre 1. Pour cela, il faut d'abord générer deux  $v.a.r.$  uniformes sur  $]0, 1[$  (notées  $U_1$  et  $U_2$ ). Puis en utilisant le changement de variables suivant :

$$\begin{aligned}\Phi &= \pi U_1 - \frac{\pi}{2} \\ W &= -\log(1 - U_2)\end{aligned}$$

### Deuxième étape

Elle consiste à calculer des différentes quantités (fonction de  $\Phi$  et de  $W$ ).

$$\begin{aligned}\varepsilon &= 1 - \alpha, \\ a &= \tan \frac{\Phi}{2}, \\ b &= \tan \frac{\varepsilon\Phi}{2}, \\ \tau &= -\varepsilon \tan(\alpha\Phi_0), \\ B &= \frac{b}{\frac{\varepsilon\Phi}{2}}, \\ d &= \frac{z^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} - 1}{\varepsilon}, \\ z &= \frac{\cos(\varepsilon\Phi) - \tan(\alpha\Phi_0) \sin(\varepsilon\Phi)}{W \cos \Phi}.\end{aligned}$$

### Troisième étape

Elle consiste à générer une loi  $Y$  stable  $S_\alpha(1, \beta, 0)$ . Pour obtenir cela, il faut utiliser la proposition suivante :

**Proposition 1.6** *Soit  $\Phi$  une loi uniforme sur  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  et  $W$  une loi exponentielle de*

paramètre 1, si nous posons :

$$\begin{aligned}
 \text{pour } \alpha &= 1, Y = \frac{2}{\pi} \left( \left( \frac{1}{2}\pi + \beta\Phi \right) \tan \Phi - \beta \log \left( \frac{\frac{1}{2}\pi W \cos \Phi}{\frac{1}{2}\pi + \beta\Phi} \right) \right), \\
 \text{pour } \alpha &\neq 1, Y = \left\{ (\cos(\alpha\Phi_0))^{\frac{1}{\alpha}} \frac{2(a-b)(1+ab) - \Phi\tau B[b(1-a^2) - 2a]}{(1-a^2)(1+b^2)} \right. \\
 &\quad \left. (1 + \varepsilon d) + \tau \left( d + \frac{1}{\varepsilon} \right) \right\}. \\
 &= \frac{\sin \alpha (\Phi - \Phi_0)}{(\cos \Phi)^{\frac{1}{\alpha}}} \left( \frac{\cos(\Phi - \alpha(\Phi - \Phi_0))}{W} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}. \\
 \text{d'où } \Phi_0 &= \frac{\pi\beta}{2} \frac{1 - |1 - \alpha|}{\alpha}.
 \end{aligned}$$

alors la v.a.r.  $Y$  suit une loi  $S_\alpha(1, \beta, 0)$ .

Cet algorithme a été légèrement modifié, voir Janicki et Weron [81], et Weron et Weron [148], qui permet de simuler des variables aléatoires  $X$  de loi stable  $S_\alpha(\beta, 1, 0)$  avec  $\alpha \in ]0, 2]$  et  $\beta \in [-1, 1]$ . Ils ont choisi cet algorithme parmi d'autres (voir aussi Samorodnitsky et Taqqu [135]) pour deux raisons :

- 1) Le temps de calcul est quasiment nul. Il faut moins d'une minute pour simuler un échantillon de taille 60000.
- 2) Les paramètres  $\alpha$  et  $\gamma$  pour ce générateur sont très bien estimés par la méthode de McCulloch. Les paramètres  $\delta$  et  $\beta$  sont correctement estimés par la méthode de McCulloch pour des petites valeurs de  $\beta$ , ce qui est souvent le cas pour des chroniques boursières.

1. Posons :

$$C = \frac{\arctan\left(\beta \tan \frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\alpha}, \text{ et } D = \left(1 + \beta^2 \tan^2 \frac{\alpha\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2\alpha}}.$$

2. Calculons :

$$Y = \begin{cases} D \frac{\sin(\alpha(V+C))}{(\cos V)^{\frac{1}{\alpha}}} \left( \frac{\cos(V-\alpha(V+C))}{W} \right)^{\frac{(1-\alpha)}{\alpha}}, & \alpha \neq 1, \\ \frac{2}{\pi} \left( \left( \frac{\pi}{2} + \beta V \right) \tan V - \beta \log \left( \frac{W \cos V}{\frac{\pi}{2} + \beta V} \right) \right), & \alpha = 1, \end{cases}$$

où,  $V$  est une v.a. uniforme sur  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  et  $W$  une v.a. exponentielle de paramètre

1. La *v.a.*  $Y$  ainsi obtenue est d'une distribution  $S_\alpha(1, \beta, 0)$ .

3. Enfin, le changement de variable,

$$X = \begin{cases} \gamma Y + \delta, & \alpha \neq 1, \\ \gamma Y + \frac{2}{\pi} \beta \gamma \log \gamma + \delta, & \alpha = 1. \end{cases}$$

nous permet d'obtenir une *v.a.*  $X \sim S_\alpha(\delta, \beta, \gamma)$ .

1. Dans le cas d'une loi  $S_\alpha S$  (c'est-à-dire  $\beta = 0$ ), nous avons :

$$Y = \frac{\sin(\alpha\Phi)}{(\cos\Phi)^{\frac{1}{\alpha}}} \left( \frac{\cos((1-\alpha)\Phi)}{W} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$$

2. Plus particulièrement, dans le cas où  $\alpha = 2$ , nous avons :

$$Y = \frac{\sin 2\Phi}{\sqrt{\cos\Phi}} \left( \frac{\cos\Phi}{W} \right)^{-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{W} \sin\Phi$$

3. Enfin, dans le cas où  $\alpha = 1$  et  $\beta = 0$ , nous avons :

$$Y = \tan\Phi.$$

Formule connue, qui permet de simuler une loi de Cauchy.

**Exemple 1.3** *Nous avons simulé 5000 réalisations de lois  $S_\alpha S$  pour différentes valeurs de  $\alpha$ . La figure (1.9) présente les histogrammes faits à partir de ces simulations. Pour le cas  $\alpha$  égal à 2, on peut reconnaître l'histogramme d'une loi normale de moyenne 0 et de variance 2.*

**Exemple 1.4** *Nous pouvons constater que le générateur des variables aléatoires stables choisi approche correctement la loi théorique. La distribution empirique a été construite à partir de  $n$  variables aléatoire simulées avec l'algorithme de Weron et Weron [148].*

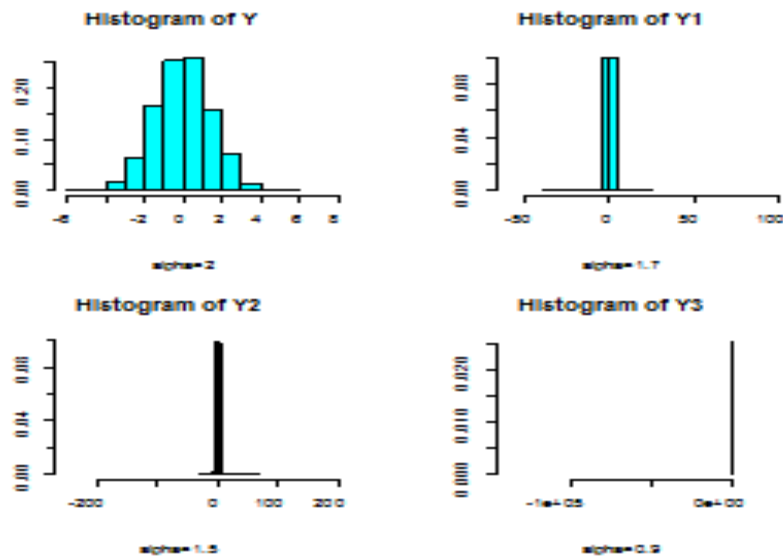


FIG. 1.9 – Histogrammes normalisés de lois  $S\alpha S$  pour différentes valeurs de  $\alpha$  calculés sur 5000 réalisations.

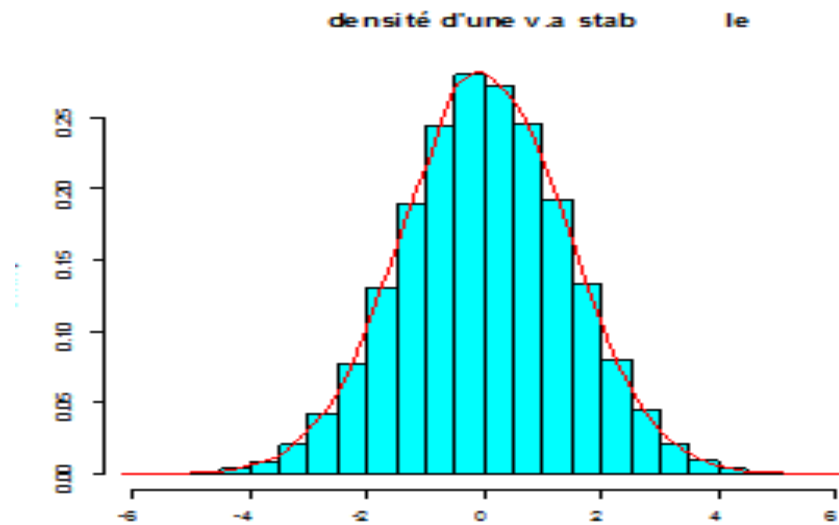


FIG. 1.10 – Distribution d'une loi stable de paramètre  $\alpha = 2$ ;  $\beta = 0$ ;  $\delta = 0$ ; et  $\gamma = 1$  pour  $n = 60000$ .

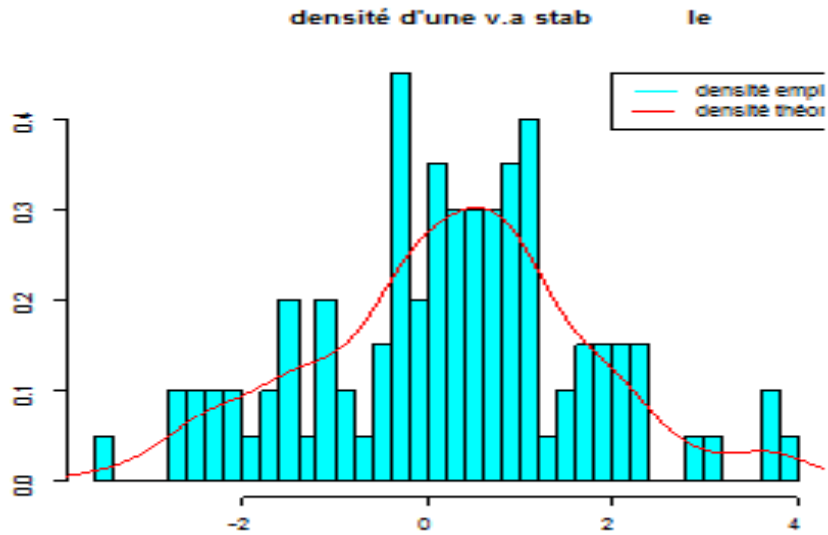


FIG. 1.11 – Distribution d'une loi stable de paramètre  $\alpha = 2$ ;  $\beta = 0$ ;  $\delta = 0$ ; et  $\gamma = 1$  pour  $n = 100$ .

**Exemple 1.5** (*Tests sur la variance*) : Un test graphique qui nous montre si on est en présence d'une loi à variance infinie ou non pour n'importe quelle loi stable, symétrique ou non. Ce test est très simple et se décompose en deux étapes : 1) calculer la variance empirique  $s_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$  (où  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ ) pour différentes valeurs de  $n$ , 2) tracer le graphique  $(n, s_n^2)$ . Intuitivement, lorsque  $n$  augmente et lorsque la variance est finie, le tracé doit converger. Au contraire, si on est en présence d'une loi à variance infinie, le tracé diverge.

### 1.3 Estimation des paramètres de la loi stable

Une loi  $\alpha$ -stable est caractérisée par quatre paramètres d'où on peut les estimer, mais le vrai inconvénient dans cette estimation est l'absence d'une forme explicite de la fonction de densité (*pdf*). Cependant, un grand nombre des procédures numériques ont été proposé par plusieurs approches (Maximum de vraisemblance, régression utilisant la fonction caractéristique, la méthode des quantiles (McCulloch) et la méthode des moments), pour



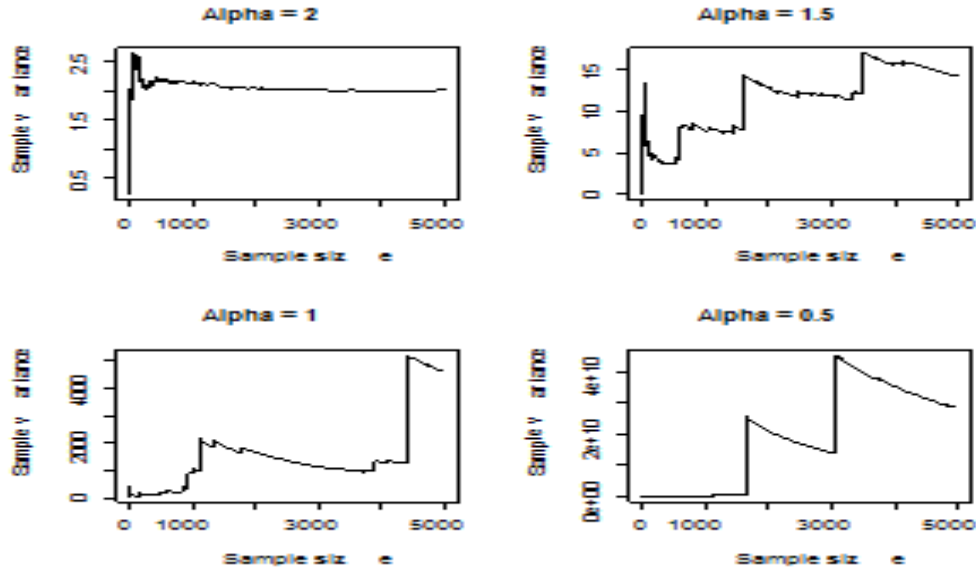


FIG. 1.12 – Test graphique; variance empirique calculée sur l'échantillon de 3000 réalisations d'une loi  $S\alpha S$  pour différentes valeurs de  $\alpha$ .

plus de détails voir [62]. D'autre part, on s'aperçoit que les lois  $\alpha$ -stables sont asymptotiquement parétiennes ce qui permet d'obtenir des estimateurs via l'approche des valeurs extrêmes voir, [74], [106] et [121].

Dans cette section, on suppose que l'on dispose d'un échantillon  $X_1, X_2, \dots, X_n$  de variables aléatoires stables, indépendantes et identiquement distribuées, avec  $X_i \sim S_\alpha(\gamma, \beta, \delta)$ .

### 1.3.1 Méthode de Régression

Rappelons que pour une *v.a.r.*  $X \sim S\alpha S$ , nous avons :

$$\varphi_x(t) = \exp(-\gamma |t|^\alpha).$$

ce qui entraîne que :

$$|\varphi_x(t)|^2 = \exp(-2\gamma |t|^\alpha).$$

$$\log[-\log |\varphi_x(t)|^2] = \log 2\gamma + \alpha \log |t|.$$

Posons pour  $k = 1, \dots, K$ ,

$$y_k = \log [-\log |\varphi_x(t_k)|^2] ;$$

$$\lambda = \log 2\gamma ;$$

$$w_k = \log |t_k| .$$

l'égalité précédente implique que

$$y_k = \lambda + \alpha w_k .$$

si on pose

$$\hat{y}_k = \log [-\log |\hat{\varphi}_x(t_k)|^2] ,$$

d'où

$$|\hat{\varphi}_x(t_k)|^2 = \frac{1}{n^2} \left\{ \left[ \sum_{i=1}^n \cos(t_k x_i) \right]^2 + \left[ \sum_{i=1}^n \sin(t_k x_i) \right]^2 \right\} ,$$

on peut alors proposer comme modèle, le modèle linéaire suivant :

$$\hat{Y} = \lambda + \alpha W + \varepsilon .$$

d'où  $\varepsilon$  est le terme d'erreur.

**Remarque 1.3** *D'après la définition, on a la partie imaginaire de la fonction caractéristique de ces lois est nulle. On peut alors estimer la fonction caractéristique sans la partie sinus. On a alors :*

$$|\hat{\varphi}_x(t_k)|^2 = \left( \frac{\sum_{i=1}^n \cos(t_k x_i)}{n} \right)^2$$

*Le choix des  $t_k$ , ainsi que le choix de  $K$  par rapport à  $n$ , se fait suivant la méthode décrite par Koutrouvelis [85],*

$$\forall k \in [1, K] ; t_k = \frac{\pi k}{25} ,$$

*et le paramètre  $K$  est choisi suivant le tableau (1.3) ci-dessous :*

$n/\alpha$	1,9	1,7	1,5	1,3	1,1	0,9	0,7	0,5	0,3
200	9	10	11	22	24	28	30	86	134
800	9	10	11	16	18	22	24	68	124
1600	10	10	11	14	15	18	20	56	118

TAB. 1.3 – Valeurs optimales de K en fonction de n et de alpha.

Estimation du paramètre  $\alpha$  et  $\gamma$  :

Par régression linéaire, on obtient :

$$\hat{\alpha} = \frac{K \sum_{k=1}^K w_k \hat{y}_k - \sum_{k=1}^K w_k \sum_{k=1}^K \hat{y}_k}{K \sum_{k=1}^K w_k^2 - \left( \sum_{k=1}^K w_k \right)^2}$$

on choisit les  $t_k$ , de telle sorte que :

$$\sum_{k=1}^K w_k = 0,$$

alors on se retrouve avec

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_{k=1}^K w_k \hat{y}_k}{\sum_{k=1}^K w_k^2}.$$

et de la même manière, on obtient :

$$\hat{\gamma} = \left( \frac{1}{2} \exp \hat{\lambda} \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

où

$$\begin{aligned} \hat{\lambda} &= \frac{\sum_{k=1}^K w_k^2 \sum_{k=1}^K \hat{y}_k - \sum_{k=1}^K w_k \sum_{k=1}^K w_k \hat{y}_k}{K \sum_{k=1}^K w_k^2 - \left( \sum_{k=1}^K w_k \right)^2}, \\ &= \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \hat{y}_k. \end{aligned}$$

**Exemple 1.6** Nous avons simulé des lois  $S\alpha S$  pour différentes valeurs de  $\alpha$  ( $\gamma$  est pris égal à 1) et calculé les estimations de ces deux paramètres.

$n/\alpha$	1.9	1.7	1.5	1.3	1.1	0.9	0.7	0.5
200	1.88/1,04	1.62/1,05	1.51/0,94	1.35/0,93	1.13/1,00	0.90/1,02	0.72/1,09	0.45/1,06
800	1.91/1,12	1.65/1,05	1.54/0,93	1.36/1,03	1.05/0,99	0.87/0,88	0.66/1,07	0.48/1,02
1600	1.92/1,00	1.67/0,93	1.47/0,95	1.34/0,99	1.12/1,06	0.89/0,96	0.72/0,98	0.50/1,02

Tab. 1.4 – Estimations de alpha (première valeur ) et de sigma (seconde valeur).

Ces résultats confirme la bonne performance de ces estimateurs, quelque soit la valeur de  $\alpha$ . De plus, les estimations s'améliorent lorsque  $n$  croît.

Estimation du paramètre  $\beta$  et  $\delta$  :

Lorsque  $\hat{\alpha}$  et  $\hat{\gamma}$  sont obtenues et  $\alpha$  et  $\gamma$  sont fixées on ses valeurs, l'estimation de  $\beta$  et  $\delta$  peut obtenir de l'équation, avec la méthode de régression suivant les mêmes étapes précédentes,

$$\arctan \left( \frac{\Im \{\varphi_X(t)\}}{\Re \{\varphi_X(t)\}} \right) = \delta t + \beta \gamma^\alpha \tan \frac{\pi \alpha}{2} \text{sign}(t) |t|^\alpha.$$

Posons

$$\begin{aligned} y_k &= \arctan \left( \frac{\Im \{\varphi_X(t_k)\}}{\Re \{\varphi_X(t_k)\}} \right); \\ m_k &= \beta \gamma^\alpha \tan \frac{\pi \alpha}{2} |t_k|^\alpha; \\ w_k &= t_k. \end{aligned}$$

on trouve

$$\hat{\delta} = \frac{\sum_{k=1}^K w_k \hat{y}_k}{\sum_{k=1}^K w_k^2}.$$

et

$$\hat{\beta} = \hat{L} / \hat{\gamma}^{\hat{\alpha}} \tan \frac{\hat{\alpha} \pi}{2}.$$

où

$$\hat{L} = \frac{K \sum_{k=1}^K w_k \hat{m}_k - \sum_{k=1}^K w_k \sum_{k=1}^K \hat{m}_k}{K \sum_{k=1}^K w_k^2 - \left( \sum_{k=1}^K w_k \right)^2}.$$

et  $w_k = |t_k|^\alpha$ .

**Exemple 1.7** *On a simulé 5000 réalisations des v.a. qui suivent une loi  $S_{1.75}(0.5, 0.5, 1)$  le résultat des paramètres estimés avec la méthode est suivant le tableau (1.5)*

Paramètres	$\alpha = 1.75$	$\beta = 0.5$	$\delta = 0.5$	$\sigma = 1$
Estimateurs	1.736	0.59	0.026	1.004

TAB. 1.5 – Estimations des paramètres du loi alpha stable via l’approche de régression.

Cette méthode est très facile à implémenter et elle est très efficace en temps de calcul. Les propriétés des estimateurs de carré minimum dans une régression linéaire sont bien connues, telles la consistance et la normalité asymptotique. Le principal inconvénient de cette méthode est que les résultats sont insatisfaisants quand l’échantillon n’est pas normalisé.

### 1.3.2 L’approche de McCulloch

En 1986, McCulloch [100] a étendu la méthode de Fama et Roll [55] aux cas  $\beta \in [-1; 1]$  et  $\alpha \geq 0.6$ . Cette méthode est efficace en ce qui concerne la précision des estimateurs par rapport au temps de calcul nécessaire à l’estimation. Elle est normalement utilisée pour fournir des valeurs initiales des paramètres pour démarrer des méthodes plus efficaces mais plus lourdes et plus longues.

Estimation du paramètre  $\alpha$  et  $\beta$  :

Cette méthode est basée sur l’utilisation des quantiles d’un échantillon de variables aléatoires stables. Soit  $F$  la fonction de répartition d’une variable aléatoire stable  $X \sim S_\alpha(\gamma, \beta, \delta)$ , et soit  $x_p$  le quantile d’ordre  $p$ , c’est-à-dire,  $F(x_p) = p$ . McCulloch a défini

$$\begin{aligned} \nu_\alpha &= \phi_1(\alpha, \beta) := \frac{\hat{x}_{0.95} - \hat{x}_{0.05}}{\hat{x}_{0.75} - \hat{x}_{0.25}}, \\ \nu_\beta &= \phi_2(\alpha, \beta) := \frac{\hat{x}_{0.95} + \hat{x}_{0.05} - 2\hat{x}_{0.50}}{\hat{x}_{0.95} - \hat{x}_{0.05}}. \end{aligned}$$

Les statistiques  $\nu_\alpha$  et  $\nu_\beta$  sont des fonctions de  $\alpha$  et de  $\beta$ , et elles ne dépendent pas de  $\gamma$

et de  $\delta$ . Une interpolation linéaire de ces valeurs sur les tableaux des figures (23) et (24) respectivement dans [1] donne les estimateurs  $\hat{\alpha}$  et  $\hat{\beta}$  pour les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ .

Estimation du paramètre  $\gamma$  et  $\delta$  :

Une fois calculé  $\hat{\alpha}$  et  $\hat{\beta}$ , la même procédure donne les valeurs estimées  $\hat{\gamma}$  du paramètre d'échelle  $\gamma$  ainsi  $\hat{\delta}$  du paramètre de localisation  $\delta$ . Posons

$$\nu_\gamma = \phi_3(\alpha, \beta) := \frac{\hat{x}_{0.75} - \hat{x}_{0.25}}{\gamma}$$

alors

$$\hat{\gamma} = \frac{\hat{x}_{0.75} - \hat{x}_{0.25}}{\phi_3(\hat{\alpha}, \hat{\beta})}$$

où  $\hat{x}_p$  est le  $p^{\text{ème}}$  quantile de l'échantillon et le dénominateur est obtenu d'après le tableau de la figure (25) dans [1], et  $\alpha$  et  $\beta$  sont remplacés respectivement par  $\hat{\alpha}$  et  $\hat{\beta}$ .

Pour estimer  $\delta$ , posons

$$\nu_\eta = \phi_4(\alpha, \beta) := \frac{\eta - \hat{x}_{0.50}}{\gamma}$$

où

$$\eta = \begin{cases} \delta + \beta\gamma \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right), & \alpha \neq 1, \\ \delta, & \alpha = 1. \end{cases}$$

un estimateur  $\hat{\eta}$  de  $\eta$  est donné par

$$\hat{\eta} = \hat{x}_{0.50} + \hat{\gamma}\phi_4(\hat{\alpha}, \hat{\beta}),$$

où  $\phi_4(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$  est obtenu d'après le tableau de la figure (26) dans [1], et  $\alpha$  et  $\beta$  sont remplacés respectivement par  $\hat{\alpha}$  et  $\hat{\beta}$ . Finalement l'estimateur du paramètre de localisation  $\hat{\delta}$  est donné par

$$\hat{\delta} = \begin{cases} \hat{\eta} - \hat{\beta}\hat{\gamma} \tan\left(\frac{\pi\hat{\alpha}}{2}\right), & \hat{\alpha} \neq 1, \\ \hat{\eta}, & \hat{\alpha} = 1. \end{cases}$$

**Exemple 1.8** On va simuler 5000 réalisations des v.a. qui suivent la loi alpha-stable pour

différentes valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$ . On trouve les résultats suivants :

$\alpha$	2	1.75	1.5	1.25	1
$\beta$	0	-0.5	0.5	0.8	1
$\nu_\alpha$	2.46	2.67	3.16	3.80	5
$\nu_\beta$	-0.01	-0.12	0.23	0.51	0
$\hat{\alpha}$	2	1.73	1.47	1.21	1.1
$\hat{\beta}$	0	-0.48	0.41	0.68	0.99

TAB. 1.6 – Estimation des paramètres du loi alpha-stable via l’approche de McCulloch pour 5000 réalisations.

Comme  $\hat{x}_p$  est un estimateur consistant de  $x_p$ , et que les fonctions  $\phi_i$  sont continues, alors les estimateurs des paramètres sont consistants.

### 1.3.3 Méthode des moments

Press [126] a proposé cette méthode qui basé sur la transformation de la fonction caractéristique *cf.* Plus précisément, d’après la formule  $\varphi_1$ , on trouve pour  $\alpha \neq 1$

$$-\ln |\varphi_X(t)| = \gamma^\alpha |t|^\alpha, \quad t \in \mathbb{R}$$

Choisissons deux nombres non nulle  $t_1 \neq t_2$ , on trouve :

$$-\ln |\varphi_X(t_k)| = \gamma^\alpha |t_k|^\alpha, \quad k = 1, 2.$$

Substituer  $\hat{\varphi}_X(t_k)$  ( $\hat{\varphi}_X(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \exp(itx_j)$ ) pour  $\varphi_X(t_k)$  et résoudre les deux équations correspondantes on trouve les estimateurs des paramètres  $\alpha$  et  $\gamma$  respectivement comme suivant :

$$\hat{\alpha} = \frac{\ln \frac{\ln |\hat{\varphi}_X(t_1)|}{\ln |\hat{\varphi}_X(t_2)|}}{\ln \left| \frac{t_1}{t_2} \right|}$$

et

$$\hat{\gamma} = \exp \left( \frac{\ln |t_1| (-\ln |\hat{\varphi}_X(t_2)|) - \ln |t_2| (-\ln |\hat{\varphi}_X(t_1)|)}{\ln \left| \frac{t_1}{t_2} \right|} \right)$$

Rétablir de la même manière pour  $\Im m\{\varphi_X(t_k)\}$ , avec deux autres nombre non nulle  $t_3 \neq t_4$ , obtenant les estimateurs  $\hat{\beta}$  et  $\hat{\delta}$  pour les paramètres  $\beta$  et  $\delta$  respectivement ;

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &= \frac{t_3 \arcsin\left(\frac{\Im m\{\hat{\varphi}_X(t_4)\}}{\exp(-|\sigma t_4|^\alpha)}\right) - t_4 \arcsin\left(\frac{\Im m\{\hat{\varphi}_X(t_3)\}}{\exp(-|\gamma t_3|^\alpha)}\right)}{\gamma^\alpha \tan \frac{\alpha\pi}{2} (t_3 |t_4|^\alpha - t_4 |t_3|^\alpha)} \\ &= \frac{\frac{\hat{U}(t_4)}{t_4} - \frac{\hat{U}(t_3)}{t_3}}{\left[|t_4|^{\hat{\alpha}-1} - |t_3|^{\hat{\alpha}-1}\right] \gamma^{\hat{\alpha}} \tan \frac{\hat{\alpha}\pi}{2}}.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\hat{\delta} &= \frac{|t_4|^\alpha \arcsin\left(\frac{\Im m\{\hat{\varphi}_X(t_3)\}}{\exp(-|\gamma t_3|^\alpha)}\right) - |t_3|^\alpha \arcsin\left(\frac{\Im m\{\hat{\varphi}_X(t_4)\}}{\exp(-|\gamma t_4|^\alpha)}\right)}{t_3 |t_4|^\alpha - t_4 |t_3|^\alpha} \\ &= \frac{|t_4|^{\hat{\alpha}-1} \frac{\hat{U}(t_3)}{t_3} - |t_3|^{\hat{\alpha}-1} \frac{\hat{U}(t_4)}{t_4}}{|t_4|^{\hat{\alpha}-1} - |t_3|^{\hat{\alpha}-1}}.\end{aligned}$$

où

$$\hat{U}(t_k) = \arcsin\left(\frac{\Im m\{\hat{\varphi}_X(t_k)\}}{\exp(-|\gamma t_k|^\alpha)}\right).$$

**Exemple 1.9** *On a simulé 5000 réalisations des v.a. qui suivent la loi  $S_{1.75}(0.05, 0.5, 1)$  par la méthode précitée, le résultat des paramètres estimés est suivant le tableau (1.7)*

parametres	$\alpha = 1.75$	$\beta = 0.5$	$\delta = 0.05$	$\gamma = 1$
estimateurs	1.74	0.44	0.016	0.99

TAB. 1.7 – Estimations des paramètres du loi alpha stable via l’approch des moments pour 5000 réalisations.

La méthode des moments est très rapide, mais aussi très imprécise sur une très grande région de l’espace paramétrique. Pour cette raison, son intérêt est très limité. En fait, pour les données financières analysées, le paramètre d’échelle est normalement très petit ( $\gamma < 0.01$ ) comparé avec les valeurs où cette méthode est acceptable (environ  $\gamma = 1$ ).



### 1.3.4 Méthode du Maximum de Vraisemblance

La fonction logarithmique du likelihood pour un échantillon des *v.a.* indépendantes identiquement distribuées de loi alpha-stable est donnée par :

$$l(\vec{\theta}) = \sum_{i=1}^n \log f(X_i/\vec{\theta}).$$

L'évaluation de cet fonction est difficile à cause de l'absence d'une forme explicite de la fonction de densité du loi stable. Un problème a été traité par plusieurs auteurs, biensure, d'une façon spécifique à chaqu'un tels que, Holt et Crow [75] ont fourni des tables de valeurs de la densité pour différentes valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$ ; Worsdale [158] et Panton [124] ont fourni des tables des fonctions de répartition des lois stables symétriques; Brothers, DuMouchel et Paulson [20] et Paulson et Delahanty [123] en ont donné pour les quantiles des lois stables dans le cas général; McCulloch et Panton [102] ont donné des tables des densités et des quantiles pour des lois stables totalement asymétriques. Pour les lois stables symétriques McCulloch [101] a développé des algorithmes efficaces pour approcher la densité et la fonction de répartition pour  $\alpha > 0.85$ .

Zolotarev dans [159] a obtenu des représentations intégrales pour des fonctions de densité et répartition de variables aléatoires stables, mais son implémentation n'est pas efficace à cause de problèmes numériques. Nolan [112] obtient des formules similaires pour la paramétrisation  $\varphi_2$  qui permettent de calculer de façon précise les fonctions de densité, de répartition et de quantiles dans tout l'espace paramétrique.

Cette méthode est basée sur l'approximation numérique de la fonction likelihood de Lévy-stable. Elle est développée par DuMouchel [48] et récemment optimisée par Nolan [111] et Nolan [110], avec un programme appelé "STABLE" pour calculer les déférentes densités, les fonctions de distributions et les quantiles, donc il est possible d'utiliser le modèle Lévy-stable dans une variété de problèmes pratiques. C'est la plus lente des trois méthodes mais possède des propriétés asymptotiquement normales.

Les études de simulation suggèrent que les techniques décrites la méthode de moments rapporte les évaluations les plus mauvaises, (Stoyanov et Racheva-Iotova, [146]; Weron, [155]). La méthode de McCulloch vient ensuite avec des résultats acceptables et temps d'exécution plus bas que les approches de régression. D'autre part, l'approche de Koutrouvelis rapporte de bons estimateurs avec un temps d'exécution plus rapide, mais légèrement moins précis. Finalement, les évaluations de ML sont presque toujours les plus précises, particulièrement en ce qui concerne le paramètre de skewness.

## 1.4 Exemple illustratif

En finance, certaines quantités sont nécessaires pour prévoir des phénomènes comme la détermination des profits, l'analyse des risques et l'estimation du risque d'évènement de faible probabilité (les évènements de grandes pertes). Parmi ces quantités se trouve les rendements des actifs (journaliers, hebdomadaires, mensuels, ...). Dans les années 60, les travaux de *Mandelbrot* sur les fluctuations boursières montre que le modèle gaussien ne convenait pas pour décrire les rendements d'actifs. Mandelbrot [108] puis Fama [54] proposèrent alors la distribution Lévy Stable, introduite par Paul Lévy [88], dont les propriétés sont très proches de celles des distributions empiriques à queues lourdes, comme alternative pour modéliser les séries financières. Ce choix est justifié par au moins deux bonnes raisons :

- (1) Le théorème centrale limite généralisé qui dit que les lois stables sont les seules distributions limites possibles pour des sommes, convenablement normalisées et centrées de *v.a* (i.i.d).
- (2) Les distributions stables peuvent être dissymétriques et permettent des queues épaisses de telle sorte qu'elles ajustent les distributions empiriques beaucoup mieux que ne le font les distributions Gaussiennes.

Pour plus de détails dans le contexte de la modélisation des séries financières voir, [50], [101], [127], [128] et [155].

Cette section est consacrée pour analyser les données financières, en particulier le rendement journalier de l'indice boursier Nasdaq (National Association of Securities Dealers Automated Quotations). C'est une bourse de titres américaine et qu'elle est gérée par la National Association of Securities Dealers (NASD).

### 1.4.1 Rendement D'actif

Les travaux empiriques sur la distribution des rendements financiers est généralement basés sur le logarithme du rendement, qui garantit que les prix sont toujours  $> 0$ ,  $\forall R_{t,t+\Delta t}$ , où log return  $R_{t,t+\Delta t}$  de temps  $t$  vers  $t + \Delta t$ , est définie comme suit :

$$R_{t,t+\Delta t} = \log P_{t+\Delta t} - \log P_t. \quad (1)$$

où  $P_t$  est le prix d'un actif à l'instant  $t$ , i.e, un stock, un indice de marché, ou un taux de change, et dans de nombreuses études économétriques,  $\Delta t$  est la rémunération générée par l'actif entre les dates  $t$  et  $(t + T)$  dont les rendements sont calculés, par exemple, un jour, semaine ou mois. Pour un investisseur, le rendement d'un actif est plus important que le prix lui-même car il lui donne une information directe sur les profits (ou pertes) qui peut réaliser.

L'ensemble de données est composé de 10586 observations des prix de clôture journaliers  $(P_t)_{t=0}$ , du Nasdaq entre le (05/02/1971) et (23/01/2013) prises de siteWeb "[www.finance.yahoo.com](http://www.finance.yahoo.com)", voir la figure (1.12).

Les 10585 rendements sont distribués comme la figure (1.13) montre et caractérisés dans le tableau (1.8) :

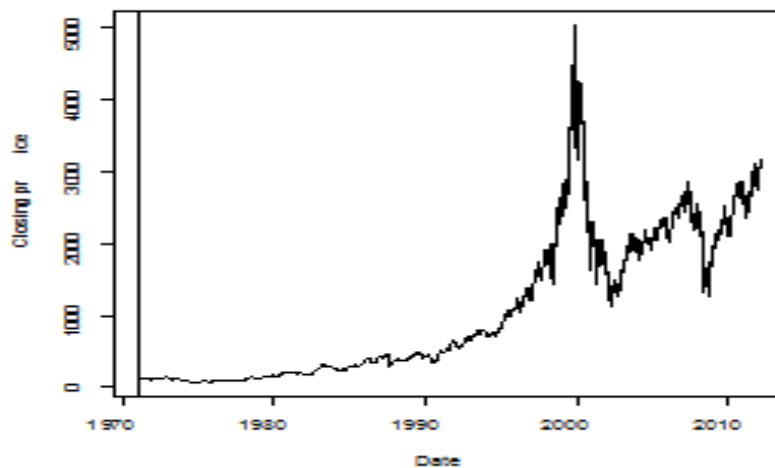


FIG. 1.13 – Les prix de fermeture quotidienne de l'indice boursier Nasdaq, de la période allant du 05/02/1971 au 23/01/2013, soit 10586 observations, du fait que les marchés boursiers sont fermés pendant les fins de la semaine (i.e. Dimanche et Lundi) et les jours fériés, les jours non ouvrables ne sont pas donc pris en compte.

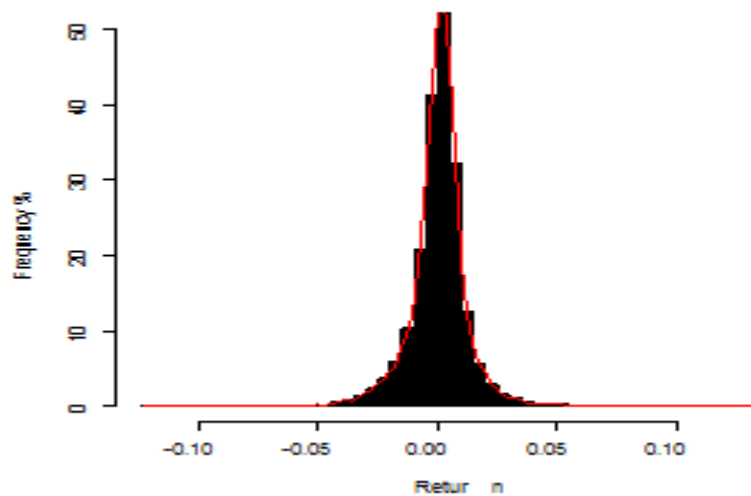


FIG. 1.14 – Distribution des rendements de l'indice boursier Nazdaq, de la période allant du 05/02/1971 au 23/01/2013 (10585 observations).

Kurtosis	12.7049
Skewness	-0.2872
Variance	0.0001
Min	-0.1204
1st quantile	-0.0045
Médiane	0.0010
Moyenne	0.0003
3rd quantile	0.0059
Max	0.1325

TAB. 1.8 – Statistiques des rendements de l'indice boursier Nazdaq, de la période allant du 05/02/1971 au 23/01/2013.

### 1.4.2 Non Normalité des rendements

Le modèle suppose que les variations des prix suivent une loi normale alors que les prix suivent une loi  $\alpha$ -stable, la distribution de Lévy est dissymétrie par rapport à la moyenne. Cette distribution en considération les événements rares. Ces événements rares sont plus fréquents que ne le support une distribution normale.

Il existe tout une batterie de tests de Non Normalité. Le premier des tests est graphique, désigne aussi par le terme "QQ-plot".

Un graphique "QQ-plot" est un outil convenable pour voir si la distribution d'une variable dans un échantillon provient d'une distribution théorique spécifique. Le "QQ-plot" est un graphique qui oppose les quantiles de la distribution empirique aux quantiles de la distribution théorique envisagée. Si l'échantillon provient bien de cette distribution théorique, alors le "QQ-plot" sera linéaire.

Dans la théorie des valeurs extrêmes, le "QQ-plot" se base sur la distribution exponentielle. Le "QQ-plot" sous l'hypothèse d'une distribution exponentielle est la représentation des quantiles de la distribution empirique sur l'axe des  $X$  contre les quantiles de la fonction de distribution exponentielle sur l'axe des  $Y$ .

Le graphique est l'ensemble des points tel que :

$$\left\{ \left( X_{k:n}, F_{0,1}^{-1} \left( \frac{n-k+1}{n+1} \right) \right), k = 1, \dots, n \right\}$$

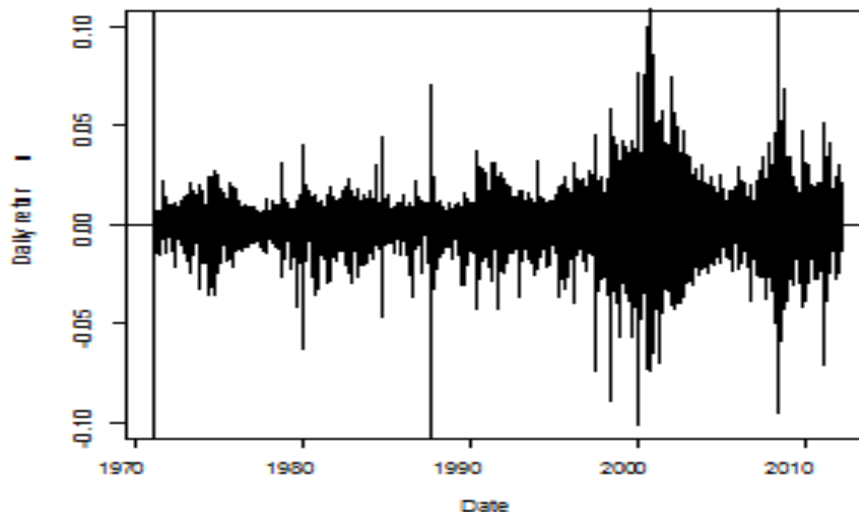


FIG. 1.15 – L'évolution de la série des rendements de l'indice boursier Nazdaq, de la période allant du 05/02/1971 au 23/01/2013. La ligne verticale représente l'année 1971. La non stationnarité de la série (des périodes de grande variations positives et négatives).

$X_{k:n}$  : Représente la  $k^{\text{ième}}$  statistique d'ordre et  $F_{0,1}^{-1}$  est la fonction inverse de la distribution exponentielle. L'intérêt de ce graphique est de nous permettre d'obtenir la forme de la queue de la distribution. Trois cas de figure sont possibles :

- 1). Les données suivent la loi exponentielle : la distribution présente une queue très légère, les points du graphique présentent une forme linéaire.
- 2). Les données suivent une distribution à queue épaisse "fat-tailed distribution" : le graphique "QQ-plot" est concave.
- 3). Les données suivent une distribution à queue légère "short-tailed distribution" : le graphique "QQ-plot" a une forme convexe.

D'après le graphe de la Figure (1.16), on remarque qu'il y a une déviation par rapport à la direction droite aux extrémités. Cela indique la non normalité de notre ensemble de donnés.

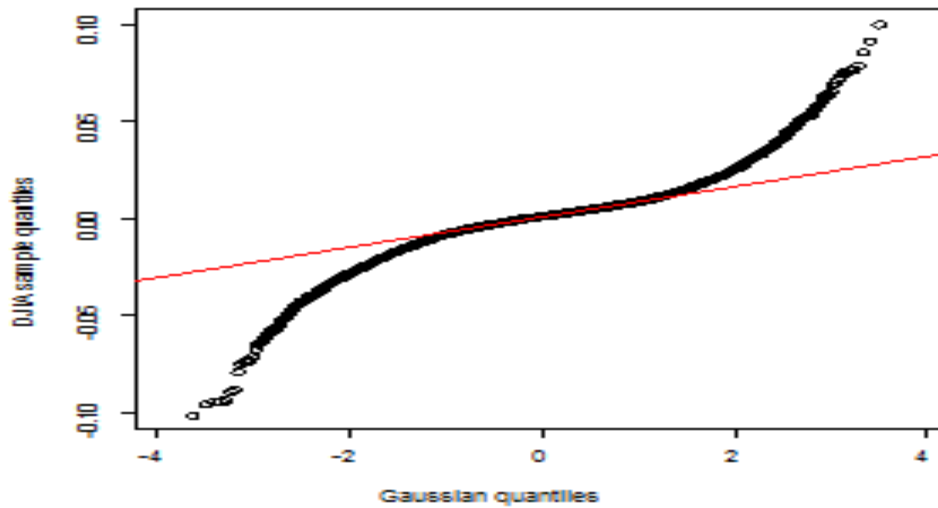


FIG. 1.16 – QQ-plot; quantiles normaux contre quantiles empiriques des rendements de l'indice boursier Nasdaq de la période allant du 05/02/1971 au 23/01/2013.

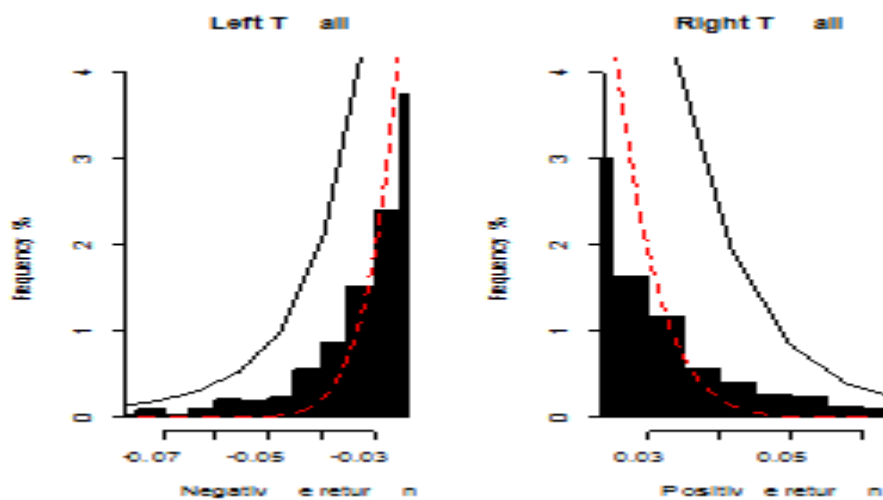


FIG. 1.17 – Modèle  $\alpha$ -stable contre modèle normale pour les queues de rendement de l'indice boursier Nasdaq du période allant 05/02/1971 au 23/01/2013.

$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\mu}$
1.386	-0.16	0.005	0.001

TAB. 1.9 – Paramètres estimés du modèle stable pour les rendements de l'indice boursier Nazdaq, de la période allant du 11/10/1984 au 08/07/2005.



# Chapitre 2

## Théorie Des Valeurs Extrêmes

L'histoire de la théorie des valeurs extrêmes est apparue entre les années 28 et 40, grace à Fréchet, Fisher et Tippett, Gumbel et Gnedenko. Lorsque l'on caractérise les domaines d'attractions de la plus grande observation. On cherche alors à décrire le comportement des valeurs extrêmes d'un échantillon. C'est-à-dire que l'on veut approcher la loi que suit le maximum ou le minimum des observations lorsque celles ci suivent une loi inconnue. Les domaines d'applications sont en effet très variés : hydrologie, météorologie, biologie, ingénierie, gestion de l'environnement, finance, assurance, sciences sociales, etc ; en effet la gestion des risques est devenue aujourd'hui fondamentale dans tous ces domaines.

Durant ces dernières années, plusieurs auteurs comme Embrechts et al. [50], Danielsson et de Vries [31], McNeil [104], Longin [89], [90], Embrechts [51] et Gençay et Selçuk [60] ont noté que la TVE est appropriée à la modélisation des observations en hautes fréquences en finance.

Deux théorèmes sont essentiels à la compréhension de la théorie des valeurs extrêmes celui de Fisher-Tippet [57] et celui de Balkema de Haan [6], Pickands [120]. En effet, deux approches sont possibles à la modélisation des événements rares la méthode block maxima (BM) qui modélise la distribution des extrêmes par la distribution (GEV) et la méthode POT (Pics au delà d'un seuil) qui modélise la distribution des excès au-dessus d'un seuil

élevé par la Distribution de Pareto Généralisée (GPD).

## 2.1 Statistique d'ordre

L'utilisation des lois des valeurs extrêmes repose sur des propriétés des statistiques d'ordre et sur des méthodes d'extrapolation. Plus précisément, elle repose sur les convergences en loi des maxima de variables aléatoires convenablement renormalisées.

**Définition 2.1** (*Statistique d'ordre*) : On appelle *statistique d'ordre*, l'application mesurable  $S$  de  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})^n$  à valeur dans  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})^n$  classant les observations de la suite  $(X_n)_n$  par ordre croissant ;

$$(X_1, X_2, \dots, X_n) \xrightarrow{S} (X_{1,n}, X_{2,n}, \dots, X_{n,n}), \text{ avec } X_{1,n} \leq X_{2,n} \leq \dots \leq X_{n,n}.$$

de sorte que :

$$M_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n) \text{ et } m_n = \min(X_1, X_2, \dots, X_n).$$

Le vecteur  $(X_{1,n}, X_{2,n}, \dots, X_{n,n})$  est appelé *l'échantillon ordonné*, et  $X_{i,n}$  étant la  $i^{\text{ième}}$  statistique d'ordre (ou *statistique d'ordre  $i$* ).

**Remarque 2.1** : Même si les variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont indépendantes, les statistiques d'ordre ne sont pas indépendantes (par définition).

### 2.1.1 Distributions des statistiques d'ordre

1). L'expression de la fonction de distribution de  $X_{i,n}$  pour  $i = 1, \dots, n$  est la suivante :

$$\begin{aligned}
 F_{i,n}(x) &= \Pr(X_{i,n} \leq x) \\
 &= \Pr(\text{au moins } i \text{ de } X_1, X_2, \dots, X_n \text{ sont inférieures à } x) \\
 &= \sum_{r=i}^n \Pr(\text{exactement } r \text{ de } X_1, X_2, \dots, X_n \text{ sont inférieures à } x) \\
 &= \sum_{r=i}^n \binom{n}{r} [F(x)]^r [1 - F(x)]^{n-r}.
 \end{aligned}$$

2). Alors, on en déduit que la fonction de densité de  $X_{i,n}$  pour  $i = 1, \dots, n$  est de la forme suivante :

$$f_{X_{i,n}}(x) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} [F(x)]^{i-1} [1 - F(x)]^{n-i} f(x).$$

3). La fonction de densité conjointe de  $X_{1,n}, X_{2,n}, \dots, X_{n,n}$  est donnée par :

$$f_{X_{1,n}, \dots, X_{n,n}}(x_1, \dots, x_n) = n! \prod_{i=1}^n f(x_i)$$

4). La fonction de densité conjointe de deux statistiques d'ordre  $X_{i,n}$  et  $X_{j,n}$  avec  $i < j$  est :

$$\begin{aligned}
 f_{X_{i,n}, X_{j,n}}(x, y) &= \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!} [F(x)]^{(i-1)} \\
 &\quad \times [F(y) - F(x)]^{(j-i-1)} [1 - F(y)]^{(n-j)} f(x)f(y).
 \end{aligned}$$

**Définition 2.2** (*L-statistique*) : Pour  $(a_1, \dots, a_n)$ , la statistique :

$$T_n = \sum_{i=1}^n a_i X_{i,n}$$

est appelé *L-statistique*. C'est une combinaison linéaire des statistiques d'ordre.

Les L-statistiques jouent un rôle important dans les statistiques non paramétriques en fournissant des estimateurs robustes pour des paramètres de localisation et d'échelle.

**Définition 2.3** (La fonction de distribution empirique) : Soit  $X_1, X_2, \dots$  une suite des v.a.r. i.i.d. de distribution  $F$  inconnue,

$$F(x) = \Pr(X_1 \leq x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pour chaque entier  $n \geq 1$ , on a  $X_{1,n} \leq X_{2,n} \leq \dots \leq X_{n,n}$  la statistique d'ordre associée à  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ . On note par

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{X_i \leq x\}}, \quad x \in \mathbb{R}. \\ &= \frac{i}{n} \text{ pour } x \in ]X_{i,n}, X_{i+1,n}]. \end{aligned}$$

où  $0 \leq i \leq n$ ,  $X_{0,n} = -\infty$ ,  $X_{n+1,n} = +\infty$ , la fonction de distribution empirique basée sur les  $n$  premiers v.a.

**Définition 2.4** (Les fonctions de quantile et de quantile de queue) : On définit la fonction des quantiles  $\mathbb{Q}$  par :

$$\mathbb{Q}(s) := F^{\leftarrow}(s) = \inf \{x \in \mathbb{R}, F(x) \geq s\}, \quad 0 < s < 1.$$

où  $F^{\leftarrow}$  est l'inverse généralisée de la fonction de distribution  $F$ . Dans la théorie des extrêmes une fonction, notée par  $U$  et (parfois) appelée la fonction quantile de queue, est utilisée assez souvent et elle est définie comme ;

$$U(t) := \mathbb{Q}(1 - 1/t) = (1/\overline{F})^{\leftarrow}(t), \quad 1 < t < \infty$$

où

$$\bar{F}(t) := 1 - F(t).$$

**Définition 2.5** (Les fonctions empiriques de quantile et de quantile de queue) : La fonction empirique de quantile  $\mathbb{Q}_n$  de l'échantillon  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  est définie par :

$$\mathbb{Q}_n(s) = \inf \{x \in \mathbb{R}, F_n(x) \geq s\} = \begin{cases} X_{0,n}, & \text{pour } x < 0, \\ X_{i,n}, & \text{pour } \frac{i-1}{n} < x \leq \frac{i}{n}, \quad 1 \leq i \leq n-1. \\ X_{n,n}, & \text{pour } x > 1. \end{cases}$$

La fonction empirique de quantile de queue correspondante est ;

$$U_n(t) := \mathbb{Q}_n(1 - 1/t), \quad 1 < t < \infty.$$

### 2.1.2 Distribution des extrema dans le cas fini

En théorie des valeurs extrêmes, le plus important est de déterminer la loi que suit le maximum ou le minimum en fonction de celle de la variable aléatoire  $X$ .

Pour ce faire, on calcule la fonction de répartition ainsi la fonction de densité :

1). La fonction de distribution de  $M_n$  :

$$\begin{aligned} F_{M_n}(x) &= \Pr(M_n \leq x) = \Pr(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x) \\ &= \Pr(\cap_{i=1}^n (X_i \leq x)) \\ &= \prod_{i=1}^n \Pr(X_i \leq x) \\ &= [F_X(x)]^n. \end{aligned}$$

2). La fonction de distribution de  $m_n$  :

$$F_{m_n}(x) = 1 - (1 - F(x))^n.$$

d'où on déduit :

3). La fonction de distribution de densité de  $m_n$  :

$$f_{X_{1,n}}(x) = n(1 - F(x))^{n-1} f(x).$$

4). La fonction de distribution de densité de  $M_n$  :

$$f_{n,n}(x) = n[F(x)]^{n-1} f(x).$$

5). La fonction de distribution de densité conjointe de  $M_n$  et  $m_n$  :

$$f_{X_{1,n}, X_{n,n}}(x, y) = n(n-1)(F(y) - F(x))^{n-2} f(x)f(y).$$

## 2.2 Distributions asymptotiques du maximum

### 2.2.1 Distribution des valeurs extrêmes généralisée

Nous savons que, pour une taille d'échantillons fixée, le maximum des observations  $M_n = \max(X_1 \dots X_n)$  va suivre  $M_n \sim F^n$ , lorsque  $X_i \sim F$ . Mais pour des échantillons devenant de plus en plus grand, ce résultat n'aura plus beaucoup de sens car la loi  $F^n$  dégénère. On veut donc chercher une loi non-dégénérée pour le maximum de l'échantillon. Cette loi limite non dégénérée est fournie par le "théorème des types de distributions extrêmes" qui donne une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une loi limite non dégénérée pour le maximum.

**Définition 2.6** (lois de même type) : On dit que deux variables aléatoires réelles  $X$  et  $Y$  sont de même type s'il existe des constantes réelles  $a > 0$  et  $b \in \mathbb{R}$  tel que  $Y \stackrel{\text{loi}}{=} aX + b$ ,

en d'autre terme si  $F$  et  $H$  sont des lois respectives des variables  $X$  et  $Y$  alors on a  $F(ax + b) = H(x)$ .

Comme dans le théorème central limite, peut-on trouver des constantes de normalisation  $(a_n)$  et  $(b_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , avec  $a_n > 0$  et  $b_n \in \mathbb{R}$ , et une loi non-dégénérée de loi  $H$  telle que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left( \frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x + b_n) = H(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

Maintenant, la question qui doit être répondue est : quelles sont les formes possibles de la fonction de distribution non-dégénérée  $H$  dans (2.1). Autrement dit, il faut caractériser les lois limites possibles des maximum pour des *v.a.* i.i.d. Ce problème des valeurs extrêmes ressemble au problème de la limite centrale où les lois stables sont les seules limites possibles pour des sommes de *v.a.* i.i.d. convenablement normalisés et centrés. Alors, le théorème essentiel à la modélisation des maxima est celui de Fisher-Tippet [57].

**Theorem 2.1** (de Fisher et Tippet) : *S'il existe deux suites de constantes de normalisation  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  et  $(b_n)_{n=1}^{\infty}$  avec  $a_n > 0$ , et  $b_n \in \mathbb{R} \forall n$ , et une loi non-dégénérée de loi  $H$  telle que,*

$$(M_n - b_n)/a_n \xrightarrow{\text{loi}} H.$$

alors  $H$  est l'une des trois lois limites :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda(x) = \exp(-\exp(-x)), \quad -\infty < x < +\infty, \\ \Phi_{\alpha}(x) = \begin{cases} \exp(-x^{-\alpha}), & x > 0, \alpha > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \\ \Psi_{\alpha}(x) = \begin{cases} \exp(-(-x)^{-\alpha}), & x < 0, \alpha < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases} \end{array} \right. \quad (2.2)$$

On appelle  $\Lambda$  loi Gumbel,  $\Phi_{\alpha}$  loi Fréchet et  $\Psi_{\alpha}$  loi Weibull.

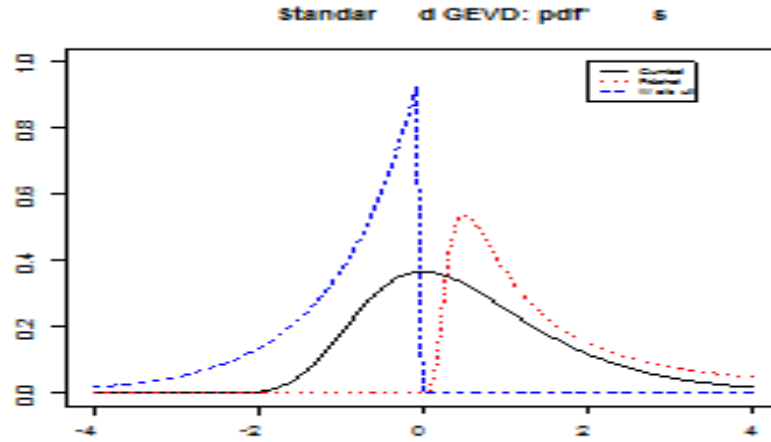


FIG. 2.1 – Les distributions des lois limites Gumbel (ligne continue), Fréchet ( $\zeta = 1$ , ligne en pointillés) et Weibull ( $\zeta = 1$ , ligne en tirets).

Un choix adéquat des suites  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  et  $(b_n)_{n=1}^{\infty}$  où les trois lois limites peuvent être combinées en une seule paramétrisation contenant un unique paramètre  $\zeta$  appelé indice des valeurs extrêmes (ou indice de queue),

$$H_{\zeta}(x) = \begin{cases} \exp\left(-\left(1 + \zeta x\right)^{-1/\zeta}\right), & \zeta \neq 0, 1 + \zeta x > 0 \\ \exp\left(-\exp(-x)\right), & \zeta = 0, -\infty \leq x \leq +\infty \end{cases}$$

En introduisant les paramètres de localisation  $\mu$  et de dispersion  $\sigma$  dans la paramétrisation des distributions extrêmes, on obtient la forme la plus générale de la distribution des valeurs extrêmes, notée *GEVD* (Generalized Extreme Value Distribution).

$$H_{\zeta, \mu, \sigma}(x) = \exp\left(-\left(1 + \zeta \frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{-1/\zeta}\right), \zeta \neq 0, 1 + \zeta \frac{x - \mu}{\sigma} > 0$$

Suivant le signe de  $\zeta$ , le comportement de  $H$  est différent, on définit trois types de lois GEV : les cas  $\zeta > 0$ ,  $\zeta < 0$ ,  $\zeta = 0$  sont respectivement appelés distributions de type Fréchet, Weibull et Gumbel. Les densités des trois types de distributions sont présentées dans la figure (2.1) :



Alors,  $F$  est dans le domaine d'attraction maximum ( $MDA$ ) de  $H$ , ce qui s'écrit  $F \in MDA(H)$ . Fisher-Tippet montre alors que  $F \in MDA(H)$  si, et seulement si,  $H$  est du type de  $H_\zeta$ . La GEV est donc la seule distribution limite non dégénérée pour un échantillon de maxima normalisés.

## 2.2.2 Domaines d'attractions

Une question intéressante est de déterminer quelles sont les lois  $F$  dont les maxima suivent asymptotiquement une loi  $H$  donnée et comment les suites  $a_n$  et  $b_n$  peuvent-elles être trouvées. Le domaine d'attraction d'une loi est une sorte de généralisation du théorème centrale limite, il est défini de la façon suivante :

**Définition 2.7** (*Domaine d'attraction*) : On appelle domaine d'attraction de  $H$  (ou domaine d'attraction maximal) l'ensemble des lois  $F$  pour lesquelles le maximum normalisé suit la loi  $H$ . L'inverse de la fonction de hasard  $h(x)$ , d'une fonction de répartition  $F$  est définie par :

$$\tilde{h}(x) = \frac{1 - F(x)}{f(x)}.$$

on peut choisir alors les constantes  $a_n$  et  $b_n$  telles que :

$$a_n = \tilde{h}(b_n), \quad b_n = F^{-1}(1 - \frac{1}{n})$$

**Définition 2.8** : Une distribution  $F$  est dite max-stable pour des suites  $(a_n)_{n=1}^\infty$ ,  $a_n > 0$  et  $(b_n)_{n=1}^\infty$ , si  $F^n(b_n + a_n x) = F(x), \forall n$ .

**Définition 2.9** : Une distribution  $F$  est du même type qu'une distribution des valeurs extrêmes donnée par (2.2), si et seulement si elle est max-stable. Pour les trois distributions des valeurs extrêmes, les suites  $(a_n)_{n=1}^\infty$  et  $(b_n)_{n=1}^\infty$  qui normalisent le maximum sont les suivantes :

Gumbel :  $a_n = 1$  ou  $a_n = \text{constante}$ ,  $b_n = \log n$ .

Weibull :  $a_n = n^{\frac{1}{\alpha}}, b_n = 0$ .

Fréchet :  $a_n = n^{\frac{1}{\alpha}}, b_n = 0$ .

Domaine d'attraction ( $H$ )	Gumbel	Fréchet	Weibull
$F$	Gaussienne Exponentielle Lognormale Gamma	Cauchy Paréto $\alpha$ -stable ( $\alpha < 2$ )	Uniforme Beta

TAB. 2.1 – Domaines d'attraction.

Nous voyons que les trois distributions de valeurs extrêmes sont très différentes en terme de max-domaine d'attraction :

1. Dans le max-domaine d'attraction de la distribution Gumbel, nous trouvons des distributions qui n'ont pas de queues épaisses (mais qui peuvent être leptokurtiques).
2. Dans le max-domaine d'attraction de la distribution Fréchet, nous trouvons des distributions qui ont des queues épaisses.
3. Dans le max-domaine d'attraction de la distribution Weibull, nous trouvons des distributions à support fini, ce qui implique que le support du maximum soit borné à droite.

Cela a des implications d'un point de vue financier, puisque la problématique va être de choisir entre les distributions  $\Lambda$  et  $\Phi_\alpha$  (et dans ce cas, quelle valeur pour  $\alpha$ ?) pour modéliser le maximum.

Sachant la distribution  $F$ , nous voudrions connaître à quel max-domaine d'attraction ( $MDA$ ) elle appartient et quelles sont les constantes de normalisation. La réponse est relativement complexe et n'est pas unique. Nous indiquons ici les critères les plus utilisés.

**Définition 2.10** (*Fonction à variation régulière*) : Une fonction  $\ell$  est dite à variation régulière d'indice  $\alpha$  et on note  $\ell \in RV_\alpha$  si pour tout  $x > 0$ , on a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ell(tx)}{\ell(t)} = x^\alpha.$$

**Définition 2.11** :  $F \in MDA(\Phi_\alpha)$  si et seulement si  $(1 - F) \in RV_\alpha$ . Dans ce cas,  $a_n = F^{-1}(1 - n^{-1})$  et  $b_n = 0$ . Ce théorème formulé par Gnedenko [64] permet de caractériser très simplement les distributions  $F \in MDA(\Phi_\alpha)$ . En effet, elles doivent vérifier :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} = x^{-\alpha}.$$

**Exemple 2.1** : Prenons par exemple le cas de la distribution Pareto,

$$F(x) = 1 - x^{-\frac{1}{\gamma}}.$$

nous en déduisons que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(tx)^{-\frac{1}{\gamma}}}{t^{-\frac{1}{\gamma}}} = x^{-\frac{1}{\gamma}}.$$

donc  $(1 - F) \in RV_{-\frac{1}{\gamma}}$  et  $F \in MDA(\Phi_{\frac{1}{\gamma}})$ . Remarquons que :

$$a_n = F^{-1}(1 - n^{-1}) = n^\gamma.$$

Nous vérifions :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} F^n(a_n x + b_n) &= \lim_{t \rightarrow \infty} F^n(n^\gamma x) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{x^{-\frac{1}{\gamma}}}{n} \right) \\ &= \exp\left(-x^{-\frac{1}{\gamma}}\right). \end{aligned}$$

### 2.2.3 Distribution de Pareto Généralisée

**Définition 2.12** (Loi conditionnelle des excès) : Soient  $X_1, \dots, X_n$  une suite de variables aléatoires de fonction de distribution inconnue  $F$  et de point terminal  $x_F$ . Nous nous intéressons alors au nombre  $N_u$  d'extrêmes (strictement positifs) qui excèdent un seuil

élevé  $u$ , et plus précisément aux excès au-dessus du seuil  $u$ ,  $X_i = X_i - u$ , qui forment l'échantillon des excès  $X_1, \dots, X_{N_u}$ . Nous définissons la fonction de distribution des excès au dessus du seuil  $u$  par

$$F_u(x) = \Pr(X - u \leq x / X > u) = \frac{F(x + u) - F(u)}{1 - F(u)}$$

pour  $0 \leq x \leq x_F - u$  avec  $x_F = \sup\{x \in \mathbb{R}, F(x) < 1\}$ .  $F_u(x)$  est donc la probabilité qu'un extrême excède le seuil  $u$  par une quantité inférieure ou égale à  $x$ , sachant que le seuil est dépassé. Alors, dans le cas des observations qui dépassent un seuil fixé, ■ la loi essentielle à la modélisation des excès est la Distribution de Pareto Généralisée (GPD) définie par la fonction de répartition suivante :

$$G_\zeta(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \zeta x)^{-1/\zeta}, & \text{si } \zeta \neq 0, \\ 1 - \exp(-x), & \text{si } \zeta = 0. \end{cases}$$

où le support est  $x \geq 0$  lorsque  $\zeta \geq 0$  et il devient  $0 \leq x \leq -1/\zeta$  lorsque  $\zeta < 0$ .

**Remarque 2.2** La GPD regroupe trois distributions selon les valeurs du paramètre de forme. Lorsque  $\zeta > 0$ , c'est la loi Pareto usuelle ;

$$G_\zeta(x) = 1 - x^{-1/\zeta}, \text{ si } x \geq 1.$$

lorsque  $\zeta < 0$ , nous avons la loi de Beta ;

$$G_\zeta(x) = 1 - (-x)^{-1/\zeta}, \text{ si } -1 \leq x \leq 0.$$

et  $\zeta = 0$  donne la loi exponentielle.

$$G_\zeta(x) = 1 - e^{-x}, \text{ si } x \geq 0.$$

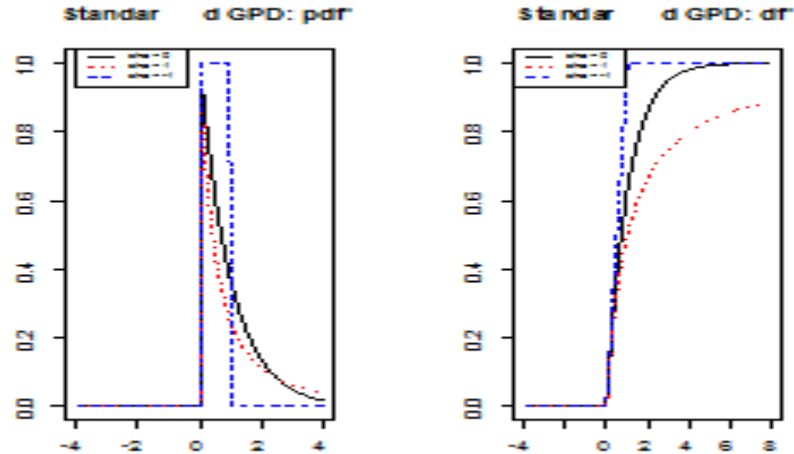


FIG. 2.2 – Allure des fonctions de densité (coté gauche) et des fonctions de distributions (coté droite) de la *GPD* standard pour différentes valeurs du paramètre de forme  $\zeta$ .

On peut étendre cette famille en ajoutant le paramètre de localisation  $\mu$  la *GPD*  $G_{\zeta, \mu, \sigma}(x)$  est en fait  $G_{\zeta}((x - \mu) / \sigma)$  où

$$G_{\zeta, \mu, \sigma}(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \zeta(\frac{x-\mu}{\sigma}))^{-1/\zeta}, & \text{si } \zeta \neq 0, \\ 1 - \exp(-\frac{x-\mu}{\sigma}), & \text{si } \zeta = 0. \end{cases}$$

Le théorème de Pickands [120] est très utile lorsqu'on travaille avec des observations qui dépassent un seuil fixé, puisque il assure que la loi des excès peut être approchée par une loi de Pareto généralisée (loi asymptotique des excès)

**Theorem 2.2** (de Pickands) : *Pour une certaine classe de distributions (elle regroupe toutes les distributions continues classiques), la GPD est la distribution limite de la distribution des excès lorsque le seuil tend vers  $x_F$ . Formellement, nous pouvons trouver une fonction positive mesurable  $\sigma(u)$  telle que*

$$\lim_{u \rightarrow x_F} \sup_{0 < x < x_F - u} |F_u(x) - G_{\zeta, \sigma(u)}(x)| = 0$$

si, et seulement si,  $F \in MDA(H_{\zeta})$ .

### 2.2.4 Choix du seuil

L'estimation de modèle pose le problème de la détermination du seuil  $u$ . Il doit être suffisamment grand pour que l'on puisse appliquer le théorème précédent, mais ne doit pas être trop grand afin d'avoir suffisamment de données pour obtenir des estimateurs de bonne qualité. Un des outils de choix du seuil est le graphe de la fonction moyenne d'excès  $e_n(u)$  (*mef*-plot).

**Définition 2.13** (*mef*-plot) : *Le graphe*

$$\{(u, e_n(u)), X_{n,n} < u < X_{1,n}\}$$

est *mef*-plot. Où  $X_{1,n}$  et  $X_{n,n}$  sont respectivement les maximum et minimum de l'échantillon. Et  $e_n(u)$  est définie par

$$e_n(u) = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - u)}{\sum_{i=1}^n 1_{\{X_i > u\}}} = \frac{1}{N_u} \sum_{i=1}^n (X_i - u)$$

c'est-à-dire la somme des excès au-dessus du seuil  $u$  divisé par le nombre  $N_u$  de données qui excèdent  $u$ . La fonction moyenne d'excès  $e_n(u)$  est l'estimateur empirique de la fonction moyenne des dépassements de  $X$  :

$$e(u) = E[X - u | X > u] = \frac{\sigma(u) + \zeta u}{1 - \zeta}, \text{ pour } \zeta \neq 0.$$

Si l'approximation GPD est valide pour un seuil  $u_0$ , alors elle est valide pour  $u > u_0$  donc, pour  $u > u_0$ , la fonction moyenne d'excès  $e(u)$  est linéaire en  $u$ . Si l'on choisit  $u = X_{n-k}$  alors  $N_u = k$  et  $\hat{e}(X_{n-k}) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (X_i - X_{n-k})$  et  $e_n(u)$  doit être linéaire pour chaque  $u > u_0$ .

**Remarque 2.3** (*distribution heavy-tailed*) : Toutes distributions de type Pareto est heavy-

*tailed.*

**Exemple 2.2** (de distributions Heavy-Tailed) : Il existe plusieurs distributions Heavy-Tailed, le tableau ci-dessous donne une liste non-exhaustive de ces distributions. Toutes ces distributions ont un support  $(0, +\infty)$  à l'exception de celui de la loggamma qui a un support  $(1, +\infty)$ .

Nom	Queue $\overline{F}$ ou densité	Paramètres
Lognormale	$f(x) = \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$
Burr	$\overline{F}(x) = \left(\frac{\beta}{\beta + x\gamma}\right)^\alpha$	$\alpha, \beta, \gamma > 0$
Weibull	$\overline{F}(x) = e^{-cx^\gamma}$	$c > 0, 0 < \gamma < 1$
Loggamma	$f(x) = \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} (\ln x)^{\beta-1} x^{-\alpha-1}$	$\alpha, \beta > 0$

TAB. 2.2 – Exemples de distributions Heavy-Tailed..

## 2.3 Les Paramères du loi stable

La propriété de queue lourde (1.1) pour les distributions stables suggère que la théorie des valeurs extrêmes joue un rôle très important dans l'estimation de ces paramètres. D'où elle a une importance particulière du fait qu'elle s'intéresse directement à la queue de la loi. En effet, seules les données extrêmes sont utilisées pour estimer les paramètres ce qui assure une meilleur estimation pour ces derniers.

Soit  $X \sim S_\alpha(\gamma, \beta, \delta)$  et  $Z = |X|$ . Désigné par  $F$  et  $G$  les  $fd$  respectives. Ensuite  $F$  et  $G$  sont reliées par

$$G(x) = F(x) - F(-x), \quad x > 0.$$

d'après (1.1) nous avons

$$1 - G(x) \sim C_\alpha \sigma^\alpha x^{-\alpha}, \quad \text{quand } x \rightarrow \infty,$$

où

$$C_\alpha = \left( \int_0^\infty x^{-\alpha} \sin x \, dx \right)^{-1} = \frac{2}{\pi} \Gamma(\alpha) \sin \frac{\pi\alpha}{2},$$

avec  $\Gamma(\alpha)$  est la fonction de gamma définie, pour  $\alpha > 0$ , par

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} \exp(-x) \, dx.$$

cela implique que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - G(tx)}{1 - G(t)} = x^{-\alpha}, \quad x > 0, \quad (2.3)$$

ce qui signifie que, en vertu de la définition (4.10),  $\overline{G}$  est à variation régulière d'indice  $(-\alpha)$ . D'où  $G \in D\left(\Phi_{\frac{1}{\gamma}}\right)$ , c-à-d  $G$  est une distribution à queue lourde avec un indice de queue  $\gamma = 1/\alpha$ . Pour extraire les propriétés de la normalité asymptotique des différents estimateurs, une condition plus stricte que (2.3) doit être imposée à  $G$ , est la condition de variation régulière de deuxième ordre.

on suppose que l'on dispose d'un échantillon  $X_1, X_2, \dots, X_n$  de variables aléatoires stables, indépendantes et identiquement distribuées, avec  $X_i \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$  et soit  $X_{1,n}, X_{2,n}, \dots, X_{n,n}$  les statistiques d'ordre correspondantes.

### 2.3.1 Estimation de l'indice de queue $\alpha$

En statistiques des extrêmes on s'intéresse souvent à l'estimation de l'indice de queue  $\alpha$ , lorsque une fonction de répartition est de la forme

$$F(x) = 1 - x^{-1/\alpha} L(x)$$

où  $L$  est une fonction à variation lente. Par la méthode de maximum de vraisemblance conditionnelle basée sur l'information donnée par la queue de la fonction cumulative de la loi empirique, Hill [74] a proposé son estimateur de l'indice de stabilité  $\hat{\alpha}_n$  par l'expression



suivante :

$$\hat{\alpha}_n = \hat{\alpha}_n(k) := \left( \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \log^+(X_{n-i+1,n}) - \log^+(X_{n-k,n}) \right)^{-1}$$

Une méthode rapide et efficace mais un des problèmes important est le choix du nombre de données à retenir pour l'estimation c'est à dire le choix du point où commence la queue (un choix judicieux). Hall [70] a noté que la valeur de  $k$  devrait être bien choisir pour équilibrer entre le biais et la précision. Une grande valeur de  $k$  donne plus de précision (i.e. variance plus faible). Différentes méthodes numériques ont été proposé pour la détermination de la valeur de  $k$ , voir par exemple, Dekkers et de Haan [36], Drees et Kaufmann (1998), Danielsson et al. [32], Cheng et Peng [29] et Neves et Fraga Alves [118].

Weron [154] a discuté la performance de cet estimateur pour un échantillon de taille finie et a noté que pour  $\alpha \leq 1.5$  l'estimation de Hill est tout à fait raisonnable, mais lorsque  $\alpha$  approche de 2, il y a une surestimation significative lorsque on considère des échantillons de taille typique. De telles valeurs de  $\alpha$ , un très grand nombre d'observations (un million ou plus) est nécessaire pour obtenir des estimations acceptables et éviter les inférences trompeuses sur l'exposant caractéristique, parce que le vrai comportement de la queue des distributions Lévy-stables n'est visible que pour des très grandes ensembles de données.

Pour une simulation de la queue droite des données stables symétrique réglé avec  $\alpha = 1.8$  l'estimateur de Hill tend vers une surestimation significative de l'indice de queue comme le montre la figure (2.3).

### 2.3.2 Estimation du paramètre de localisation $\mu$

Nous savons que pour  $1 < \alpha < 2$ , le paramètre de localisation  $\mu$  est égale à la moyenne de la distribution  $EX$ . Ce dernier pouvait être évidemment estimé par la moyenne de l'échantillon  $\bar{X} := \sum_{i=1}^n X_i$ . Mais dans ce cas, la variance de la distribution est infinie de sorte que le *Théorème Central Limite* n'est plus valide et donc la normalité asymptotique de  $\bar{X}$  n'a pas pu être établie. Pour résoudre ce problème Peng [121] a proposé un estimateur

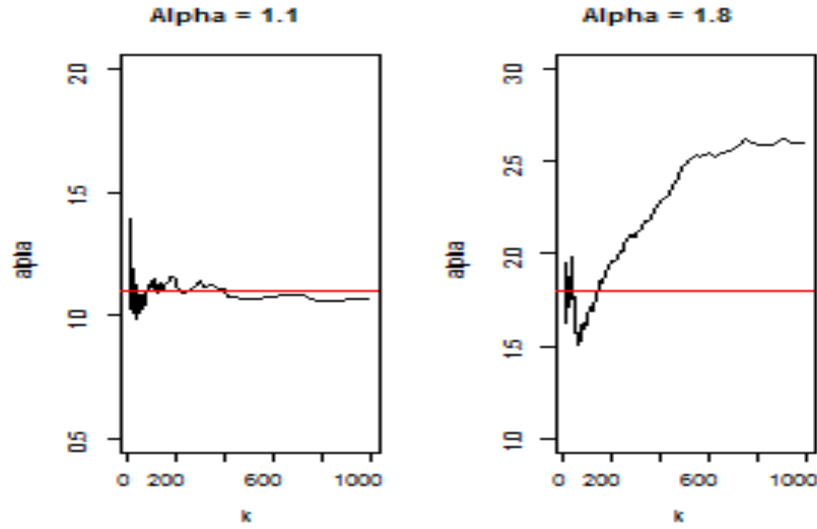


FIG. 2.3 – L'estimateur de Hill de l'indice de stabilité  $\alpha$  ( basé sur des échantillons de taille 5000) contre le nombre de statistique d'ordre supérieur  $k$  pour  $\alpha = 1.1$  (à gauche) et  $\alpha = 1.8$  (à droite). La ligne horizontale représente la vraie valeur de  $\alpha$ .

asymptotiquement normal  $\hat{\mu}_n$  basé sur les valeurs extrêmes.

$$\hat{\mu}_n = \hat{\mu}_n(k) := \hat{\mu}_n^{(1)} + \hat{\mu}_n^{(2)} + \hat{\mu}_n^{(3)},$$

d'où

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_n^{(1)} &= \hat{\mu}_n^{(1)}(k) := \frac{k}{n} X_{k,n} \frac{\hat{\alpha}_n^{(1)}}{\hat{\alpha}_n^{(1)} - 1}, \\ \hat{\mu}_n^{(2)} &= \hat{\mu}_n^{(2)}(k) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-k} X_{i,n}, \\ \hat{\mu}_n^{(3)} &= \hat{\mu}_n^{(3)}(k) := \frac{k}{n} X_{n-k+1,n} \frac{\hat{\alpha}_n^{(3)}}{\hat{\alpha}_n^{(3)} - 1}. \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_n^{(1)} &= \hat{\alpha}_n^{(1)}(k) := \left( \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \log^+(-X_{i,n}) - \log^+(-X_{k,n}) \right)^{-1}, \\ \hat{\alpha}_n^{(3)} &= \hat{\alpha}_n^{(3)}(k) := \left( \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \log^+(-X_{n-i+1,n}) - \log^+(-X_{n-k+1,n}) \right)^{-1}.\end{aligned}$$

Pour une description complète de la dérivation de  $\hat{\mu}$  et une discussion des résultats concernant ses différentes composantes, on peut consulter [121] et les références intérieur. D'où on peut trouver sa normalité asymptotique :

**Theorem 2.3** (*La normalité asymptotique*) : *Supposons que df  $G$  vérifie la condition suivante*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(1 - G(tx)) / (1 - G(t)) - x^{-1/\gamma}}{A^*(t)} = x^{-1/\gamma} \frac{x^\rho - 1}{\rho}.$$

où  $\rho \leq 0$  et  $A^*$  une fonction tend vers 0 et ne change pas de signe à l'infinité, avec  $\gamma = \frac{1}{\alpha}$  et que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(1 - F(t)) / (1 - G(t)) - p}{A^*(t)} = r \in \mathbb{R},$$

où  $p$  est défini comme suivant :

$$\begin{aligned}\frac{P(X > x)}{P(|X| > x)} &\rightarrow p := \frac{1 + \beta}{2}, \text{ et} \\ \frac{P(X < -x)}{P(|X| > x)} &\rightarrow q := \frac{1 - \beta}{2}.\end{aligned}$$

Si  $k = o(n^{-2p(\alpha-2p)})$ , alors

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma(k/n)} (\hat{\mu} - \mu) \xrightarrow{d} N(0, \delta^2(\alpha)),$$

avec

$$\sigma^2(s) := \int_s^{1-s} \int_s^{1-s} (u \wedge v - uv) dF^{\leftarrow}(u) dF^{\leftarrow}(v), \quad 0 < s < 1,$$

et

$$\delta^2(\alpha) := 1 + \left( \frac{(2 - \alpha)(2\alpha^2 - 2\alpha + 1)}{2(\alpha - 1)^4} + \frac{2 - \alpha}{\alpha - 1} \right), \quad 1 < \alpha < 2.$$

Les intervalles de confiance de  $\hat{\mu}_n$

Necir et Meraghni [114] ont utilisé les approximations prouvées dans [121], pour calculer les intervalles de confiance de  $\mu$  comme suivant :

Pour une taille d'échantillon grande de nombre  $N$  fixé, soit  $(x_1, \dots, x_N)$  une réalisation de l'échantillon  $(X_1, \dots, X_N)$  d'une v.a.  $X \sim S_\alpha(\sigma, 0, \mu)$  et soit, pour  $0 < \omega < 1$ ,  $z_\omega$  est le quantile d'ordre  $(1 - \omega)$  de la distribution Gaussienne standard. L'algorithme de la construction de l'intervalle d'estimation de  $\mu$ , avec un niveau de confiance  $(1 - \omega)$ , consiste les trois étapes suivantes :

\*) Sélectionner le nombre optimal  $k^*$  des extrêmes, utilisant l'algorithme de Reiss et Thomas [131], où nous avons choisi  $\theta = 0.3$  puisque  $0 < 1/2 < 1/\alpha < 1$  (voir [118] pour plus de détail). Ensuite calculer  $\mu^* := \hat{\mu}_n(k^*)$ .

\*) Calculer  $\alpha^* := \hat{\alpha}_N(k^*)$ , puis estimer  $\delta$  par

$$\delta^* := \left( 1 + \frac{(2 - \alpha^*)(2\alpha^{*2} - 2\alpha^* + 1)}{2(\alpha^* - 1)^4} + \frac{2 - \alpha^*}{\alpha^* - 1} \right)^{1/2}.$$

\*) Une approximation de  $\sigma(k/N)$

$$\sigma^* := -\frac{2\sqrt{k^*/N}X_{k^*,N}}{\sqrt{2 - \alpha^*}}.$$

Finalement, l'intervalle de confiance de  $(1 - \omega)\%$  de la moyenne  $\mu$  est

$$\left( \mu^* - z_{\omega/2} \frac{\delta^* \sigma^*}{\sqrt{N}}, \mu^* + z_{\omega/2} \frac{\delta^* \sigma^*}{\sqrt{N}} \right).$$

**Exemple 2.3** (*Illustration de calcul d'intervalle de confiance*) : Utilisant l'algorithme de Chambers, Mallows et Stuck [21], nous simulons 5000 observation d'une distribution alpha stable symétrique avec  $\alpha = 1.2$  et  $\sigma = 0.1$  et nous appliquons les résultats ci-dessus pour

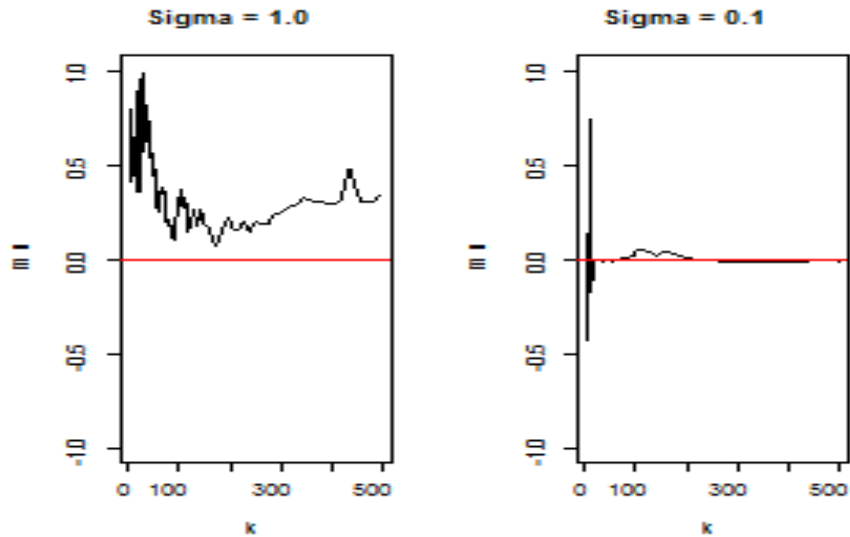


FIG. 2.4 – L’estimateur de Peng du paramètre de localisation d’une distribution  $\alpha$ -stable symétrique avec le même  $\alpha = 1.2$  et  $\sigma = 1$  (le coté à gauche) et  $\sigma = 0.1$  (le coté à droite). L’estimation est meilleur pour des valeurs petites de  $\sigma$ .

*construire les intervalles de confiance de la distribution de la moyenne. Les résultats de simulation sont résumés dans le tableau suivant*

$k^*$	$\alpha^*$	$\mu^*$
194	1.19	0.08
Intervalle de confiance	Borne inferieur	Borne superieur
0.90	-1.83	1.97
0.95	-2.36	2.51

TAB. 2.3 – Intervalle de confiance de probabilité 0.90 et 0.95 pour la moyenne de la distribution alpha stable symétrique avec alpha=1.2 et sigma=0.1, basé sur un ensemble de taille 3000.

Selon la simulation on a remarqué que lorsque  $\sigma$  diminué, l’estimation de la moyenne s’améliorer comme il est démontré dans la figure (2.4).

# Chapitre 3

## Mesures de Risque Financiers

### 3.1 Mesures de Risque de Distorsion

Dans la science actuarielle, des grands efforts ont été faits pour mesurer les risques associés pour les événements de grandes pertes. Alors, une mesure de risque est une application fonctionnelle d'une distribution de perte (ou profits) vers l'ensemble des nombres réels. Si nous représentons la distribution par une variable aléatoire approprié  $X$ , et soit  $F$  représente la mesure de risque fonctionnelle :

$$F : X \rightarrow \mathbb{R}$$

La mesure de risque est supposée d'une manière pour couvrir le risque associé à la distribution de perte. Dans la littérature beaucoup des mesures de risque appliquées en finance et en assurances. La première utilisation de ces dernières a été le développement des principes de calcul de prime. Ils ont été appliqué à la distribution de perte pour déterminer une prime adéquate pour charger le risque (i.e. avoir un chargement de sécurité positif) pour plus de détails, voir par exemple *Rolski et al*, [132]. Quelques exemples de mesures de risque classiques sont inclus :

### 3.1.1 Quelques mesures de risque traditionnelles

**Définition 3.1** (*La Moyenne*) : La mesure de risque est :

$$F(X) = (1 + \alpha) E(X), \text{ pour quelques } \alpha \geq 0.$$

**Définition 3.2** (*La Déviation Standard*) : Une mesure de risque importante qui a été largement utilisé dans l'économie financière est la déviation standard du rendement d'un portefeuille, d'où elle été considéré par Markowitz [103]. L'écart type est une "standard" mesure de déviation par rapport à la moyenne si la variable sous-jacente a une distribution normale. Soit  $V(X)$  désigne la variance de la variable aléatoire de perte, donc la mesure de risque de la déviation standard est définie comme suivant :

$$F(X) = E(X) + \alpha \sqrt{V(X)}, \text{ pour quelques } \alpha \geq 0.$$

**Définition 3.3** (*La Variance*) : La mesure de risque de la variance est définie comme :

$$F(X) = E(X) + \alpha V(X), \text{ pour quelques } \alpha \geq 0.$$

Malgré de sa simplicité de calcul, la variance n'est pas une mesure satisfaisante en raison de sa propriété de symétrie et l'incapacité de considérer le risque d'événements de faible probabilité. Même si la déviation standard a été utilisé pour mesurer l'écart par rapport à la moyenne pour différentes distributions que les distributions normales, ce n'est pas une bonne mesure du risque pour les événements de grandes pertes avec des distributions asymétriques, c'est à dire la variance et la déviation standard ne fournissent pas beaucoup d'informations sur le risque extrême, i.e. ne prennent pas suffisamment en compte les pertes réelles, le cas des queues épaisses. En effet, une mesure de risque actuellement utilisé est la valeur en risque.

**Définition 3.4** (*Valeur en Risque*) : Une mesure plus répandue dans la pratique est la *Valeur en Risque (VaR)*. La VaR est toujours spécifié avec un niveau de confiance donné  $\alpha$ , typiquement  $\alpha = 95\%$  ou  $99\%$ . La valeur en risque (VaR) est définie comme la perte potentielle maximale pour une probabilité fixée sur une période donnée, i.e. elle est définie comme la somme d'argent que l'on peut perdre sur une période du temps à un niveau de confiance donné. En terme statistique, elle correspond à la notion de quantile. Alors, la mesure de  $\alpha - VaR$  pour  $0 \leq \alpha \leq 1$  est :

$$F(X) = Q_\alpha = \min \{Q : Pr[X \leq Q] \geq \alpha\}$$

**Définition 3.5** (*Mesures de Distorsion du Risque*) : Les mesures de distorsion du risque sont définies comme l'espérance distordue de toute variable aléatoire  $X$  non-négative de perte en utilisant la fonction de survie (fonction de distribution décumulative),

$$S(x) = 1 - F(x) = P(X > x)$$

Alors, une mesure de distorsion du risque est celle qui peut être exprimée sous la forme :

$$F_g(X) = \int_0^\infty g(S(x)) dx$$

où  $g()$  est une fonction croissante, avec  $g(0) = 0$  et  $g(1) = 1$ . La fonction  $g()$  est appelée la fonction de distorsion. La fonction  $g(S(x))$  est une fonction de survie ajustée du risque.

### 3.1.2 Propriétés des mesures de risque de distorsion

Les propriétés des mesures du risque de distorsion correspondent aux suivants résultats standard sur le Choquet intégrale (voir Denneberg [37]) :

- (1) Si  $X \geq 0$ , alors  $F_g(X)$ , monotonie.
- (2)  $F_g(\lambda X) = \lambda F_g(X)$ , pour tous  $\lambda \geq 0$ , homogénéité positive.



(3)  $F_g(X + c) = F_g(X) + c$ , pour tous  $c \in \mathbb{R}$ , invariance par translation.

(4)  $F_g(-X) = -F_{\tilde{g}}(X)$ , où  $\tilde{g}(x) = 1 - g(1 - x)$ .

(5) Si une variable aléatoire  $X_n$  a un nombre fini de valeurs (i.e.  $X_n \xrightarrow{w} X$ ) et  $F_g(X)$  existe, alors  $F_g(X_n) \rightarrow F_g(X)$ . Cette propriété implique qu'il suffit de prouver l'état des variables aléatoires discrètes, puis reporter le résultat au cas général continu.

(6) Si  $X$  et  $Y$  sont des risques comonotones, prenant des valeurs positives et négatives, alors

$$F_g(X + Y) = F_g(X) + F_g(Y).$$

Dans la littérature, cette propriété est appelée additivité comonotone.

(7) Dans le cas généralisé, les mesures de distorsion de risque ne sont pas additives.

$$F_g(X + Y) \neq F_g(X) + F_g(Y).$$

(8) Les mesures de distorsion du risque sont sous-additive si et seulement si la fonction de distorsion  $g(x)$  est concave.

$$F_g(X + Y) \leq F_g(X) + F_g(Y).$$

La preuve est donnée dans *Wirch et Hardy* [157]. Par conséquent, les mesures de distorsion de risque concave sont des mesures de risque cohérente.

(9) Pour une fonction de distorsion non-décroissante  $g$ , la mesure de risque associée  $F_g$  est consistante, avec la domination stochastique d'ordre 1.

$$X \leq_1 Y \Rightarrow F_g(X) \leq F_g(Y)$$

La preuve est donnée dans *Hardy et Wirch* [?].

(10) Pour une fonction de distorsion concave non-décroissant  $g$ , la mesure de risque as-

sociée  $F_g$  est consistante avec la domination stochastique d'ordre 2.

$$X \leq_2 Y \Rightarrow F_g(X) \leq F_g(Y)$$

En conséquence, toutes mesures de distorsion de risque cohérente est consistante avec le respect de la domination stochastique du deuxième ordre.

- (11) Pour une fonction de distorsion strictement concave  $g$ , la mesure de risque associée  $F_g$  est strictement consistante à la domination stochastique d'ordre 2.

$$X <_2 Y \Rightarrow F_g(X) < F_g(Y)$$

La preuve est donnée dans *Hardy et Wirch* [?].

- (12) Cohérence des mesures de distorsion de risque par rapport à un domination stochastiques d'ordre supérieur a été analysée dans la littérature financière et actuarielle. En particulier, *Hürlimann (2004)* a obtenu certains résultats sur la cohérence des mesures de distorsion de risque avec la domination stochastique d'ordre 3. La condition préalable nécessaire à cela est la consistance par rapport à l'ordre 3-convexe. Les seules mesures de distorsion de risque, qui sont consistances à l'ordre 3-convexes sont  $g(x) = \sqrt{x}$  et  $g(x) = x$  sous l'hypothèse que l'ensemble des pertes possibles contient toutes les variables de Pareto (théorème (6.3) en *Hürlimann (2004)*). Sous une plus faible hypothèse de pertes discrètes, *Bellini et Caperdoni (2006)* ont montré que la seule mesure de distorsion de risque cohérente avec le respect de l'ordre 3-convexe est la valeur de la moyenne, alors  $g(x) = x$ , ce qui laisse le problème ouvert pour le cas de pertes continues.

### 3.1.3 Les paramètres de la mesure du risque

Pour chaque mesure de risque, il faut spécifier trois paramètres essentiels : l'horizon de modélisation, le seuil de confiance et la variable financière à modéliser.

**Définition 3.6** (*Sélection de l'horizon*) : *L'horizon est la durée de temps sur laquelle le modèle doit être projeté pour produire des informations adéquates. Un horizon relativement court a le désavantage que la plupart des stratégies ne peuvent pas avoir leurs effets complets à court terme. En revanche, un long horizon freine la modélisation en projetant la variable économique loin dans le futur, ce qui peut entraîner la dégradation de la capacité de modélisation à tirer des conclusions fiables. En effet, plus l'horizon est long, plus la sensibilité du modèle aux hypothèses sous-jacentes est élevée. De manière générale, la longueur de l'horizon doit dépendre de la nature des instruments dans le portefeuille et de l'objectif de modélisation. Dans les banques, le risque du marché est typiquement évalué sur une courte durée (un jour ou dix jours). Pour le risque de crédit, en revanche, l'horizon effectif peut varier d'un jour à plusieurs mois, voire plusieurs années. Dans les sociétés d'assurance, l'horizon peut varier considérablement (d'une année à des décennies pour les sociétés d'assurance vie). Cette disparité dépend du type de couverture offerte par la société d'assurance. Pour le besoin de l'agrégation des risques et l'évaluation du capital, une période d'un an est souvent requise, étant donné qu'elle correspond à la période sur laquelle la société peut liquider ou atténuer ses risques et accéder au marché pour le capital additionnel en cas de besoin. Néanmoins, pour des besoins spécifiques tels que la couverture des risques, la tarification et la gestion actif passif, la société peut utiliser des horizons dont la longueur peut varier de manière significative.*

**Définition 3.7** (*Sélection du seuil de confiance*) : *Le choix du seuil de confiance est un paramètre capital de la mesure de risque. Il s'agit de spécifier la valeur critique de la mesure qui distingue entre le niveau acceptable et le niveau inacceptable de risque. Généralement, pour une mesure de risque donnée, on fixe un niveau de confiance (par*

*exemple 99% pour le risque du marché) qui correspond à la probabilité que le montant des pertes ne dépasse pas cette mesure de risque en valeur absolue. Du point de vue réglementaire, l'objectif de l'utilisation de ce seuil est la minimisation du nombre de faillites. Les autorités de contrôle imposent un niveau du capital souhaitable dont une société a besoin pour fonctionner avec une faible probabilité de faillite.*

**Définition 3.8** (*Sélection de la variable financière*) : *Le risque est défini en terme de changement de valeur entre deux dates. Plus exactement, entre la date de modélisation (où la valeur est connue) et une date future (l'horizon de modélisation). De ce fait, la variable à modéliser est tout simplement la valeur future dans tous les états du monde, due aux changements de marché ou plus généralement à des événements incertains. Cette variable aléatoire est interprétée en tant que valeurs futures d'une position ou d'un portefeuille actuellement détenu. De manière générale, la variable financière à modéliser peut représenter la perte d'un portefeuille donné, la perte globale d'une société, le surplus d'une société d'assurance. . .*

### 3.1.4 Axiomes d'Artzner

Avec toutes ces mesures de risque à choisir, il est utile d'avoir une certaine façon de déterminer la plus performante; Artzner et al [3] définissent quatre propriétés qu'une mesure de risque  $F$  doit satisfaire pour qu'elle soit cohérente, dont la propriété de sous-additivité que la VaR ne satisfait pas. La VaR est sous-additive seulement si la distribution de la variable financière (profits/pertes) est normale (ou de manière générale elliptique), voir Embrechts et al. (2002), ce qui n'est pas souvent le cas, même pour les rentabilités des actifs sur le marché. Dans les autres cas, la VaR n'est pas une mesure de risque cohérente, car elle ne satisfait pas la propriété de sous-additivité. Cela peut constituer un obstacle de la VaR pour mesurer la diversification des risques.

**Définition 3.9** (*Invariance par translation*) : *Pour  $a$  constant et un portefeuille de risque*

$X$ ,

$$F(X + ar) = F(X) - a$$

$r$  est le prix à la date  $T$  (échéance de l'horizon de modélisation) de l'actif de référence sans risque (i.e. obligation zéro coupon de maturité  $T$ ) où le prix est égal à 1 aujourd'hui. La propriété d'invariance par translation signifie que l'addition (ou la soustraction) d'un montant initial sûr  $a$  au portefeuille initial et son investissement dans l'actif de référence décroît (accroît) simplement la mesure de risque  $\rho$  par  $a$ . On constate que l'addition d'un montant initial égal au  $F(X)$  réduit le risque à 0 soit ;

$$F(X + rF(X)) = F(X) - F(X) = 0$$

**Définition 3.10** (Sous additivité) : Pour tous portefeuilles de risque  $X$  et  $Y$ ,

$$F(X + Y) \leq F(X) + F(Y)$$

La mesure de risque d'une somme de deux portefeuilles est inférieure à la somme des mesures de risque de ces deux portefeuilles. Ce résultat est dû à la corrélation qui peut exister entre ces derniers. Pour la mesure de capital, cette propriété reflète le gain de diversification. Si on a deux portefeuilles de risques séparés, le capital requis pour le portefeuille combiné est inférieur à la somme des capitaux requis pour chaque portefeuille. Dans le cas contraire où

$$F(X + Y) \geq F(X) + F(Y)$$

Cela impliquerait, par exemple, que pour diminuer le risque, il pourrait être commode de fractionner une compagnie (ou un portefeuille) en deux divisions distinctes.

**Définition 3.11** (Homogénéité positive) : Pour tout portefeuille de risque  $X$  et tout réel  $\lambda \geq 0$  ;

$$F(\lambda X) = \lambda F(X).$$

La multiplication de chaque risque d'un portefeuille par un scalaire augmente la mesure de risque par le même scalaire. Cette propriété est obtenue par la combinaison de la condition de sous-additivité qui implique que :

$$F(\lambda X) \leq \lambda F(X).$$

et l'inégalité :

$$F(\lambda X) \geq \lambda F(X).$$

Cette dernière inégalité est justifiée par des considérations de liquidité : un investissement  $(\lambda X)$  pourrait être moins liquide, et donc plus risqué, que le total  $(\lambda X)$  de  $\lambda$  plus petits investissements  $X$ . La propriété homogénéité positive est donc un cas limite de la propriété de sous-additivité qui représente l'absence de diversification.

**Définition 3.12** (Monotonie) : Pour tous portefeuilles de risque  $X$  et  $Y$  avec  $X \leq Y$  :

$$F(Y) \leq F(X).$$

Si le portefeuille  $X$  domine le portefeuille  $Y$ , La mesure de risque du portefeuille  $X$  est supérieure à celle de  $Y$ . Ainsi, si le risque d'un portefeuille est supérieur à celui d'un autre, le capital requis pour le premier portefeuille est supérieur à celui requis pour le deuxième.

### 3.1.5 Quelques mesures du risque de distorsion

**Définition 3.13** (CTE) : Artzner et al [3] ont proposé une mesure de risque appelée la Tail Conditional Expectation (CTE) qui est à la fois cohérente et mesurant la perte au-delà de la VaR ;

$$CTE(X) = -E[X/X \leq -VaR(X)]$$

Dans le cas d'un saut en  $x = -VaR(X)$ , i.e  $P(X = -VaR(X))$  positive, l'intervalle  $(\infty, -VaR(X)]$  a une probabilité de  $\gamma^+$  qui est supérieure à la probabilité  $(1 - \alpha)$  sélectionnée.

tionnée pour la mesure de risque.

**Définition 3.14** (*ES*) : Acerbi et Tasche [2] montrent que la CTE ne satisfait pas généralement la propriété de sous-additivité dans le cas d'une distribution discontinue. Ils proposent l'ES (*Expected Shortfall*) comme mesure cohérente définie par :

$$ES(X) = -E[X/X < -VaR(X)]$$

Toutefois, cette mesure est définie sur l'intervalle  $(\infty, -VaR(X)]$  qui a une probabilité égale à  $\gamma^-$  et qui est inférieure à  $(1 - \alpha)$ .

**Définition 3.15** (*CVaR*) : Conditional VaR proposée par Rockafellar et al [133] est définie en terme de la VaR et de l'ES pour donner une mesure définie exactement sur l'intervalle  $(1 - \alpha)$  et qui satisfait l'ensemble des propriétés de cohérence définies par Artzner et al [3] :

$$CVaR(X) = \lambda(x) VaR(x) + (1 - \lambda(x)) ES(x),$$

et

$$\lambda(x) = \frac{\gamma - \gamma^-}{1 - \alpha}$$

**Définition 3.16** (*La transformé proportionnelle hasard (PHT)*) : La mesure PHT est défini par la fonction de distorsion

$$g(s) = s^r$$

ou de façon équivalente, puisque la fonction  $g$  est dérivable, par fonction

$$\psi(s) = r(1 - s)^{r-1}$$

et donc donné par :

$$\begin{aligned} PHT(F, r) &= \int_0^\infty [1 - F(u)]^r du \\ &= r \int_0^1 F^{-1}(t) (1-t)^{r-1} dt. \end{aligned}$$

**Définition 3.17** (La Transformé de Wang (WT)) : Pour la mesure WT de la fonction de distorsion

$$g(s) = \Phi(\Phi^{-1}(s) + \lambda)$$

est aussi différentiable, par conséquent, la mesure peut être définie soit par la fonction  $g$  ou

$$\psi(s) = e^{\lambda\Phi^{-1}(s) - \lambda^2/2}$$

où est donnée par :

$$\begin{aligned} WT(F, \lambda) &= \int_0^\infty \Phi(\Phi^{-1}(1 - F(u)) + \lambda) du \\ &= \int_0^1 F^{-1}(t) e^{\lambda\Phi^{-1}(t) - \lambda^2/2} dt, \end{aligned}$$

dont  $\Phi$  et  $\Phi^{-1}$ , respectivement, indiquent la fonction de répartition cdf et l'inverse de la distribution normale standard, et le paramètre  $\lambda$  reflète le niveau de risque systématique et s'appelle le prix de marché du risque. La fonction de distorsion

$$g(s) = \Phi(\Phi^{-1}(s) + \lambda)$$

a été présenté par Wang [152] comme un outil de tarification à la fois le passif (les pertes d'assurance) et le (gains) des rendements d'actifs et, par conséquent, est valable sur l'intervalle  $(-\infty, +\infty)$ .

**Définition 3.18** (Risk two-sided deviation) : Wang [151] a défini la mesure de risque à



deux déviation par :

$$\Delta_r(X) := \int_0^1 J_r(s) Q(s) ds, \quad 0 < r < 1,$$

avec

$$J_r(s) := (r/2) \frac{s^{1-r} - (1-s)^{1-r}}{s^{1-r}(1-s)^{1-r}}, \quad 0 < s < 1. \quad (2)$$

Pour plus de détails sur les mesures de distorsion du risque on se réfère à *Wang* ([151], [152]). Une discussion sur leur estimation empirique est donnée dans *Jones et Zitikis* [79].

## 3.2 Estimation Empirique des Mesures de Risque [117]

Les L-fonctionnelles résument de nombreux paramètres statistiques et de nombreuses mesures de risque actuarielles. Leurs estimateurs sont des combinaisons linéaires de statistiques d'ordre (L-statistiques). Il existe une classe de distributions à queue lourde pour laquelle la normalité asymptotique de ces estimateurs ne peuvent pas être obtenus par les procédures classiques. Dans ce contexte Necir et Meraghni [117] ont proposé, via la théorie des valeurs extrêmes, un estimateur asymptotiquement normal pour les L-fonctionnelles. Ces résultats peuvent être appliqués pour estimer certaines mesures de risques financières dans le cas des distributions à queue lourde.

### 3.2.1 L-Fonctionnelles

**Définition 3.19** (*L-Fonctionnelles*) : Soit  $X$  une variable aléatoire réelle (v.a.r) avec une fonction de distribution (df)  $F$ . Les correspondants L-fonctionnelles sont définies par

$$L(J) := \int_0^1 J(s)Q(s)ds, \quad (3.1)$$

où

$$Q(s) := \inf \{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq s\}, \quad 0 < s \leq 1$$

est la fonction de quantile associée à  $F$ , et  $J$  est une fonction mesurable définie sur  $[0, 1]$  (voir Serfling, [141]).

Plusieurs auteurs ont été utilisés la quantité  $L(J)$  pour résoudre certains problèmes statistiques. Par exemple, dans Chernoff et al. [22] les L-fonctionnelles ont un lien avec les estimateurs optimaux des paramètres de localisation et d'échelle dans les familles de distributions paramétriques. Hosking [76] introduit les L-moments comme une nouvelle approche de l'inférence statistique de localisation, la dispersion, asymétrie, kurtosis et d'autres aspects de forme des distributions de probabilité ou des échantillons de données ayant des moyens finis. Elamir et Seheult [52] ont défini les TL-moments pour répondre à certaines questions concernant les distributions à queue lourde dont les moyens n'existent pas donc la méthode du L-moments ne peut pas être appliquée. Dans le cas où le paramètre de coupe (tronqué) est égale à 1, les quatre premiers théoriques TL-moments sont :

$$m_i := \int_0^1 J_i(s)Q(s)ds, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

où

$$J_i(s) := s(1-s)\phi_i(s), \quad 0 < s < 1, \quad (3.2)$$

avec  $\phi_i$  polynômes de degré  $(i-1)$  définis comme suivant :

$$\begin{aligned} \phi_1(s) &= 6, \\ \phi_2(s) &= 6(2s-1), \\ \phi_3(s) &= \frac{20}{3}(5s^2-5s+1), \\ \phi_4(s) &= \frac{15}{2}(14s^3-21s^2+9s-1). \end{aligned}$$

Une étude partielle d'estimation statistique des TL-moments a été donnée récemment par Hosking [77]. Le comportement asymptotique issu des statistiques complexes est un problème difficile, et cela a été effectivement le cas depuis l'introduction des mesures de

distorsion de risque par *Denneberg [37]*, *Wang [149]*, et *Wang [151]*. Le progrès dans le domaine a été offert par *Jones et Zitikis [79]*, qui ont révélé une relation fondamentale entre la mesure de distorsion de risque et les L-statistiques classiques, (voir, par exemple, *Jones et Zitikis [80], [82]*; *Brazauskas et al, [17], [19]* et *Greselin et al, [69]*). Ces travaux sont discutés principalement avec l'utilisation du théorème centrale limite (*TCL*). *Necir et al [117]* ont été utilisé la relation entre les mesures de distorsion de risque ci-dessus et les L-statistiques pour élaborer la théorie des statistiques inférentielle de ce type de mesure de risque dans le cas des distributions à queue lourde.

L-fonctionnelles ont aussi de nombreuses applications pour des mesures de risque actuarielles (voir, par exemple, *Wang, [150], [151], [152]*). Comme exemple, si  $X \geq 0$  représente une perte d'assurance, la prime de risque distordue est définie par

$$\Pi(X) := \int_0^{\infty} g(1 - F(x)) dx,$$

où  $g$  est une fonction concave non décroissante avec  $g(0) = 0$  et  $g(1) = 1$ . Avec un changement de variables et intégration par parties,  $\Pi(X)$  peut être réécrite en

$$\Pi(X) = \int_0^1 \dot{g}(1 - s) Q(s) ds,$$

où  $\dot{g}$  désigne la dérivée de Lebesgue de  $g$ . Pour des montants réclamés à queues lourdes, l'estimation empirique avec des intervalles de confiance pour  $\Pi(X)$  a été discuté dans *Necir et al. [115]* et *Necir et Meraghni [116]*. Si  $X \in \mathbb{R}$  représentes les données financières tels que les rendements logarithmique d'actifs, les mesures de distorsion de risque sont définis par

$$H(X) := \int_{-\infty}^0 (g(1 - F(x)) - 1) dx + \int_0^{\infty} g(1 - F(x)) dx,$$

De même, avec une intégration par parties, il est démontré que

$$H(X) = \int_0^1 \dot{g}(1-s) Q(s) ds.$$

Wang [151] et Jones et Zitikis [79] ont défini la mesure de risque de la queue à deux déviation par

$$\Delta_r(X) := \int_0^1 J_r(s) Q(s) ds, \quad 0 < r < 1,$$

avec

$$J_r(s) := (r/2) \frac{s^{1-r} - (1-s)^{1-r}}{s^{1-r} (1-s)^{1-r}}, \quad 0 < s < 1. \quad (3.3)$$

Comme on le voit,  $\Pi(X)$ ,  $H(X)$  et  $\Delta_r(X)$  sont des L-fonctionnelles avec des fonctions de poids spécifiques. Pour plus de détails sur les mesures de distorsion de risque on se réfère à Wang [151] et [152]. Une discussion sur leurs estimation empiriques sont données dans Jones et Zitikis [79].

### 3.2.2 Estimation empirique des L-Fonctionnelles

Dans la suite  $\xrightarrow{P}$  et  $\xrightarrow{D}$  sont respectivement la convergence en probabilité et la convergence en distribution et  $N(0, \sigma^2)$  désigne la distribution normale de moyenne 0 et variance  $\sigma^2$ . Les estimateurs naturels de la quantité  $L(J)$  sont des combinaisons linéaires de statistiques d'ordre appelé L-statistiques. Pour plus de détails sur ce type de statistiques, on se réfère à Shorak et Wellner [138], page 260. En effet, soit  $(X_1, \dots, X_n)$  un échantillon de taille  $n \geq 1$  d'une v.a.  $X$  avec *df*  $F$ , alors l'estimateur de  $L(J)$  est

$$\hat{L}_n(J) := \int_0^1 J(s) Q_n(s) ds,$$

où

$$Q_n(s) := \inf \{x \in \mathbb{R} : F_n(x) \geq s\}, \quad 0 < s \leq 1$$

est la fonction de quantile empirique qui correspond à la fonction de distribution empirique

$$F_n(x) := \frac{1}{n} \sum \mathbb{I}\{X_i \leq x\} \text{ pour } x \in \mathbb{R},$$

concernant à l'échantillon  $(X_1, \dots, X_n)$  avec  $\mathbb{I}(\cdot)$  désignant la fonction indicatrice. Il est clair que  $\hat{L}_n(J)$  peut être réécrit en,

$$\hat{L}_n(J) = \sum_{i=1}^n a_{i,n} X_{i,n}$$

où

$$a_{i,n} := \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} J(s) ds, \quad i = 1, \dots, n$$

et  $X_{1,n} \leq \dots \leq X_{n,n}$  désigne la statistique d'ordre basée sur l'échantillon  $(X_1, \dots, X_n)$ . Le premier théorème général sur la normalité asymptotique de  $\hat{L}_n(J)$  est établie par *Chernoff et al.* [22]. Après, un grand nombre d'auteurs ont étudié le comportement asymptotique des L-statistiques ; *Bickel* [10], *Shorack* [136], [137], *Stigler* ,[144], [145], *Ruymgaart and van Zuijlen* [134], *Sen* [140], *Boos* [14], *Mason* [97] et *Singh* [143]. En effet, nous avons

$$\sqrt{n} \left( \hat{L}_n(J) - L(J) \right) \xrightarrow{D} N \left( 0, \sigma_n^2(J) \right), \text{ quand } n \rightarrow \infty, \quad (3.4)$$

à condition que :

$$\sigma_n^2(J) := \int_0^1 \int_0^1 (\min(s, t) - st) J(s) J(t) dQ_n(s) dQ_n(t) < \infty. \quad (3.5)$$

En d'autres termes, pour une fonction donnée  $J$ , cet condition exclut la classe des distributions  $F$  dont  $\sigma_n^2(J)$  est infinie. Par exemple, si l'on prend  $J = 1$ ,  $L(J)$  est égale à la valeur de l'espérance mathématique  $E(X)$  et donc l'estimateur naturelle de  $\hat{L}_n(J)$  est la moyenne de l'échantillon  $\bar{X}$ . Dans ce cas, le résultat (3.4) correspond à la théorème central limite classique qui n'est valable que lorsque la variance de  $F$  est finie. Comment

construire alors des intervalles de confiance pour la moyenne d'une fonction de distribution quand sa variance est infinie ? Cette situation survient lorsque  $df F$  appartient au domaine d'attraction de la loi  $\alpha$ -stable (à queue lourde) avec un indice de stabilité  $\alpha \in ]1, 2[$ . Cette question a été répondue par Peng [121] et [122] qui a proposé un estimateur asymptotiquement normal de la moyenne. La remarque 3 ci-dessous montre que cette situation se pose également pour les L-moments tronqués  $mi$  lorsque  $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{2}$  et pour la mesure de queue à deux déviation  $\Delta_r(X)$  lorsque  $\frac{1}{r+1/2} < \alpha < \frac{1}{r}$  pour tout  $0 < r < 1$ . Pour résoudre ce problème dans un cadre plus général, Necir et Meraghni [117] ont proposé, via la théorie des valeurs extremes, des estimateurs asymptotiquement normaux des L-fonctionnelles pour les distributions à queue lourde pour lesquelles  $\sigma^2(J) = \infty$ .

### 3.3 Estimation des L-Fonctionnelles quand $F \in D(\alpha)$

#### 3.3.1 Estimation des Quantiles Extrêmes

Les quantiles extrêmes à droite et à gauche de niveau  $t$  suffisamment petit de la fonction de distribution  $df F$  sont respectivement deux réels  $x_R$  et  $x_L$  définis par,  $1 - F(x_R) = t$  et  $F(x_L) = t$ , c'est  $x_R = Q(1 - t)$  et  $x_L = Q(t)$ . L'estimation des quantiles extrême pour les distributions à queue lourde a une grande importance. Par l'approche des quantiles, plusieurs estimateurs ont été conçus, citons les plus connues comme, l'estimateur basée sur Hill qui a été introduit par Smith et Weissman [153]; Dekkers et de Haan [34], Matthys et Beirlant [94] et Gomes et al. [67]. Après, nous introduisons l'un de ses estimateurs des quantiles extrême le plus célèbre. Soit  $\ell = \ell_n$  et  $m = m_n$  deux séquences de nombres entiers satisfaisant :

$$1 < \ell < n, 1 < m < n, \ell \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty, \ell/n \rightarrow 0 \text{ et } m/n \rightarrow 0, \text{ quand } n \rightarrow \infty. \quad (3.6)$$

Les estimateurs des quantiles extrêmes de Weissman [153]  $x_R$  et  $x_L$  sont définis, respectivement, par :

$$\hat{x}_L = Q_L^W(t) := -(nt/\ell)^{-1/\hat{\alpha}_L^H} X_{\ell,n} \text{ et } \hat{x}_R = Q_R^W(1-t) := (nt/m)^{-1/\hat{\alpha}_R^H} X_{n-m,n}, \text{ quand } t \downarrow 0,$$

où

$$\hat{\alpha}_L^H = \hat{\alpha}_L^H(\ell) := \left( \frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} \log^+(-X_{i-1,n}) - \log^+(-X_{\ell,n}) \right)^{-1}, \quad (3.7)$$

et

$$\hat{\alpha}_R^H = \hat{\alpha}_R^H(m) := \left( \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log^+(X_{n-i+1,n}) - \log^+(X_{n-m,n}) \right)^{-1}. \quad (3.8)$$

où  $\hat{\alpha}_L^H$  et  $\hat{\alpha}_R^H$  sont deux formes de l'estimateur de Hill (Hill, [74]) de l'indice de stabilité  $\alpha$ , basés sur la queue à gauche et la queue à droite respectivement de la distribution, et qui peut être estimé, utilisant les statistiques d'ordre  $Z_{1,n} \leq \dots \leq Z_{n,n}$  associée à l'échantillon  $(Z_1, \dots, Z_n)$  de  $Z$ , comme suivant :

$$\hat{\alpha} = \hat{\alpha}(k) := \left( \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \log^+(Z_{n-i+1,n}) - \log^+(Z_{n-k,n}) \right)^{-1} \quad (3.9)$$

où  $k = k_n$  est une séquence intermédiaire a les mêmes conditions que  $m$  et  $\ell$ .

L'estimateur de Hill de l'indice de queue (également connu sous le nom indice des valeurs extrêmes), uniquement défini pour les indices positifs. La construction de l'estimateur de Hill est basée sur la méthode du Maximum de Vraisemblance où on se sert des statistiques d'ordre supérieur à un certain seuil  $u$ , pour ne garder que les observations les plus grandes, de façon à ce quelles suivent approximativement une distribution Pareto. Il a été largement étudié, Mason [98] a prouvé la consistance faible de  $\hat{\alpha}_R^H$  pour toute suite  $m = m(n)$  satisfaisant  $m \rightarrow \infty$  et  $m/n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Deheuvels, Haeusler et Mason [33] ont établie la consistance forte pour toute suite  $m = m(n)$  satisfaisant  $m/\log \log n \rightarrow \infty$  et  $m/n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ . De nombreux articles traitent de la normalité asymptotique de l'estimateur de Hill; Davis et Resnick (1984) l'ont prouvé en utilisant les domaines d'at-

traction et sous les conditions de Von Mises, sous d'autres hypothèses Csörgő et Mason [23] ont démontré cette normalité asymptotique en introduisant l'approximation des processus empiriques par des ponts browniens. Resnick et de Haan [41] et Geluk et al (1995) ont montré la normalité asymptotique sous les conditions de Von Mises et l'hypothèse de variations régulières au second ordre et même une équivalence entre la normalité asymptotique et la variations régulières au second ordre moyennant une hypothèse supplémentaire sur  $m(n)$ . On peut aussi obtenir cette normalité asymptotique comme un cas particulier de la démonstration de Dekkers, Einmahl et de Haan [34] à partir de la normalité asymptotique de leur estimateur des moments.

### 3.3.2 Le choix optimal des Nombres de Statistiques D'ordre Supérieur et Inférieur

Les estimateurs basés sur les valeurs extrêmes s'appuient essentiellement sur les nombres  $m$  et  $\ell$  des statistiques d'ordre supérieur et inférieur utilisés dans le calcul d'estimation. Les estimateurs  $\hat{\alpha}_L^H$  et  $\hat{\alpha}_R^H$  en général, ont des variances substantielles pour des petites valeurs de  $m$  et  $\ell$  et des biais considérables pour des grandes valeurs de  $m$  et  $\ell$ . C'est pourquoi, il faut chercher des valeurs optimales de  $m$  et  $\ell$ , qui font l'équilibre entre ces deux vices.

Numériquement, il existe plusieurs procédures pour avoir sélectionné les nombres de statistiques d'ordre appropriées pour obtenir de bonnes estimations de l'indice de stabilité  $\alpha$ , voir par exemple, Dekkers et de Haan [36], Drees et Kaufmann [45], Danielsson et al. [32], Cheng et Peng [29] et Neves et Fraga Alves [118]. Graphiquement, les comportements de  $\hat{\alpha}_L^H$ ,  $\hat{\alpha}_R^H$  et  $\hat{\alpha}$  en fonction de  $m$ ,  $\ell$  et  $k$  respectivement sont illustrés par les figures (3.1), (3.2) et (3.3) à l'aide du logiciel statistique R (Ihaka et Gentleman, [78]). D'après la figure (3.1),  $\hat{\alpha}_R^H$  est plus adapté que  $\hat{\alpha}_L^H$  lorsque on estime l'indice de stabilité d'une distribution asymétrique à droite ( $\beta > 0$ ) tandis que la figure (3.2) montre que  $\hat{\alpha}_L^H$  est plus fiable que  $\hat{\alpha}_R^H$  lorsque la distribution est asymétrique à la gauche ( $\beta < 0$ ). Dans le cas où la distribution est symétrique ( $\beta = 0$ ), les deux estimateurs semblent être aussi bon comme on le



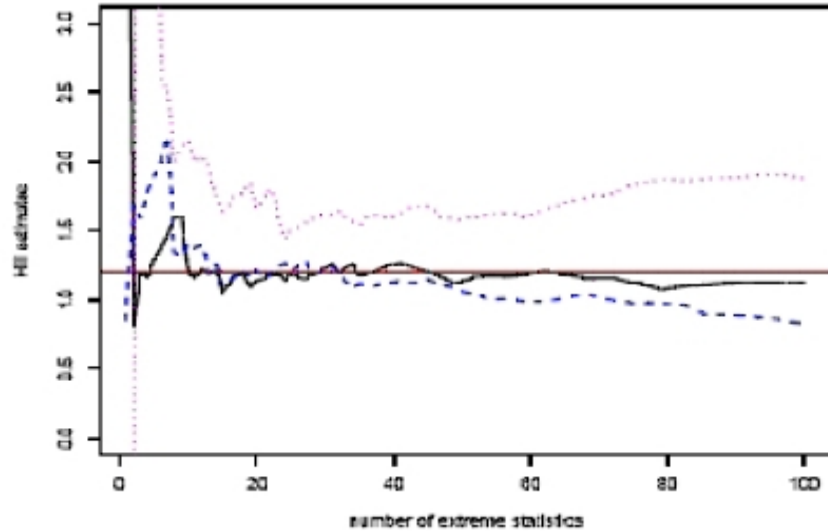


FIG. 3.1 – Graphiques des estimateurs de Hill  $\hat{\alpha}$  (ligne solide),  $\hat{\alpha}_R$  (ligne en tirets) et  $\hat{\alpha}_L$  (ligne en pointillés) de l'indice de stabilité  $\alpha$  d'une distribution  $\alpha$ -stable asymétrique à droite, basé sur 1000 observations avec 50 réplifications. La ligne horizontale représente la vraie valeur de  $\alpha = 1.2$ .

voit dans la figure (3.3). Enfin, il est intéressant de noter que l'estimateur  $\hat{\alpha}$  basé sur les grandes statistiques d'ordre concernant la valeur absolue de  $X$ , fonctionne bien et donne de bonnes estimation pour l'indice de queue  $\alpha$ .

En générale, il est clair qu'il n'ya aucune raison d'avoir l'égalité entre ces deux séquences  $m$  et  $\ell$ . Nous supposons qu'il existe une constante réelle positive  $\theta$  tels que  $\frac{\ell}{m} \rightarrow \theta$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Si la distribution est symétrique la valeur de  $\theta$  vaut à 1, sinon, elle est inférieure ou supérieure à 1 tout dépend de signe de l'asymétrie de la distribution. Pour une illustration, voir la figure (3.4) où il est tracé le diagramme du  $\theta$  pour plusieurs échantillons de différentes tailles.

### 3.3.3 Certaines hypothèses de régularité pour $J$

Pour des applications, les hypothèses de régularité suivantes sur la fonction  $J$  sont nécessaires :

(H1)  $J$  est différentiable sur  $(0, 1)$ ,

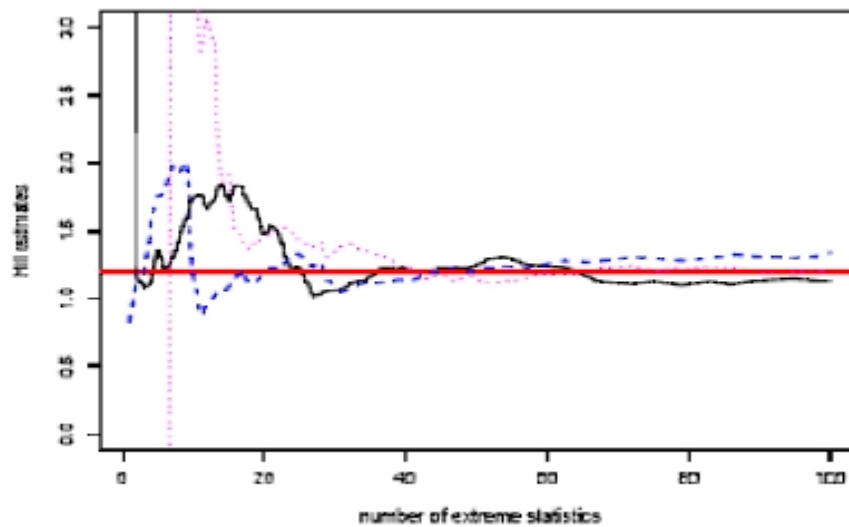


FIG. 3.2 – Graphiques des estimateurs de Hill  $\hat{\alpha}$  (ligne solide),  $\hat{\alpha}_R$  (ligne en tirets) et  $\hat{\alpha}_L$  (ligne en pointillés) de l'indice de stabilité  $\alpha$  d'une distribution  $\alpha$ -stable symétrique, basé sur 1000 observations avec 50 répliques. La ligne horizontale représente la vraie valeur de  $\alpha = 1.2$ .

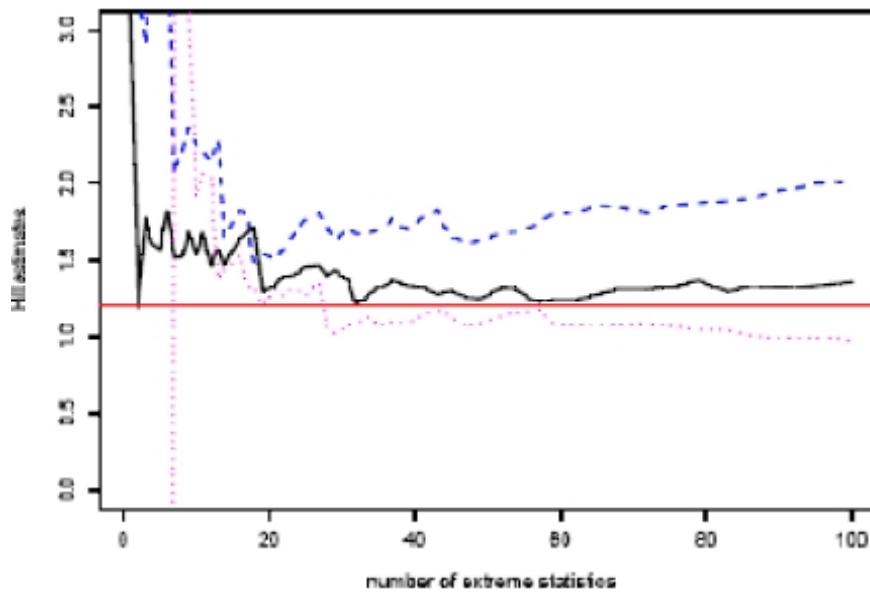


FIG. 3.3 – Graphiques des estimateurs de Hill  $\hat{\alpha}$  (ligne solide),  $\hat{\alpha}_R$  (ligne en tirets) et  $\hat{\alpha}_L$  (ligne en pointillés) de l'indice de stabilité  $\alpha$  d'une distribution  $\alpha$ -stable asymétrique à gauche, basé sur 1000 observations avec 50 répliques. La ligne horizontale représente la vraie valeur de  $\alpha = 1.2$ .

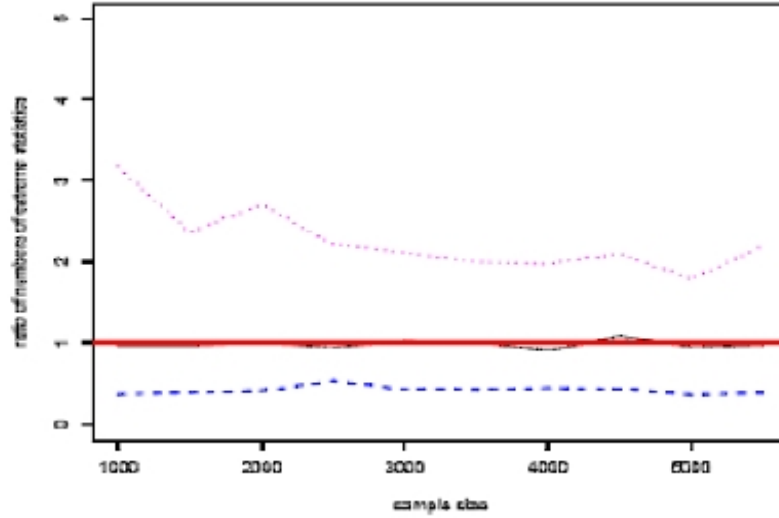


FIG. 3.4 – Graphiques du rapport  $\theta$  de nombres statistiques extrêmes comme fonction de la taille d'échantillon pour une distribution  $\alpha$ -stable symétrique ( ligne solide), une distribution  $\alpha$ -stable asymétrique à droite (ligne en tirets) et une distribution  $\alpha$ -stable asymétrique à gauche (ligne pointillés).

(H2)  $\lambda := \lim_{s \downarrow 0} J(1-s)/J(s) < \infty$ ,

(H3) Les deux fonctions  $J(1-s)$  et  $J(s)$  sont à variation régulière en 0 avec un indice commun  $\beta \in \mathbb{R}$ ,

(H4) Il existe une fonction  $a(\cdot)$  ne change pas de signe près de zéro de telle sorte que,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (J(xt)/J(t) - x^\beta) / a(t) = x^\beta \frac{x^\omega - 1}{\omega}, \text{ pour tout } x > 0,$$

où  $\omega \leq 0$  est le paramètre de second order.

**Remarque 3.1** Hypothèse (H3) a déjà été utilisé par Mason et Shorak [99] pour établir la normalité asymptotique des  $L$ -statistiques tranquées. La condition (H4) est juste un raffinement de (H3) appelée la condition du second ordre qui est requis pour la fonction de quantile  $K$  dans (7)[117].

**Remarque 3.2** Les hypothèses (H1) et (H4) sont satisfaites par toutes les fonctions de poids  $(J_i)_{i=2,4}$  avec  $(\beta, \lambda) = (1, \pm 1)$  (voir la section 4 dans Necir et al [117]) et par

la fonction  $J_r$  dans (2) avec  $(\beta, \lambda) = (r - 1, -1)$ . Ces deux exemples montrent que les constantes  $\beta$  et  $\lambda$ , peuvent être positives ou négatives tout dépend l'application que nous avons besoin.

**Remarque 3.3** Les  $L$ -fonctionnelles  $L(J)$  existent pour tout  $0 < \alpha < 2$  et  $\beta \in \mathbb{R}$  de telle sorte que  $1/\alpha - \beta < 1$ . Cependant, le lemme 4 (dans Necir et al [117]) montre que, pour  $1/\alpha - \beta > \frac{1}{2}$  nous avons  $\sigma^2(J) = \infty$ . Ensuite, rappelons (3.2), lorsque  $1/2 < \alpha < 2/3$  les  $L$ -moments existent cependant  $\sigma^2(J_i) = \infty$ ,  $i = 1, \dots, 4$ . De même, rappelons (3.3), où  $1/r + \frac{1}{2} < \alpha < 1/r$  la mesure de queue à deux déviation  $\Delta_r(X)$  existe quand  $\sigma^2(J_r) = \infty$ .

### 3.3.4 Définition de l'estimateur $\widehat{\Delta}_{r,n}$ de la mesure TSD

Wang [151] a proposé la queue à deux déviation qu'elle semble d'être une mesure appropriée lorsqu'il s'agit des données financières (telles que les rendements logarithmiques), dénotée par  $\Delta_r$  pour  $(0 < r < 1)$  et définie comme la moyenne de la queue à déviation à droite et la queue à déviation à gauche telque ;

$$D_r^R[X] := \int_{-\infty}^{\infty} ([1 - F(x)]^r - [1 - F(x)]) dx,$$

et

$$D_r^L[X] := D_r^R[-X] = \int_{-\infty}^{\infty} ([F(x)]^r - F(x)) dx.$$

donc

$$\Delta_r = \Delta_r[X] := \frac{1}{2} (D_r^L[X] + D_r^R[X]), \quad 0 < r < 1.$$

Par un changement de variables et une intégration par parties donnent l'expression suivante pour  $\Delta_r$  ;

$$\Delta_r = \int_0^1 J_r(s) Q(s) ds, \quad 0 < r < 1, \tag{3.10}$$

où

$$J_r(s) := \frac{r}{2} \left( (1-s)^{r-1} - s^{r-1} \right), \quad 0 < s < 1,$$

est une fonction de poids spécifique et  $Q(s) := \inf \{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq s\}$ ,  $0 < s \leq 1$ , est la fonction quantile concernant  $F$ . Notez que, pour  $t \downarrow 0$ , le quantile  $Q(1-t)$  est appelé quantile extrême.

La représentation (3.10) indique que la mesure de TSD est sous une forme L-fonctionnelle. Jones and Zitikis [79] a fait une large ouverture pour l'élaboration des résultats statistiques inférentielles dans le domaine actuariel, sur la base des L-fonctionnelles. Ils ont montré qu'il y a une relation fondamentale entre certaines mesures de risque et les L-statistiques classiques qui se sont considérées comme des estimateurs naturelles des L-fonctionnelles. En effet, soit  $(X_1, \dots, X_n)$  un échantillon de taille  $n \geq 1$ , établi à partir d'une *v.a.*  $X \sim S_\alpha(\gamma, \beta, \delta)$  et soit  $X_{1,n} \leq \dots \leq X_{n,n}$  les statistiques d'ordre correspondantes. L'estimateur non-paramétrique de  $\Delta_r$ , noté par  $\Delta_{n,r}$ , est obtenue en remplaçant  $Q(s)$  dans (3.10) par son estimateur empirique;

$$Q_n(s) := \inf \{x \in \mathbb{R} : F_n(x) \geq s\}, \quad 0 < s \leq 1,$$

correspondant à la fonction de distribution empirique  $F_n(x) := n^{-1} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(X_i \leq x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  avec  $\mathbb{I}(\cdot)$  désignant la fonction indicatrice, c'est

$$\Delta_{n,r} := \sum_{i=1}^n a_{i,n}^{(r)} X_{i,n},$$

où, pour  $i = 1, \dots, n$ ,

$$a_{i,n}^{(r)} := \frac{1}{2} \left[ \left( 1 - \frac{i-1}{n} \right)^r - \left( 1 - \frac{i}{n} \right)^r + \left( \frac{i-1}{n} \right)^r - \left( \frac{i}{n} \right)^r \right].$$

Pour plus de détails sur les L-statistiques et leurs propriétés asymptotiques, on se réfère au chapitre 19 de Shorack et Wellner [138] et Jones et Zitikis [79], [80].

Soit  $b_{n,r}$  et  $e_{n,r}$  représentent, respectivement le biais et l'erreur moyenne quadratique (RMSE) de  $\Delta_{n,r}$ . C'est

$$b_{n,r} := \mathbf{E} [\Delta_{n,r} - \Delta_r] \text{ et } e_{n,r} := \sqrt{\mathbf{E} [\Delta_{n,r} - \Delta_r]^2}.$$

D'après le lemme 5.1 (voir l'annexe B), nous avons

$$b_{n,r} = 0 \text{ et } e_{n,r} = \frac{\delta_r}{\sqrt{n}}, \text{ pour tout } 0 < r < 1,$$

où

$$\delta_r^2 := \int_0^1 \int_0^1 (\min(s, t) - st) J_r(s) J_r(t) dQ(s) dQ(t). \quad (3.11)$$

Cela implique que, pour tout  $0 < r < 1$ ,  $\Delta_{n,r}$  est un estimateur sans biais de  $\Delta_r$ , avec une erreur quadratique moyenne asymptotiquement négligeable (ce qui est la déviation standard dans ce cas), de taux de convergence  $n^{-1/2}$ , à condition que  $\delta_r < \infty$ . Mais, c'est une condition très restrictive dans le contexte des distributions de Lévy-stables. En effet, dans le lemme 5.2 (voir l'annexe B), nous montrons que  $\delta_r = \infty$  pour tout  $1 < \alpha < 2$  et  $0 < r < 1$ . Il est bien claire que la RMSE  $e_{n,r}$  est infinie. Par conséquent, nous devons chercher une autre approche pour estimer  $\Delta_r$  et d'avoir traiter le cas.

Plusieurs autres auteurs discuté l'estimation empirique de L-fonctionnelles dans le cas restrictive des variances finies. Exploitant la théorie des valeurs extrêmes, Necir et Meraghni [117] ont proposé une autre méthode d'estimation qui prolonge les résultats existants pour le cas plus important où les variances sont infinies, ce qui est plus pertinent pour des risques dangereux dans les domaines de la finance et d'assurance. Ils ont proposé des estimateurs qui sont asymptotiquement normaux quelle que soit la forme des queues de distribution. Ensuite, nous présentons les éléments qui sont nécessaires à la définition de l'estimateur de la mesure TSD sur la base de la théorie des valeurs extrêmes (Necir et Meraghni, [117]). Après avoir constaté que la normalité asymptotique de  $\Delta_{n,r}$  n'est pas garanti pour les

distributions avec des variances infinies, Necir et Meraghni [117] ont utilisé la théorie des valeurs extrêmes pour introduire un estimateur asymptotiquement normal pour  $\Delta_r$  lorsque  $F$  appartient au domaine d'attraction de la distribution de Lévy stable. L'estimateur semi paramétrique proposé  $\tilde{\Delta}_{n,r}^*$  est construit comme suivant :

$$\tilde{\Delta}_{n,r}^* = \int_0^{\ell/n} J_r(s) Q_L^W(s) ds + \int_{\ell/n}^{1-m/n} J_r(s) Q_n(s) ds + \int_{1-m/n}^1 J_r(s) Q_R^W(s) ds,$$

où

$$Q_L^W(t) := -(nt/\ell)^{-1/\hat{\alpha}_L^H} X_{\ell,n} \text{ et } Q_R^W(1-t) := (nt/m)^{-1/\hat{\alpha}_R^H} X_{n-m,n}, \text{ as } t \downarrow 0,$$

sont les estimateurs de Weissman [153] des quantiles extrêmes à gauche et à droite respectivement. Notez que les deux fonctions  $s \rightarrow J_r(s) Q_L^W(s)$  et  $s \rightarrow J_r(s) Q_R^W(s)$  sont à variation régulière avec les indices de queue  $r - 1 - 1/\hat{\alpha}_L^H$  et  $r - 1 - 1/\hat{\alpha}_R^H$  respectivement, pour tout  $n$  grand, nous avons ;

$$\int_0^{\ell/n} J_r(s) Q_L^W(s) ds = -(1 + o(1)) \frac{(\ell/n) J(\ell/n)}{r - 1/\hat{\alpha}_L^H} X_{\ell,n},$$

et

$$\int_{1-m/n}^1 J_r(s) Q_R^W(s) ds = (1 + o(1)) \frac{(m/n) J(1 - m/n)}{r - 1/\hat{\alpha}_R^H} X_{m,n},$$

à condition que

$$r - 1/\hat{\alpha}_L^H > 0 \text{ et } r - 1/\hat{\alpha}_R^H > 0. \quad (3.12)$$

D'autre part, pour tout  $n$  grand, nous avons :

$$J(\ell/n) = -(1 + o(1)) \frac{r}{2} (\ell/n)^{r-1} \text{ et } J(1 - m/n) = (1 + o(1)) \frac{r}{2} (m/n)^{r-1}.$$

Alors au lieu de  $\tilde{\Delta}_{n,r}^*$ , nous pouvons utiliser

$$\hat{\Delta}_{n,r} := \frac{r}{2} \frac{(\ell/n)^r}{r-1/\hat{\alpha}_L^H} X_{\ell,n} + \sum_{j=\ell+1}^{n-m-1} a_{j,n}^{(r)} X_{j,n} + \frac{r}{2} \frac{(m/n)^r}{r-1/\hat{\alpha}_R^H} X_{n-m,n}. \quad (3.13)$$

Ainsi, dans le contexte des risques d'assurance, c'est quand la perte est supposé d'être une *v.a.* non négative, des études analogues ont été faites (voir, Necir et al., [115]; Necir et Meraghni, [116]; et Brahim *et al.*, [11]).

**Theorem 3.1** *Assume that  $F \in D(\alpha)$  with  $0 < \alpha < 2$  such that  $1/(r + 1/2) < \alpha < 1/r$ , for any  $0 < r < 1$ . Then, for any sequences of integers  $m$  and  $\ell$  such that  $1 < m < n$ ,  $1 < \ell < n$ ,  $m \rightarrow \infty$ ,  $\ell \rightarrow \infty$ ,  $m/n \rightarrow 0$  et  $\ell/n \rightarrow 0$ ,  $\ell/m \rightarrow \theta < \infty$  and  $\sqrt{ka} (m/n) A(m/n) \rightarrow 0$  as  $n \rightarrow \infty$ , we have,  $n \rightarrow \infty$ ,*

$$\frac{\sqrt{n} \left( \hat{\Delta}_{n,r}(X) - \Delta_r(X) \right)}{(\ell/n)^{r-1/2} X_{\ell,n}} \xrightarrow{D} N(0, V_r^2)$$

où

$$V_r^2 : = \frac{r^2}{4} \left( 1 + (q/p)^{-2/\alpha} \theta^{2/\alpha-2r+1} \right) \cdot \left( \frac{2\alpha^2 + (r\alpha - \alpha - 1)^2 + 2\alpha(r\alpha - \alpha - 1)}{2(r\alpha - 1)^4} + \frac{1}{r\alpha - 1} \right) + 1 \quad (3.14)$$

### 3.3.5 Simulation des Résultats

En se basant sur cet résultat et on cherchera à évaluer et étudier le comportement de la mesure de risque à deux déviation estimée. Les résultats numériques et les représentations graphiques sont obtenus au moyen du logiciel de traitement et analyse statistiques R, introduit par R. Ihaka et R. Gentlman [78]. Pour une brève description de ce logiciel, voir l'annexe A. A cet effet, la distribution de probabilité considérée est une loi stable non normale, qui présente l'inconvénient de ne pas toujours avoir de forme analytique. Ce manque de formalisme rend toute manipulation plus complexe d'autant plus que l'éva-



luation numérique de ces fonctions de densité reste une question ouverte. Cependant, la connaissance de quatre coefficients  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\sigma$  et  $\mu$  permet de les paramétrer de façon à les approcher numériquement au moyen de l'outil informatique et en obtient la densité stable théorique estimé ainsi que la mesure de risque théorique estimé. Les résultats théoriques de la mesure de risque à deux déviations  $\Delta_r$ , ont été calculés pour  $r = 0.93, 0.95$ , et  $0.97$  en utilisant l'équation (3.1) avec  $J_r(s)$  donnée par l'équation (3.3), sont présentés au tableau ci-dessous :

$r$	$\Delta_r$
0.93	0.406
0.95	0.305
0.97	0.175

TAB. 3.1 – Estimation theorique de la mesure de risque a deux deviation pour differentes valeurs de r.

Par la suite, on proposera une procédure computationnelle des bornes de confiance de cette mesure de risque sous le modèle  $\alpha$ -stable. En effet, la forme de la variance asymptotique  $V_r^2$  dans (3.14) suggère que, dans le but de construire des intervalles de confiance pour  $\Delta_r$ , une estimation de  $p$  est également nécessaire. Utilisant la statistique d'ordre intermédiaire  $Z_{n-k,n}$ , deHaan et Pereira [43] proposé un estimateur consistant de  $p$  comme suivant ;

$$\hat{p}_n = \hat{p}_n(k) := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}\{X_i > Z_{n-k,n}\}, \quad (3.15)$$

où  $k = k_n$  est une séquence de nombres entiers satisfaisant  $1 < k < n$ ,  $k \rightarrow \infty$  et  $k/n \rightarrow 0$ , quand  $n \rightarrow \infty$  (le même que celui utilisé dans (3.6)).

Soit  $J$  la fonction de poids définie dans (3.3) satisfaisant les hypothèses de régularité (H1)-(H4) avec les deux constantes  $\beta = r - 1$  et  $\lambda = -1$ . Supposons que, pour  $n$  assez grand, nous avons une réalisation  $(x_1, \dots, x_n)$  de l'échantillon  $(X_1, \dots, X_n)$  pour une variable aléatoire  $X$  d'une fonction de distribution  $F$  du loi  $\alpha$ -stable remplissant toutes les hypothèses du théorème précédent. Le  $(1 - \zeta)$ -intervalle de confiance pour  $\Delta_r$  sera obtenu via les étapes suivantes :

**Étape1.** Sélectionner les nombres optimaux  $m$ ,  $l$  et  $k$  des statistiques d'ordre supérieur, inférieur et intermédiaire utilisés dans (3.8); (3.7) et (3.9).

**Étape2.** Déterminer  $X_{\ell, n}$ ,  $X_{n-m-1, n}$ ,  $J(m/n)$ ;  $J(1 - m/n)$  et  $\theta = m/\ell$ .

**Étape3.** Calculer, en utilisant (3.7) et (3.8),  $\hat{\alpha}_L := \hat{\alpha}_L(\ell)$  and  $\hat{\alpha}_R := \hat{\alpha}_R(m)$ . Puis en déduire, par (3.13) l'estimation de  $\hat{\Delta}_r$ .

**Étape4.** Utiliser (3.9) et (3.15) pour calculer  $\hat{\alpha} := \hat{\alpha}(k)$  et  $\hat{p}_n := \hat{p}_n(k)$ . Puis en déduire, par (3.14) l'écart type asymptotique ;

$$V := \sqrt{V^2(\hat{\alpha}, \beta, \lambda, \theta, \hat{p}_n)}$$

Finalement, les  $(1 - \zeta)$ -intervalles de confiance de borne inférieure et supérieure de  $\hat{\Delta}_r$ , seront respectivement :

$$\hat{\Delta}_{n,r} - z_{\zeta/2} \frac{\sqrt{\ell} V X_{n-\ell^*, n} J(1 - \ell/n)}{n},$$

et

$$\hat{\Delta}_{n,r} + z_{\zeta/2} \frac{\sqrt{\ell} V X_{n-\ell^*, n} J(1 - \ell/n)}{n}.$$

où  $z_{\zeta/2}$  est le quantile d'ordre  $(1 - \zeta/2)$  de la distribution gaussienne standard  $N(0, 1)$  avec  $0 < \zeta < 1$ .

Lors de simulation on a fait varier la taille de l'échantillon  $n$ , et d'autre paramètres rentrants dans le calcul, nous avons eu plusieurs commentaires seuls les schémas significatifs sont présentés. Les valeurs de notre estimateur ne pourra jamais en aucun cas dépasser les intervalles de confiance avec une probabilité éventuellement grande comme il est prouvé dans les deux tableaux suivants.

Les deux tableaux ci-dessous confirme la bonne performance de cette mesure quelque soit la valeur de  $r$  ( $0 < r \leq 0.99$ ). De plus, les estimations s'améliorent lorsque  $n$  croit. D'autre part, on peut signaler que cet estimateur est converge avec un grand biais même pour des

r	$(\hat{\Delta}_{n,r}, \Delta_r)$	MSE	ERR	RELERR
0.93	(0.300; 0.406)	0.011	0.106	0.260
0.95	(0.235; 0.28)	0.004	0.044	0.158
0.97	(0.131; 0.16)	0.001	0.031	0.191

TAB. 3.2 – Estimation empirique de la mesure de risque a deux deviation pour  $0.83 < r < 0.99$ ,  $\alpha=1.2$  et une taille d'échantion  $n=100000$ .

r	$(\hat{\Delta}_{n,r}, \Delta_r)$	MSE	ERR	RELERR
0.93	(0.28; 0.406)	0.024	0.11	0.28
0.95	(0.18; 0.28)	0.01	0.09	0.32
0.97	(0.11; 0.16)	0.003	0.04	0.29

TAB. 3.3 – Estimation empirique de la mesure de risque a deux deviation pour  $0.83 < r < 0.99$ ,  $\alpha=1.2$  et une taille d'échantion  $n=5000$ .

valeurs de  $n$  peu élevées.

Les valeurs de la mesure estimée dépendent des valeurs des statistiques d'ordre extrêmes, donc plus ces statistiques sont grandes, la mesure est grande ce qui peut être vu logique puisque de les quelles on cherche à couvrir ces risques extrêmes, d'autre part d'après les visualisations graphiques la mesure est bien encadrée par les deux bornes de l'intervalle de confiance. La visualisation graphique de la mesure estimée encadrée par l'intervalle de confiance, permet au décideur de choisir la mesure estimée adéquate en fixant les différents paramètres qui influent sur la mesure.

# Chapitre 4

## Estimateur à Biais réduit de la Mesure TSD [12]

Soit  $b_{n,r}^+$  et  $e_{n,r}^+$  désignent respectivement le biais et la RMSE de  $\hat{\Delta}_{n,r}$ . À partir de la normalité asymptotique de  $\hat{\Delta}_{n,r}$  (Théoreme 4.2 dans Necir et Meraghni, [117]), nous déduisons que, pour tout  $1/\alpha < r < 1$ , il existe une constante  $\omega_r < \infty$  telle que

$$(i) \ b_{r,n}^+ \rightarrow 0; \quad (ii) \ \sqrt{n}e_{n,r}^+ / (\ell/n)^{-1/\alpha+1/2} \rightarrow \omega_r, \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

L'assertion (i) implique que  $\hat{\Delta}_{n,r}$  est asymptotiquement non biaisé. Cela signifie que l'estimateur  $\hat{\Delta}_{n,r}$  a un biais négligeable quand  $n \rightarrow \infty$ . D'autre part, on déduit de l'assertion (ii) que, lorsque  $\alpha < 2$ , la RMSE  $e_{n,r}^+$  converge vers zéro avec un taux de convergence  $n^{-1/2} (\ell/n)^{1/\alpha-1/2}$ .

L'assertion (i) reste un résultat théorique, mais d'un point de vue pratique, quand on traite avec des tailles d'échantillon fini, l'estimateur  $\hat{\Delta}_{n,r}$  présent un grand biais. La raison est que  $\hat{\Delta}_{n,r}$  basé sur les estimateurs de quantiles extrêmes de Weissman pour les distributions à queue lourde, connus d'être largement biaisé (Weissman, [153]).

Comme une meilleure alternative aux estimateurs de Weissman, plusieurs estimateurs de quantiles extrêmes avec biais réduit sont proposés dans la littérature. Voir, par exemple,

Feuerverger et Hall [72], Beirlant *et al.* [8], [9], Gomes et Martins [65], [66], Caeiro *et al.* [27], [28], Peng et Qi [122], Mattyhs *et al.* [93], Gomes et Figueiredo [63], Gomes et Pestana [68].

Notre tâche dans le présent travail est d'obtenir un nouvel estimateur de la mesure TSD en réduisant le biais via les résultats de Peng et Qi [122] et Li et al. [92], qui ont respectivement présenté des estimateurs basé sur la méthode du maximum de vraisemblance censuré (CML) pour des paramètres à variation régulière et des quantiles extrêmes. Notre choix est motivé par les intéressantes propriétés asymptotiques de ces résultats. Ainsi une comparaison numérique au sens de biais et l'erreur moyenne quadratique de nouvel estimateur avec celui introduit récemment par Necir et al [117].

## 4.1 L'Approche de Li et al

Nous commençons cette section par une brève description de la méthode de Li et al. [92] pour réduire le biais dans l'estimation des quantiles extrêmes des distributions à queues lourdes. Soit  $K$  une *cdf* avec queue appartenant à la classe de Hall, i.e.

$$1 - K(x) = cx^{-\gamma_1} + dx^{-\gamma_2} + o(x^{-\gamma_2}), \text{ quand } x \rightarrow \infty, \quad (4.1)$$

où  $c > 0, d \neq 0$  et  $\gamma_2 > \gamma_1 > 0$ . Basé sur l'échantillon  $Z_1, \dots, Z_n$  de *cdf*  $K$  et les statistiques d'ordre relatives  $Z_{1,n}, \dots, Z_{n,n}$ , Peng et Qi [122] définit les estimateurs de CML  $(\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2)$  de  $(\gamma_1, \gamma_2)$  comme une solution du système suivant (avec la contrainte  $\gamma_2 > \hat{\gamma}_1$ ) :

$$\begin{cases} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{1}{G_i(\gamma_1, \gamma_2)} = 1 \\ \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{1}{G_i(\gamma_1, \gamma_2)} (\log^+(Z_{n-i+1,n}) - \log^+(Z_{n-k,n})) = \gamma_2^{-1}, \end{cases}$$

où  $k = k_n$  est une séquence de nombres entiers satisfaisant  $1 < k < n$  et  $k/n \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$  et

$$G_i(\gamma_1, \gamma_2) := \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \left( 1 + \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2} H(\gamma_1) \right) \left( \frac{Z_{n-i+1,n}}{Z_{n-k,n}} \right)^{\gamma_2 - \gamma_1} - \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2} H(\gamma_1),$$

avec

$$H(\gamma_1) := \frac{1}{\gamma_1} - \left( \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \log^+(Z_{n-i+1,n}) - \log^+(Z_{n-k,n}) \right).$$

Si nous désignons la fonction quantile associée à *cdf*  $K$  par  $R$ , alors il est facile de vérifier que(4.1) est équivalent à

$$R(1-t) = c^{1/\gamma_1} t^{-1/\gamma_1} \left( 1 + \gamma_1^{-1} c^{-\gamma_2/\gamma_1} dt^{\gamma_2/\gamma_1 - 1} + o(1) \right), \text{ quand } t \downarrow 0. \quad (4.2)$$

En substituant  $\hat{\gamma}_1$  et  $\hat{\gamma}_2$  de  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  dans (4.2), nous obtenons l'estimateur à biais réduit pour le quantile,  $R(1-t)$ ,  $t \downarrow 0$ , proposé par Li et al. [92] et nous désignons par  $R^{\mathbf{LPY}}(1-t)$  (l'abréviation **LPY** concerne aux initiales du nom des auteurs de l'article).

$$R^{\mathbf{LPY}}(1-t) := \hat{c}^{1/\hat{\gamma}_1} t^{-1/\hat{\gamma}_1} \left( 1 + \hat{\gamma}_1^{-1} \hat{c}^{-\hat{\gamma}_2/\hat{\gamma}_1} \hat{d} t^{\hat{\gamma}_2/\hat{\gamma}_1 - 1} \right), \text{ } t \downarrow 0,$$

où  $(\hat{c}, \hat{d})$  sont donnés par

$$\begin{cases} \hat{c} := \frac{k}{n} \frac{\hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_2}{\hat{\gamma}_1 - \hat{\gamma}_2} Z_{n-k,n}^{\hat{\gamma}_1} \left( \frac{1}{\hat{\gamma}_2} - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \log^+(Z_{n-i+1,n}) + \log^+(Z_{n-k,n}) \right), \\ \hat{d} := \frac{k}{n} \frac{\hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_2}{\hat{\gamma}_2 - \hat{\gamma}_1} Z_{n-k,n}^{\hat{\gamma}_2} \left( \frac{1}{\hat{\gamma}_1} - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \log^+(Z_{n-i+1,n}) + \log^+(Z_{n-k,n}) \right). \end{cases}$$

Maintenant, nous appliquons les résultats ci-dessus dans le cas d'une distribution  $F$  de Lévy stable avec les paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\mu$ . Notez que (1.2) et (1.3) peuvent être réécrire respectivement en termes des quantiles extrêmes à gauche et à droite  $Q_L(t)$  et  $Q_R(1-t)$ .

Nous avons, quand  $t \downarrow 0$

$$Q_L(t) = -c_L^{1/\alpha} t^{-1/\alpha} \left( 1 + \alpha^{-1} c_L^{-\lambda/\alpha} d_L t^{\lambda/\alpha-1} \right) + o(1),$$

et

$$Q_R(1-t) = c_R^{1/\alpha} t^{-1/\alpha} \left( 1 + \alpha^{-1} c_R^{-\lambda/\alpha} d_R t^{\lambda/\alpha-1} \right) + o(1).$$

Par conséquent, les estimateurs de biais réduits de  $Q_L(t)$  et  $Q_R(1-t)$  quand  $t \downarrow 0$ , que nous désignons respectivement par  $Q_L^{\text{LPY}}(t)$  et  $Q_R^{\text{LPY}}(1-t)$ , sont définis, pour  $t \downarrow 0$ , par

$$Q_L^{\text{LPY}}(t) := -\hat{c}_L^{1/\hat{\alpha}_L} t^{-1/\hat{\alpha}_L} \left( 1 + \hat{\alpha}_L^{-1} \hat{c}_L^{-\hat{\lambda}_L/\hat{\alpha}_L} \hat{d}_L t^{\hat{\lambda}_L/\hat{\alpha}_L-1} \right), \quad (4.3)$$

et

$$Q_R^{\text{LPY}}(1-t) := \hat{c}_R^{1/\hat{\alpha}_R} t^{-1/\hat{\alpha}_R} \left( 1 + \hat{\alpha}_R^{-1} \hat{c}_R^{-\hat{\lambda}_R/\hat{\alpha}_R} \hat{d}_R t^{\hat{\lambda}_R/\hat{\alpha}_R-1} \right), \quad (4.4)$$

où

$$\begin{cases} \hat{c}_L := \frac{\ell}{n} \frac{\hat{\alpha}_L \hat{\lambda}_R}{\hat{\alpha}_L - \hat{\lambda}_L} (-X_{\ell,n})^{\hat{\alpha}_L} \left( \frac{1}{\hat{\lambda}_R} - \frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} \log^+(-X_{i,n}) + \log^+(-X_{\ell,n}) \right), \\ \hat{d}_L := \frac{\ell}{n} \frac{\hat{\alpha}_L \hat{\lambda}_L}{\hat{\lambda}_L - \hat{\alpha}_L} (-X_{\ell,n})^{\hat{\lambda}_L} \left( \frac{1}{\hat{\alpha}_L} - \frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} \log^+(-X_{i,n}) + \log^+(-X_{\ell,n}) \right), \end{cases} \quad (4.5)$$

et

$$\begin{cases} \hat{c}_R := \frac{m}{n} \frac{\hat{\alpha}_R \hat{\lambda}_R}{\hat{\alpha}_R - \hat{\lambda}_R} X_{n-m,n}^{\hat{\alpha}_R} \left( \frac{1}{\hat{\lambda}_R} - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log^+(X_{n-i+1,n}) + \log^+(X_{n-m,n}) \right), \\ \hat{d}_R := \frac{m}{n} \frac{\hat{\alpha}_R \hat{\lambda}_R}{\hat{\lambda}_R - \hat{\alpha}_R} X_{n-m,n}^{\hat{\lambda}_R} \left( \frac{1}{\hat{\alpha}_R} - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log^+(X_{n-i+1,n}) + \log^+(X_{n-m,n}) \right). \end{cases} \quad (4.6)$$

Les estimateurs de CML  $(\widehat{\alpha}_L, \widehat{\lambda}_L)$  de  $(\alpha, \lambda)$  sont solution du système

$$\begin{cases} \frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} \frac{1}{G_i^L(\alpha, \lambda)} = 1 \\ \frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} \frac{1}{G_i^L(\alpha, \lambda)} (\log^+(-X_{i,n}) - \log^+(-X_{\ell,n})) = \lambda^{-1}, \end{cases} \quad (4.7)$$

où

$$G_i^L(\alpha, \lambda) := \frac{\alpha}{\lambda} \left( 1 + \frac{\alpha\lambda}{\alpha - \lambda} H^L(\alpha) \right) \left( \frac{X_{i,n}}{X_{\ell,n}} \right)^{\lambda - \alpha} - \frac{\alpha\lambda}{\alpha - \lambda} H^L(\alpha),$$

avec

$$H^L(\alpha) := \frac{1}{\alpha} - \left( \frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} \log^+(-X_{i,n}) - \log^+(-X_{\ell,n}) \right).$$

tandis que  $(\widehat{\alpha}_R, \widehat{\lambda}_R)$  sont solution du système

$$\begin{cases} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{1}{G_i^R(\alpha, \lambda)} = 1 \\ \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{1}{G_i^R(\alpha, \lambda)} (\log^+(X_{n-i+1,n}) - \log^+(X_{n-m,n})) = \lambda^{-1}, \end{cases} \quad (4.8)$$

où

$$G_i^R(\alpha, \lambda) := \frac{\alpha}{\lambda} \left( 1 + \frac{\alpha\lambda}{\alpha - \lambda} H^R(\alpha) \right) \left( \frac{X_{n-i+1,n}}{X_{n-m,n}} \right)^{\lambda - \alpha} - \frac{\alpha\lambda}{\alpha - \lambda} H^R(\alpha),$$

avec

$$H^R(\alpha) := \frac{1}{\alpha} - \left( \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log^+(X_{n-i+1,n}) - \log^+(X_{n-m,n}) \right).$$

Ensuite, nous présentons l'estimateur à biais réduit de la mesure TSD de Wang  $\Delta_r$ . Tout d'abord, écrivons  $\Delta_r$  défini dans (3.10), comme ;

$$\Delta_r = \Delta_{L,n} + \Delta_{M,n} + \Delta_{R,n},$$

où

$$\Delta_{L,n} := \int_0^{\ell/n} J_r(s) Q(s) ds, \quad \Delta_{R,n} := \int_{1-m/n}^1 J_r(s) Qs, \quad (4.9)$$



et

$$\Delta_{M,n} := \int_{\ell/n}^{1-m/n} J_r(s) Q(s) ds.$$

Comme pour  $\widehat{\Delta}_{n,r}$ , le terme du milieu  $\Delta_{M,n}$  est estimé par  $\sum_{j=\ell+1}^{n-m} a_{j,n}^{(r)} X_{j,n}$ . D'autre part, en remplaçant le quantile extrême inférieur  $Q(s)$  lorsque  $s \downarrow 0$  et le quantile extrême supérieur  $Q(s)$  lorsque  $s \downarrow 1$ , dans l'équation (4.9), par leurs estimateurs respectifs  $Q_L^{\text{LPY}}(s)$  et  $Q_R^{\text{LPY}}(s)$ , et après des calculs simples, on obtient ;

$$\widetilde{\Delta}_{L,n} := \frac{r}{2} \widehat{c}_L^{1/\widehat{\alpha}_L} (\ell/n)^{-1/\widehat{\alpha}_L+r} \left( \frac{\widehat{\alpha}_L}{r\widehat{\alpha}_L - 1} + \widehat{d}_L \frac{\widehat{c}_L^{-\widehat{\lambda}_L/\widehat{\alpha}_L} (\ell/n)^{\frac{\widehat{\lambda}_L-1}{\widehat{\alpha}_L}+r-1}}{\widehat{\lambda}_L - 1 + \widehat{\alpha}_L (r-1)} \right),$$

et

$$\widetilde{\Delta}_{R,n} := \frac{r}{2} \widehat{c}_R^{1/\widehat{\alpha}_R} (m/n)^{-1/\widehat{\alpha}_R+r} \left( \frac{\widehat{\alpha}_R}{r\widehat{\alpha}_R - 1} + \widehat{d}_R \frac{\widehat{c}_R^{-\widehat{\lambda}_R/\widehat{\alpha}_R} (m/n)^{\frac{\widehat{\lambda}_R-1}{\widehat{\alpha}_R}+r-1}}{\widehat{\lambda}_R - 1 + \widehat{\alpha}_R (r-1)} \right),$$

respectivement l'estimation de  $\Delta_{L,n}$  et  $\Delta_{R,n}$ . Finalement, notre estimateur de la mesure TSD à biais réduit a la forme suivante :

$$\widetilde{\Delta}_{n,r} := \widetilde{\Delta}_{L,n} + \sum_{j=\ell+1}^{n-m} a_{j,n}^{(r)} X_{j,n} + \widetilde{\Delta}_{R,n}. \quad (4.10)$$

## 4.2 Choix optimal de fractions d'échantillon $m$ et $\ell$

Dans ce travail nous utilisons l'algorithme de Reiss et Thomas [131] qui ont proposé une méthode heuristique de choisir le nombre optimal des extrêmes supérieurs utilisés dans le calcul de l'estimation de l'indice de queue. Pour le modèle de Hall (4.1), cette méthode sélectionne la valeur  $\widetilde{m}$  de  $m$  qui minimise la quantité ;

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^k i^\theta \left| \widehat{\gamma}_{1_{i,n}} - \text{median} \left( \widehat{\gamma}_{1_{1,n}}, \dots, \widehat{\gamma}_{1_{m,n}} \right) \right|, \quad 0 \leq \theta \leq 1/2, \quad (4.11)$$

où  $\widehat{\gamma}_{1_{i,n}}$  est un estimateur du paramètre d'échelle  $\gamma_1$  basé sur la  $i^{\text{ème}}$  extrême supérieur. Note que  $\widetilde{m} = \widetilde{m}(\theta)$ , avec  $\theta = 0, \dots, 0.5$ . Pour une discussion sur le choix de  $\theta$ , on se réfère

à l'article de Neves and Fraga Alves [118].

Dans notre étude de simulation, nous appliquons la procédure ci-dessus une fois à la queue à gauche de *cdf*  $F$ , puis à la queue droite afin de déterminer les nombres optimaux  $\ell$  et  $m$  des statistiques d'ordre inférieur et supérieur, pour avoir utilisé dans le calcul de  $\tilde{\Delta}_{n,r}$ . Sur la base des informations fournies par l'étude de simulation, nous prenons  $\theta = 0.3$ . C'est, nous sélectionnons  $\tilde{\ell}$  et  $\tilde{m}$  qui sont minimisés respectivement ;

$$\frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} i^{0.3} |\alpha_{i,n}^L - \text{median}(\hat{\alpha}_{1,n}^L, \dots, \hat{\alpha}_{\ell,n}^L)| \quad \text{and} \quad \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m i^{0.3} |\alpha_{i,n}^R - \text{median}(\hat{\alpha}_{1,n}^R, \dots, \hat{\alpha}_{m,n}^R)|,$$

où  $\hat{\alpha}_{i,n}^L$  et  $\hat{\alpha}_{i,n}^R$  désignent les estimateurs de  $\alpha$  basés sur la  $i^{\text{ème}}$  extrême inférieur et supérieur respectivement.

Une fois  $\tilde{\ell}$  et  $\tilde{m}$  sont à la main, nous calculons les valeurs correspondantes de  $(\tilde{\alpha}_L, \tilde{\lambda}_L, \tilde{\alpha}_R, \tilde{\lambda}_R)$  (solutions des deux systems (4.7) et (4.8)) et  $(\tilde{c}_L, \tilde{d}_L, \tilde{c}_R, \tilde{d}_R)$  (donnés dans (4.5) et (4.6)), pour avoir finalement calculer  $\tilde{\Delta}_{n,r}$  donner par (4.10).

### 4.3 Simulation des Résultats

Dans cette section, nous réalisons une étude de simulation, par le logiciel R (Ihaka et Gentleman [78]) pour comparer les performances de notre nouvel estimateur  $\tilde{\Delta}_{n,r}$  avec l'estimateur  $\hat{\Delta}_{n,r}$  récemment introduit par Necir et Meraghni [117]. Mais, avant de commencer les simulations, nous tenons à mentionner que, dans un souci d'optimisation de temps de calcul, nous limitons la recherche de  $\tilde{\ell}$  et  $\tilde{m}$  vers les intervalles entiers  $(\ell^*, 2\ell^*)$  et  $(m^*, 2m^*)$  respectivement, où  $\ell^*$  et  $m^*$  sont des valeurs initiales pour  $\ell$  et  $m$ , obtenus en appliquant l'algorithme de Cheng Peng [29] aux estimateurs de Hill  $\alpha$ , donnée dans (3.8) et (3.7).

Pour des raisons de simplicité, nous considérons la distribution standard de  $\alpha$ -stable  $S_\alpha(1, 0, 0)$ . Nous prenons  $(\alpha, r) = (1.7, 0.6)$  et  $(1.5, 0.7)$ , de sorte que  $1/\alpha < r < 1$  (voir, (3.12)), et nous calculons les valeurs correspondantes à la mesure TSD qui tourne entre

1.659 et 1.508 respectivement, d'où les valeurs théoriques sont 1.43 et 1.34 respectivement. Alors, nous tirons 200 échantillons de taille  $n = 2000$ , d'une v.a.  $X \sim S_\alpha(1, 0, 0)$ , pour calculer les deux estimateurs de la TSD  $\hat{\Delta}_{n,r}$  et  $\tilde{\Delta}_{n,r}$ . Nos résultats sont obtenus en faisant la moyenne sur le nombre de répétitions. Nous referons la même procédure avec un autre 200 échantillons de taille  $n = 5000$ . Les résultats de simulation sont résumés dans les Tableaux 4.1 et 4.2.

$n = 2000$				$n = 5000$			
$\hat{\Delta}_{n,r}$		$\tilde{\Delta}_{n,r}$		$\hat{\Delta}_{n,r}$		$\tilde{\Delta}_{n,r}$	
Bias	0.553	Bias	0.093	Bias	0.301	Bias	0.019
Rmse	0.554	Rmse	0.189	Rmse	0.302	Rmse	0.082
$m^*$	182	$\tilde{m}$	262	$m^*$	433	$\tilde{m}$	773
$\alpha_R^H$	2.588	$\hat{\alpha}_R$	2.321	$\alpha_R^H$	2.506	$\hat{\alpha}_R$	2.092
$\ell^*$	191	$\tilde{\ell}$	271	$\ell^*$	441	$\tilde{\ell}$	781
$\alpha_L^H$	2.330	$\hat{\alpha}_L$	2.120	$\alpha_L^H$	2.045	$\hat{\alpha}_L$	1.920

TAB. 4.1 – Comparison du nouvel estimateur TSD et l'estimateur de TSD de Necir et Meraghni, basé sur 200 échantillon d'une distribution de Lévy stable standard avec  $\alpha = 1.7$ ,  $r = 0.6$ . La vraie valeur de la *TSD* est 1.659.

$n = 2000$				$n = 5000$			
$\hat{\Delta}_{n,r}$		$\tilde{\Delta}_{n,r}$		$\hat{\Delta}_{n,r}$		$\tilde{\Delta}_{n,r}$	
Bias	0.407	Bias	0.087	Bias	0.168	Bias	0.009
Rmse	0.408	Rmse	0.153	Rmse	0.172	Rmse	0.051
$m^*$	181	$\tilde{m}$	251	$m^*$	452	$\tilde{m}$	772
$\alpha_L^H$	2.003	$\hat{\alpha}_R$	1.751	$\alpha_R^H$	1.782	$\hat{\alpha}_R$	1.710
$\ell^*$	180	$\tilde{\ell}$	250	$\ell^*$	449	$\tilde{\ell}$	769
$\alpha_R^H$	1.878	$\hat{\alpha}_L$	1.717	$\alpha_L^H$	1.747	$\hat{\alpha}_L$	1.708

TAB. 4.2 – Comparison du nouvel estimateur TSD et l'estimateur de TSD de Necir et Meraghni, basé sur 200 échantillon d'une distribution de Lévy stable standard avec  $\alpha = 1.5$ ,  $r = 0.7$ . La vraie valeur de la *TSD* est 1.508.

La deuxième partie de notre étude de simulation consiste à une comparaison graphique entre le biais et RMSE de  $\tilde{\Delta}_{n,r}$  et  $\hat{\Delta}_{n,r}$ , comme l'échantillon des fractions augmente. Nous commençons par 100 échantillons de taille  $n = 2000$ . Pour  $i \in \{1, 2, \dots, 21\}$ , nous calculons,

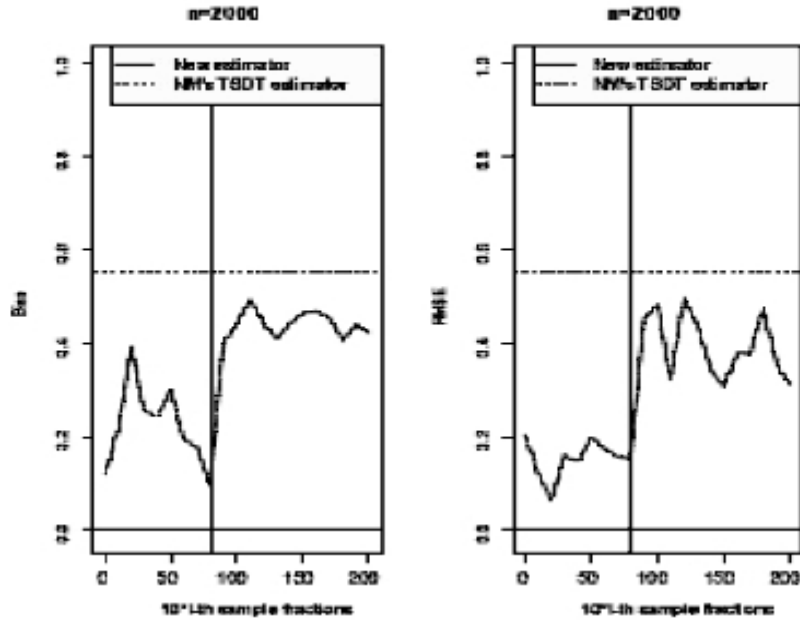


FIG. 4.1 – Biais (côté à gauche) et RMSE (côté à droite) de la nouvelle estimateur TSD et Necir et Meraghami TSD estimateur pour  $\alpha = 1.7$  et  $r = 0.6$ , basé sur 200 échantillons de 2000 observations stables.

en faisant la moyenne sur le nombre de répétitions, la valeur de  $\tilde{\Delta}_{n,r}$  pour le couple des fractions de l'échantillon  $(\ell(i), m(i))$ , où

$$\ell(i) = \ell^* + (i - 1) \times 10 \text{ et } m(i) = m^* + (i - 1) \times 10,$$

Notons le par  $\tilde{\Delta}_{n,r}(i)$  et le biais et la RMSE résultant par  $\tilde{b}_{n,r}(i)$  et  $\tilde{e}_{n,r}(i)$  respectivement. Ensuite, nous traçons dans des graphes distincts les deux ensembles de points  $\left((i - 1) \times 10, \tilde{b}_{n,r}(i)\right)$  et  $\left((i - 1) \times 10, \tilde{e}_{n,r}(i)\right)$ , et on ajoute dans chaque graphe, une ligne horizontale représentant le biais et l'erreur quadratique moyenne de  $\hat{\Delta}_{n,r}$ , voir les figures 4.1 et 4.3. Nous répétons la même procédure pour un autre 100 échantillons de taille  $n = 5000$ , avec  $i = 1, 2, \dots, 51$ , voir les figures 4.2 et 4.4.

Dans le tableau 4.1 pour  $\alpha = 1.7$ , les valeurs optimales graphiques de  $(\tilde{\ell}, \tilde{m})$  sont  $(271, 262)$  et  $(781, 773)$  correspondantes a  $i = 9$  et  $i = 35$ , respectivement pour  $n = 2000$ , et  $n = 5000$ , par l'application de l'algorithme de Reiss and Thomas's nous obtenons respectivement,

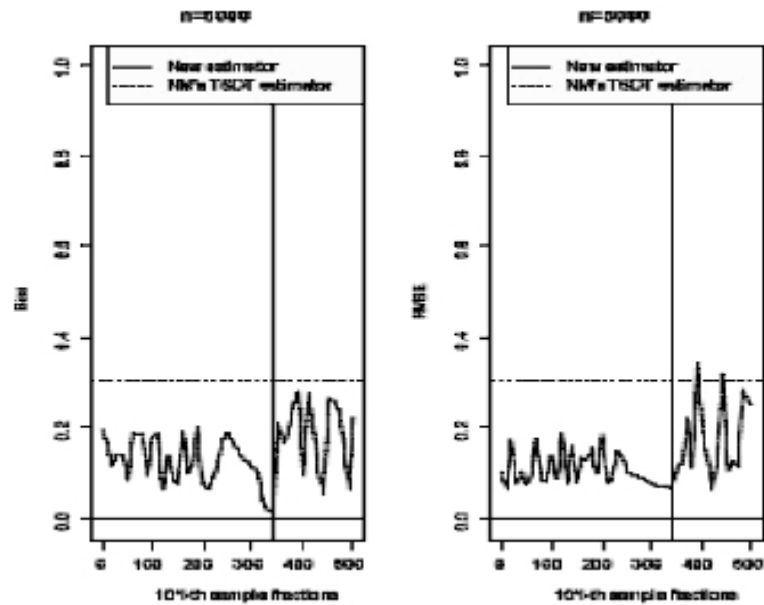


FIG. 4.2 – Biais (côté à gauche) et RMSE (côté à droite) de la nouvelle estimateur TSD et Necir et Meraghni TSD estimateur pour  $\alpha = 1.7$  et  $r = 0.6$ , basé sur 200 échantillons de 5000 observations stables.

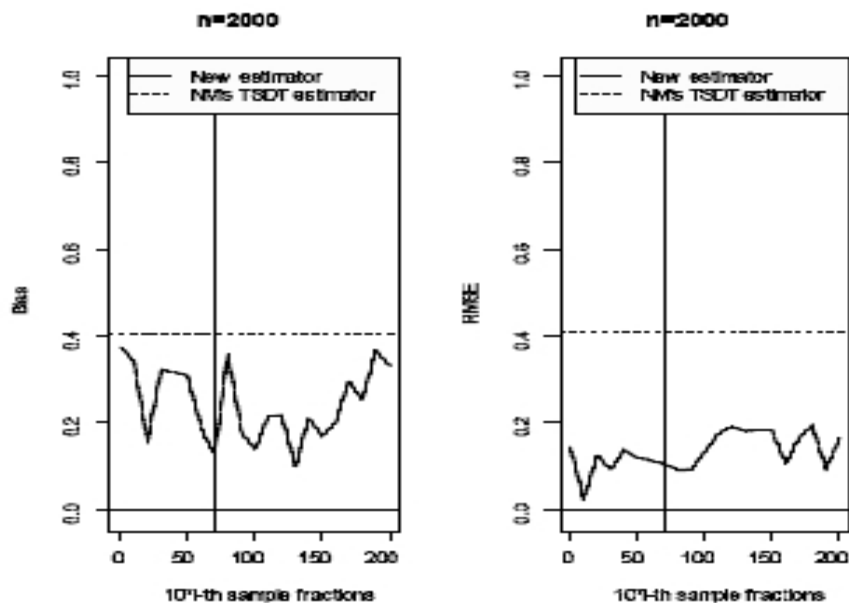


FIG. 4.3 – Biais (côté à gauche) et RMSE (côté à droite) de la nouvelle estimateur TSD et Necir et Meraghni TSD estimateur pour  $\alpha = 1.5$  et  $r = 0.7$ , basé sur 200 échantillons de 2000 observations stables.

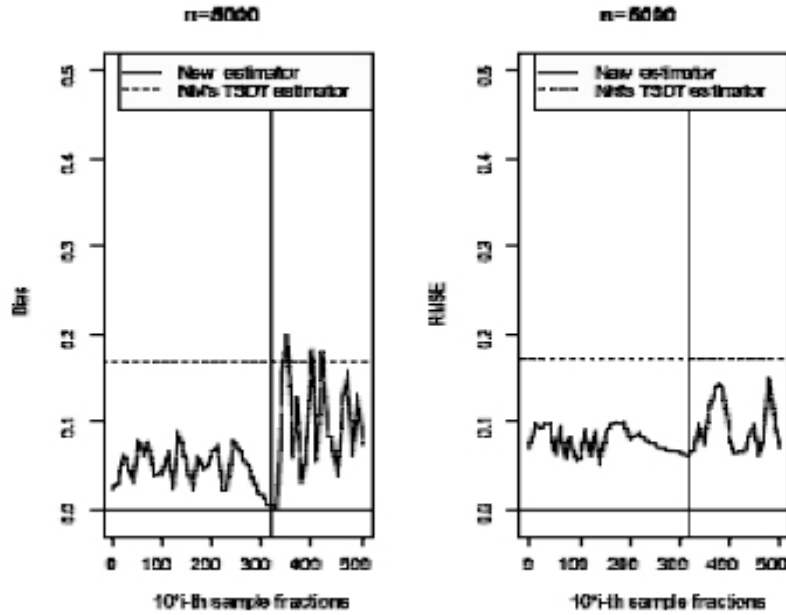


FIG. 4.4 – Biais (côté à gauche) et RMSE (côté à droite) de la nouvelle estimateur TSD et Necir et Meraghni TSD estimateur pour  $\alpha = 1.5$  et  $r = 0.7$ , basé sur 200 échantillons de 5000 observations stables.

(269, 277) et (771, 772). La même chose dans le tableau 4.2, pour  $\alpha = 1.5$ , les valeurs optimales graphiques de  $(\tilde{\ell}, \tilde{m})$  sont (250, 251) et (769, 772) correspondantes a  $i = 8$  et  $i = 33$ , respectivement pour  $n = 2000$ , et  $n = 5000$ . Si nous appliquons l’algorithme de Thomas et Reiss dans les étapes ci-dessus nous obtenons (247, 256) et (760, 763) respectivement.

## 4.4 Une Classification des Marchés Financiers Via la Mesure TSD Réduite

Les marchés financiers sont fondamentalement très volatile dans la mesure où ils dépendent de facteurs très difficiles à prévoir, que ce soit les facteurs géopolitiques, les aléas climatiques ou encore d’événements tels que les vues économiques ou encore l’évolution des capacités de production. De ce fait, les investisseurs et les gestionnaires des risques sont particulièrement sensibles à l’occurrence de pertes substantielles. Dans ce contexte, il est important de disposer des outils permettant de mieux quantifier les risques liés aux fluc-

tuations des prix.

Nous avons présenté une classe de modèle basée sur la théorie des valeurs extrêmes, qui permet d'évaluer les événements rares et les pertes associées à leur survenance. Mandelbrot [108] a proposé les distributions non normal stable, qui ont des queues de type Pareto avec un indice  $\alpha < 2$ , comme un modèle alternatif attractif particulier des rendements d'actifs. L'indice de stabilité de queue  $\alpha$  c'est le paramètre le plus important car c'est lui qui indique si la variance est finie ou non. Il semble donc de pouvoir l'estimer de la manière la plus correcte qui soit. Hill [74] a proposé le plus populaire estimateur robuste, basé sur le comportement asymptotique des valeurs extrêmes. McCulloch [105] a montré que l'estimateur de Hill peut donner des mauvais résultats lorsqu'il est appliqué à des données stables. Weron [154] a discuté la performance de cet estimateur pour un échantillon de taille finie et a noté que pour  $\alpha \leq 1.5$  l'estimation de Hill est tout à fait raisonnable, mais lorsque  $\alpha$  approche de 2, il ya une surestimation significative lorsque on considère des échantillons de taille typique le cas des rendements logarithmiques, i.e. tout estimateur de queue ne fonctionnera pas bien lorsque  $\alpha$  approche de 2 car la loi stable se rapproche d'une loi Gaussienne et la loi puissance de la queue disparaît. Alors de telles valeurs de  $\alpha$ , un très grand nombre d'observations (un million ou plus) est nécessaire pour obtenir des estimations acceptables et éviter les inférences trompeuses sur l'exposant caractéristique, parce que le vrai comportement de la queue des distributions Lévy-stables n'est visible que pour des très grand nombre de données. Pour une simulation de la queue droite des données stables symétrique avec  $\alpha = 1.8$  l'estimateur de Hill tend vers une surestimation significative de l'indice de queue comme montre le graphe (4.5).

L'estimateur de Hill est l'estimateur de maximum de vraisemblance conditionnelle de distribution de Pareto  $P(X > x) = Cx^{-\alpha}$  pour  $X \geq u$  ( $u$  fixé). Cet estimateur peut être appliqué pour une variété de distributions, comme la distribution stable et la distribution de valeur extrême de type II, d'où leurs queues sont approximativement de type Pareto ([70], [87], [130], [135]). Autres estimateurs de queue ont été aussi proposé, par exemple

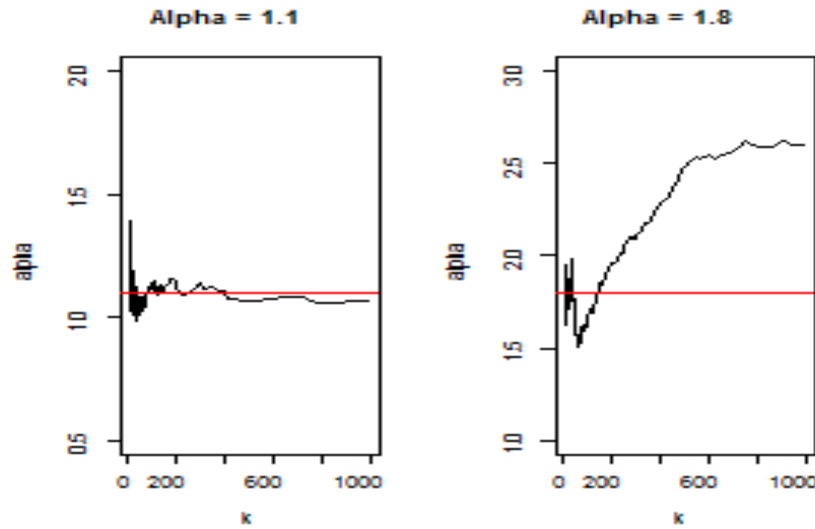


FIG. 4.5 – L’estimateur de Hill de l’indice de stabilité  $\alpha$  ( basé sur des échantillons de taille 5000) contre le nombre de statistique d’ordre supérieur  $k$  pour  $\alpha = 1.1$  (à gauche) et  $\alpha = 1.8$  (à droite). La ligne horizontal représente la vraie valeur de  $\alpha$ .

([35], [44], [53], [86], [95], [156]), cependant l’estimateur de Hill reste le plus populaire dans l’application.

Aban et Meerschaert [4] ont proposé une modification pratique de l’estimateur de Hill. L’estimateur de Hill est invariant dans l’échelle, de sorte qu’un facteur multiplicatif dans les données n’affect pas l’estimation. Par contre cet estimateur n’est pas invariant en translation, ce qui déforme l’estimation pour un facteur additif. Ils ont étendu l’estimateur de Hill on ajoutant l’information sur la translation. Utilisant les mêmes méthodes que Hill, ils ont calculé le MLE conditionnelle pour une distribution de Pareto translatée

$$P(X > x) = C(x - s)^{-\alpha}. \quad (4.12)$$

ce qui donne les estimations de  $\alpha > 0$ ,  $C > 0$  et  $s \in \mathbb{R}^1$  (une translation arbitraire).

Quand  $X_{(r)} > X_{(r+1)}$  l’estimateur du maximum de vraisemblance conditionnelle pour les



paramètres 4.12 sur la base des  $(r + 1)$  grandes statistiques d'ordre est donné par

$$\hat{\alpha} = \left[ r^{-1} \sum_{i=1}^r \{ \ln (X_{(i)} - \hat{s}) - \ln (X_{(r+1)} - \hat{s}) \} \right]^{-1}$$

et

$$\hat{C} = \left( \frac{r}{n} \right) (X_{(r+1)} - \hat{s})^{\hat{\alpha}}$$

où la translation optimale  $\hat{s}$  satisfait à l'équation,

$$\hat{\alpha} (X_{(r+1)} - \hat{s})^{-1} = (\hat{\alpha} + 1) r^{-1} \sum_{i=1}^r (X_{(i)} - \hat{s})^{-1}.$$

pour certains  $\hat{s} < X_{(r+1)}$ . L'estimateur résultant est à la fois invariant dans l'échelle et invariant en translation.

Un autre estimateur a été proposé par Mark M. Meerschaert [95], basé sur le comportement asymptotique de la somme. Cet estimateur performe aussi bien que l'estimateur de Hill dans la plupart des situations pratiques, et précisément dans les situations où l'estimateur de Hill est plus susceptible d'échouer comme le montre l'exemple si dessous.

$$\hat{M}_n = \frac{E + \ln_+ \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}{2(E + \ln n)},$$

d'où  $\bar{X}_n$  est la moyenne de l'échantillon,  $E = 0.5772$  est la constante d'Euler et  $\ln_+(x) = \max\{\ln x, 0\}$ .

**Exemple 4.1** *Nous considérons la distribution standard  $\alpha$ -stable  $S_\alpha(1, 0, 0)$ . Nous prenons différentes valeurs de  $\alpha$  et une taille d'échantillon  $n = 5000$ , d'où les résultats sont résumés dans le tableau (4.3) :*

Pour une simulation de la queue droite des données stables symétrique avec  $\alpha = 1.8$  et un changement simple d'échelle, l'estimateur de Hill tend vers une estimation significative de l'indice de queue comme montre le graphe (4.6)

$\alpha$	1.5	1.7	1.8	1.9
Hill	1.58	1.87	2.47	3.22
Meerschaert	1.53	1.72	1.81	1.92

TAB. 4.3 – Comparaison des deux estimateurs Hill et Meerschaert de l'indice de stabilité pour une distribution alpha stable symétrique.

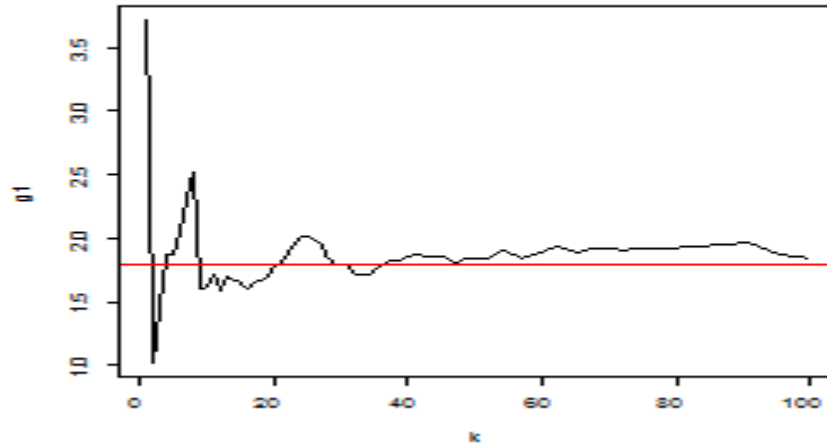


FIG. 4.6 – L'estimateur de Hill de l'indice de stabilité  $\alpha$  ( basé sur des échantillons de taille 1000) contre le nombre de statistique d'ordre supérieur  $k$  pour  $\alpha = 1.8$  avec un changement simple d'échelle. La ligne horizontale représente la vraie valeur de  $\alpha$ .

Les rendements d'actifs financiers sont le résultat cumulatif d'un grand nombre des décisions individuelles qui ont toujours lieu dans le temps. Selon le théorème central limite généralisé, si la somme d'un grand nombre de variables aléatoires i.i.d a une distribution limite après un changement d'échelle et une translation simple, la distribution limite doit être un membre de la classe Lévy stable voir [159], chap. I.

Donc il est naturel de supposer que les rendements d'actifs sont au moins approximativement gouverné par une distribution stable si l'accumulation est additive, ou par une distribution log-stable si l'accumulation semble être multiblicative. Alors, pour des données réelles nous devons toujours commencer par un changement d'échelle simple des données. Fofack et Nolan suggerent de centrer les données autour de la médiane ou du mode avant d'utiliser l'estimateur de Hill, puisque l'estimateur de Hill est invariant dans

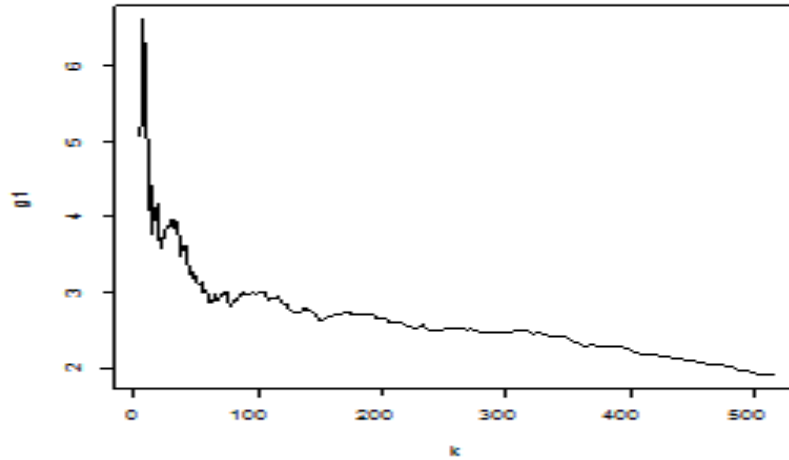


FIG. 4.7 – L’estimateur de Hill de l’indice de stabilité  $\alpha$  pour l’indice boursier Nazdaq après un changement d’échelle.

l’échelle (par ailleurs, l’estimateur de Hill n’est pas invariant en translation), pour plus de détails consulter [4]. Alors, avec les données des rendements logarithmiques  $R$  on divise chaque observation par la médiane de  $|R|$ . Le graphe (4.7) montre la performance du nouvel changement de la variable utilisée pour l’estimateur de Hill contre celle de l’estimateur de Hill usuel, dans le cadre d’applications pour des données réelles en particulier l’indice boursier du Nazdaq. Par la suite, nous utilisons cet nouvel estimateur de Hill qui rentre dans le calcul de notre nouvelle mesure de risque bilatérale TSD et nous calculons les valeurs correspondantes à cette dernière pour quelques indices boursiers. Les résultats sont résumés dans le tableau suivant :

	$r = 0.6$	$r = 0.7$
	$(\tilde{\Delta}_r, \hat{\alpha})$	$(\tilde{\Delta}_r, \hat{\alpha})$
Nasdaq (05/02/1971)→(27/09/2012)	(1.46, 1.7)	(0.84, 1.7)
DJIA (01/10/1928)→(04/01/2012)	(1.55, 1.72)	(0.84, 1.72)
DAX (02/01/1992)→(01/11/2012)	(1.19, 1.8)	(0.67, 1.85)
S&P500 (03/01/1950)→(23/01/2013)	(1.22, 1.74)	(0.72, 1.74)
CAC40 (02/01/1992)→(01/11/2012)	(1.06, 1.75)	(0.62, 1.75)

TAB. 4.4 – Estimation empirique de la mesure de risque bilatérale pour quelques indices boursiers pour différentes valeurs de  $r$ .

Ces résultats prouvés que nous avons pu valider nos résultats dans le contexte des applications avec des données réelles après avoir centré ces dernières autour de sa moyenne. Car si on travaille avec la même variable des variations d'actifs sans faire ce changement on obtient des mauvaises estimations ( la nouvelle mesure s'approche de 0 pour tous les indices précités au-dessus). Alors, nous invitons les investisseurs de prendre une décision à l'investissement dans l'un des marchés financiers à travers cette nouvelle mesure de risque.

# Conclusion

Dans ce travail, nous traitons de manière approfondie les lois stables univariées (lois à variance infinie). Dans une première partie du premier chapitre, nous rappelons les différentes propriétés de ces lois (stabilité, calcul des moments, simulation). Nous présentons ensuite les différentes approches classiques pour estimer les paramètres caractérisant les lois stables (ML, Moment, Quantile), ainsi une étude empirique des rendements logarithmiques d'actifs, après avoir déterminé la variable qui décrit le mieux les variations des actifs, les propriétés statistiques communes à la plupart de ces derniers, en particulier l'indice boursier du Nasdaq de la période allant du 05/02/1971 au 23/01/2013, et faire rendre compte ces faits stylisés par un modèle justifié par des causes plausibles, en utilisant des tests graphiques tels que, les histogrammes, qui permettent de visualiser la distribution empirique, et les graphiques quantiles quantiles. Dont le modèle justifié est la loi stable qui a été proposé par Mandelbrot [108], du fait qu'elle reflète les propriétés statistiques communes à la plupart des rendements tels que les grandes fluctuations, une possibilité de dissymétrie dans la distribution, des queues épaisses, une distribution leptokurtic et des moments d'ordre  $p$  ( $p < \alpha$ ) sont infinis. Dans un deuxième chapitre nous nous intéressons, non pas au comportement en moyenne de données, mais à celui d'événements à valeurs beaucoup plus fréquentes que celles observées autour de la moyenne (appelées valeurs extrêmes). En effet, un rappel des théorèmes probabilistes essentiels à la compréhension de la TVE : les théorèmes de Fisher-Tippet et de Balkema-de Haan-Pickands. Ainsi des méthodes statistiques associées : la méthode Block Maxima qui repose sur les  $k$

plus grandes observations d'un échantillon et détermine les trois lois possibles des extrema et une deuxième utilise les observations au delà d'un seuil déterministe, nous parlons alors du méthode "Pics au delà d'un seuil" (POT). Ces méthodes permettent de prévoir des sinistres graves pour une probabilité d'occurrence donnée (très faible) et un intervalle de confiance fixé. Finalement, une application de cette approche dans l'estimation des paramètres des lois stables. Nous abordons dans le troisième chapitre, les différentes mesures de risque en finance traditionnelles et actuelles ainsi leurs propriétés et leurs paramètres. Après avoir parler de la mesure de distorsion et de son intérêt pour quantifier le risque, nous nous concentrons sur la mesure de la queue à deux déviations introduite par Wang [151] comme une moyenne de la mesure de queue à déviation droite et la mesure de queue à déviation à gauche d'où elle peut s'écrire comme une L-fonctionnelle. Par la suite, nous exposons le récent travail de Necir et al [117] concernant l'estimation des L-fonctionnelles dans un cadre plus générale, où les distributions sont à queues lourdes, via l'approche des valeurs extrêmes, et qui peuvent être appliquer pour certaines mesures de risque. En effet, la première application a été fait dans le même travail de Necir et al [117] pour la mesure de risque TSD. Ensuite, nous avons proposé une procédure computationnelle des bornes de confiance de cette mesure pour des distributions appartenant au domaine d'attraction de Lévy stable dont les résultats sont validés par des simulations et justifiés par des données réelles. Après avoir conclu le chapitre par une conséquence que l'estimateur  $\widehat{\Delta}_{n,r}$  est biaisé, même pour une taille d'échantillon peu élever, à cause de l'utilisation des quantiles extrêmes de Weissman qui sont largement biaisés, nous construisons dans le quatrième chapitre, une nouvelle mesure de risque de la mesure TSD, en réduisant le biais via les estimateurs des quantiles extrêmes proposés par Li et al [92]. De nombreuses simulations, nous permettent de comparer la nouvelle mesure avec celle introduite récemment par Necir et al [117] en terme de biais et l'erreur moyenne quadratique (RMSE).

La conclusion générale qu'on peut faire est que, d'après les résultats de simulation les tableaux et les figures, le nouvel estimateur  $\widetilde{\Delta}_{n,r}$  de la mesure TSD est plus performant

en terme de biais et RMSE, mais avec des fractions d'échantillons plus grandes que l'estimateur  $\widehat{\Delta}_{n,r}$  proposé par Necir et Meraghni [117].

À travers notre étude de simulation, nous avons constaté que le problème le plus important est de pouvoir estimer l'indice de stabilité de la manière la plus correcte qui soit surtout lorsque ce dernier proche de 2 qui est souvent le cas des indices boursiers non normal stable. Hill [74] a proposé le plus populaire estimateur robuste, basé sur le comportement asymptotique des valeurs extrêmes. Mais un des problèmes important est le choix du nombre de données à retenir pour l'estimation c'est à dire le choix du point où commence la queue (un choix judicieux). Hall [70] a noté que la valeur de  $k$  devrait être bien choisir pour équilibrer entre le biais et la précision. Une grande valeur de  $k$  donne plus de précision (i.e. variance plus faible) mais avec un grand biais. Différentes méthodes numériques ont été proposé pour la détermination de la valeur de  $k$ , voir par exemple, Dekkers et de Haan [36], Drees et Kaufmann [45], Danielsson et al. [32], Cheng et Peng [29] et Neves et Fraga Alves [118].

Ce problème est abordé aussi par Weron [154], il a noté que pour  $\alpha \leq 1.5$  l'estimation de Hill est tout à fait raisonnable, mais lorsque  $\alpha$  approche de 2, il ya une surestimation significative lorsque on considère des échantillons de taille typique. De telles valeurs de  $\alpha$ , un très grand nombre d'observations (des millions) est nécessaire pour obtenir des estimations acceptables et éviter les inférences trompeuses sur l'exposant caractéristique, parce que le vrai comportement de la queue des distributions Lévy-stables n'est visible que pour des très grandes ensembles de données. Ainsi que Loretan et Phillips [91] ont discuté que certains rendements d'actifs ne peuvent pas être modélisé par une distribution stable car l'estimateur de Hill donne des valeurs de  $\alpha$  plus grande que 2.

En somme, il est difficile d'avoir un estimateur de bonne qualité de l'indice de stabilité lorsque ce dernier est proche de 2, sauf si on a un très grand nombre d'observations qui dépasse un trois millions ou plus. Je pense alors que tout estimateur de queue ne fonctionnera pas bien lorsque alpha proche de 2, donc tout estimateur s'appuis sur les

données de queue est susceptible d'être biaisé. De plus, si nous utilisons un ensemble de donnée réelles le monde n'est pas parfait ; la plupart des ensembles de données réelles ne sont pas exactement quelque chose ; pas normal, pas stable, pas student, etc.



# Bibliographie

- [1] Adam, E. (2001). L'analyse fractale des marchés financiers. Stage effectué à Finama Asset Management.
- [2] Acerbi, C., Tasche, D., 2001. On the coherence of Expected Shortfall, Milano, Italy.
- [3] Artzner, P., Delbaen, F., J. M. Eber, Heath, D., 1999. Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*. 203–228.
- [4] I.B. Aban and M.M. Meerschaert, Shifted Hill's estimator for heavy tails. *Communications in Statistics : Simulation and Computation*, Vol. 30 (2001), No. 4, pp. 949-962.
- [5] I.B. Aban, M.M. Meerschaert, and A.K. Panorska, Parameter Estimation for the Truncated Pareto Distribution, *Journal of the American Statistical Association : Theory and Methods*, Volume 101 (2006), Number 473, pp.270-277.
- [6] Balkema, A. A., de Haan, L., 1975. Limit laws for order statistics. *Limit theorems of probability theory (Colloq., Keszthely, 1974)*, pp. 17-22. *Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai*, Vol. 11, North-Holland, Amsterdam.
- [7] Beirlant, J., Teugels, J., 1987. Asymptotic normality of Hill's estimator. *Extreme value theory (Oberwolfach, 1987)*, 148-155, *Lecture Notes in Statistics*, 51, Springer, New York, 1989.
- [8] Beirlant, J., Diercks, G., Guillou, A., Starica, C., 2002. On exponential representations of log-spacings of extreme order statistics. *Extremes*. 5(2), 157-180.

- [9] Beirlant, J., Figueiredo, F., Gomes, M. I. and Vandewalle, B., 2008. Improved reduced bias tail index and quantile estimators. *J. Statist. Plann. Inference.* 138, pp. 1851-1870.
- [10] Bickel, P.J., 1967. Some contributions to the theory of order statistics. *Proc. Fifth Berkeley Sympos. Math. Statist. and Probability (Berkeley, Calif., 1965/66)*, Vol. I : Statistics pp. 575{591 Univ. California Press, Berkeley, Calif.
- [11] Brahim, B., Meraghni, D., Necir, A. and Zitakis, R., 2011. Estimating the distortion parameter of the proportional-hazard premium for heavy-tailed losses. *Insurance Math. Econom.* 49, 325–334.
- [12] Brahim, B., Meraghni, D., Necir, A. and Touba, S., 2012. Bias-reduced estimation of Wang’s two-sided deviation risk measure under Levy-stable regime
- [13] Borak, Sz., Härdle, W. et Weron, R. (2004). Stable Distributions, in P. Cizek, W. Härdle, R. Weron (eds.) *Statistical Tools for Finance and Insurance*, Springer.
- [14] Boos, D. D., 1979. A differential for L-statistics. *Annals of Statistics* 7, no. 5, 955-959.
- [15] Kaiser, T., Brazauskas, V., (2006). Interval estimation of actuarial risk measures. *North American Actuarial Journal*, Volume 10, Number 4.
- [16] Brazauskas, V., Jones, B.L., Puri, M.L., Zitakis, R. 2006. Estimating Conditional Tail Expectations with Actuarial Applications in View. *Journal of Statistical Planning and Inference*, in press.
- [17] Brazauskas, V., Jones, B.L., Puri, M.L., Zitakis, R., (2007). Nested L-statistics and their use in comparing the riskiness of portfolios. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2007, 162-179.
- [18] Brazauskas, V., Jones, B.L., Puri, M.L., Zitakis, R., (2008). Estimating conditional tail expectation with actuarial applications in view. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 138(11), 3590-3604.

- [19] Brazauskas, V., Jones, B.L., Zitikis, R., 2009. Robust fitting of claim severity distributions and the method of trimmed moments. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 139, 2028-2043.
- [20] Brothers K. M., Dumouchel W. H. and Paulson A. S. (1983). Fractiles of the stable laws. Technical report, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, NY.
- [21] Chambers J.M., Mallows C.L., Stuck B.W., 1976. A method for simulating stable random variables. *Journal of the American Statistical Association*, 71, p. 340-344.
- [22] Chernoff, H., Gastwirth, J. L., Johns, M. V., 1967. Asymptotic distribution of linear combinations of functions of order statistics with applications to estimation. *Annals of Mathematical Statistics* 38, 52-72.
- [23] Csörgő, M., Mason, D. M., 1985. Central limit theorems for sums of extreme values. *Mathematical Proceedings Cambridge Philosophy Society* 98, 547-558.
- [24] Csörgő, M., Csörgő, S., Horváth, L., Mason, D. M., 1986a. Normal and stable convergence of integral functions of the empirical distribution function. *Annals of Probability* 14, 86-118.
- [25] Csörgő, M., Csörgő, S., Horváth, L., Mason, D. M., 1986b. Weighted empirical and quantile processes. *Annals of Probability* 14, 31-85.
- [26] Csörgő, S., Horváth, L., Mason, D. M., 1986c. What portion of the sample makes a partial sum asymptotically stable or normal? *Probability Theory and Related Fields* 72, 1-16.
- [27] Caeiro, F., Figueiredo, F. and Gomes, M. I., 2004. Bias reduction of a tail index estimator through an external estimation of the second order parameter. *Statistics*. 38 (6), 497–510.
- [28] Caeiro, F., Gomes, M. I. and Rodrigues, L. H., 2009. Reduced-bias tail index estimators under a third-order framework. *Comm. Statist. Theory Methods*. 38, no. 6-7, 1019–1040.

- [29] Cheng, S. and Peng, L., 2001. Confidence intervals for the tail index. *Bernoulli* 7, 751-760.
- [30] Csörgő, S., Deheuvels, P. et Mason, D. (1985). Kernel estimates of the tail index of a distribution. *Ann. Statist.*, 13, 1050-1077.
- [31] Danielsson, J., de Vries C. G., 1997. Tail index estimation with very high frequency data, *Journal of Empirical Finance* 4, 241-257.
- [32] Danielsson, J., de Haan, L., Peng, L., de Vries, C. G., 2001. Using a bootstrap method to choose the sample fraction in tail estimation. *Journal of Multivariate Analysis* 76, 226-248.
- [33] Deheuvels, P., Haeusler, E., Mason, D. M., 1988. Almost sure convergence of the Hill estimator. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophy Society* 104, 371-381.
- [34] Dekkers, A. L. M., de Haan, L., 1989. On the estimation of the extreme-value index and large quantile estimation. *Annals of Statistics* 17, 1795-1832.
- [35] Dekkers, A. L. M., Einmahl, J. H. J., de Haan, L., 1989. A moment estimator for the index of an extreme-value distribution. *Annals of Statistics* 17, 1833-1855.
- [36] Dekkers, A. L. M., de Haan, L., 1993. Optimal choice of sample fraction in extreme-value estimation. *Journal of Multivariate Analysis* 47, 173-195.
- [37] Denneberg, D., 1994. *Non-additive Measure and Integral*. Dordrecht, Kluwer.
- [38] L. de Haan and A. Ferreira. *Extreme Value Theory : An Introduction*. Springer, New York, 2006.
- [39] de Haan, L. and Stadtmüller, U., 1996. Generalized regular variation of second order. *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* 61, no. 3, 381–395.
- [40] de Haan, L. (1976). Sample extrêmes : an elementary introduction. *Statistica Neerlandica*. 30, 161-172.

- [41] de Haan, L. et Resnick, S. (1996). On asymptotic normality of the Hill estimator. Preprint, disponible au TR1155. ps.Z, [http : //www.orie.cornell.edu/trilst/trilst.html](http://www.orie.cornell.edu/trilst/trilst.html).
- [42] de Haan, L. et Stadtmüller, U. (1996). Generalized regular variation of second order. *J. Australian Math. Soc.*, (serie A), 61, 381-395.
- [43] de Haan, L., Pereira, T. T., 1999. Estimating the index of a stable distribution. *Statistics and Probability Letters* 41, 39-55.
- [44] Drees, H. Refined Pickands estimators of the extreme value index. *Ann. Statist.*, 1995, 23, 2059–2080.
- [45] Drees, H., Kaufmann, E., 1998. Selection of the optimal sample fraction in univariate extreme value estimation. *Stochastic Processes and Applications* 75, 149-195.
- [46] Drees, H. (2000). Weighted approximations of tail processes for  $\beta$ -mixing random variables. *Annals of Applied Probability*. 10, 1274-1301.
- [47] Drees, H. (2002). Extreme quantile estimation for dependent data with applications to finance. Preprint N° 68. University of Saarland. disponible dans : *www. math.uni-sb.de*.
- [48] DuMouchel W H Stable distributions in statistical inference PhD dissertation Department of Statistics Yale University
- [49] DuMouchel, W.H. (1973). On the asymptotic normality of the maximum-likelihood estimate when sampling from a stable distribution. *Annals of statistics* 1(5), 948-957.
- [50] Embrechts, P., Kluppelberg, C., and Mikosch, T. (1997). *Modeling Extremal Events. With a View towards Insurance and Finance*, Springer, Berlin.
- [51] Embrechts, P., Resnick, S., Samorodnitsky, G., 1999. Extreme value theory as a risk management tool, *North American Actuarial Journal* 26, 30-41.
- [52] Elamir, E.A.H., Seheult, A.H., 2003. Trimmed L-moments. *Computational Statistics and Data Analysis* 43, 299-314.

- [53] Falk, M. On testing the extreme value index via the POT-method. *Ann. Statist.*, 1995, 23, 2013–2035.
- [54] Fama, E.F., 1965. The Behavior of stock market prices. *Journal of Business* 38, 34-105.
- [55] Fama, E.F. et Roll, R. (1971). Parameter Estimates for Symmetric Stable Distributions. *Journal of the American Statistical Association*, 66, 331-338.
- [56] Feller, W., 1971. An introduction to probability theory and its applications, Vol. II, Wiley, New York.
- [57] Fisher, R. & Tippett, L., 1928, Limiting Forms of the Frequency Distribution of the Largest or Smallest Member of a Sample, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 24, 180-190.
- [58] Furrer, H. (1998). Risk processes perturbed by  $\alpha$ -stable Lévy motion, *Scandinavian Actuarial Journal* 10 : 23–35.
- [59] Furrer, H., Michna, Z. and Weron A. (1997). Stable Lévy motion approximation in collective risk theory, *Insurance : Mathematics and Economics* 20 : 97–114.
- [60] Gençay R., Selçuk F., 2004. Extreme value theory and value-at-risk : Relative performance in emerging markets”, *International Journal of Forecasting* 20, p. 287-303.
- [61] Groeneboom, P., Lopuhaäa, H.P.et de Wolf, P.P. (2003). Kernel estimators for the extreme value index. *Ann.*
- [62] Garcia, R., Renault, E. and Veredas, D., 2006. Estimation of Stable Distributions by Indirect Inference. *Core Discussion Paper*. 2006/112.
- [63] Gomes, M. I. and Figueiredo, F., 2006. Bias reduction in risk modelling : semi-parametric quantile estimation. *Test*. 15 (2), 375-396.
- [64] Gnedenko, B. V. (1943). Sur la distribution limite du terme maximum d’une série aléatoire. *Annales de Mathématiques* 44, 423-453.

- [65] Gomes, M. I. and Martins, M. J., 2002. Asymptotically unbiased estimators of the tail index based on external estimation of the second order parameter. *Extremes*. 5(1), 5-31.
- [66] Gomes, M. I. and Martins, M. J., 2004. Bias reduction and explicit efficient estimation of the tail index. *Journal of Statistical Planning and Inference*. 124, 361-378.
- [67] Gomes, M. I., Figueiredo, F., Mendonca, S., 2005. Asymptotically best linear unbiased tail estimators under a second-order regular variation condition. *Journal of Statistical Planning and Inference* 134, 409-433.
- [68] Gomes, M. I. and Pestana, D., 2007. A simple second-order reduced bias' tail index estimator. *J. Stat. Comput. Simul.* 77, no. 5-6, 487-504.
- [69] Greselin, F., Puri, M.L., Zitikis, R., 2009. L-functions, processes, and statistics in measuring economic inequality and actuarial risks. *Statistics and Its Interface*, 2, 227-245.
- [70] Hall, P. (1982). On some simple estimators of an exponent of regular variation. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B.* 44, 37-42.
- [71] Hall, P. and Welsh, A. H., 1985. Adaptive estimates of parameters of regular variation. *Ann. Statist.* 13, 331-341. *Statist.*, 31, 1956-1995.
- [72] Feuerverger, A. and Hall, P., 1999. Estimating a tail exponent by modelling departure from a Pareto distribution. *Ann. Statist.* 27, 760 - 781.
- [73] Hardin J., C.D. (1984), *Skewed stable variables and processes*. Rapport technique, Center for Stochastic Processes at the University of North Carolina.
- [74] Hill, B. M., 1975. A simple approach to inference about the tail of a distribution. *Ann. Statist.* 3, 1136-1174.
- [75] HOLT D. and CROW E. (1973). Tables and graphs of the stable probability functions, *J. Res. Nat. Bureau Standars, B. Math. Sci.*, 77b, 143-198.

- [76] Hosking, J.R.M., 1990. L-moments : analysis and estimation of distributions using linear combinations of order statistics. *Journal of the Royal Statistical Society serie B* 52, 105-124.
- [77] Hosking, J. R. M., 2007. Some theory and practical uses of trimmed L-moments. *Journal of Statistical Planning and Inference* 137, no. 9, 3024-3039.
- [78] Ihaka, R. and Gentleman, R., 1996. R : A Language for Data Analysis and Graphics. *Journal of Computational and Graphical Statistics*. 5, 299-314.
- [79] Jones, B. L. and Zitikis, R., 2003. Empirical estimation of risk measures and related quantities. *North American Actuarial Journal*. 7(4), 44-54.
- [80] Jones, B. L. and Zitikis, R., 2005. Testing for the order of risk measures : an application of L-statistics in actuarial science. *Metron*. 63, no. 2, 193-211.
- [81] Janicki, A. et Weron, A. (1994). *Simulation and chaotic behavior of  $\alpha$ -stable stochastic processes*. New York, Marcel Dekker.
- [82] Jones, B.L., Zitikis, R., 2007. Risk measures, distortion parameters, and their empirical estimation. *Insurance : Mathematics and Economics*, 41, 279-297.
- [83] Kanter, M., 1975. Stable densities under change of scale and total variational inequalities. *Ann. Probab.* 3, 697-707.
- [84] Kanter, M. (1976). On the unimodality of stable distributions. *The Annals of Probability* 6, 1006-1008.
- [85] Koutrouvelis, I.A. (1980). Regression-type estimation of the parameters of stable law. *Journal of the American statistical association* 75, 918-928.
- [86] Kratz, M. ; Resnick, S. The qq estimator and heavy tails. *Stochastic Models*, 1996, 12, 699-724.
- [87] Leadbetter, M. ; Lindgren, G. ; Rootze´ n, H. *Extremes and related properties of random sequences and processes*, Springer-Verlag, New York, 1980.
- [88] Lévy Paul, 1925. *Calcul des probabilités*. Paris, Gauthier-Villars.



- [89] Longin F. M., 1998. Value at risk : Une nouvelle approche fondée sur les valeurs extrêmes. *Annales d'économie et de statistique* 52, p. 23-51.
- [90] Longin F. M., 2000. From value at risk to stress testing : The extreme value approach. *Journal of Banking and Finance* 24, p. 1097-1130.
- [91] Loretan, M., Phillips, P., 1994. Testing the covariance stationarity of heavy tailed time series. *J. Empirical Finance* 1, 211-248.
- [92] Li, D., Peng, L. and Yang, J., 2010. Bias reduction for high quantiles. *Journal of Statistical Planning and Inference*. 140, 2433-2441.
- [93] Matthys, G., Delafosse, M., Guillou, A. and Beirlant, J., 2004. Estimating catastrophic quantile levels for heavy-tailed distributions. *Insurance Math. Econom.* 34, 517–537.
- [94] Matthys, G., Beirlant, J., 2003. Estimating the extreme value index and high quantiles with exponential regression models. *Statistica Sinica* 13, 853-880.
- [95] Mark M. Meerschaert and Hans-Peter Scheffler, 1998. A simple robust estimation method for the thickness of heavy tails, *Journal of Statistical Planning and Inference*, Vol. 71 (1998), No. 1-2, pp. 19-34.
- [96] M.M. Meerschaert, P. Roy, and Q. Shao, Parameter estimation for tempered power law distributions, *Communications in Statistics – Theory and Methods*, Vol. 41 (2012), No. 10, pp. 1839–1856.
- [97] Mason, D. M., 1981. Asymptotic normality of linear combinations of order statistics with a smooth score function. *Annals of Statistics* 9, 899-908.
- [98] Mason, D. M., 1982. Laws of the large numbers for sums of extreme values. *Annals of Probability* 10, 754-764.
- [99] Mason, D. M. ; Shorack, G. R., 1992. Necessary and sufficient conditions for asymptotic normality of L-statistics. *Ann. Probab.* 20, 1779-1804. *istics*. Volume 2010, ID 707146.

- [100] McCulloch, H. J. (1986). Simple consistent estimators of stable distribution parameters. *Communications in statistics - simulations* Vol. 15, 1109-1136.
- [101] McCulloch, H. J. (1996). Financial applications of stable distributions. In G.S. Maddala, C.R.Rao (eds), *Handbook of statistics*, Vol. 14, Elsevier, pp. 393-425.
- [102] McCulloch J. H. and Panton D.(1998). Tables of the maximally-skewed stable distributions. In R. Adler, R. Feldman, and M. Taqqu (Eds.), *A Practical Guide to Heavy Tails : Statistical Techniques for Analyzing Heavy Tailed Distributions*, 501-508.
- [103] H. Markowitz. *Portfolio selection : Efficient diversification of investments*. John Wiley & Sons, New York, 1959.
- [104] McNeil A. J., 1998. Calculating quantile risk measures for financial time series using extreme value theory, Department of Mathematics, ETH. Swiss Federal Technical University E-Collection, [<http://ecollection.ethbib.ethz.ch/>].
- [105] McCulloch, J., 1997. Measuring tail thickness to estimate the stable index : a critique. *J. Business Econ. Statist.* 15, 74-81.
- [106] Meraghni, D. and Necir, A., 2007. Estimating the Scale Parameter of a Lévy-Stable Distribution via the Extreme Value Approach. *Methodology and Computing in Applied Probability.* 9, 557-572.
- [107] Monchaya Chiangpradit et al (2011). Confidence Interval Estimation for Right-Tailed Deviation Risk Measures Under Heavy-Tailed Losses. *Chiang Mai J. Sci.* 2011 ; 38(1) : 13-22.
- [108] Mandelbrot Benoit, (1963). The variation of certain speculative prices. *The journal of Business*, volume 36, Issue 4 (Oct. , 1963), 394-419.
- [109] Mittnik Stefan, Doganoglu T. et Chenyao D., 1999. Computing the Probability Density Function of the Stable Paretian Distribution. *Mathematical and Computer Modelling*, 29, N° 10-12, p. 235-240.

- [110] Nolan J.P., (2001). Maximum likelihood estimation and diagnostics for stable distributions, in O.E. Barndorff-Nielsen, T. Mikosch, S. Resnick (eds.), *Lévy Processes*, Birkhäuser, Boston.
- [111] Nolan J.P., *Communications in Statistics – Stochastic Models* 13 (1997) 759. The computer program STABLE can be downloaded from : <http://academic2.american.edu/~jpnolan/stable/stable.html>.
- [112] Nolan J. (1996.) Numerical approximation of stable densities and distribution functions. Preprint American University Washington.
- [113] Nolan J.P., 1999. An Algorithm for Evaluating Stable Densities in Zolotarev's (M) Parameterization. *Mathematical and Computer Modelling*, 29, N° 10-12, p. 229-233.
- [114] Necir, A., Meraghni, D., (2006). Computing confidence bounds for the mean of a Lévy-Stable distribution. *Proceeding in computational statistics* (Edited by Alfredo Rizzi and Maurizio Vichi), 1285-1291. *Physica-Verlag, Springer*, ISBN : 3-7908-1708-2.
- [115] Necir, A., Meraghni, D., and Meddi, F., 2007. Statistical estimate of the proportional hazard premium of loss. *Scand. Actuar. J*, no. 3, 147–161.
- [116] Necir, A. and Meraghni, D. 2009. Empirical estimation of the proportional hazard premium for heavy-tailed claim amounts. *Insurance Math. Econom.* 45, no. 1, 49–58.
- [117] Necir, A. and Meraghni, D., 2010. Estimating L-functionals for Heavy-tailed Distributions and Applications. *Journal of Probability and Statistics*. Volume 2010, ID 707146.
- [118] Neves, C. and Fraga Alves, M.I. (2004). Reiss and Thomas' Automatic Selection of the Number of Extremes. *Computational Statistics and Data Analysis* 47, 689-704.
- [119] C.L. Nikias et M. Shao. *Signal Processing with alpha-stable distributions and applications*. New-York, Wiley-Interscience, 1995.

- [120] J. Pickands, "Statistical inference using extreme order statistics", *Ann. Statist.* 3 (1975), pp. 119-131.
- [121] Peng, L., 2001. Estimating the mean of a heavy-tailed distribution. *Statistic and Probability Letters.* 52, 255-264.
- [122] Peng, L., and Qi, Y., 2004. Estimating the first- and second -order parameters of a heavy-tailed distribution. *Aust. N. Z. J. Stat.* 46(2), 305-312.
- [123] Paulson A. S. and Delehanty T. A. (1993). Tables of the fractiles of the stable law. Technical Report, *Rensselaer Polytechnic Institute*, Troy, NY.
- [124] Panton D. (1992). Cumulative distribution function values for symmetric standardized stable distributions. *Statist. Simula.* 21, 458-492.
- [125] Pavel Cizek, Wolfgang Hardle, Rafal Weron, *Statistical Tools for Finance and Insurance*. November 17, 2004.
- [126] Press, J. S. (1972). Estimation of univariate and multivariate stable distributions. *Journal of the American statistical association* 67, 842-846.
- [127] Rachev, S. and Mittnik, S. (2000). *Stable paretian models in finance*. Wiley.
- [128] Rachev, S. (2003). *Handbook of heavy-tailed distributions in finance*. North Holland
- [129] Rafal.Weron, (2001) "Lévy-stable revisited : tail index  $> 2$  does not exclude the Lévy-stable regime", *International Journal of Modern Physics C* 12(2), 209-223, [Cond-mat/0103256].
- [130] Resnick, S. ; Stărică , C. Consistency of Hill's estimator for dependent data. *J. Appl. Probab.*, 1995, 32, 139–167.
- [131] Reiss, R. D. and Thomas, M., 1997. *Statistical Analysis of Extreme Values with Applications to Insurance, Finance, Hydrology and Other Fields*, Third edition. Birkhäuser, Basel.
- [132] Rolski, T., Schmidli, H., Schmidt, V. and Teugels, J. (1999). *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, John Wiley and Sons, New York.

- [133] Rockafellar, R., Tyrrell, I., Uryasev, S., 1999. Optimization of Conditional Value-at-Risk. Portfolio Safeguard by [www.AOrDa.com](http://www.AOrDa.com).
- [134] Ruymgaart, F. H., van Zuijlen, M. C. 1977. Asymptotic normality of linear combinations of functions of order statistics in the non-i.i.d. case. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* 80=Indag. Math. 39, no. 5, 432-447.
- [135] Samorodnitsky, G. and Taqqu, M.S., 1994. Stable non-Gaussian random processes : Stochastic models with infinite variance. Chapman & Hall, New York.
- [136] Shorack, G.R., 1969. Asymptotic normality of linear combinations of function of order statistics. *Annals of Mathematical Statistics* 40, 2041-2050.
- [137] Shorack, G.R., 1972. Functions of order statistics. *Annals of Mathematical Statistics* 43, 412-427.
- [138] Shorack, G.R. and Wellner, J. A., 1986. Empirical processes with applications to statistics. New York : John Wiley & Sons.
- [139] Schmidli, H. (1994). Diffusion approximations for a risk process with the possibility of borrowing and investment, *Stochastic Models* 10 : 365-388.
- [140] Sen, P. K. 1978. An invariance principle for linear combinations of order statistics. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete* 42, no. 4, 327-340.
- [141] Serfling, R.J., 1980. Approximation theorems of mathematical statistics. Wiley, New York. Singh, K., 1981.
- [142] Shirayayev A. N. (1984). Probability, volume 95 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag.
- [143] Singh, K., 1981. On asymptotic representation and approximation to normality of L-statistics. I. *Sankhya Ser. A* 43, no. 1, 67-83.
- [144] Stigler, S.M., 1969. Functions of order statistics. *Annals of Mathematical Statistics* 43, 412-427.

- [145] Stigler, S.M., 1974. Linear functions of order statistics with smooth weight functions. *Annals of Statistics* **2**, 676-693.
- [146] Stoyanov, S. and Rachev-Iotova, B. (2004). Univariate stable law in the field of finance - Parameter estimation. *Journal of concrete and applicable mathematics* **2**, 369-396.
- [147] Thierry Roncalli. *Théorie des Valeurs Extrêmes au Modélisation des Evénements Rares pour la Gestion des Risques*. Janvier, 2002. Groupe de Recherche Opérationnelle Crédit Lyonnais. Bercy-Expo – Immeuble Bercy Sud – 4<sup>e</sup>eme étage 90, Quai de Bercy — 75613 Paris Cedex 12. France.
- [148] Weron A. et Weron R. (1995). Computer simulation of Lévy stable variables and processes. *Lecture Notes in Physics*, 457, 379-392.
- [149] Wang, S., 1995. Insurance pricing and increased limits ratemaking by proportional hazards transforms. *Insurance : Mathematics and Economics*, 17(1), 43-54.
- [150] Wang, S.S., 1996. Ordering of risks under PH-transforms. *Insurance Mathematics and Economics* 18, no. 2, 109-114.
- [151] Wang, S., 1998. An actuarial index of the right-tail risk. *North American Actuarial Journal*. 2(2), 88–101.
- [152] Wang, S.S., 2000. A class of distortion operators for pricing financial and insurance risks," *Journal of Risk and Insurance* 167(1), 15-36.
- [153] Weissman, I., 1978. Estimation of parameters and large quantiles based on the  $k$  largest observations. *Journal of American Statistical Association*. 73, 812–815.
- [154] Weron, R., 2001. Lévy-stable distributions revisited : Tail index  $> 2$  does not exclude the Lévy stable regime, *International Journal of Modern Physics. C* 12 : 209–223.
- [155] Weron, R., 2004. Computationally intensive value at risk calculations. In J. E. Gentle, W. Hardle, Y. Mori (eds). *Handbook of computational statistics*. Springer, Berlin, 911-950.

- [156] Wei, X. Asymptotically efficient estimation of the index of regular variation. *Ann. Statist.*, 1995, 23, 2036–2058.
- [157] Wirch, J. L., Hardy, M. R., (2000). Ordering of risk measures for capital adequacy.
- [158] Worsdale G. (1975). Tables of cumulative distribution function for symmetric stable distributions. *Appl. Statistics*, 24, 123-131.
- [159] Zolotarev, V. M., 1986. One-dimensional Stable Distributions. American Mathematical Society. Providence, Rhode Island.

# Annexe A : Langage fonctionnel R

*R* est un système, communément appelé langage et logiciel, qui permet de réaliser des analyses statistiques. Plus particulièrement, il comporte des moyens qui rendent possible la manipulation des données, les calculs et les représentations graphiques. *R* a aussi la possibilité d'exécuter des programmes stockés dans des fichiers textes et comporte un grand nombre de procédures statistiques appelées paquets. Ces derniers permettent de traiter assez rapidement des sujets aussi variés que les modèles linéaires (simples et généralisés), la régression (linéaire et non linéaire), les séries chronologiques, les tests paramétriques et non paramétriques classiques, les différentes méthodes d'analyse des données,... Plusieurs paquets, tels *ade4*, *FactoMineR*, *MASS*, *multivariate*, *scatterplot3d* et *rgl* entre autres sont destinés à l'analyse des données statistiques multidimensionnelles.

Il s'adresse également aux gens qui manipulent des données de grande taille (qu'elles soient homogènes ou hétérogènes) afin d'en tirer des résultats d'aide à l'interprétation et/ou à la décision. Les résultats en question peuvent être aussi bien numériques que logiques que sous forme de suites de caractères, de listes d'objets : vecteur(s), matrice(s), tableau(x) à plusieurs entrées, de données structurées ou de liste(s) hétérogène(s) (formées de vecteurs, de tableaux, de sous-tableaux et de données structurées.) Le tout peut être agrémenté par une représentation graphique très riche et très souple.

Il a été initialement créé, en 1996, par *Robert Gentleman* et *Ross Ihaka* du département de statistique de l'Université d'Auckland en Nouvelle Zélande. Depuis 1997, il s'est formé une équipe "*R Core Team*" qui développe *R*. Il est conçu pour pouvoir être utilisé avec



les systèmes d'exploitation *Unix*, *Linux*, *Windows* et *MacOS*.

Un élément clé dans la mission de développement de *R* est le *Comprehensive R Archive Network* (CRAN) qui est un ensemble de sites qui fournit tout ce qui est nécessaire à la distribution de *R*, ses extensions, sa documentation, ses fichiers sources et ses fichiers binaires. Le site maître du CRAN est situé en Autriche à Vienne, on peut y accéder par l'URL : "<http://cran.r-project.org/>". Les autres sites du CRAN, appelés sites miroirs, sont répandus partout dans le monde.

*R* est un logiciel libre distribué sous les termes de la "GNU Public Licence". Il fait partie intégrante du projet GNU et possède un site officiel à l'adresse "<http://www.R-project.org/>". Il est souvent présenté comme un clone de *S* qui est un langage de haut niveau développé par les *AT&T Bell Laboratories* et plus particulièrement par *Rick Becker*, *John Chambers* et *Allan Wilks*. *S* est utilisable à travers le logiciel *S-Plus* qui est commercialisé par la société *Insightful* (<http://www.splus.com/>).

# Chapitre 5

## Annexe B : Preuve

**Lemme 5.1** *pour toute  $0 < r < 1$ , nous avons  $\mathbf{E}[\Delta_{n,r} - \Delta_r] = 0$  et  $\sqrt{\mathbf{E}[\Delta_{n,r} - \Delta_r]^2} = \delta_r/\sqrt{n}$ , où  $\delta_r$  comme dans (3.11).*

**Proof.** Puisque  $\Delta_{n,r}$  est une L-statistique, alors d'après Shorack et Wellner [138], page 662, nous avons

$$\Delta_{n,r} - \Delta_r \stackrel{d}{=} -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_0^1 [1_{[U_i \leq t]} - t] J_r(t) dQ(t),$$

où  $U_1, U_2, \dots$  est une séquence des variables aléatoires i.i.d du loi  $(0, 1)$ -uniforme. Observons que

$$Y_i := \int_0^1 [1_{[U_i \leq t]} - t] J_r(t) dQ(t), \quad i = 1, \dots, n,$$

sont des variables aléatoires centrées i.i.d, qui ont  $\mathbf{E}[\Delta_{n,r} - \Delta_r] = 0$ , avec  $\mathbf{E}[\Delta_{n,r} - \Delta_r]^2 = \mathbf{E}[Y_1^2]/n$ . Il est facile de vérifier que

$$\mathbf{E}[Y_1^2] = \int_0^1 \int_0^1 (\min(s, t) - st) J_r(s) J_r(t) dQ(s) dQ(t),$$

est exactement  $\delta_r^2$ . ■

**Lemme 5.2** *Supposons  $F \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$  pour  $1 < \alpha < 2$ . Alors pour tout  $1 < r < 1$ , nous avons  $\delta_r = \infty$ .*

**Proof.** Notez que  $\delta_r^2$  peut être réécrite en

$$\delta_r^2 = \int_0^1 G_r^2(s) ds - \left( \int_0^1 G_r(s) ds \right)^2,$$

où  $G_r(s) := \int_0^s J_r(t) dQ(t)$  (voir, e.g., équation (1.12) dans Mason et Shorack, [99]). Il est clair que, pour toutes  $0 < \varepsilon < 1$ , nous avons  $\int_0^1 G_r^2(s) ds \geq \int_0^\varepsilon G_r^2(s) ds$ . D'autre part, à partir de (1.1), nous en déduisons que  $Q(t) \sim -C_1^{-1}t^{-1/\alpha}$ , quand  $t \downarrow 0$ , alors

$$G_r(s) \sim (\alpha C_1)^{-1} \int_0^s t^{-1/\alpha-1} J_r(t) dt, \text{ as } s \downarrow 0.$$

Puisque  $J_r(t) \sim -rt^{r-1}/2$ , quand  $t \downarrow 0$ , alors il est facile de vérifier que, pour les petites  $\varepsilon > 0$ , nous avons

$$\int_0^\varepsilon G_r^2(s) ds \sim \begin{cases} \frac{r^2 \varepsilon^{2(r-1/\alpha-1)+1}}{4(r-1/\alpha)^2 (2(r-1/\alpha)+1)}, & \text{si } 2(r-1/\alpha) - 1 \geq 0, \\ \infty, & \text{si } 2(r-1/\alpha) - 1 < 0. \end{cases}.$$

Cela implique que  $\delta_r^2 = \infty$  pour tout  $0 < r < 1/2 + 1/\alpha$  qui est vérifié pour tout  $0 < r < 1$  et  $1/2 < 1/\alpha < 1$ . ■



# Annexe C : Abréviations et Notations

<u>Symbole</u>	<u>Signification</u>
TCL	théorème centrale limite
TSD	queue à deux déviations
RTD	queue à déviation droite
VaR	valeur en risque
i.i.d	indépendantes identiquement distribuées
cf	fonction caractéristique
df	fonction de distribution
CVaR	Conditional VaR
ES	expected shortfall
WT	transformée de Wang
PHP	transformée proportionnelle hazard
v.a.	variable aléatoire
v.a.r	variable aléatoire réelle
EX	espérance ou moyenne de $X$
var $X$	variance de $X$
cdf	df cumulative
$F_X$	df d'une v.a. $X$
$f$	pdf de $X$
$f_X$	pdf d'une v.a. $X$
$F_n$	df empirique
$\stackrel{d}{=}$	égale en distribution
$\sim$	$f(x) \sim g(x)$ , quand $x \rightarrow x_0 : f(x)/g(x) \rightarrow 1$ , quand $x \rightarrow x_0$
$D(\cdot)$	domaine d'attraction

i.e.	en d'autre terme
MSE	erreur moyenne quadratique
RMSE	racine carré de l'erreur moyenne
ERR	erreur
RELERR	erreur relative
$\mathbb{R}$	ensemble réel
$\mathbb{R}^+$	ensemble réel positif

RÉSUMÉ. Les mesures de risque, les plus populaires, qui quantifient les données financières sont les mesures de distorsion de risque introduites par Wang (96), comme la prime distordue et la mesure de risque bilatérale (two-sided deviation: TSD). Ces dernières peuvent être considérées comme des L-fonctionnelles avec des fonctions poids spécifiques. Dans ce travail, on définit un nouvel estimateur pour la TSD en utilisant les estimateurs à biais réduits des quantiles extrêmes proposés par Li et al. (2010). Une étude de simulation est effectuée dans le but de comparer, en termes de biais et d'erreur quadratique moyenne, le nouvel estimateur avec celui introduit récemment par Necir and Meraghni (2010). Ainsi une classification des marchés financiers via cette nouvelle mesure est réalisée pour quelques indices boursiers d'où les investisseurs peuvent prendre une décision à l'investissement.

MOTS CLÉ. Réduction de biais ; Quantiles extrêmes; Estimateur de Hill; distribution de Lévy-stable; L-statistiques; Statistiques d'ordre; Mesure de risque; Variation régulière de deuxième ordre, Indice de queue.

ABSTRACT. Risk measures, the most popular, which quantify the financial data are distortion risk measures introduced by Wang (96), such as the distorted insurance premium and the two sided deviation (TSD) measure. These last, can be regarded as L-functionals with specific weight functions. In this work, we focus on the TSD risk measure as we define a new estimator by using the bias-reduced estimators of extreme quantiles proposed by Li et al. (2010). A simulation study is carried out to compare, in terms of bias and mean squared error, the new estimator with that introduced recently by Necir and Meraghni (2010). A classification of financial markets via the new risk measure was performed for some stock indexes from where investors can make a decision to invest.

KEY WORDS. Bias reduction; High quantiles; Hill estimator; L Levy-stable distribution; Lstatistics; Order statistics; Risk Measure; Second order regular variation, Tail index.