République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Thèse pour pour obtenir le titre de

Docteur en **S**ciences

de l'Université de Biskra, Mohamed KHIDER

En Analyse fonctionnelle et Numérique

Présentée par

CHEMCHAM Madani

Etude des Equations Intégrales Non Linéaires de type Hammerstein dans les espaces d'Orlicz

Thèse dirigée par Pr. NADIR Mostefa

Soutenue le 03/06/2015 devant le jury composé de

KHELIL	Nacer	MCA	Univ. Biskra	Président
NADIR	Mostefa	Pr	Univ. M'sila	Directeur de thèse
MEROUANI	Abdelbaki	MCA	Univ. Bordj Bou Arreridj	Examinateur
RAHMOUNE	Azedine	MCA	Univ. Bordj Bou Arreridj	Examinateur
BELLAGOUN	Abdelghani	MCA	Univ. Biskra	Examinateur

REMERCIEMENTS

Mes plus sincères remerciements vont à Monsieur le Professeur NADIR Mostefa, pour avoir dirigé ce travail. Pour votre disponibilité, votre patience ainsi que votre soutien moral. Je vous exprime toute ma reconnaissance et mon profond respect. Votre grande expérience et votre rigueur mathématique ont fait que ce travail s'achève.

J'adresse mes sincères remerciements à Monsieur le professeur KHELIL Nacer, qui m'a fait l'honneur d'accepter de présider ce jury.

Je remercie chaleureusement, Messieurs les professeurs MEROUANI Abdelbaki, RAHMOUNE Azedine, et BELLAGOUN Abdelghani de m'avoir fait l'honneur d'accepter de faire partie de ce jury.

Mes remerciements vont à tous ceux qui ont contribué à la réalisation de ce travail et plus particulièrement à Monsieur LEKHALI Belkacem.

Merci à toutes les personnes qui sont venues assister à ma soutenance.

Table des matières

Remerciements **i**

Table des matières **ii**

Introduction **1**

1 Equations intégrales linéaires **5**

1.1 Opérateurs linéaires compacts 6

1.1.1 Opérateur de rang fini 7

1.1.2 Théorème de V. Neumann 10

1.2 Equation intégrale linéaire de Fredholm 11

1.3 Equation intégrale linéaire à noyau faiblement singulier 13

1.3.1 Noyau faiblement singulier 13

2 Equations intégrales non linéaires **14**

2.1 Théorème du point fixe de Banach 16

2.1.1 Equation intégrale non linéaire de Fredholm. 17

2.1.2 Equation intégrale non linéaire de Volterra 19

2.2 Théorème du point fixe de Schauder 21

2.2.1 Equation intégrale non linéaire de Fredholm 21

2.2.2 équation intégrale non linéaire de Volterra 22

3 Espaces d'Orlicz **24**

3.1 Définitions de base et résultats . . . 25

3.1.1 N-Fonction (nice Young Function) . . . 25

3.1.2 classes d'Orlicz . . . 28

3.1.3 Espaces d'Orlicz . . . 29

3.1.4 Espaces E^{Φ} . . . 31

3.1.5 Disposition de la classe L_{Φ}^{*} par rapport à l'espace E^{Φ} . . . 31

3.1.6 Calcul de la norme . . . 32

3.2 Critères de compacité . . . 33

3.2.1 Fonctions de Steklov . . . 33

3.2.2 Critère de compacité de Kolmogorov . . . 34

3.2.3 Critère de compacité F. Riesz . . . 35

3.3 Opérateurs dans les espaces d'orlicz . . . 36

3.3.1 Continuité des opérateurs intégraux linéaires . . . 36

3.3.2 Complète continuité des opérateurs intégraux linéaires . . . 37

3.4 Opérateur de superposition de Nemytsky . . . 39

3.4.1 Fonction de Carathéodory . . . 39

3.4.2 Domaine de définition de l'opérateur Nemytsky . . . 40

3.4.3 Continuité de l'opérateur de Nemytsky . . . 40

3.4.4 Bornitude de l'opérateur de Nemytsky . . . 41

3.4.5 Forme générale de l'opérateur de Nemytsky . . . 41

3.4.6 Bornitude et continuité de l'opérateur de Nemytsky . . . 42

4 Equations intégrales de type Hammerstein **43**

4.1 Existence dans L^p . . . 44

4.1.1 Opérateur de Nemytsky . . . 44

4.1.2 Opérateur intégral de Fredholm . . . 47

4.1.3 Opérateur intégral d'Hammerstein . . . 47

4.1.4 Equation intégrale de type Hammerstein 48
4.1.5 Principe de Leray-Schauder 49
4.2 Existence dans L^{Φ} 50

Conclusion **51**

Bibliographie **53**

Introduction

Les équations intégrales linéaires et non linéaires ont plusieurs applications en biologie, control optimal, economie, physique mathématique et ingénierie.
Parmi les équations intégrales non linéaires, les équations intégrales non linéaires de type Hammerstein

$$u(x) = \int_D k(x,y)f(y,u(y))dy \quad (x \in D) \tag{1}$$

où D est un compact de $\mathbb{R}^N$, u est la fonction inconnue, k est le noyau donné, f une fonction donné. Ces équations semblent les plus investies.
Le premier résultat significatif concernant la résolubilité de telles équations a été obtenu par A. Hammerstein [[*Hammerstein1*], [*Hammerstein2*]] et par R. Iglisch [[Iglisch]] utilisant des méthodes variationnelles. Dans leurs travaux, le noyau k est supposé symétrique défini positif et borné ou bien de carré intégrable ; dans le premier cas, aucune condition sur le taux de croissance de la fonction f par rapport à u n'est exigée, tandis que dans le second cas, il est supposé que la fonction f soit sous-linéaire.
La méthode de Hammerstein atteint son plus grand développement dans les travaux de M. Golomb [[Golomb1], [Golomb2]], C. Dolph [Golomb2], et M. M. Vainberg [[Vainberg1],[Vainberg2],[Vainberg3],[Vainberg4],[Vainberg5]].
De nouveaux résultats concernant la résolubilité des équations d'Hammerstein

ont été obtenu par M. Krasnosel'skii [[*Krasnosel'skii3*], [*Krasnosel'skii4*]] . Ces résultats sont basés sur de nouvelles méthodes, utilisant des arguments topologiques, pour l'existence de solutions.

Dans les premiers travaux sur les équations d'Hammerstein, il a été montré que pour obtenir des conditions de résolubilité, il est nécessaire d'avoir un certain accord entre le caractère des singularités du noyau k et le taux de croissance de f par rapport à u ; Suivant cet accord, l'étude de l'équation d'Hammerstein à non linéarités d'ordre fini (d'ordre polynômial) est faite dans les espaces classiques de Lebesgue L^p, tandis que l'étude de cette même équation à non linéarités essentielles (d'ordre exponentiel) est faite dans les espaces d'Orlicz.

Dans ce travail, nous discutons l'existence de solutions dans les espaces L^p des équations intégrales de type Hammerstein et nous proposons de suivre la même méthode utilisée dans L^p, afin d'obtenir des résultats d'existence dans les espaces d'Orlicz L^Φ, c'est-à-dire mettre l'équation intégrale de type Hammerstein (1) sous la forme d'une équation d'opérateurs

$$u = (AN_f)u$$

où A est l'opérateur intégral linéaire de Fredholm

$$A(u)(x) = \int_D k(x,y)u(y)dy \quad (x \in D)$$

et où N_f est l'opérateur non linéaire de Nemytsky associé à f

$$N_f(u)(x) = f(x, u(x)).$$

puis chercher des conditions pour que l'opérateur de Nemytsky N_f associé à f soit borné et continu et des conditions pour la continuité et la complète continuité de l'opérateur intégral linéaire de Fredholm A. En combinant ces conditions, nous obtenons des conditions suffisantes pour la continuité et la complète continuité de l'opérateur intégral d'Hammerstein T

$$T = AN_f.$$

Par application du principe de Leray-Schauder, l'opérateur intégral d'Hammerstein T aura au moins un point fixe dans l'espace d'Orlicz L^{Φ}, et par conséquent l'équation intégrale d'Hammerstein (1) aura au moins une solution dans cet même espace d'Orlicz L^{Φ}.

Organisation de la thèse

Les résultats sont regroupés en quatre chapitres :

Chapitre 1 : Equations intégrales linéaires.

Chapitre 2 : Equations intégrales non linéaires.

Chapitre 3 : Espaces d'Orlicz.

Chapitre 4 : Equations intégrales de type Hammerstein.

Dans le **chapitre 1**, nous faisons un rappel de quelques définitions et résultats sur les opérateurs linéaires compacts. Puis, nous présentons deux grands théorèmes celui de Von Neumann, et l'Alternative de Fredholm, qui nous garantissent l'existence et l'unicité de la solution des équations intégrales linéaires. Enfin, nous terminons par des applications aux équations intégrales linéaires de Fredholm, de Volterra et celles à noyaux faiblement singulier.

Le **chapitre 2** traite des équations intégrales non linéaires. Dans ce dernier, nous présentons deux théorèmes de point fixe : le théorème du point fixe de Banach avec application aux équations intégrales non linéaires de Fredholm et celles de Volterra de seconde espèce et le théorème de Schauder avec application à ces dernières équations.

Les espaces d'Orlicz font l'objet du **chapitre 3**. Dans ce dernier, nous rappelons quelques définitions et résultats de ces espaces, et nous donnons deux critères de compacité d'une famille de fonctions d'un espace d'Orlicz : critère de Kolmogorov et celui de Riesz. Puis, nous donnons des conditions pour la continuité et la complète continuité des opérateurs intégraux linéaires entre espaces d'Orlicz. Enfin, nous donnons des conditions pour la continuité et la bornitude de l'opérateur de Nemytsky entre espaces d'Orlicz.

Nous présentons dans le **chapitre 4** trois opérateurs continus opérant dans les espaces de Lebesgue L^p : l'opérateur de superposition de Nemytsky ; l'opérateur intégral linéaire de Fredholm et l'opérateur intégral non linéaire d'Hammerstein. Comme application, nous donnons à l'aide du principe de Leray-schauder, des résultats d'existence dans L^p pour l'équation intégrale d'Hammerstein. A la fin de ce chapitre, nous proposons de suivre la même méthode pour arriver à des résultats d'existence dans les espaces d'Orlicz, en s'appuyant sur les résultats du chapitre 3.
Enfin, ce travail a été couronné par un article paru.

Chapitre 1

Equations intégrales linéaires

Introduction

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques définitions et résultats sur les opérateurs linéaires compacts. Puis, nous présentons deux grands théorèmes celui de Von Neumann et l'alternative de Fredholm, qui nous garantissent l'existence et l'unicité de la solution des équations intégrales linéaires. Enfin, nous terminons par des applications aux équations intégrales linéaires de Fredholm, de Volterra et celles à noyau faiblement singulier.

Pour plus de détails voir Ref.([*Kress*], [*Tricomi*],[*Lovitt*], [*Kreyszig*] et [*Wazwaz*]).

1.1 Opérateurs linéaires compacts

Parmi tous les opérateurs continus dans un espace de Banach, les opérateurs compacts ont des propriétés très proches de celles des opérateurs linéaires en dimension finie.

Définition 1.1.1 *Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Un opérateur linéaire T de E dans F est dit compact si : l'adhérence de l'image par T de la boule unité fermée de E, $\overline{T(\overline{B}_E)}$, est un compact de F.*

On note par $K(E,F)$ l'ensemble des opérateurs linéaires compacts de E dans F. Dans le cas où $E = F$ cet espace est noté par $K(E)$.

Proposition 1.1.1 *Soient E et F deux espaces vectoriels normés et T un opérateur linéaire de E dans F. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *T est compact.*

b) *Pour tout $A \subset E$ borné, l'adhérence de $T(A)$, $\overline{T(A)}$, est compacte.*

c) *Pour toute suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E, la suite $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ a une valeur d'adhérence.*

Proposition 1.1.2 *Soient E, F et G trois espaces de Banach.*

e) *L'ensemble $K(E,F)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(E,F)$.*

f) *Soient $S \in \mathcal{L}(E,F)$ et $T \in \mathcal{L}(F,G)$, alors si S ou T est compact,*

$T \circ S \in K(E,G)$.

Corollaire 1.1.1 *Soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie. Alors, l'opérateur identité de E n'est pas compact.*
Plus généralement, tout isomorphisme $T : E \to E$ n'est pas compact.

1.1.1 Opérateur de rang fini

Définition 1.1.2 *Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Un opérateur $T \in \mathcal{L}(E,G)$ est dit de rang fini si la dimension de l'image de T*

est finie, $\dim T(E) < +\infty$.

Remarque 1.1.1 *Tout opérateur de rang fini est compact.*

Corollaire 1.1.2 *Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$, tel qu'il existe $T_n \in \mathcal{L}(E,F)$, T_n de rang fini, et $\lim_{n\to+\infty} \|T_n - T\| = 0$. Alors T est compact.*

Proposition 1.1.3 *Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert. Alors :*

$T \in K(H_1,\ H_2)$ si et seulement s'il existe une suite $T_n \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, T_n de rang fini, telle que $\lim_{n\to+\infty} \|T_n - T\| = 0$.

Théorème 1.1.1 ***Théorème 1.1.2*** *(d'Arzelà-Ascoli)*

Soit (E, d) un espace métrique compact, (F, δ) un espace métrique complet.

Une partie A de $\mathcal{C}(E, F)$ est relativement compacte si et seulement si :

1- *A est équicontinue, c'est-à-dire :*

$$\forall x \in E, \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0\ /\ \forall f \in A, \forall y \in E,\ d(x, y) < \eta \Longrightarrow \delta(f(x), f(y)) < \epsilon$$

2- *Pour tout $x \in E$, l'ensemble $A(x) = \{f(x),\ f \in A\}$ est relativement compact.*

L'exemple suivant est l'une des principales motivations pour étudier les opérateurs compacts.

Exemple 1.1.1 *Soit $C([0,1])$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ muni de la norme $\|.\|_\infty$. L'opérateur intégral $T : C([0,1]) \to C([0,1])$ défini par*

$$(Tx)(t) = \int_0^1 k(t,s)x(s)ds$$

avec un noyau $k \in C([0,1] \times [0,1])$, est un opérateur compact.

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable, et soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $\mathcal{H}$. L'opérateur linéaire $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt si

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|Te_n\|^2 < +\infty.$$

Le réel

$$\|T\|_{HS} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \|Te_n\|^2 \right)^{1/2}$$

est appelé la norme de Hilbert-Schmidt de T. Tout opérateur de Hilbert-Schmidt est compact. L'opérateur intégral $T : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ défini par

$$(Tx)(t) = \int_0^1 k(t,s)x(s)ds$$

avec un noyau $k \in L^2([0,1]^2)$, est un opérateur de Hilbert-Schmidt, donc compact.

1.1.2 Théorème de V. Neumann

Théorème 1.1.3 *(Von Neumann)*

Soit E un espace de Banach.

Considérons un opérateur $T \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\|T\| < 1$. Alors $(I - T)$ est inversible et son inverse s'exprime comme somme d'une série convergente dans $\mathcal{L}(E)$:

$$(I-T)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} T^n, \qquad \left\|(I-T)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1-\|T\|}.$$

Preuve

La série $\sum_{n=0}^{+\infty} T^n$ est absolument convergente car

$$\|T^n\| \leq \|T\|^n \quad et \quad \|T\| < 1,$$

donc convergente dans l'espace de Banach $\mathcal{L}(E)$. De plus,

$$(I-T)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} T^n\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} T^n\right)(I-T) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(T^n - T^{n+1}\right) = I$$

comme série téléscopique. Enfin,

$$\left\|(I-T)^{-1}\right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|T\|^n \leq \frac{1}{1-\|T\|}.$$

Considérons l'équation intégrale linéaire nonhomogène de Volterra

$$\varphi(t) - \lambda \int_0^t k(t,s)\varphi(s)ds = f(t)$$

avec un noyau $k \in L^2([0,a] \times [0,a])$ et $f \in L^2([0,a])$. Cette équation admet une solution unique dans $L^2([0,a])$

$$\varphi(t) = f(t) + \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n K^n(f)$$

où

$$Kf(t) = \int_0^t k(t,s)f(s)ds \qquad \text{et} \qquad K^n f(t) = K(K^{n-1}f)(t).$$

1.2 Equation intégrale linéaire de Fredholm

Théorème 1.2.1 *(Alternative de Fredholm)*

Ou bien l'équation intégrale linéaire nonhomogène de Fredholm

$$\varphi(t) - \lambda \int_a^b k(t,s)\varphi(s)ds = f(t) \tag{1.1}$$

admet une solution unique, ou bien l'équation homogène associée

$$\varphi(t) - \lambda \int_a^b k(t,s)\varphi(s)ds = 0 \tag{1.2}$$

admet au moins une solution non triviale (non identiquement nulle).

Remarque 1.2.1 *Le premier cas de l'alternative a également lieu pour l'équation adjointe de (1.1)*

$$\psi(t)-\lambda\int_a^b k(s,t)\psi(s)ds=g(t)$$

et le nombre de solutions linéairement indépendantes de l'équation intégrale homogène (1.2) et de l'équation adjointe

$$\psi(t)-\lambda\int_a^b k(s,t)\psi(s)ds=0 \tag{1.3}$$

est fini et le même pour les deux équations.

Théorème 1.2.2 *Dans le second cas de l'alternative, une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation nonhomogène (1.1) admette une solution φ est que le second membre f de cette équation, soit orthogonal à toute solution ψ de l'équation homogène (1.3) adjointe de l'équation homogène (1.2) :*

$$\int_a^b f(s)\psi(s)ds=0. \tag{1.4}$$

Remarque 1.2.2 *Dans la condition (1.4), l'équation (1.1) possède une infinité de solutions puisque elle est vérifiée par toute fonction de la forme $\varphi+\widetilde{\varphi}$ avec φ une solution de (1.1) et $\widetilde{\varphi}$ toute solution de l'équation homogène associée (1.2).*

Remarque 1.2.3 *Dans la pratique, l'alternative de Fredholm est le plus important de ces théorèmes. Au lieu de démontrer que l'équation intégrale donnée (1.1) a une solution, on démontre parfois plus facilement que l'équation homogène associée (1.2) ou son adjointe (1.3) n'ont pas d'autres solutions que les solutions triviales. Il en résulte, en vertu de l'alternative, que l'équation (1.1) admet bien une solution.*

1.3 Equation intégrale linéaire à noyau faiblement singulier

1.3.1 Noyau faiblement singulier

Définition 1.3.1 *Un noyau k est dit faiblement singulier, s'il est continu pour tous $x, y \in D \subset \mathbb{R}^m$, $x \neq y$, il existe des constantes positives M et $\alpha \in]0, m]$ tel que*

$$|k(x,y)| \leq M\,|x-y|^{\alpha-m}\,, \qquad x, y \in D,\;\; x \neq y.$$

Théorème 1.3.1 *L'opérateur intégral linéaire $A : C(D) \to C(D)$ ($A : L^2(D) \to L^2(D)$ resp.) à noyau faiblement singulier est compact.*

Théorème 1.3.2 *L'équation intégrale*

$$\varphi(t) - \lambda \int_0^t k(t,s)\varphi(s)ds = f(t)$$

où k est un noyau faiblement singulier et f continue sur $[0,1]$, admet une solution unique pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Théorème 1.3.3 *L'équation intégrale linéaire*

$$\varphi(t) - \lambda \int_0^1 k(t,s)\varphi(s)ds = f(t)$$

où k est un noyau faiblement singulier et f continue sur $[0,1]$, admet une solution unique pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, suffisamment petit.

Chapitre 2

Equations intégrales non linéaires

Introduction

Dans ce chapitre, on présente deux théorèmes de point fixe : le théorème du point fixe de Banach avec application aux équations intégrales non linéaires de Fredholm et de Volterra de seconde espèce et celui de Schauder avec application à ces dernières équations. Pour l'étude de l'existence de solutions pour les équations non linéaires d'opérateurs, on a souvent recours à la théorie du point fixe. Plusieurs théorèmes d'existence sont obtenus à l'aide des théorèmes de points fixes de Banach et celui de Schauder en reformulant le problème d'existence en un problème de point fixe.

Pour plus de détails voir Réf. ([*Precup*], [*Hochstadt*] et [*Porter*])

Soit E un espace vectoriel normé, $A : E \to E$ un opérateur et $f \in E$ donné.

Pour résoudre l'équation

$$Ax = f \tag{2.1}$$

on définit souvent d'une certaine manière un opérateur $T : E \to E$, par exemple

$$Tx = f + (I - A)x,$$

où I est l'opérateur identité, et on réécrit l'équation (2.1) comme un problème de point fixe

$$Tx = x.$$

Par application d'un des théorèmes de point fixe, nous obtenons un point fixe pour T qui est une solution pour l'équation (2.1).

2.1 Théorème du point fixe de Banach

Théorème 2.1.1 *(du point fixe de Banach)*

Supposons que

(i) *M est une partie fermée non vide d'un espace métrique complet (X, d);*

(ii) *l'opérateur $T : M \to M$ est une contraction de rapport k, $0 \leq k < 1$, i.e.,*

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y), \quad \forall x, y \in M.$$

Alors, on a

(a) *Existence et unicité : T a exactement un point fixe dans M ;*

(b) *Convergence de l'itération : la suite des approximations successives*

$(x_{n+1} = T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l'unique point fixe, x, de T dans M,

pour un choix arbitraire du point initial x_0 dans M ;

(c) *Estimation de l'erreur : pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons l'estimation à priori*

$$d(x_n, x) \leq k^n(1 - k)^{-1}d(x_0, x_1),$$

et l'estimation à posteriori

$$d(x_{n+1}, x) \leq k(1 - k)^{-1}d(x_n, x_{n+1});$$

(d) *Vitesse de convergence : pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons*

$$d(x_{n+1}, x) \leq kd(x_n, x).$$

Remarque 2.1.1 * *L'estimation à priori (c) montre que, quand on part du point initial x_0 dans M, l'erreur d'approximation du $n^{ième}$ itéré est complètement* *déterminée par le coefficient de contraction k et par le déplacement initial $d(x_0, x_1)$.*

* *L'estimation à posteriori montre que, pour obtenir l'erreur d'approximation désirée du point fixe, $d(x_n, x) < \epsilon$, on doit stopper le processus d'itération à la première étape n pour laquelle le déplacement entre deux itérées consécutives est au plus $(1-k)\epsilon/k$.Donc, l'estimation à posteriori offre un critère d'arrêt direct pour l'approximation itérative des points fixes, tandis que l'estimation à priori nous donne indirectement un critère d'arrêt.*

2.1.1 Equation intégrale non linéaire de Fredholm.

Considérons l'équation intégrale non linéaire de Fredholm de seconde espèce

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 k(x, y, \varphi(y))dy \qquad x \in [0, 1], \tag{2.2}$$

où λ est un nombre réel donné.

Si on cherche une solution continue pour l'équation (2.2), alors on peut la reformuler en un problème de point fixe, sous des hypothèses appropriées.

Supposons que :

(i) $k : [0, 1] \times [0, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, bornée ;

k est appelée noyau de l'équation intégrale.

(ii) k est L-Lipschitzienne par rapport à la troisième variable, i.e. il existe $L > 0$ tel que pour tout $x, y \in [0, 1]$ et $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$, on a

$$|k(x, y, z_1) - k(x, y, z_2)| \leq L |z_1 - z_2| ;$$

(iii) $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ est continue ;

(iv) $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ est la fonction inconnue, supposée continue.

On considère l'espace de Banach $E = C([0,1]\,;\|\cdot\|_\infty)$ des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|\varphi\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |\varphi(x)|$. On définit sur l'espace E l'opérateur T donné par

$$(T\varphi)(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 k(x,y,\varphi(y))dy \qquad x \in [0,1]\,. \tag{2.3}$$

Il évident que T applique E sur lui même (k et f continues) et donc $T(E) \subset E$. Donc, l'équation intégrale (2.2) est équivalente au problème de point fixe

$$T\varphi = \varphi,$$

où T est défini par (2.3). De plus, T est Lipschitzien et, sous des hypothèses appropriées sur λ, T est une contraction. En effet,

$$\begin{aligned}
|T(\varphi_1)(x) - T(\varphi_2)(x)| &= \left|\lambda \left[\int_0^1 k(x,y,\varphi_1(y))dy - \int_0^1 k(x,y,\varphi_2(y))dy\right]\right| \\
&\leq |\lambda| \int_0^1 |k(x,y,\varphi_1(y)) - k(x,y,\varphi_2(y))|\, dy \\
&\leq |\lambda|\, L \int_0^1 |\varphi_1(y) - \varphi_2(y)|\, dy.
\end{aligned}$$

Mais

$$|\varphi_1(y) - \varphi_2(y)| \leq \|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty \qquad \text{pour tout } y \in [0,1]$$

et donc, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $\varphi_1, \varphi_2 \in E$, on a

$$|T(\varphi_1)(x) - T(\varphi_2)(x)| \leq |\lambda|\, L\, \|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty\,.$$

Finalement, on obtient

$$\|T(\varphi_1) - T(\varphi_2)\|_\infty \leq |\lambda| \, L \, \|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty \, , \quad \varphi_1,\varphi_2 \in E,$$

ce qui montre que T est $|\lambda| \, L$-Lipschitzien.

Remarque 2.1.2 *Si on choisit λ tel que $|\lambda| \, L < 1$, alors T est une contraction, et donc, par le théorème du point fixe de Banach, T a un unique point fixe, qui est la solution unique de l'équation intégrale (2.2), et cette solution peut-être obtenue par les approximations successives.*

2.1.2 Equation intégrale non linéaire de Volterra

On fait de même pour l'équation intégrale non linéaire de Volterra

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x, y, \varphi(y))dy \qquad x \in [0, 1] \tag{2.4}$$

où k, f, λ et φ sont définis comme ci-dessus. On considère l'espace de Banach $E = C([0, 1] \, ; \|\cdot\|)$ des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|\varphi\| = \sup\limits_{x\in[0,1]} \left(|\varphi(x)| \, e^{-\tau x}\right)$, $\tau > 0$. On définit sur l'espace E l'opérateur T

$$(T\varphi)(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x, y, \varphi(y))dy \qquad x \in [0, 1] \, . \tag{2.5}$$

Il évident que T applique E sur lui même (k et f continues) et donc $T(E) \subset E$. Donc, l'équation intégrale (2.4) est équivalente au problème de point fixe

$$T\varphi = \varphi,$$

où T est défini par (2.5). De plus, T est Lipschitzien et, sous des hypothèses appropriées sur λ, T est une contraction. En effet,

$$\begin{aligned}
|T(\varphi_1)(x) - T(\varphi_2)(x)| &= \left|\lambda\left[\int_0^x k(x,y,\varphi_1(y))dy - \int_0^x k(x,y,\varphi_2(y))dy\right]\right| \\
&\leq |\lambda| \int_0^x |k(x,y,\varphi_1(y)) - k(x,y,\varphi_2(y))|\, dy \\
&\leq |\lambda|\, L \int_0^x |\varphi_1(y) - \varphi_2(y)|\, dy \\
&= |\lambda|\, L \int_0^x |\varphi_1(y) - \varphi_2(y)|\, e^{-\tau x} e^{\tau x} dy
\end{aligned}$$

Mais

$$|\varphi_1(y) - \varphi_2(y)|\, e^{-\tau x} \leq \|\varphi_1 - \varphi_2\| \qquad \text{pour tout } y \in [0,1]$$

et donc, pour tout $x \in [0,1]$, tout $\varphi_1, \varphi_2 \in E$ et $\tau > 0$ on a

$$|T(\varphi_1)(x) - T(\varphi_2)(x)| \leq |\lambda|\, L \left(\frac{e^{\tau x} - 1}{\tau}\right) \|\varphi_1 - \varphi_2\| < |\lambda|\, L \left(\frac{e^{\tau x}}{\tau}\right) \|\varphi_1 - \varphi_2\|\,.$$

Donc, on a

$$\|T(\varphi_1) - T(\varphi_2)\| \leq \frac{|\lambda|\, L}{\tau} \|\varphi_1 - \varphi_2\|\,, \quad \forall \varphi_1{,}\varphi_2 \in E,\ \tau > 0.$$

ce qui montre que T est $|\lambda|\, L$-Lipschitzien.

Remarque 2.1.3 *Si on choisit λ tel que $\frac{|\lambda| L}{\tau} < 1$, alors T est une contraction, et donc, par le théorème du point fixe de Banach, T a un unique point fixe, qui est la solution unique de l'équation intégrale (2.4), et cette solution peut-être obtenue par les approximations successives.*

2.2 Théorème du point fixe de Schauder

Théorème 2.2.1 *(du point fixe de Schauder)*

Soient E un espace de Banach et $C \subset E$ un convexe non vide, et $T : C \to C$ une application continue. Si, de plus

* *C est fermé et borné et T compact*

ou

* *C est compact,*

alors T possède un point fixe.

2.2.1 Equation intégrale non linéaire de Fredholm

Considérons l'équation intégrale non linéaire de Fredholm de seconde espèce

$$\varphi(x) = \int_0^1 k(x, y, \varphi(y))dy \qquad x \in [0,1]. \tag{2.6}$$

Si on cherche une solution continue φ pour l'équation (2.6) dans la boule de centre 0 et de rayon R, $\overline{B}_R(0; C([0,1]; \mathbb{R}))$, de l'espace $C([0,1]; \mathbb{R})$, alors on peut la reformuler en un problème de point fixe, sous des hypothèses appropriées. Supposons que :
$k : [0,1] \times [0,1] \times [-R, R] \to \mathbb{R}$ est continue et que

$$M = \max_{[0,1]\times[0,1]\times[-R,R]} |k(x, y, z)| \leq R.$$

On considère l'espace de Banach $E = C([0,1]; \|\cdot\|_\infty)$ des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|\varphi\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |\varphi(x)|$.
On définit l'opérateur $T : \overline{B}_R(0; C([0,1]; \mathbb{R})) \to C([0,1]; \mathbb{R})$ donné par

$$(T\varphi)(x) = \int_0^1 k(x, y, \varphi(y))dy \qquad x \in [0,1]. \tag{2.7}$$

L'opérateur T applique la boule $\overline{B}_R(0; C([0,1]\,;\mathbb{R})$, sur elle-même.

Donc, l'équation intégrale (2.6) est équivalente au problème de point fixe

$$T\varphi = \varphi,$$

où T est défini par (2.7).

Remarque 2.2.1 *L'opérateur T est continu et compact, et alors, par le théorème du point fixe de Schauder, T a au moins un point fixe dans la boule $\overline{B}_R(0; C([0,1]\,;\mathbb{R})$, qui est une solution de l'équation intégrale (2.6), dans la boule $\overline{B}_R(0; C([0,1]\,;\mathbb{R})$.*

2.2.2 équation intégrale non linéaire de Volterra

Considérons l'équation intégrale non linéaire de Volterra de seconde espèce

$$\varphi(x) = \int_0^x k(x, y, \varphi(y))dy \qquad x \in [0,1]\,. \tag{2.8}$$

Si on cherche une solution continue φ pour l'équation (2.8) dans la boule de centre 0 et de rayon R, $\overline{B}_R(0; C([0,1]\,;\mathbb{R}))$, de l'espace $C([0,1]\,;\mathbb{R})$,alors on peut la reformuler en un problème de point fixe, sous des hypothèses appropriées. Supposons que :

$k : [0,1] \times [0,1] \times [-R, R] \to \mathbb{R}$ est continue et qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$|k(x, y, z)| \leq \alpha\,|z| + \beta, \qquad \forall (x, y, z) \in [0,1] \times [0,1] \times [-R, R]\,.$$

On considère l'espace de Banach $E = C([0,1]\,; \|\cdot\|_\infty)$ des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|\varphi\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |\varphi(x)|\,.$

On définit l'opérateur $T : \overline{B}_R(0; C([0,1]\,;\mathbb{R})) \to C([0,1]\,;\mathbb{R})$ donné par

$$(T\varphi)(x) = \int_0^x k(x,y,\varphi(y))dy \qquad x \in [0,1]\,. \tag{2.9}$$

L'opérateur T applique la boule $\overline{B}_R(0; C([0,1]\,;\mathbb{R})$, sur elle-même.

Donc, l'équation intégrale (2.8) est équivalente au problème de point fixe

$$T\varphi = \varphi,$$

où T est défini par (2.9).

Remarque 2.2.2 *L'opérateur T est continu et compact, et alors, par le théorème du point fixe de Schauder, T a au moins un point fixe dans la boule*
$\overline{B}_R(0; C([0,1]\,;\mathbb{R})$, qui est une solution de l'équation intégrale (2.8),
dans la boule $\overline{B}_R(0; C([0,1]\,;\mathbb{R})$.

Chapitre 3

Espaces d'Orlicz

Introduction

Les espaces d'Orlicz sont une généralisation des espaces de Lebesgue. La théorie des espaces d'Orlicz a été proposé dans les années 1920 par Z.W Birnbaum et W. Orlicz. L'idée de base est de remplacer la fonction convexe $x \longmapsto |x|^p$ par une autre fonction convexe, croissante plus générale Φ dite N-fonction et les espaces ainsi obtenus sont appelés espaces d'Orlicz L^Φ. Dans les problèmes qui ont des non linéarités à croissance rapide (de type exponentiel) les espaces d'Orlicz L^Φ sont plus appropriés que les espaces de Lebesgue L^p.

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques définitions et résultats de ces espaces, et nous donnons deux critères de compacité d'une famille de fonctions d'un espace d'Orlicz (Critère de Kolmogorov et celui de Riesz). Puis, nous donnons des conditions pour la complète continuité des opérateurs intégraux linéaires entre espaces d'Orlicz. Enfin, nous donnons des conditions pour la continuité et la bornitude de l'opérateur de Nemytsky entre espaces d'Orlicz.

Pour plus de détails voir (Ref. [*Krasnosel'skii1*], [*Rao*] et [*Appell*]).

3.1 Définitions de base et résultats

3.1.1 N-Fonction (nice Young Function)

Définition 3.1.1 *Soit* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction vérifiant*

(a) $\varphi(0) = 0, \varphi(u) > 0$ *si* $u > 0$ *et* $\lim\limits_{u \to +\infty} \varphi(u) = +\infty$.

(b) φ *est croissante sur* $[0; +\infty[$.

(c) φ *est continue à droite sur* $[0; +\infty[$.

Alors, la fonction définie de $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}_+$ *par :*

$$\Phi(u) = \int_0^{|u|} \varphi(v)dv,$$

est appellée une N-fonction (nice YOUNG Function).

Proposition 3.1.1 *Si φ vérifie (a), (b) et (c) de la définition (28) et Φ la N-fonction associée, alors :*

(i) Φ *est une fonction positive, paire, continue et* $\Phi(0) = 0$.

(ii) Φ *est strictement croissante sur* $]0; +\infty[$.

(iii) Φ *est convexe.*

(iv) $\lim\limits_{u \to 0} \frac{\Phi(u)}{u} = 0$ *et* $\lim\limits_{u \to +\infty} \frac{\Phi(u)}{u} = +\infty$.

(v) $\frac{\Phi(u)}{u}$ *est strictement croissante sur* $]0; +\infty[$.

Dans la proposition suivante, on donne une caractérisation de la N-fonction.

Proposition 3.1.2 *Soit Φ une fonction continue convexe, alors*

$$\Phi \text{ est une } N\text{-fonction} \Longleftrightarrow \Phi \text{ est paire et vérifie la propriété } (iv).$$

Définition 3.1.2 *Soit Φ une N-fonction, on définit la N-fonction $\bar{\Phi}$ complémentaire (ou conjuguée) de Φ par*

$$\bar{\Phi}(u) = \max_{v \geq 0} \left(|u|\, v - \Phi(v) \right).$$

Cette N-fonction $\bar{\Phi}$ a un rôle important dans la définition de l'espace dual de l'espace d'Orlicz.

Théorème 3.1.1 *Soit Φ une N-fonction, et $\bar{\Phi}$ sa complémentaire, alors on a l'inégalité de Young*

$$uv \leq \Phi(u) + \bar{\Phi}(v).$$

Définition 3.1.3 *Soit Φ_1 et Φ_2 deux N-fonctions. On écrit*

$$\Phi_1 \prec \Phi_2,$$

s'il existe des constantes positives k, u_0 tel que

$$\Phi_1(u) \leq \Phi_2(ku), \qquad \forall u \geq u_0.$$

On introduit une notion, la condition (Δ_2), qui caractérise la rapidité de la croissance d'une N-fonction.

Définition 3.1.4 *Soit Φ une N-fonction. On dit que Φ vérifie la condition (Δ_2) s'il existe des constantes positives c, u_0 tel que*

$$\Phi(2u) \leq c\Phi(u), \qquad \forall u \geq u_0.$$

On dit que Φ vérifie la condition Δ' s'il existe des constantes positives c, u_0 tel que

$$\Phi(uv) \leq c\Phi(u)\Phi(v), \qquad \forall u, v \geq u_0.$$

Remarque 3.1.1 *Cette définition a un rôle important dans la construction de l'espace d'orlicz.*
De plus, si Φ vérifie la condition (Δ_2), alors il existe une constante $c > 0$,
$u_0 > 0$ et $\alpha > 1$ tels que

$$\Phi(u) \leq c\,|u|^{\alpha}, \qquad \forall u \geq u_0.$$

Exemple 3.1.1 *On donne certains exemples de N-fonctions :*

* $\Phi_1(u) = (1 + |u|)\log(1 + |u|) - |u|$ *et* $\Phi_2(u) = |u|^p$, $p > 1$ *sont deux*

N-fonctions qui vérifient la condition (Δ_2).

* $\Psi_1(u) = e^{|u|} - |u|) - 1$ *et* $\Psi_2(u) = e^{|u|^p} - 1$, $p > 1$ *sont deux*

N-fonctions qui ne vérifient pas la condition (Δ_2).

Notons que $\bar{\Psi}_1 = \Phi_1$ c'est-à-dire la N-fonction $\bar{\Phi}$ complémentaire *d'une N-fonction Φ qui vérifie la condition (Δ_2) ne vérifie pas nécessairement la condition (Δ_2).*

3.1.2 classes d'Orlicz

Définition 3.1.5 *Soit Φ une N-fonction, on définit la classe d'orlicz par*

$$L^*_\Phi(\Omega,\mu)=\left\{u:\Omega\to\mathbb{R}\ \mu\text{-mesurable et }\ \rho(u;\Phi)=\int_\Omega \Phi(|u(x)|)d\mu<+\infty\right\}.$$

où deux fonctions qui diffèrent sur un ensemble de mesure nulle sont considérées comme égales.

Comparaison des classes d'Orlicz

En général, des classes d'Orlicz $L^*_{\Phi_1}$ et $L^*_{\Phi_2}$ déterminées par des N-fonctions distinctes Φ_1 et Φ_2 sont distinctes.

Théorème 3.1.2 *L'inclusion $L^*_{\Phi_1}\subset L^*_{\Phi_2}$ est vérifiée si et seulement s'il existe des constantes positives u_0 et a tel que*

$$\Phi_2(u)\leq a\Phi_1(u)\qquad \forall u\geq u_0.$$

Remarque 3.1.2 *Il s'ensuit que deux fonctions Φ_1 et Φ_2 déterminent la même classe d'Orlicz si et seulement si il existe des constantes positives a, b et u_0 tel que*

$$a\Phi_2(u)\leq\Phi_1(u)\leq b\Phi_2(u)\qquad \forall u\geq u_0.$$

En général, l'espace $L^*_\Phi(\Omega,\mu)$ n'est pas un espace vectoriel, le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour l'être.

Théorème 3.1.3 *La classe $L^*_\Phi(\Omega,\mu)$ est un espace vectoriel si et seulement si la N-fonction Φ vérifie la condition (Δ_2).*

3.1.3 Espaces d'Orlicz

Définition 3.1.6 *Soit Φ une N-fonction et $\bar{\Phi}$ sa fonction complémentaire, on définit l'espace d'Orlicz par*

$$L^{\Phi}(\Omega,\mu)=\left\{u:\Omega\to\mathbb{R}\ \mu\text{-mesurable}\ /\ \int_{\Omega}u(x)v(x)d\mu<+\infty,\ \ \forall v\in L^{*}_{\bar{\Phi}}(\Omega,\mu)\right\}.$$

où deux fonctions qui diffèrent sur un ensemble de mesure nulle

sont considérées comme égales.

Théorème 3.1.4 *(Norme d'Orlicz)*

Supposons que $u\in L^{\Phi}(\Omega,\mu)$. Alors

$$\sup_{\rho(v;\bar{\Phi})\leq 1}\left|\int_{\Omega}u(x)v(x)d\mu\right|<+\infty$$

et

$$\|u\|_{\Phi}=\sup_{\rho(v;\bar{\Phi})\leq 1}\left|\int_{\Omega}u(x)v(x)d\mu\right|$$

est une norme (dite norme d'Orlicz) sur $L^{\Phi}(\Omega,\mu)$.

Exemple 3.1.2 *Considérons l'espace d'Orlicz $L^{\Phi}(\Omega,\mu)$ déterminé par la N-fonction*

$$\Phi(u)=\frac{|u|^{p}}{p}\qquad (p>1).$$

La N-fonction $\bar{\Phi}$ complémentaire de Φ est donnée par

$$\bar{\Phi}(v)=\frac{|v|^{q}}{q}\qquad (\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1).$$

Si $u\in L^{\Phi}(\Omega,\mu)$, alors

$$\|u\|_{\Phi}=q^{1/q}\left(\int_{\Omega}|u(x)|^{p}\,dx\right)^{1/p}$$

Ainsi, la norme d'Orlicz définie sur $L^{\Phi}(\Omega,\mu)$ diffère de la norme usuelle dans l'espace de Lebesgue L^p par une constante multiplicative.

Théorème 3.1.5 *L'espace d'Orlicz muni de la norme $\|\cdot\|_{\Phi}$, ($L^{\Phi}(\Omega,\mu), \|\cdot\|_{\Phi}$) est un Banach.*

Théorème 3.1.6 *Soit Φ une N-fonction et $\bar{\Phi}$ sa fonction complémentaire, alors*

$$L^{\Phi}(\Omega,\mu) \text{ est réflexif} \Longleftrightarrow \Phi \text{ et } \bar{\Phi} \text{ vérifient la condition } (\Delta_2).$$

Corollaire 3.1.1 *(dual de l'espace d'Orlicz)*
Si Φ et $\bar{\Phi}$ vérifient la condition (Δ_2), alors

$$\left(L^{\Phi}(\Omega,\mu)\right)' = L^{\bar{\Phi}}(\Omega,\mu).$$

Inégalité de Hölder

Théorème 3.1.7 *Soit Φ une N-fonction et $\bar{\Phi}$ sa fonction complémentaire. L'inégalité*

$$\left| \int_{\Omega} u(x)v(x)dx \right| \leq \|u\|_{\Phi} \|v\|_{\bar{\Phi}}$$

est vérifiée pour toute paire de fonctions $u \in L^{\Phi}$, $v \in L^{\bar{\Phi}}$.

Remarque 3.1.3 *L'espace d'Orlicz $L^{\Phi}(\Omega,\mu)$ peut-être muni d'une structure d'espace de Banach à l'aide d'autres normes distinctes de la norme d'Orlicz, telle que la norme de Luxemburg définie par*

$$\|u\|_{(\Phi)} = \inf\left\{ k > 0 \;/\; \int_{\Omega} \Phi\left(\frac{u(x)}{k}\right) dx \leq 1 \right\}.$$

Proposition 3.1.3 *Les deux normes $\|\cdot\|_\Phi$ et $\|\cdot\|_{(\Phi)}$ sont équivalentes :*

$$\forall u \in L^\Phi(\Omega,\mu), \quad \|u\|_{(\Phi)} \leq \|u\|_\Phi \leq 2\,\|u\|_{(\Phi)}\,.$$

3.1.4 Espaces E^Φ

Définition 3.1.7 *On note la fermeture dans L^Φ de l'ensemble des fonctions bornées par*

$$E^\Phi = \left(\overline{\{u:\Omega\to\mathbb{R}, \exists b>0, \quad |u(x)|\leq b \quad \forall x\in\Omega\}}\right)_{L^\Phi}.$$

Propriétés de l'espace E^Φ

* E^Φ est partout dense dans L^*_Φ pour la convergence en moyenne,
* E^Φ est partout dense dans $L^\Phi = L^*_\Phi$ si la condition Δ_2 est satisfaite,
* l'espace des fonctions continues est partout dense dans l'espace E^Φ,
* l'espace E^Φ est séparable.

3.1.5 Disposition de la classe L^*_Φ par rapport à l'espace E^Φ

Notons par $\Pi(E^\Phi;r)$ l'ensemble

$$\Pi(E^\Phi;r) = \left\{f\in L^*_\Phi, \quad d(f,E^\Phi) = \inf_{g\in E^\Phi}\|f-g\|_\Phi < r\right\}.$$

La disposition de la classe L^*_Φ par rapport à l'espace E^Φ est complètement décrite par le théorème suivant.

Théorème 3.1.8 *Supposons que la N-fonction Φ ne vérifie pas la condition Δ_2. Alors*

$$\Pi(E^\Phi;1) \subset L^*_\Phi \subset \overline{\Pi}(E^\Phi;1)$$

où $\overline{\Pi}(E^\Phi; 1)$ *est la fermeture de* $\Pi(E^\Phi; 1)$.

Nous avons vu que E^Φ est toujours séparable. Ceci veut dire que l'espace $L^\Phi = L^*_\Phi = E^\Phi$ est aussi séparable si la N-fonction Φ vérifie la condition Δ_2.

Théorème 3.1.9 *Si la* N*-fonction* Φ *ne vérifie pas* Δ_2*. Alors* L^Φ *n'est pas séparable.*

3.1.6 Calcul de la norme

La formule usuelle

$$\|u\|_\Phi = \sup_{\rho(v;\bar{\Phi})\leq 1} \left| \int_\Omega u(x)v(x)d\mu \right|$$

ne nous permet pas de faire actuellement le calcul de la norme.

Théorème 3.1.10 *Soit* $u \in L^\Phi$ *et supposons qu'il existe un nombre positif* k^* *tel que*

$$\int_\Omega \Psi\left[p(k^*\left|u(x)\right|)\right] d\mu = 1, \tag{3.1}$$

où p *est la dérivée à droite la* N*-fonction* Φ*. Alors*

$$\|u\|_\Phi = \int_\Omega p(k^*\left|u(x)\right|)\left|u(x)\right| d\mu. \tag{3.2}$$

Exemple 3.1.3 *Nous allons calculer la norme de la fonction* $u(x) = x$ *dans l'espace* $L^\Phi([0,1])$*, où* $\Phi(u) = e^{|u|} - |u| - 1$*. Puisque, dans ce cas,* $\Psi\left[p(u)\right] = ue^u - u + 1$*, l'équation (3.1) à la forme*

$$\int_0^1 (k^*xe^{k^*x} - k^*x + 1)d\mu = 1.$$

De cette dernière nous obtenons que k^* *est la racine positive de l'équation*

$$e^k = \frac{2}{2-k}. \tag{3.3}$$

La valeur de la norme est déterminée par la formule (3.2) :

$$\|u\|_\Phi = \int_0^1 (e^{k^*x} - 1)x d\mu,$$

à partir de laquelle il s'ensuit, en vertu de (3.3), que

$$\|u\|_\Phi = \frac{1}{k^*(2-k^*)} - \frac{1}{2}.$$

Remarque 3.1.4 *L'équation (3.3) peut-être résolue approximativement par la méthode graphique. On trouve* $k^* \approx 1.587$.

Ainsi $\|u\|_\Phi \approx 1.027$.

Il convient d'utiliser le théorème (55) pour le calcul des normes des fonctions bornées. Notons que pour une fonction arbitraire $u \in L^\Phi$, *on peut construire une suite de fonctions bornées* u_n *tel que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \|u_n\|_\Phi = \|u\|_\Phi$.

Théorème 3.1.11 *Soit* Φ *une* N*-fonction arbitraire et* $u \in L^\Phi$. *Alors, on a la formule*

$$\|u\|_\Phi = \inf_{k>0} \frac{1}{k}(1 + \int_\Omega \Phi\left[ku(x)\right] d\mu).$$

3.2 Critères de compacité

3.2.1 Fonctions de Steklov

Définition 3.2.1 *Soit* u *une fonction intégrable sur* Ω. *La fonction*

$$u_r(x) = \frac{1}{m_r} \int\limits_{B_r(x)} u(t)dt \qquad x \in \Omega,$$

où $B_r(x)$ *est la boule de centre* x *et de rayon* r *et* m_r *est le volume de cette boule, est appelée fonction de Steklov.*

Remarque 3.2.1 * *La fonction de Steklov u_r est continue et à support compact.*

* $\|u_r\|_\Phi \leq \|u\|_\Phi$.

3.2.2 Critère de compacité de Kolmogorov

Théorème 3.2.1 *(Critère de Kolmogorov)*
Une famille $\mathcal{F}$ de fonctions dans l'espace E^Φ est compacte si et seulement, les conditions suivantes sont satisfaites :

(i) $\|u\|_\Phi \leq A, \ \ \forall u \in \mathcal{F};$

(ii) *pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que*

$$r < \delta \Longrightarrow \|u - u_r\|_\Phi < \epsilon \qquad \forall u \in \mathcal{F}.$$

Remarque 3.2.2 *Dans le cas où la fonction Φ vérifie la condition Δ_2, $E^\Phi = L^*_\Theta = L^\Phi$. Donc, dans le cas où la fonction Φ vérifie la condition Δ_2, le théorème (61) nous donne un critère de necessité et de suffisance pour la compacité d'une famille de fonctions dans L^*_Θ. Puisque dans ce cas la convergence en norme est équivalente à la convergence moyenne, on a le théorème suivant.*

Théorème 3.2.2 *Supposons que la N-fonction Φ vérifie la condition Δ_2. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille de fonctions $\mathcal{F} \subset L^*_\Phi = L^\Phi$ soit compacte est que les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) $\int_\Omega \Phi\left[u(x)\right] dx \leq A, \ \ \forall u \in \mathcal{F};$

(ii) *pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que*

$$r < \delta \Longrightarrow \int_\Omega \Phi\left[u(x) - u_r(x)\right] dx < \epsilon \qquad \forall u \in \mathcal{F}.$$

3.2.3 Critère de compacité F. Riesz

Définition 3.2.2 *On dit qu'une famille de fonctions* $\mathcal{F} \subset L^{\Phi}$ *a des normes équi-absolument continues si pour tout* $\epsilon > 0$, *il existe un* $\delta > 0$ *tel que*

$$r < \delta \Longrightarrow \|u\mathbf{1}_{\mathcal{E}}\|_{\Phi} < \epsilon \quad \forall u \in \mathcal{F} \quad \textit{et } mes(\mathcal{E}) < \delta.$$

où $\mathbf{1}_{\mathcal{E}}$ *est la fonction caractéristique de* $\mathcal{E}$.

Théorème 3.2.3 *Si la famille de fonctions* $\mathcal{F} \subset E^{\Phi}$ *a des normes équi-absolument continues et est compacte dans le sens de la convergence en mesure, alors la famille* $\mathcal{F}$ *est compacte dans* L^{Φ}.

Un autre critère de compacité d'une famille de fonctions $\mathcal{F}$ dans E^{Φ}.

Théorème 3.2.4 *(Critère de F. Riesz)*
Une famille de fonctions $\mathcal{F}$ *dans l'espace* E^{Φ} *est compacte si et seulement si, les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) $\|u\|_{\Phi} \leq A, \ \forall u \in \mathcal{F}$;

(ii) *pour tout* $\epsilon > 0$, *il existe un* $\delta > 0$ *tel que*

$$d(h,0) < \delta \Longrightarrow \left\|u_{\tau(h)} - u\right\|_{\Phi} < \epsilon \quad \forall u \in \mathcal{F}.$$

où $u_{\tau(h)}(x) = u(x+h)$.

3.3 Opérateurs dans les espaces d'orlicz

3.3.1 Continuité des opérateurs intégraux linéaires

Nous noterons par :

* $\{B_1 \to B_2\}$ la classe des opérateurs opérant de B_1 dans B_2.

* $\{B_1 \to B_2\,;\, \text{c.}\}$ la classe des opérateurs continus opérant de B_1 dans B_2.

* $\{B_1 \to B_2\,;\, \text{comp. c.}\}$ la classe des opérateurs complètement continus

   opérant de B_1 dans B_2.

* $\widehat{D} = D \times D$.

* $\widehat{L_M^*} = L_M^*(\widehat{D})$, $\widehat{L^M} = L^M(\widehat{D})$ et $\widehat{E^M} = E^M(\widehat{D})$

Théorème 3.3.1 *Soit $[N_1; M_1]$ et $[N_2; M_2]$ deux paires de N-fonctions complémentaires. Soit Φ une N-fonction telle que pour*
$u \in L^{M_1}$, $v \in L^{N_2}$ on a

$$w(x,y) = u(y)v(x) \in \widehat{L^{\Phi}},$$

avec

$$\|w(x,y)\|_{\widehat{\Phi}} \leq l\, \|u\|_{M_1} \|v\|_{N_2}\,,$$

où l est une constante. Supposons que le noyau k de l'opérateur intégral linéaire

$$(Au)(x) = \int_D k(x,y)u(y)dy \tag{3.4}$$

appartienne à l'espace $\widehat{L^{\Psi}}$, où Ψ est la N-fonction complémentaire de Φ. Alors l'opérateur (3.4) appartient à $\left\{L^{M_1} \to L^{M_2}; c.\right\}$.

Théorème 3.3.2 *(Théorème fondamental sur la continuité)*
Soit Φ et Ψ deux N-fonctions complémentaires. Supposons que le noyau k de l'opérateur intégral linéaire (3.4) appartienne à l'espace $\widehat{L^{\Psi}}$. si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

(i) $$M_2\left[N_1(v)\right] \prec \Psi(v),$$

(ii) $$N_1\left[M_2(v)\right] \prec \Psi(v),$$

(iii) *la fonction Φ satisfait la condition Δ' et*

$$N_1(v) \prec \Psi(v), \quad M_2(v) \prec \Psi(v).$$

Alors l'opérateur (3.4) appartient à $\left\{L^{M_1} \to L^{M_2}; c.\right\}$.

3.3.2 Complète continuité des opérateurs intégraux linéaires

Nous cherchons les conditions sous lesquelles l'opérateur intégral linéaire

$$(Au)(x) = \int_D k(x,y)u(y)dy$$

est complètement continue, i.e. les conditions sous lesquelles l'opérateur (3.4) applique la boule unité de l'espace L^{M_1} dans un compact de l'espace L^{M_2}.

Lemme 3.3.1 *Supposons que le noyau est continu sur $\widehat{D}$. Soit L^{M_1} et L^{M_2} deux espaces d'Orlicz. Alors l'opérateur (3.4) appartient à $\left\{L^{M_1} \to E^{M_2};\ comp.\ c.\right\}$.*

Théorème 3.3.3 *Soit Φ et Ψ deux N-fonctions complémentaires. Supposons que le noyau k de l'opérateur intégral linéaire (3.4) appartienne à l'espace $\widehat{E^{\Psi}}$.*
Si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

(i) $M_2\left[N_1(v)\right] \prec \Psi(v)$,

(ii) $N_1\left[M_2(v)\right] \prec \Psi(v)$,

(iii) *la fonction Φ satisfait la condition Δ' et*

$$N_1(v) \prec \Psi(v), \quad M_2(v) \prec \Psi(v).$$

Alors l'opérateur (3.4) appartient à $\left\{L^{M_1} \to E^{M_2};\ comp.\ c.\right\}$.

Théorème 3.3.4 *Supposons que le noyau $k(x, y)$, comme fonction de y, appartient à E^{N_1} pour presque tout $x \in D$, où la fonction $\varphi(x) = \|k\|_{N_1}$ appartient à E^{M_2}.*
Alors l'opérateur (3.4) appartient à $\left\{L^{M_1} \to E^{M_2};\ comp.\ c.\right\}$.

Théorème 3.3.5 *Supposons que le noyau $k(x, y)$, comme fonction de x, appartient à E^{M_2} pour presque tout $y \in D$, où la fonction $\psi(y) = \|k\|_{M_2}$ appartient à E^{N_1}.*
Alors l'opérateur (3.4) appartient à $\left\{E^{M_1} \to E^{M_2};\ comp.\ c.\right\}$.

Le théorème suivant joue un rôle important dans l'étude des équations intégrales avec des non linéarités non polynômiales.

Théorème 3.3.6 *Supposons que M et N sont deux N-fonctions complémentaires, tel que N satisfait la condition Δ'. Supposons que*

$$\iint\limits_{\widehat{D}} M\left[\lambda k(x, y)\right] dxdy < +\infty$$

pour tout $\lambda > 0$.
Alors l'opérateur (3.4) appartient à $\left\{L_N^* \to E^M;\ comp.\ c.\right\}$.

3.4 Opérateur de superposition de Nemytsky

3.4.1 Fonction de Carathéodory

Définition 3.4.1 *(Fonction de Carathéodory)*
Soit D un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. On appelle fonction de Carathéodory toute fonction $f : D \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes :

(i) *pour tout $s \in \mathbb{R}$, la fonction $x \longmapsto f(x,s)$ est Lebesgue mesurable sur D,*

(ii) *la fonction $s \longmapsto f(x,s)$ est continue sur $\mathbb{R}$ pour presque tout $x \in D$.*

Théorème 3.4.1 *Une fonction $f : D \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, est une fonction de Carathéodory si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, correspond un ensemble fermé $D_0 \subset D$ tel que $mes(D \setminus D_0) < \epsilon$ et la fonction f est continue sur $D_0 \times \mathbb{R}$.*

Nous allons utiliser la fonction de Carathéodory pour définir l'opérateur de Nemytsky.
Soit u une fonction mesurable sur D, alors l'application $N_f : u \longmapsto f(\cdot, u(\cdot))$, associe une fonction mesurable $N_f(u) = f(\cdot, u(\cdot))$ à chaque u, tel que,

$$N_f(u)(x) = f(x, u(x)).$$

Définition 3.4.2 *L'application N_f définie ci-dessus est appelée opérateur de Nemytsky.*

Remarque 3.4.1 *Si f est une fonction de Carathéodory, l'opérateur de Nemytsky N_f transforme les fonctions mesurables en des fonctions mesurables et transforme les suites de fonctions convergentes en mesure en des suites convergentes en mesure.*

3.4.2 Domaine de définition de l'opérateur Nemytsky

Rappelons que nous avons noté par $\Pi(E^{\Phi}, r)$, l'ensemble des fonctions $u \in L_{\Phi}^{*}$ tel que $d(u, E^{\Phi}) < \epsilon$.

Nous noterons la boule de rayon r et de centre u de l'espace de Banach E par $B(u, r; E)$.

Théorème 3.4.2 *Supposons que l'opérateur N_f opère de la boule $B(0, r; L^{\Phi_1})$ dans l'espace $L_{\Phi_2}^{*}$ ou dans l'espace E^{Φ_2}. Alors l'opérateur N_f opère de $\Pi(E^{\Phi_1}, r)$ dans l'espace $L_{\Phi_2}^{*}$ ou dans l'espace E^{Φ_2}, respectivement.*
Si l'opérateur N_f opère de la boule $B(0, r; E^{\Phi_1})$ dans $L_{\Phi_2}^{*}$ ou dans E^{Φ_2}, alors il opère de E^{Φ_1} dans $L_{\Phi_2}^{*}$ ou dans E^{Φ_2}, respectivement.

3.4.3 Continuité de l'opérateur de Nemytsky

Définition 3.4.3 *Un opérateur non linéaire T, opérant d'un espace de Banach E_1 dans l'espace de Banach E_2, est dit continu en $u_0 \in E_1$ si*

$$\lim_{\substack{u \in E_1 \\ \|u-u_0\|_{E_1} \to 0}} \|Tu - Tu_0\|_{E_2} = 0.$$

Définition 3.4.4 *Un opérateur non linéaire T, opérant d'un espace de Banach E_1 dans l'espace de Banach E_2, est dit borné sur la boule B de E_1 si*

$$\sup_{u \in B} \|Tu\|_{E_2} < +\infty.$$

Remarque 3.4.2 - *Pour les opérateurs non linéaires, la continuité en un point n'implique pas la continuité en d'autres points.*

- *Les concepts de bornitude et de continuité ne sont pas liés l'un à l'autre*

dans le cas des opérateurs non linéaires : on peut trouver des opérateurs *discontinus et qui sont bornés, comme on peut trouver des opérateurs continus dans l'espace entier sans être bornés dans aucune boule.*

Théorème 3.4.3 *Si l'opérateur N_f opère de $\Pi(E^{\Phi_1}, r)$ dans l'espace E^{Φ_2}, alors il est continu en tout point de $\Pi(E^{\Phi_1}, r)$.*

Remarque 3.4.3 *Si la N-fonction Φ_2 vérifie la condition Δ_2, alors le théorème (80) signifie que N_f est continu s'il opère dans $L^{\Phi_2} = L^*_{\Phi_2} = E^{\Phi_2}$.*

3.4.4 Bornitude de l'opérateur de Nemytsky

Théorème 3.4.4 *Supposons que l'opérateur N_f opère de la boule $B(0, r; L^{\Phi_1})$ dans la classe $L^*_{\Phi_2}$. Alors N_f est borné sur toute boule $B(0, r_1; L^{\Phi_1})$ ($r_1 < r$) :*

$$\sup_{\|u\|_{\Phi_1} < r_1} \|N_f(u)\|_{\Phi_2} < +\infty.$$

3.4.5 Forme générale de l'opérateur de Nemytsky

Théorème 3.4.5 *L'opérateur N_f opère de la classe $L^*_{\Phi_1}$ dans la classe $L^*_{\Phi_2}$ si et seulement si*

$$\Phi_2 [f(x, u)] \leq a(x) + b\Phi_1(u), \qquad (x \in D, \ \ u \in \mathbb{R}),$$

où a est une fonction mesurable et $b \geq 0$.

3.4.6 Bornitude et continuité de l'opérateur de Nemytsky

Théorème 3.4.6 *Supposons que la fonction f satisfait l'inégalité*

$$|f(x,u)| \leq c(x) + b_1 \Phi_2^{-1}\left[\Phi_1(\frac{u}{r})\right], \qquad (x \in D, \ \ u \in \mathbb{R}),$$

où $c \in L^*_{\Phi_2}$, $b_1 \geq 0$, et la N-fonction Φ_2 vérifie la condition Δ_2. Alors l'opérateur N_f opère de $\Pi(E^{\Phi_1}, r)$ dans $L^*_{\Phi_2} = E^{\Phi_2}$, est continu en tous les points de $\Pi(E^{\Phi_1}, r)$, et est borné sur toute boule $B(0, r_1; L^*_{\Phi_1})$ ($r_1 < r$).
Si la N-fonction Φ_2 ne vérifie pas la condition Δ_2, alors on exige pour avoir la continuité de l'opérateur N_f, que l'ensemble de ses valeurs soit dans E^{Φ_2}.

Théorème 3.4.7 *Supposons que la fonction f satisfait l'inégalité*

$$|f(x,u)| \leq b(x) + aQ^{-1}\left[\Phi_2^{-1}\left[\Phi_1(\frac{u}{r})\right]\right], \qquad (x \in D, \ \ u \in \mathbb{R}),$$

où $b \in E^{\Phi_2}$, Q est une N-fonction, et a, r sont des nombres positifs. Alors l'opérateur N_f opère de $\Pi(E^{\Phi_1}, r)$ dans l'espace E^{Φ_2}, est continu en tous les points de $\Pi(E^{\Phi_1}, r)$, et est borné sur toute boule $B(0, r_1; L^*_{\Phi_1})$ ($r_1 < r$).

Chapitre 4

Equations intégrales de type Hammerstein

Dans les premiers travaux sur les équations d'Hammerstein, il a été montré que pour obtenir des conditions de résolubilité, il est nécessaire d'avoir un certain accord entre le caractère des singularités du noyau k et le taux de croissance de f par rapport à u ; Suivant cet accord, l'étude de l'équation d'Hammerstein à non linéarités d'ordre fini (d'ordre polynômial) est faite dans les espaces classiques de Lebesgue L^p, tandis que l'étude de cette même équation à non linéarités essentielles (d'ordre exponentiel) est faite dans les espaces d'Orlicz.

Nous présentons trois opérateurs continus opérant dans les espaces L^p : l'opérateur de superposition de Nemytsky ; l'opérateur intégral linéaire de Fredholm et l'opérateur intégral non linéaire d'Hammerstein. Puis, nous donnons des résultats d'existence dans L^p avec l'aide du principe de Leray-schauder, pour l'équation intégrale de type Hammerstein.

Enfin, nous proposons de suivre la même méthode pour obtenir des résultats d'existence dans l'espce d'Orlicz L^Φ, pour l'équation intégrale non linéaire de type Hammerstein.

Pour plus de détails voir Réf. ([*Precup*], [*Krasnosel'skii1*], [*Karoui*] et [*Appell*]).

4.1 Existence dans L^p

4.1.1 Opérateur de Nemytsky

Opérateur de Nemytsky (ou de superposition)

En 1933-1934 V. Nemytsky a considéré l'opérateur

$$\begin{array}{cccc} N_f & : & L^2([a,b]) & \rightarrow & L^2([a,b]) \\ & & u & \longmapsto & N_f(u) \end{array}$$

avec $N_f(u)(x) = f(x, u(x))$. Il a prouvé que si N_f applique $L^2([a,b])$ sur lui-même, alors il est automatiquent continu. Il a aussi utilisé le résultat obtenu pour prouver l'existence et l'unicité des solutions des équations de type Hammerstein.

Définition 4.1.1 *Soit D un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et soit la fonction $f : D \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. L'application $N_f : u \longmapsto f(\cdot, u(\cdot))$, qui à chaque fonction $u : D \to \mathbb{R}^m$ associe la fonction $N_f(u) : D \to \mathbb{R}^n$, définie par*

$$N_f(u)(x) = f(x, u(x)).$$

est appelée opérateur de Nemytsky (ou de superposition) associé à f.

Conditions sur f pour que N_f opère de $L^p(D; R^m)$ dans $L^q(D; R^n)$.

Définition 4.1.2 *(Fonction de Carathéodory)*

Soit D un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. On appelle fonction de Carathéodory toute fonction

$$\begin{array}{rcl} f : D \times \mathbb{R}^m & \to & \mathbb{R}^n \\ (x, s) & \longmapsto & f(x, s) \end{array}$$

vérifiant les conditions suivantes :

(i) *pour tout $s \in \mathbb{R}^m$, la fonction $x \longmapsto f(x, s)$ est mesurable sur D,*

(ii) *la fonction $s \longmapsto f(x, s)$ est continue sur $\mathbb{R}^m$ pour presque tout $x \in D$.*

Remarque 4.1.1 *Si f est de Carathéodory, l'opérateur de Nemytsky N_f , associé à f, transforme les fonctions mesurables en des fonctions mesurables et transforme les suites de fonctions convergentes en mesure en des suites de fonctions convergentes en mesure.*

Définition 4.1.3 *((p,q)-Carathéodory)*
Soit D un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et soit $p \in [1,+\infty]$ et $q \in [1,+\infty[$. On appelle fonction (p,q)-Carathéodory toute fonction

$$\begin{array}{cccc} f & : & D \times \mathbb{R}^m & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ & & (x,s) & \longmapsto & f(x,s) \end{array}$$

vérifiant la condition suivante :

$$\begin{cases} (i) \text{ si } 1 \leq p < +\infty \text{ alors } |f(x,z)| \leq g(x) + c\,|z|^{p/q} \text{ pour presque tout } x \in D, \\ \text{tout } z \in \mathbb{R}^m \text{ et } g \in L^q(D;\mathbb{R}_+), c \in \mathbb{R}_+. \\ (ii) \text{ si } p = +\infty \text{ alors pour tout } R > 0, \text{ il existe } g_R \in L^q(D) \text{ avec } |f(x,z)| \leq g_R(x) \\ \text{pour presque tout } x \in D \text{ et tout } z \in \mathbb{R}^m \text{ avec } |z| \leq R. \end{cases}$$

Bornitude et continuité l'opérateur de Nemytsky

Théorème 4.1.1 *Soit D un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et soit $p \in [1,+\infty]$ et $q \in [1,+\infty[$. Supposons que la fonction $f : D \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ est (p,q)-Carathéodory.*
Alors l'opérateur de Nemytsky associé à f, $N_f : L^p(D;\mathbb{R}^m) \rightarrow L^q(D;\mathbb{R}^n)$, est bien défini, continu et vérifie

$$\begin{cases} (i) \textit{ pour } 1 \leq p < +\infty : \|N_f(u)\|_{L^q(D;\mathbb{R}^n)} \leq \|g\|_{L^q(D)} + c\,\|u\|_{L^p(D;\mathbb{R}^m)}^{p/q} \\ \textit{pourtout} \quad u \in L^p(D;\mathbb{R}^m); \\ (ii) \textit{ pour } p = +\infty : \|N_f(u)\|_{L^q(D;\mathbb{R}^n)} \leq \|g_R\|_{L^q(D)} \quad \textit{pour tout } u \in L^\infty(D;\mathbb{R}^m) \\ \textit{avec}\,\|u\|_\infty \leq R \textit{ et tout } R > 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

Remarque 4.1.2 *L'inégalité dans (4.1) montre que l'opérateur N_f est borné de $L^p(D;\mathbb{R}^m)$ dans $L^q(D;\mathbb{R}^n)$.*

4.1.2 Opérateur intégral de Fredholm

Définition 4.1.4 *Soit* $k : D \times D \to \mathbb{R}$. *On dit que* $k \in L^p(D; L^r(D))$ *si*

(i) *l'application* $k(x, \cdot) \in L^r(D)$ *pour presque tout* $x \in D$,

(ii) *l'application* $x \longmapsto k(x, \cdot) \in L^r(D)$ *appartient à* $L^p(D; L^r(D))$.

On dit de même pour $k \in C(\overline{D}; L^r(D))$.

Théorème 4.1.2 *Soit* D *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$, $p, q \in [1, +\infty]$, $r \in [1, +\infty]$ *le conjugué de* q, $1/q + 1/r = 1$, *et soit* $k : D \times D \to \mathbb{R}$.
Supposons que

$$\begin{cases} (i) \text{ si } 1 \leq p < +\infty \text{ alors } k \in L^p(D; L^r(D)); \\ (ii) \text{ si } p = +\infty \text{ alors } k \in C(\overline{D}; L^r(D)). \end{cases} \tag{4.2}$$

Alors l'opérateur intégral de Fredholm A *de noyau* k

$$\begin{array}{rcccl} A & : & L^q(D; \mathbb{R}^n) & \longrightarrow & L^p(D; \mathbb{R}^n) \\ & & u & \longmapsto & A(u)(x) = \int\limits_D k(x, y)u(y)dy \qquad (x \in D) \end{array}$$

est bien défini et complètement continu. De plus, pour $p = +\infty$ *on a*

$$A(L^q(D; \mathbb{R}^n)) \subset C(\overline{D}; \mathbb{R}^n).$$

4.1.3 Opérateur intégral d'Hammerstein

Considérons l'opérateur intégral d'Hammerstein donné par

$$T(u)(x) = \int\limits_D k(x, y)f(y, u(y))dy \qquad (x \in D). \tag{4.3}$$

Cet opérateur semble être une composition de l'opérateur intégral de

Fredholm A de noyau k et de l'opérateur de Nemytsky N_f associé à f

$$T = AN_f.$$

Théorème 4.1.3 *Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $k : D \times D \to \mathbb{R}$ et $f : D \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.*
Soit $p \in [1, +\infty]$, $q \in [1, +\infty[$ et soit $r \in]1, +\infty]$ le conjugué de q.
Supposons que l'opérateur intégral de Fredholm
$A : L^q(D; \mathbb{R}^n) \to L^p(D; \mathbb{R}^n)$ de noyau k soit bien défini et
complètement continu. En plus supposons que f est une fonction
(p, q)-Carathéodory.
Alors l'opérateur intégral d'Hammerstein $T : L^p(D; \mathbb{R}^n) \to L^p(D; \mathbb{R}^n)$
donné par (4.3) est bien défini et complètement continu.

Remarque 4.1.3 *D'après le théorème (93), si D est borné et (4.2) vérifiée pour k, alors A est bien défini et complètement continu ; de plus, dans ce cas, pour $p = +\infty$,*

$$T(L^\infty(D; \mathbb{R}^n)) \subset C(\overline{D}; \mathbb{R}^n),$$

et donc tout point fixe de T appartient à $C(\overline{D}; \mathbb{R}^n)$.

4.1.4 Equation intégrale de type Hammerstein

Nous présentons un principe d'existence très général pour l'existence de solutions dans L^p et l'existence de solutions continues de l'équation intégrale d'Hammerstein

$$u(x) = \int_D k(x, y) f(y, u(y)) dy \qquad \text{p. p. sur } D. \tag{4.4}$$

D est un compact de $\mathbb{R}^N$. Pour $p \in [1, +\infty]$ donné, nous cherchons une solution faible, i.e.une fonction $u \in L^p(D; \mathbb{R}^n)$ qui vérifie l'équation (4.4) pour presque tout $x \in D$. En plus, nous cherchons des solutions dans $\overline{U}$, où U est un ouvert borné de $L^p(D;\mathbb{R}^n)$ contenant la fonction nulle.

4.1.5 Principe de Leray-Schauder

Théorème 4.1.4 *(Principe de Leray-Schauder)*
Soit E un espace de Banach, K un fermé convexe dans E, U un ouvert borné dans K et u_0 un élément fixé dans U. Supposons que l'opérateur $T : \overline{U} \to K$ soit complètement continu et vérifie

$$u \neq (1-\lambda)u_0 + \lambda T(u) \qquad \textit{pour tout } \; u \in \partial U, \;\; \lambda \in \,]0,1[\,.$$

Alors T admet au moins un point fixe dans $\overline{U}$.

Théorème 4.1.5 *Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $k : D \times D \to \mathbb{R}$ et $f : D \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Supposons qu'il existe $p \in [1,+\infty]$, $q \in [1,+\infty[$ tel que l'opérateur intégral linéaire de Fredholm $A : L^q(D;\mathbb{R}^n) \to L^p(D;\mathbb{R}^n)$ de noyau k soit bien défini et complètement continu et que f soit (p,q)-Carathéodory. En plus, supposons qu'il existe un ouvert borné O dans $L^p(D;\mathbb{R}^n)$ contenant la fonction nulle, tel que*

$$u \in O$$

pour toute solution $u \in \overline{O}$ de l'équation

$$u(x) = \lambda \int_D k(x,y) f(y,u(y))dy \qquad\qquad \textit{p. p. sur } D, \tag{4.5}$$

pour chaque $\lambda \in \,]0,1[$. Alors l'équation (4.5) admet une solution dans $L^p(D;\mathbb{R}^n)$ avec $u \in \overline{O}$.

Remarque 4.1.4 *Si D est borné et (4.2) vérifiée pour k, alors l'opérateur intégral linéaire de Fredholm A de noyau k est bien défini et complètement continu de $L^q(D;\mathbb{R}^n)$ dans $L^p(D;\mathbb{R}^n)$; dans ce cas, pour $p=+\infty$, les solutions de l'équation (4.5) sont continues sur $\overline{D}$.*

Corollaire 4.1.1 *Soit D un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $k : D \times D \to \mathbb{R}$ et $f : D \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Supposons qu'il existe $p \in [1,+\infty]$, $q \in [1,+\infty[$ tel que $k \in L^p(D;L^r(D))$ ($1/q+1/r=1$), f soit (p,q)-Carathéodory et*

$$\begin{cases} (i) \text{ pour } 1 \leq p < +\infty \quad \text{alors } (\|g\|_q + cR^{p/q}) \, \| \|k(x,.)\|_r \|_p \leq R; \\ (ii) \text{ pour } p = +\infty \quad \text{alors } \|g_R\|_q \, \| \|k(x,.)\|_r \|_\infty \leq R \quad . \end{cases}$$

En plus, si $p=+\infty$ supposons que l'opérateur intégral linéaire de Fredholm $A : L^q(D;\mathbb{R}^n) \to L^\infty(D;\mathbb{R}^n)$ de noyau k soit complètement continu. Alors l'équation (4.5) admet une solution $u \in L^p(D;\mathbb{R}^n)$ avec $\|u\|_p \leq R$.

4.2 Existence dans L^Φ

Dans le chapitre 3 nous avons donné des conditions pour que l'opérateur de Nemytsky N_f associé à f soit borné et continu. La combinaison de ces conditions avec les conditions pour la continuité et la complète continuité de l'opérateur intégral linéaire de Fredholm A données dans le même chapitre 3, nous permet de trouver des conditions suffisantes pour la continuité et la complète continuité de l'opérateur intégral d'Hammerstein T. En appliquant le principe de Leray-Schauder, l'opérateur intégral d'Hammerstein T aura au moins un point fixe dans l'espace d'Orlicz L^Φ, et par conséquent l'équation intégrale d'Hammerstein admettra au moins une solution dans cet même espace d'Orlicz L^Φ.

Conclusion et Perspectives

Nous avons, durant ce travail, abordé l'étude de l'existence de solutions des équations intégrales non linéaires de type Hammerstein dans les espaces L^p

$$u(x) = \int_D k(x,y) f(y,u(y))dy \quad (x \in D)$$

où D *est un compact de* $\mathbb{R}^N$, *en suivant la méthode qui suit,*

1- *mettre l'équation intégrale de type Hammerstein sous la forme d'une équation d'opérateurs*

$$u = (AN_f)u$$

où A *est l'opérateur intégral linéaire de Fredholm*

$$A(u)(x) = \int_D k(x,y)u(y)dy \quad (x \in D)$$

et où N_f *est l'opérateur non linéaire de Nemytsky associé à* f

$$N_f(u)(x) = f(x,u(x)).$$

2- *Chercher des conditions pour que l'opérateur de Nemytsky* N_f *associé à* f *soit borné et continu.*

3- *Chercher des conditions pour la continuité et la complète continuité de* *l'opérateur intégral linéaire de Fredholm A.*

4- *Combiner les conditions trouvées en (2) et (3), afin d'obtenir des conditions suffisantes pour la continuité et la complète continuité de l'opérateur intégral d'Hammerstein T*

$$T = AN_f.$$

5- *Appliquer le principe de Leray-Schauder, pour montrer que l'opérateur intégral d'Hammerstein T a au moins un point fixe dans l'espace L^p, et par conséquent l'équation intégrale d'Hammerstein aura au moins une solution dans cet même espace L^p.*

A la fin du chapitre 3, nous avons donné des conditions pour la continuité et la complète continuité des opérateurs intégraux linéaires entre espaces d'Orlicz L^Φ et des conditions pour la continuité et la bornitude de l'opérateur de Nemytsky N_f entre espaces d'Orlicz L^Φ.

Le but de notre travail étant l'étude de l'existence de solutions pour les équations intégrales non linéaires de type Hammerstein dans les espaces d'Orlicz. A cette fin nous proposons et ce sera notre futur travail, de suivre la même méthode décrite ci-dessus pour les espaces L^p, en utilisant les résultats du chapitre 3, pour arriver à des résultats d'existence dans les espaces d'Orlicz L^Φ.

Bibliographie

[Collins] *P. J. Collins, Differential and Integral Equations. Oxford Univ. Press. 2006.*

[*Hochstadt*] *H. Hochstadt, Integral equations. John Wiley & Sons Inc., New York, 1989.*

[*Jerri*] *A. J. Jerri. Introduction to integral equations with applications. Wiley Interscience, New York, 1999.*

[*Kress*] *R. Kress, Linear Integral Equations. Springer 1999.*

[*Lovitt*] *W. V. Lovitt, Linear Integral Equations. Dov. Publ. Inc. 1950.*

[*Moisewitsch*] *B. L. Moisewitsch. Integral equations. Longman, London, 1977.*

[*Porter*] *D. Porter and D. S. G. Stirling. Integral equations. Cambridge University Press, 1990.*

[*Precup*] *R. Precup, Methods in Nonlinear Integral Equations. Springer 2002.*

[*Rahman*] *M. Rahman, Integral Equations and their Applications. WTT Press 2007.*

[*Smithies*] *F. Smithies. Integral equations. Cambridge University Press, New York, 1958.*

[*Tricomi*] *F. G. Tricomi. Integral equations. Dover Publications Inc., New York, 1985.*

[*Wazwaz*] *A. M. Wazwaz, Linear and Nonlinear Integral Equations. Springer 2011.*

[*Zeyman*] *S. M. Zeyman, The Classical Theory of Integral Equations. Springer 2010.*

[*Krasnosel'skii1*] *M. A. Krasnosel'skii and Ya. B. Rutickii. Convex functions and Orlicz spaces. P. Noordfoff Ltd., Groningen,1961.*

[*Krasnosel'skii2*] *M. A. Krasnosel'skii and Ya. B. Rutickii. Orlicz spaces and nonlinear integral equations. Proc. Moscow Math. Soc., 7 (1958).*

[*Krasnosel'skii3*] *M. A. Krasnosel'skii, New theorems of existence of solutions to nonlinear integral equations,* Dokl. Akad. Nauk SSSR, 88, N0. 6 (1953).

[*Krasnosel'skii4*] *M. A. Krasnosel'skii, Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations,* Gostekhizdat, Moscow (1956).

[*Rao*] *M. M. Rao and Z. D. Ren. Theory of Orlicz spaces, volume 146 of Pure and Applied Mathelatics. Marcel Dekker, Inc., 1991.*

[*Ren*] *M. M. Rao and Z. D. Ren. Applications of Orlicz spaces, Marcel Dekker, New York, 2002.*

[*Bresis*] *H. Bresis and F. E. Browder, Existence theorems for nonlinear integral equations of Hammerstein type. Bull. Amer. Math. Soc. 81, 73-78 (1975).*

[*Browder*] *F. E. Browder and C. P. Gupta, Monotone operators and nonlinear integral equations of Hammerstein type, Bull. Amer. Math. Soc. 75 (1969), 1347-1353.*

[*Dolph*] *C. L. Dolph, Non-Linear Integral Equations of the Hammerstein Type, Proc. N. A. S, 31 (1945), 60-65.*

[*Minty*] *C. L. Dolph and G. J. Minty, On nonlinear integral equations of the Hammerstein type. Univ. of Wisconsin, 1964, pp. 99-154.*

[*Emmanuele*] *G. Emmanuele, An Existence Theorem for Hammerstein Integral Equations, Port. Math.. vol. 51 Fasc.4 (1994), 607-611.*

[GaNa] *B. Gagui and M. Nadir, Solving the non-linear integral equations of the Hammerstein type, CMA'2014, Tlemcen, 11-13 Mai 2014.*

[Golomb1] M. Golomb, Zur theorie der *integralgleichungen, integralgleichungssysteme und allgemeinen funktionalgleichungen, Math. Zeits., 39 (1934).*

[Golomb2] M. Golomb, *Uber systeme von nichtlinearen integralgleichungen, Publ. Math. Univ. Belgrade, 5 (1936).*

[*Hammerstein1*] *A. Hammerstein, Uber Nichtlineare integralgleichungen und die damit zusammenhangenden randwertaufgaben, Jahr. der Deutschen Math., 38 (1929).*

[*Hammerstein2*] *A. Hammerstein, Nichtlineare integralgleichungen nebst Anwendungen. Acta Math. Soc. 54 (1930) 117-176.*

[Iglisch] R. Iglisch, Existenz und eindeutigkeitssatze bei nichtliearen integralgleichungen, Mth. Ann., 108 (1933).

[*Karoui*] *A. Karoui and A. Jawahdou, Existence and approximate L_p and continuous solutions of nonlinear integral equations of the Hammerstein and Volterra types. Appl. Math. Comput. 216 (2010), 2077-2091.*

[*Meehan*] *M. Meehan and D. O'Regan, Positive L_p solutions of Hammerstein integral equations. Arch. Math. (Basel) 76 (2001), 366-376.*

[Vainberg1] M. M. Vainberg, An existence theorem for a system of nonlinear integral equations, Uch. Zap. Mosk. obl. Pedinstit., 18, N0. 2 (1951).

[Vainberg2] M. M. Vainberg, On certain variational principles in the theory of operator equations, Usp. Mat. Nauk. 7, N0. 2 (1952).

[Vainberg3] M. M. Vainberg, On the solvability of certain operator equations, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 92, N0. 2 (1953).

[Vainberg4] M. M. Vainberg, Variational Methods in the Examination of Nonlinear Operators, Gostekhizdat, Moscow (1956).

[Vainberg5] M. M. Vainberg, Some new theorems of existence for nonlinear operators and equations, Uch. Zap. Mosk. obl. Pedinstit., 77, N0. 5 (1959).

[VaibShra1] M. M. Vainberg and I. V. Shragin, Nonlinear operators and the Hammerstein equation in Orlicz spaces, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 128, N0. 1 (1959).

[VaibShra2] M. M. Vainberg and I. V. Shragin, The Hammerstein operator in Orlicz space, I, Izv. Vyzov. (Matematika), 44, N0. 1 (1965).

[ZaPo] *P. P. Zabreiko and A. I. Povolotskii, On The Theory Of The Hammerstein Equation. Translated from Ukrainskii Matematicheskii Zhurnal, Vol.22, N0. 2 pp. 150-162, 1970.*

[*Appell*] *J. Appell and P. P. Zabrejko, Nonlinear superposition operator. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.*

[KantAkil] L. V. Kantorovitch and G. P. Akilov, Functional Analysis, Pergamon Press, Oxford-Elmsford, NY., 1982.

[*Kreyszig*] *E. Kreyszig, Introductory functional Analysis With Applications. John Wiley & Sons Inc., New York, 1978.*

[*Zeidler*] *E. Zeidler, Nonlinear Functional Analysis and its Applications I, Fixed-Point Theorems. Springer 1986.*

[NaChem] M. Nadir and M. Chemcham, A Numerical Approach For Solution Of Hammerstein Integral Equations In L^2 Spaces. Applied Mathematics E-Notes, 14(2014), 127-134.

[*Nadir3*] *M. Nadir Problemes aux limites qui se réduiseent aux équations intégrales de Fredholm Séminaire de l'institut des mathématiques et informatique, 1985, Annaba.*

Thèse de Madani CHEMCHAM

Etude des équations intégrales non linéaires de type Hammerstein dans les espaces d'Orlicz.

Résumé : Dans ce travail, nous étudions les équations intégrales non linéaires de type Hammerstein dans les espaces d'Orlicz. Nous utilisons la plus simple des méthodes topologiques, la méthode du point fixe, principe de Leray-schauder, afin d'obtenir des résultats d'existence pour les équations intégrales non linéaires de type Hammerstein dans les espaces d'Orlicz.

Mots clés : Principe de Leray-schauder- équations de type Hammerstein- espaces d'Orlicz- opérateur de Nemytsky- opérateur linéaire de Fredholm.

Thesis of Madani CHEMCHAM

Study of nonlinear integral equations of Hammerstein type in Orlicz spaces.

Absract : In this work, we study the nonlinear integral equations of Hammerstein type. we use the simplest topological method, the fixed point method, Leray-schauder principle, in order to obtain existence results for nonlinear integral equations of Hammerstein type in the Orlicz spaces.

Key words : Leray-schauder principle- Hammerstein equations- Orlicz spaces- Nemytsky operator - Fredholm linear operator.